فصل اول

مجموعه های فازی

Fuzzy Sets

مقدمه ای برنظریه فازی

Introduction to Fuzzy Theory

مقدمه ای بر نظریه فازی
Introduction to Fuzzy theory

اکثر اتفاقات و رویدادهایی که در زندگی روزمره برای ما اتفاق می‌افتد دارای ابهام می باشند. ابهام ممکن است با شکل، مکان، رنگ، ترکیب و محتوی رویدادها همراه باشد و معناها چه بودن آنها را تشریح می کنند. یعنی انسان با استفاده از معانی مختلف، چه بودن و ماهیت آنها را تشریح و توصیف می کند.

نظریه مجموعه های فازی برای اولین بار توسط پروفسور لطفی‌زاده در سال ۱۹۶۴ مطرح گردید. و ایده آن با این عبارت توسط ایشان ایجاد شد :

«ما نیاز به یک نوع مختلف از ریاضیات هستیم تا بتوانیم ابهامات و عدم دقت رویدادها را مدل سازی نماییم مدلی که متفاوت از نظریه احتمالات می باشد.»

نظریه فازی برای بیان و تشریح عدم قطعیت و عدم دقت در رویدادها بکار می‌رود. و کلید اصلی نظریه فازی از منطق چند ارزشی بوجود آمده است.

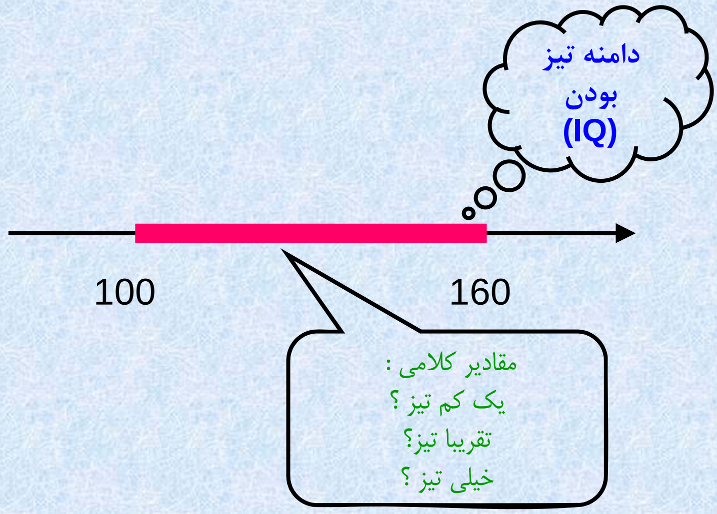
مثال:

عبارت «علی آدم تیزی است»

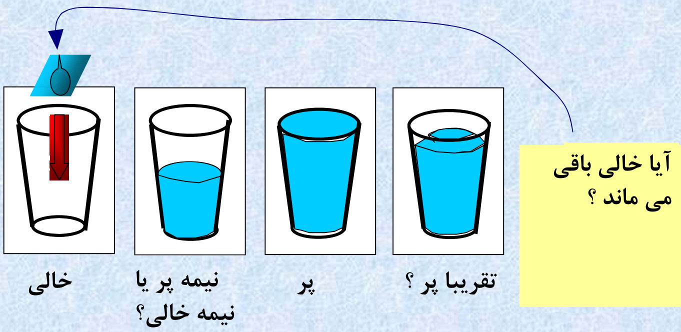
در این عبارت چه ابهامی وجود دارد ؟

بحث فازی ؟

تیز بودن (ضریب هوش (IQ)) ؟



مثال : مفهوم نادقیق



ماهیت عدم اطمینان

ماهیت عدم قطعیت (عدم اطمینان) با توجه به مسئله مورد بررسی می بایست توسط تحلیل گر مشخص شود.

