(۱)

اصل کنش

در این قسمت به دنبال این سوال هستیم که چگونه معادله لاگرانژ حاصل شده است؟ به عبارت دیگر آیا معادله لاگرانژ را می‌توان از کمیت دیگری محاسبه نمود؟

با در نظر گرفتن کمیت کنش (action) مانند زیر

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x},t)\,dt$$

و با کمینه کردن این کنش می‌توان معادله لاگرانژ را بدست آورد. منظور از مینیمم کردن کمینه شدن یا نقطه زینی (یا به عبارت کلی ثابت بودن کنش) کنش است.

همانطور که پیداست کنش یک کمیت تابعی است یعنی

$$S[x(t)]$$

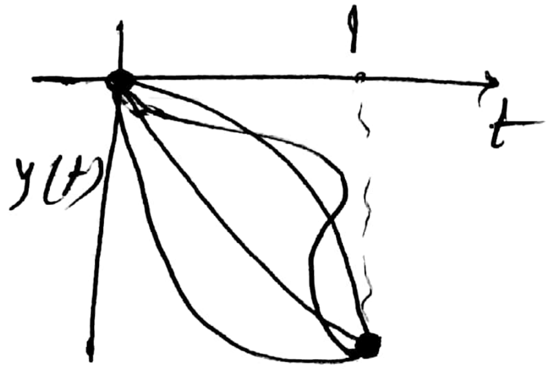
است.

مثال: ذره‌ای را در نظر بگیرید که ~~[illegible]~~ رها می‌شود و مسیر حرکت آن را در بازه زمانی $1 \le t \le 2$ می‌توان به صورت

(۲)

به صورت تابعی از زمان نوشت با شرایط ابتدایی

$y(0)=0$ و شرایط انتهایی $y(1) = -\frac{g}{2}$



در شکل مقابل مسیرهای ممکن زیادی وجود دارد که

از مکان ابتدایی به انتهایی برسید. اما سوالی که

در این جا مطرح می‌شود این است که کدام مسیر باشد

باشد که این تابع مقدار بشود ($\delta S = 0$ که)

مشتق

نکته: برای مسیرهایی است که معادله

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

در این جا مکان اولیه و نهایی ثابت هستند

یعنی $x(t_2)=x_2$ و $x(t_1)=x_1$ است.

(30)

اثبات: اگر فرض کنیم $x_0(t)$ منحنی مسیر واقعی باشد

برای آن کمینه شود. هر تابع نزدیک به $x_0(t)$ باعث افزایش

از این مقدار شود چون اگر $f(b)$ یک مقدار کمینه

باشد برای یک مسیر نزدیک $f(b+\epsilon)$ خواهیم داشت

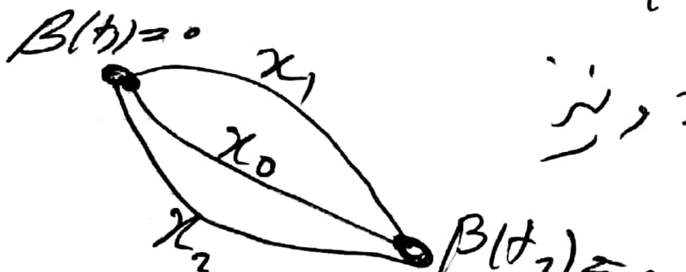
$$f(b+\epsilon) \simeq f(b) + \cancel{f'(b)}\,\epsilon + \frac{f''(b)}{2}\epsilon^2$$

که نشان می‌دهد جمله خطی حذف می‌کند این مقدار انحراف در مرتبه دوم

سطح خود را نشان می‌دهد.

برای مسیر $x_a(t)$ می‌توانیم داشته باشیم

$$x_a(t) = x_0(t) + a\beta(t)$$



که a یک مقدار ثابت و ...

است $\beta(t_1)=\beta(t_2)=0$

یعنی نقاط ابتدا و انتهایی ثابت هستند. به عبارت دیگر

$$x_a(t) = x_0(t) + \delta x(t)$$

در نقاط انتهایی و ابتدایی $\delta x = 0$ خواهد شد.

بنابراین با گرفتن وردش از کنش داریم

$$\delta S[x] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt$$

$$\Rightarrow \qquad \delta \dot{x} = \delta \left(\frac{d}{dt} x \right) = \frac{d}{dt} \delta x$$

از طرفی میدانیم

بنابراین داریم

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} (\delta x) \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \right] \right.$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right) \right] dt\, \delta x$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right) dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt\, \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2}$$

از طرفی می دانیم $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$

بنابراین جمله آخر به سمت صفر میل می‌کند حال داریم

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right) dt\,\delta x$$

حال برای اینکه انتگرال برابر صفر باشد $\delta I = 0$ باید شرط کافی است

هر دو عبارت داخل پرانتز باید صفر باشد یعنی

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

پس در حالت کلی

$$I' = \int L(\dot{q}_j, q_j, t)$$

در این صورت با گرفتن وردش از δI داریم

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$$

تمرین! اکسترمم تابعک زیر را بدست آورید

$$I[x] = \int_0^{\pi} (2x\sin t - \dot{x}^2)\, dt$$

با شرایط $x(\pi) = x(0) = 0$

تمرین: اکسترمم تابعی زیر را حساب کنید

$$L(y)=\int_0^1\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}dx$$

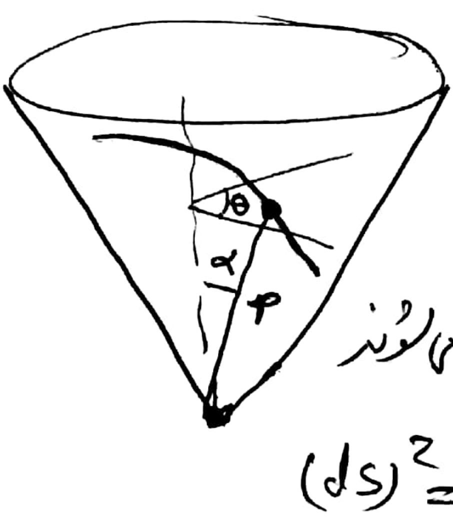
با شرایط مرزی $y(0)=y(1)=0$

نکته: همچنین می‌توانید نشان دهید که

$$\dot q_j\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}-L=\text{ثابت}$$

است.

تمرین: مسیر ژئودزیک (کوتاه‌ترین مسیری که دو نقطه را به هم وصل می‌کند) یک ذره در مخروط را به دست آورید؟



راهنمایی: الان فاصله در مختصات مخروطی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$(ds)^2=(d\rho)^2+(\rho\sin\alpha\, d\theta)^2$$

شرایط اولیه $\rho(-\frac{\pi}{2})=\rho(\frac{\pi}{2})=a$ است.

یعنی $\dot\rho\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}-L=\text{ثابت}=b$