۱۲

۸ معادلات لاگرانژ و اصل بقا

۹ تعاریف

۱۰ نیروی قیدی و سیستم مقید: برای سیستم مقید نیروی قیدی مشخص نمی‌باشد

۱۱ $$m_i \dot{v}_i = F_i^s + F_i^c$$

۱۲ نیروی مشخص ↓ F_i^s ؛ (نیروی قیدی) ↓ F_i^c

۱۳ مختصات تعمیم یافته: مختصات که جامع و لازم برای نقطه‌ها یکتایی

۱۴ درجه آزادی: به تعداد مختصات تعمیم یافته درجه آزادی می‌گوییم

۱۵ نکته: تعداد درجات آزادی برابر با تعداد معادلات مستقل که برای

۱۶ توصیف حرکت یک سیستم است.

۱۷ قیود → هندسی ⇐ قیدهایی که ارتباط میان مختصات را می‌دهد

۱۸ قیود → سینماتیک ⇐ قیدهایی که ارتباط میان سرعت‌ها را می‌دهد

شهادت آیت الله دکتر محمد مفتح (۱۳۵۸ ه ش) - روز وحدت حوزه و دانشگاه

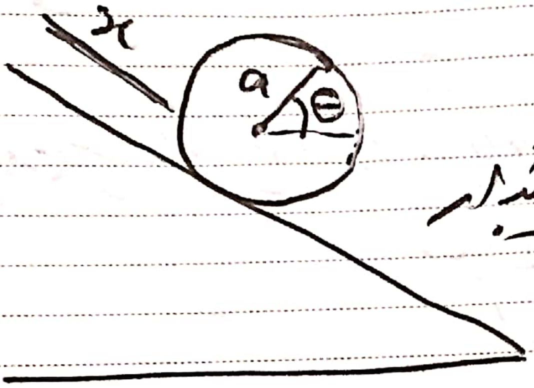
کشته چاه زنخدان توام کز هر طرف
صدهزارش گردن جان زیر طوق غبغب است

(۲)

شرط سینماتیک انتگرال پذیر !

اگر از قید سینماتیکی ، گرفتن انتگرال بتوان ، به قید هندسی میرسید

مثال !



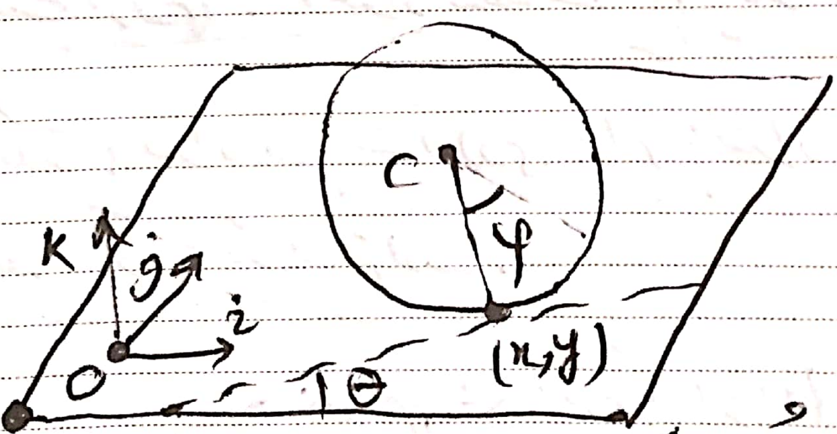
غلتش یک استوانه روی یک سطح شیبدار

قید سینماتیکی $\dot{x} = a\dot{\theta}$ ⇐

با گرفتن انتگرال داریم $x = a\theta$ که این یک قید هندسی است

بنابراین انتگرال پذیر است .