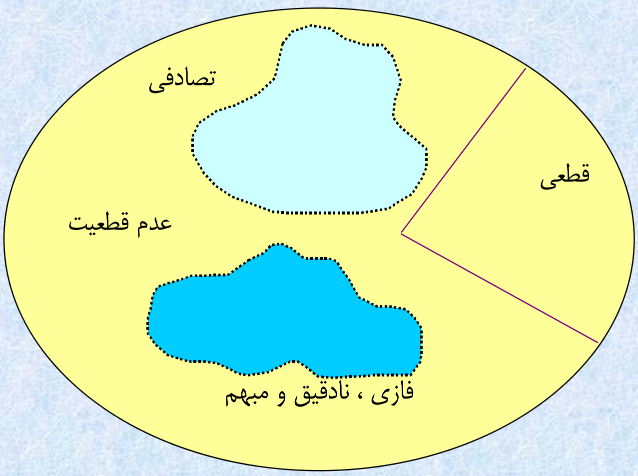
زیرا عدم اطمینان می تواند ناشی از ”شانس (تصادفی بودن) “ ، ”ابهام“، ”کمبود دانش آگاهی“ و یا ”از عدم دقت“ و ... باشد.

نظریه احتمال و فازی

نظریه احتمال برای پیش بینی نتیجه یک رویداد در آینده بکار می رود. رویدادی که در آینده قرار است اتفاق بیافتد و نتیجه آن در حال حاضر مشخص نیست. در واقع نظریه احتمال به رویدادهای تصادفی مرتبط می باشد.

در حالیکه فازی به "بی دقتی" و مفاهیم نادقیق که در زبان طبیعی بکار می‌روند مرتبط است و همیشه با یک رویداد همراه نیست. در واقع نظریه فازی عدم قطعیت غیر احتمالی را پشتیبانی می کند. "Non random uncertainty"

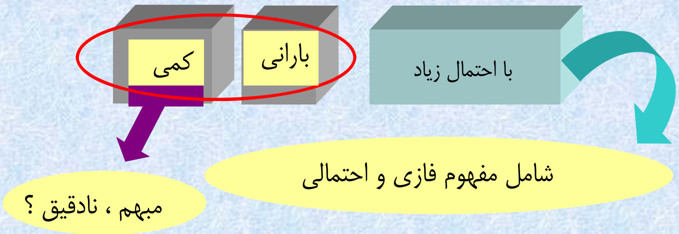
نظریه احتمال و فازی



نظریه احتمال و فازی

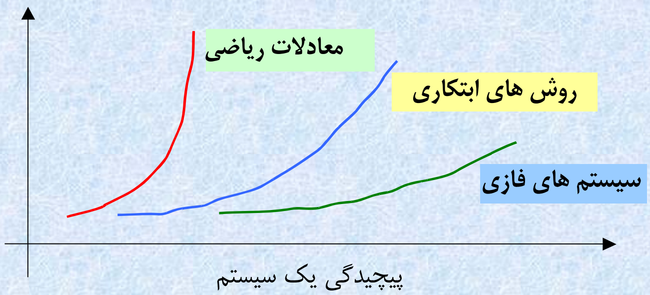
در برخی از مواقع عدم قطعیت هر دو مورد احتمالی و فازی را شامل می شود مانند :

”فردا با احتمال زیادی هوا کمی تا قسمتی بارانی خواهد بود.

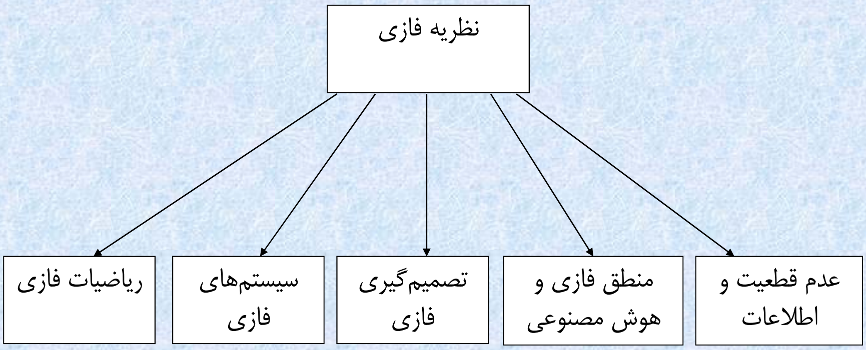


کاربرد فازی در مدل سازی

جهت تحلیل کاربرد انواع متدولوژیها و مدلسازی های ریاضی در مسائل، اصل ناسازگاری توسط لطفی زاده (۱۹۷۳) ارائه شده است.
The Principle of incompatibility (L . Zadeh, 1973)



