فصل ۹

۱- به مسئله ۲ فصل ۲ کتاب مراجعه و از ارتباط بین تابع وزن طیفی و تابع گرین استفاده نمائید.

۳- با فرض اینکه بار Q در محیط 1 در $z=a$ قرار دارد، پتانسیل متشکل از دو بخش، پتانسیل ناشی از بار Q در a و پتانسیل القایی ناشی از محیط 2، خواهد بود. پتانسیل ناشی از بار Q عبارت است از:

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\frac{V(q)}{\epsilon_1(q,\omega)}\exp\left[i\boldsymbol{q}.(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\right]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{q^2}\frac{4\pi e}{\epsilon_1(q,\omega)}\exp\left[i\boldsymbol{q}.(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\right]$$

برای بازنویسی این رابطه در مختصات استوانه ای، از حل معادله شرودینگر در مختصات استوانه ای کمک می گیریم.

$$(\nabla^2+q^2)\psi(\boldsymbol{r})=0\quad,\qquad \nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\psi(\boldsymbol{r})=e^{i\boldsymbol{q}.\boldsymbol{r}}=R(\rho)e^{\pm in\phi}e^{\pm ilz}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\Big)+\Big(q^2-l^2-\frac{n^2}{\rho^2}\Big)R(\rho)=0$$

$$\rightarrow\qquad R(\rho)=A_n\ J_n(m\rho)\ ,\qquad m^2=q^2-l^2$$

$$n=0\rightarrow\qquad \psi(\boldsymbol{r})=\psi(\rho,z)=A_0\ J_0(m\rho)e^{-ilz}$$

با نوشتن جمله نمایی در مختصات استوانه ای و کمی محاسبات:

$$V(\boldsymbol{r})=V(\rho,z)=\frac{4\pi e}{(2\pi)^2}\int\frac{m\ dl\ dm}{(l^2+m^2)\ \epsilon_1}J_0(m\rho)e^{-ilz}\ ,\qquad \epsilon=\epsilon(\sqrt{l^2+m^2},\omega)$$

بنابراین پتانسیل القایی از سطح، با گنجاندن اثر حضور محیط 2 در $f_1(m,\omega)$، به شکل زیر خواهد بود.

$$V_{ind}(\rho,z)=\frac{4\pi e}{(2\pi)^2}\int\frac{m\ dl\ dm}{(l^2+m^2)\ \epsilon_1}J_0(m\rho)\ e^{-ilz}\ f_1(m,\omega)$$

در محیط 1، پتانسیل کل از $V_{tot,1}(\rho,z)=V(\rho,z)+V_{ind}(\rho,z)$ بدست می آید. پتانسیل کل در محیط 2 را می توان به شکل زیر نوشت:

$$V_{tot,2}(\rho,z)=\frac{4\pi e}{(2\pi)^2}\int\frac{m\ dl\ dm}{(l^2+m^2)\ \epsilon_2}J_0(m\rho)\ e^{-ilz}\ f_2(m,\omega)$$

با استفاده از شرط پیوستگی پتانسیل کل و مشتق آن در مرز دو محیط می توان $f_1(m,\omega)$ و $f_2(m,\omega)$ را معین نمود.

$$V_{tot,1}(\rho,0)=V_{tot,2}(\rho,0)\qquad,\qquad\left[\frac{\partial V_{tot,1}(\rho,z)}{\partial z}\right]_{z=0^+}=\left[\frac{\partial V_{tot,2}(\rho,z)}{\partial z}\right]_{z=0^-}$$

...