مثال ۲



مانند شکل سکه‌ای به شعاع a که روی سطح می‌غلتد را در نظر بگیرید

شرط غلتش به ما می‌گوید که در نقطه تماس ، لبه سرعتش صفر باشد

بنابراین

$$\dot{x} + a\dot{\varphi}\cos\theta = 0$$

۸

$$\dot{y} + a\dot{\varphi}\sin\theta = 0$$ ⇐ به خاطر اینکه θ تابع زمان هستش

۹ از زمان است شاید این قیود انتگرال‌پذیر نباشد.

۱۰

۱۱

سیستم‌های هولونومیک و غیر هولونومیک

۱۲

۱۳ سیستم هولونومیک: اگر سیستمی تمام قیدهای

۱۴ سینماتیک انتگرال‌پذیر باشد به این سیستم، هولونومیک می‌گویند.

۱۵ فضای پیکربندی!

۱۶ برای سیستم هولونومیک، مختصات تعمیم یافته $q_1 - - - q_n$ فضای

۱۷ اقلیدسی Q را تشکیل می‌دهند که به آن فضای پیکربندی

۱۸ می‌گوییم و هر نقطه در این فضا با مختصات

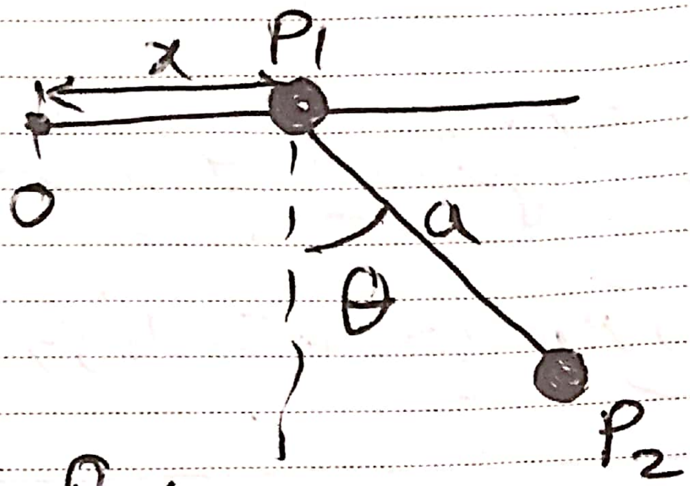
$$q = (q_1 - - - q_n)$$

مثال ۱

۸

برای شکل مقابل

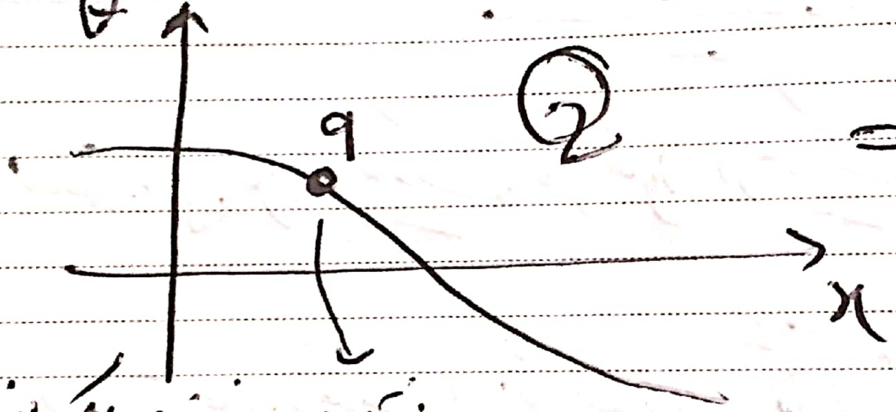
۹



$q=(x,\theta)$

۱۰

۱۱



⇐ فضای پیکربندی

۱۲

۱۳

نقطه q در فضای پیکربندی

۱۴ سرعت تعمیم یافته!