طبقه بندی عمومی نظریه فازی



مجموعه های کلاسیک و معرفی مجموعه های فازی

در تئوری کلاسیک، یک مجموعه شامل یکسری از اجزاء است که به واسطه خصوصیات مشترک گردهم جمع شده اند. به عنوان مثال " مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵ " و یا مجموعه " یک یک خط در فضای دو بعدی" که بصورت دیل نشان داده می شوند.

A : مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵ : {۴، ۳، ۲، ۱} = A

نمایش مجموعه های کلاسیک

$$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

$$A = \{x \in X \,|\, properties \text{ of } x\}$$

تابع مشخصه (Characteristic Function)

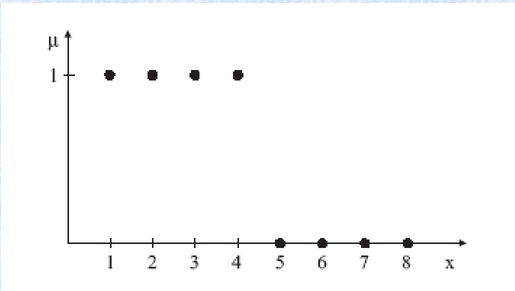
$$\mu_A(x) : X \to \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{x عضو A است} \\ 0 & \text{x عضو A نیست} \end{cases}$$

مثال (۱-۲) مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵

A ={۱ ،۲ ،۳ ،۴}

$$A = \{x | \ x \in N, x < 5\}$$



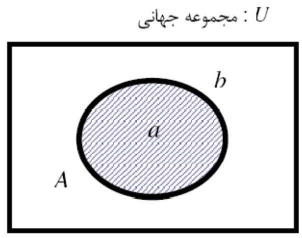
همانطور که ملاحظه می شود در مجموعه های کلاسیک، یک عنصر یا عضو مجموعه مورد نظر هست و یا نیست، یعنی از این دو حالت خارج نیست اگر عنصر مورد نظر عضو مجموعه باشد ۱۰۰٪ عضو آن است و اگر عضو آن نباشد ۱۰۰٪ عضو آن نیست

مجموعه های کلاسیک برای مفاهیمی که به طور قطعی و مشخص قابل تعریف هستند مناسب می باشد. در حالیکه مفاهیمی وجود دارند که نمی توان بطور مشخص و قطعی برای آنها حد و مرزی مشخص کرد و بر اساس آن مجموعه کلاسیک را تشکیل داد

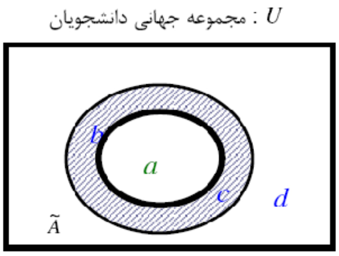
به عنوان مثال به موارد ذیل توجه نمایید :

- مجموعه افراد قدبلند
- مجموعه اتومبیل های با مصرف بنزین متوسط
- مجموعه جاده های آرام در کشور

مثال (۲-۲) - فرض کنید U مجموعه جهانی دانشجویان باشد و A مجموعه دانشجویان دانشگاه صنعتی شریف تعریف شود. در این مورد چون به طور قطعی و مشخص می توان گفت که هر دانشجو متعلق به چه دانشگاهی است، مجموعه کلاسیک مناسب است و نمایش شماتیک آن در شکل (۲-۲) آمده است.

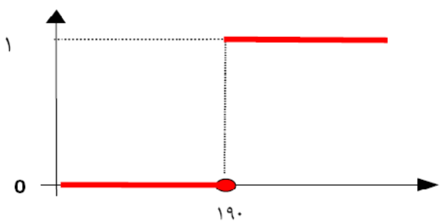


شکل (۲-۲)- مجموعه کلاسیک دانشجویان دانشگاه صنعتی شریف

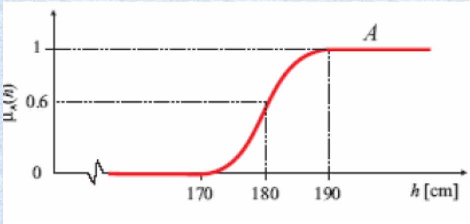


شکل (۳-۲)- مجموعه فازی دانشجویان جوان

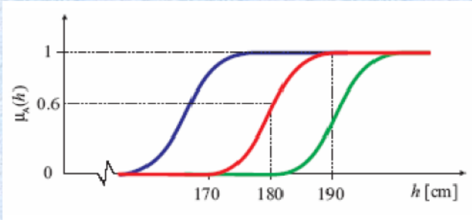
مثال (۳-۲) - فرض کنید مجموعه افراد قد بلند (A)، مجموعه افرادی باشد که قد آن ها بزرگتر یا مساوی ۱۹۰ سانتی متر است. آن گاه افرادی که قد آن ها دقیقا بزرگتر یا مساوی ۱۹۰ سانتی متر است با درجه مشخصه "۱" وارد مجموعه A می شوند و افرادی که قد آن ها کوچکتر از ۱۹۰ سانتی متر است عضو مجموعه نبوده و درجه مشخصه آن ها "صفر" خواهد بود. که تابع مشخصه آن در شکل (۴-۲) به تصویر کشیده شده است.



مجموعه فازی افراد قد بلند



شکل (۵-۲) تابع عضویت مجموعه فازی افراد قد بلند



شکل (۶-۲) تابع عضویت بلندی قد در کشورهای مختلف

$$\mu_A(h) = \begin{cases} 1 & h \geq 190 \\ (0,1) & 170 < h < 190 \\ 0 & h \leq 170 \end{cases}$$

h به طور کامل عضو A است :

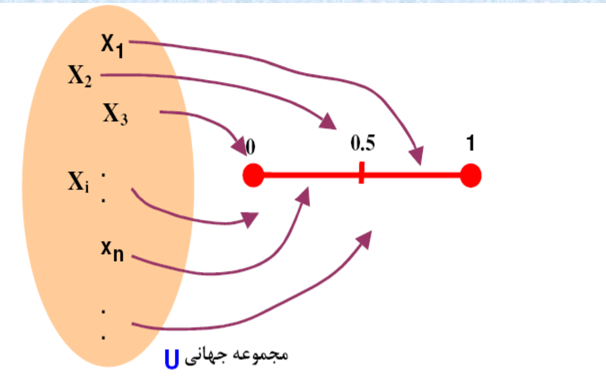
h تاحدودی عضو A است :

h عضو مجموعه A نیست :

تعریف ۱- ۲- مجموعه فازی : اگر X مجموعه ای از عناصر باشد که با x نشـان داده مـی شـود؛ آن گاه مجموعه فازی[۳] $\tilde{A}$ در X، مجموعه زوج های مرتب به شرح ذیل است :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in X\}$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت یا درجه عضویت x در $\tilde{A}$ است. تابع عضویت، مجموعـه X را بـه فضـای M تصویر می کند.



شکل (۷-۲): نمایش شماتیک تصویر اعضاء مجموعه فازی به درجه های عضویت در بازه صفر و یک

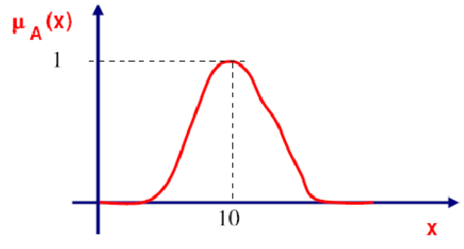
مثال ۴-۲ : تصور کنید در یک بنگاه املاک، خانه های موجود براساس تعداد اطاق خواب طبقه بندی شده اند و میزان راحتی خانواده ها در هر منزل به تعداد اطاق خواب های آن بستگی دارد. مجموعه X مجموعه منازل با تعداد اطاق خواب های موجود (x) تعریف می شود.