در فضای پیکربندی Q تحول q روی مسیر

مشخص حرکت می‌کند یعنی $q=q(t)$

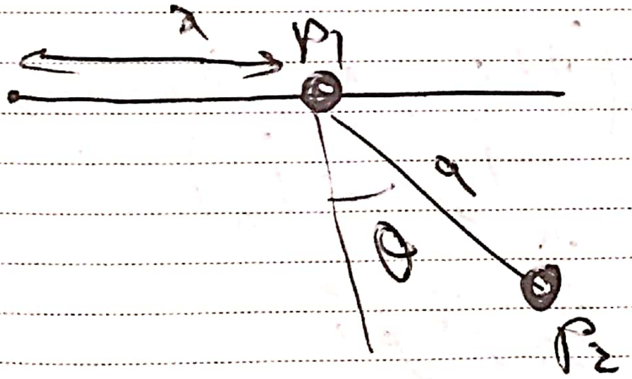
ما برای سرعت تعمیم یافته رابطه زیر قابل تعریف است

$$\dot q=(\dot q_1,\dots,\dot q_n)$$

ثا برای سرعت یک ذره به علت اینکه $r_i = r_i(q)$ و نیز $q = q(t)$ با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$v_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_1}\dot q_1 + \cdots + \frac{\partial r_i}{\partial q_n}\dot q_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot q_j$$

همانطور که پیداست سرعت به طور خطی به $\dot q$ مربوط است و ضرایب آن تنها به مختصات $= q$ بستگی دارد.



مثال ۱: سرعت‌ها به شکل مطلق با رابطه‌های زیر داده می‌شود

$$v_1 = \dot x \hat i \qquad v_2 = \dot x \hat i + (a\cos\theta\, \hat i + a\sin\theta\, \hat k)\dot\theta$$

$$T = \tfrac{1}{2} m (v_1 \cdot v_1) + \tfrac{1}{2} m (v_2 \cdot v_2)$$

$$= m\dot x^2 + \left(\tfrac{1}{2} m a^2\right)\dot\theta^2 + (m a\cos\theta)\,\dot x\dot\theta$$

۸ شکل کلی انرژی جنبشی

۹
$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (v_i \cdot v_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(q)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k$$

۱۰ اسح — ۱

۱۱
$$v \cdot v = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)$$

۱۲
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial r}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial r}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\,\dot{q}_i$$

۱۳

۱۴
$$a_{jk}(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right)$$ در رابطه ۴ جای

۱۵ شکل همگن مرتبه دو برای انرژی جنبشی T

۱۶

۱۷ قضیه دالامبر ! همانطور که قبلاً گفتم شکست ، از

۱۸ نزدیم جای دیگری ، نقص است ، برای مقصددارم خود را

و جزو چنین نیروهایی (C) را می‌شناسیم

$$m_i \dot{v}_i = F_i^S + F_i^C$$

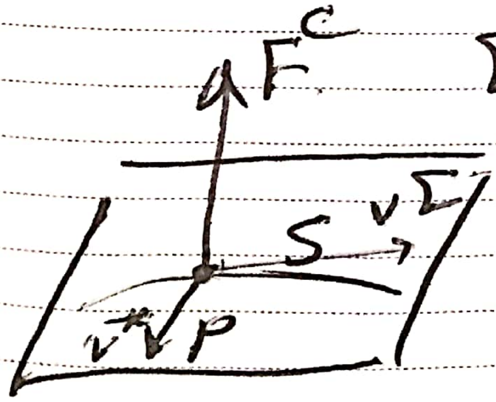
اگر v^* مجموعه‌ای از سرعت ذرات در زمان t در نظر بگیریم که

$$\sum_{i=1}^{N} F_i^C \cdot v_i^* = 0$$

آنگاه در این صورت قضیه دالامبر می‌گوید که این نیروها هیچ کاری را انجام نمی‌دهند بنابراین داریم

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{v}_i \cdot v_i^* = \sum_{i=1}^{N} F_i^S \cdot v_i^*$$

نکته! برای سیستمی که روی سطح Σ



v^* مماس بر سطح Σ است بنابراین

$$F_i^C \cdot v^* = 0$$

ثابت شد.