$X = \{1,2,3,\ldots,10\}$

حال اگر یک خانواده چهار نفری را در نظر بگیریم، میزان راحتی این خانواده در هر یک از منازل با توجه به تعداد اطاق خواب های آن می تواند با استفاده از مفهوم فازی تعریف شود. مجموعه فازی $\tilde{A}$ مجموعه تعداد اطاق خواب هایی که یک خانواده چهارنفری در آن احساس راحتی دارند به شرح ذیل می تواند تعریف شود:

$\tilde{A} = \{(1,0.2)\,,\,(2,0.5)\,,\,(3,0.8)\,,\,(4,1)\,,\,(5,0.7)\,,\,(6,0.3)\}$

مثال ۵-۲: فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ مجموعه اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰ تعریف شود.



شکل (۸-۲)- اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰

۲-۲- عملیات در مجموعه های کلاسیک و فازی

۱-۲-۲- عملیات در مجموعه های کلاسیک

تعاریف و عملیات مختلف مربوط به مجموعه های کلاسیک به طور خلاصه در ادامه آمده است.

$x \in A$: x متعلق به مجموعه A است.

$x \notin A$: x عضوی از مجموعه A نیست.

$A \subset B$: A زیر مجموعه B است. یعنی هر عنصری که در A هست در مجموعه B نیز وجود دارد.

$A = B$: دو مجموعه A و B مساوی خواهند بود اگر هر عضوی از A عضو B نیز باشد و بالعکس.

$A \subseteq B$: A زیر مجموعه B یا مساوی آن است. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ برقرار باشد آن گاه داریم $A=B$

$A \cup B$: اجتماع دو مجموعه A و B است و داریم:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{or} \quad x \in B\}$$

$A \cap B$: اشتراک دو مجموعه A و B است و داریم:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{and} \quad x \in B\}$$

$\overline{A}$: مکمل مجموعه A و شامل عناصری از مجموعه جهانی است که در A نیست :

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A \ , \ \ x \in U\}$$

$A \mid B$: تفاضل دو مجموعه و شامل عناصری است که در A هست و در B نیست :

$$A \mid B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \, and \, x \notin B\}$$

اگر بخواهیم عملیات مجموعه های کلاسیک را با تابع مشخصه ($\mu_A(x)$) بیان کنیم

(علامت $\vee$ به معنی حداکثر و علامت $\wedge$ به معنی حداقل است)

$$A \cup B: \quad \mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$
$$A \cap B: \quad \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$
$$\overline{A}: \quad \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$
$$A \subseteq B: \quad \mu_A(x) \le \mu_B(x)$$
$$A|B: \quad \mu_{A|B}(x) = \mu_A(x) \wedge (1 - \mu_B(x))$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = (1 - \mu_A(x)) \wedge (1 - \mu_B(x)) = 1 - (\mu_A(x) \vee \mu_B(x))$$

جدول (۱-۲)- خواص عملیات در مجموعه های کلاسیک

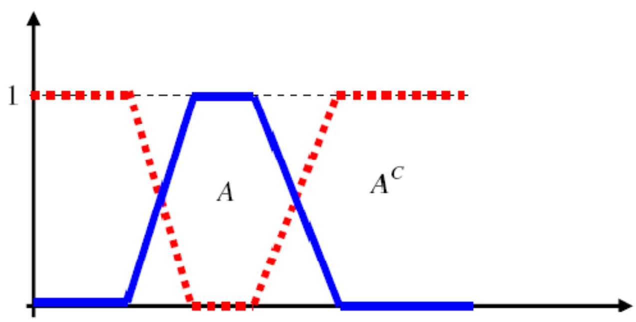
$\overline{\overline{A}} = A$	خاصیت مکمل مکمل[۴]
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	خاصیت جابجایی
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	خاصیت شرکت پذیری
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	خاصیت توزیع پذیری
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	خاصیت خود توانی[۵]
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	خاصیت جذب[۶]
$A \cup X = X$ $A \cap \phi = \phi$ $A \cup \phi = A$ $A \cap X = A$	خاصیت جذب با X و ϕ
$A \cap \overline{A} = \phi$	قانون تناقض[۷]
$A \cup \overline{A} = X$	قانون اجتماع با مکمل
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	قوانین دمورگان

۲-۲-۲- عملیات در مجموعه های فازی

مکمل مجموعه فازی :

مکمل[۸] مجموعه فازی $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A}^C$ یا $\overline{\tilde{A}}$، نشان داده می شود و درجه عضویت عناصر آن به صورت ذیل به دست می آیند. به عنوان مثال به شکل (۹-۲) توجه نمایید.

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

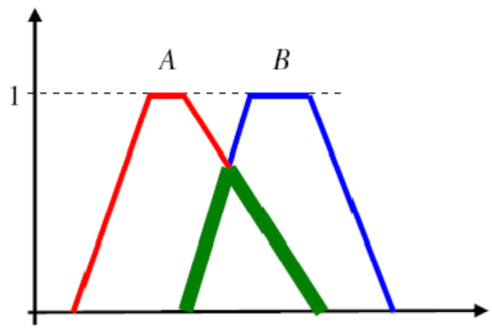


شکل (۹-۲)- مکمل مجموعه فازی

اشتراک[۹] مجموعه های فازی :

تابع عضویت عناصر مشترک مجموعه های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ با به کار گیری عملگر حداقل به صورت ذیل به دست می آید که در شکل (۱۰-۲) به تصویر کشیده شده است.

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(x)=\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

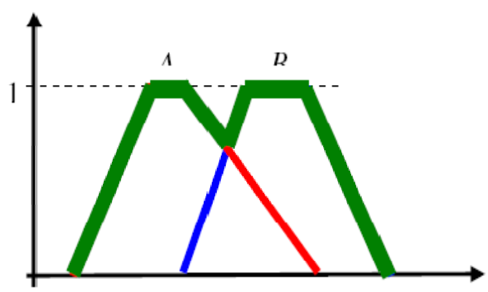


شکل (۱۰-۲) اشتراک دو مجموعه فازی

اجتماع مجموعه های فازی :

تابع عضویت اجتماع[۱۰] دو مجموعه فازی با به کار گیری عملگر حداکثر به صورت ذیل به دست می آید که در شکل (۱۱-۲) به تصویر کشیده شده است.

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}$$



شکل (۱۱-۲) اجتماع دو مجموعه فازی

خواص عملیات در مجموعه های فازی

تمام خواص گفته شده برای مجموعه های کلاسیک به غیر از قانون تناقض و قانون اجتماع با مکمل در مجموعه های فازی نیز صادق هستند. یعنی داریم :

$$\tilde{A} \cup \tilde{A}^C \neq X$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{A}^C \neq \phi$$

و همین طور دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مساوی خواهند بود اگر و فقط اگر داشته باشیم :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \quad , \quad \forall x \in U$$

مثال (۷-۲)- فرض کنید مجموعه جهانی X و مجموعه های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت ذیل تعریف شوند :

$$X = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\tilde{A} = \{(2,0.3),(3,0.5),(4,1),(5,0.6),(6,0.2)\}$$

$$\tilde{B} = \{(1,0.4),(2,0.8),(3,1),(4,0.7),(5,0.3)\}$$

همین طور در این مثال می توان نشان داد که قوانین تناقض و اجتماع با مکمل در مجموعه های فازی برقرار نیست. لذا داریم :

۳-۲- تعاریف پایه

تعریف ۲-۲- مجموعه های فازی گسسته و پیوسته :

اگر مجموعه عناصر یک مجموعه فازی، گسسته[11] باشد به آن مجموعه فازی گسسته گفته می شود که درجه عضویت هر یک از عناصر آن، با یک عدد بین صفر و یک بیان می شود. نحوه نمایش مجموعه فازی گسسته می تواند به صورت مجموعه زوج های مرتب (تعریف ۱-۲) و یا به صورت ذیل باشد:

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots$$

که در حالت کلی به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$$

در اینجا نماد $\sum$، به معنی جمع نیست بلکه به معنی گسسته بودن مجموعه فازی است.