۸ معادلات لاگرانژ

۹ سیستم ایستا ندارد؟ هر سیستم مکانیکی که هولونومیک و پایستار

۱۰ نیروهای قیدی که کار مجازی کلی آنها هم صفر باشد، به آن سیستم

۱۱ سیستم ایستا ندارد می‌گوییم.

۱۲ اگر فرض کنید در یک سرعت مجازی v^* با لحاظ کردن قیدهای زمان

سرعت‌های مجازی سیستم را از رابطه بدست آورید

۱۳
$$\dot{q}_1 = 1, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \cdots = \dot{q}_n = 0$$

۱۴ در این صورت

$$v_i^* = \frac{\partial r_i}{\partial q_1}$$

۱۵

روابط قبلی داریم

۱۶
$$\sum_{i=1}^{N} m \dot{v}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_1} = \sum_{i=1}^{N} F_i^s \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_1}$$

۱۷

۱۸ وضعیت دوم برای سیستم
$$\dot{q}_1 = 0 \quad \dot{q}_2 = 1 \quad \dot{q}_3 = \cdots = \dot{q}_n = 0$$

را در نظر بگیریم

معادله بالا

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{v}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} F_i^s \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

طرف چپ از طرفی داریم

$$\sum_{i=1} m_i \dot{v}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

تمرین: رابطه بالا را اثبات کنید

همچنین می‌توان نیروی تعمیم یافته را به صورت زیر تعریف کرد

$$Q_j = \sum_i F_i^s \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

در پایان معادله [illegible] لاگرانژ برای یک سیستم استاندارد به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

نکته ! اگر سیستم یک سیستم منزوی باشد در این صورت

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

می‌باشد

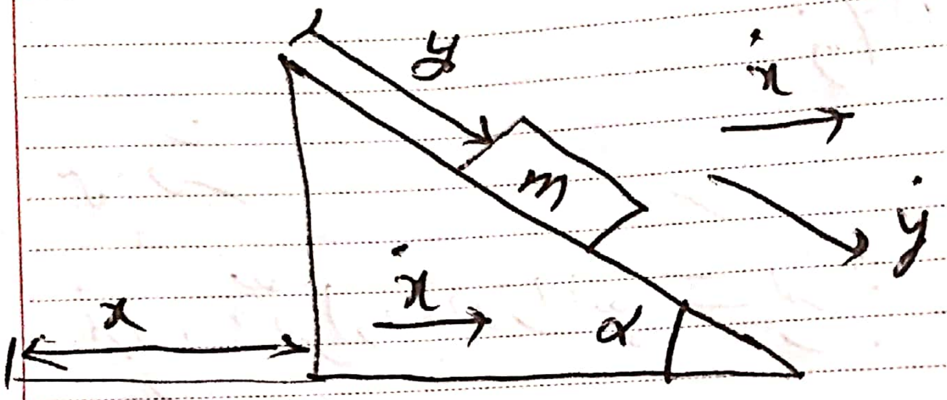
تمرین ! گزاره بالا را اثبات کنید ؟

ما برای برای یک سیستم استاندارد منزوی داریم

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

نکته : این معادله‌ها تمام معادلات لازم برای توصیف حرکت یک سیستم را به ما می‌دهد.

سوال: یک آجر به جرم m را بر روی سطح شیب داری به جرم M در نظر بگیرید شکل. حرکت این اجسام را بدست آورید



[illegible]

سوال اول: مقدار مختصات تعمیم یافته (q)

$q=(x,y)$

سوال دوم: سرعت های اجسام

$$m: \ v_1=\dot{x}\hat{i}+(\dot{y}\cos\alpha\,\hat{i}+\dot{y}\sin\alpha\,\hat{j})$$

$$M: \ v_2=\dot{x}\hat{i}$$

سوال سوم: انرژی جنبشی کل؟

$$T=\frac{1}{2}Mv_2^2+\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\times(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha)$$

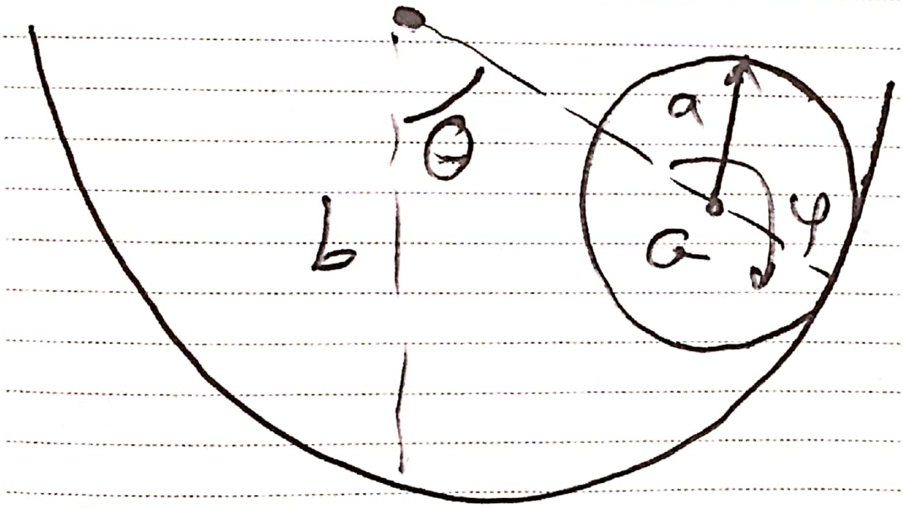
۸ سوال ۴) انرژی پتانسیل

$V = -mgy \sin\alpha$

۹ تمرین: ادامه مسئله را حل کنید؟

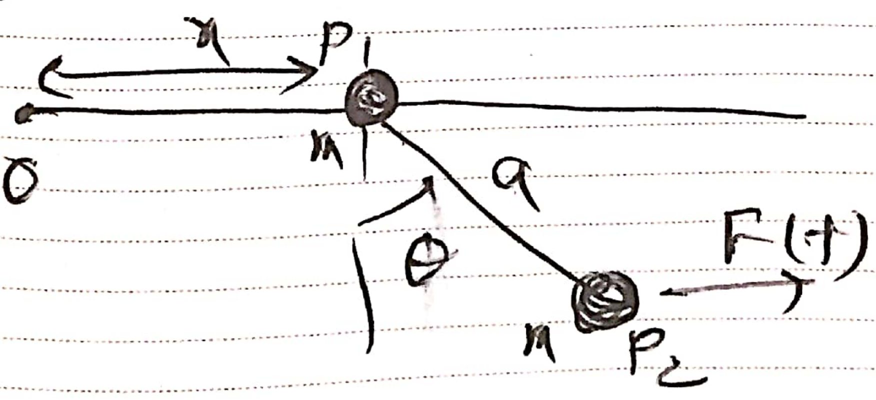
۱۰ تمرین: مطابق شکل استوانه‌ای در داخل استوانه‌ای بزرگتر

۱۱ می‌چرخد؛ غلتش می‌کند دوره نوسان این حرکت را بیابید؟



$I = \frac{1}{2}ma^2$
استوانه

۱۷ تمرین:



تعداد درجات آزادی را برای شکل مقابل بدست آورید؟

تعداد مختصات تعمیم یافته (x, θ)

$$Q_x = F_1^s \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x} + F_2^s \cdot \frac{\partial r_2}{\partial x}$$

$$Q_\theta = F_1^s \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \theta} + F_2^s \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \theta}$$

سطح ، اصطکاک صرفنظری است

$$F_1^s = 0 \qquad F_2^s = F(t)\,\hat{i}$$

$$r_1 = x\,\hat{i} \qquad r_2 = (x + a\sin\theta)\,\hat{i} + a\,s\theta\,\hat{k}$$

تمرین ! بقیه مسئله را حل کنید