اگر مجموعه عناصر یک مجموعه فازی، پیوسته باشد به آن مجموعه فازی پیوسته گویند و معمولا تابع عضویت آن به صورت یک تابع بیان می شود. مجموعه های فازی پیوسته علاوه بر مجموعه زوج های مرتب، به صورت ذیل نیز می تواند نشان داده شود:

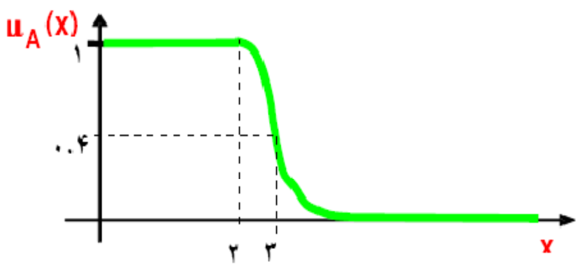
$$\tilde{A} - \int_x \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$$

در اینجا نماد $\int$، به معنی انتگرال نیست بلکه به معنی پیوسته بودن مجموعه فازی است.

مثال (۸-۲)- فرض کنید مجموعه جهانی U دربازه $[0,\ 85]$ تعریف شود که برای نمایش سن نرمال افراد است. عبارت کلامی «افراد جوان» بـه صـورت یـک مجموعـه فـازی پیوسـته تعریـف می شود که تابع عضویت آن می تواند به شرح ذیل باشد :

$$\tilde{A} = \int_0^{25} \frac{1}{x} + \int_{25}^{85} \left(1+\left(\frac{x-25}{25}\right)^2\right)^{-1} \Big/ x$$

و نمایش شماتیک تابع عضویت آن نیز به صورت شکل (۱۲-۲) است.



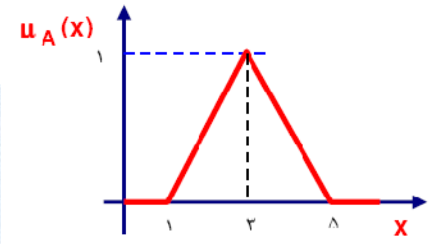
شکل (۹-۲) تابع عضویت مجموعه فازی پیوسته افراد جوان

مثال (۹-۲): مجموعه اعداد صحیح مثبت نزدیک به ۵ مـی توانـد توسـط یـک مجموعـه فـازی گسسته به صورت ذیل تعریف شود :

$$\tilde{A} = \frac{0.2}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{0.4}{7}$$

و مجموعه اعداد حقیقی غیرمنفی نزدیک به ۳ نیز توسط یـک مجموعـه فـازی پیوسـته[۱۲] بـا تـابع عضویت ذیل قابل تعریف است.

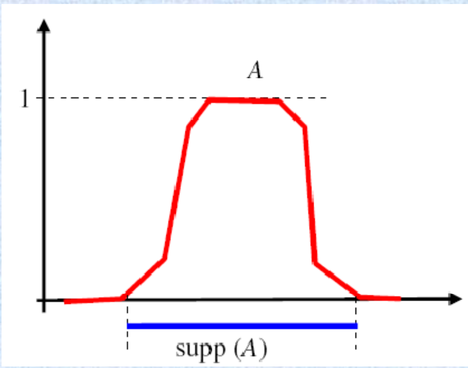
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ \frac{x-1}{2} & 1 < x \le 3 \\ \frac{5-x}{2} & 3 < x \le 5 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$



تعریف ۳-۲- مجموعه پشتیبان یک مجموعه فازی:

مجموعه پشتیبان[۱۳] هر مجموعه فازی، یک مجموعه کلاسیک است کـه زیرمجموعـه ای از عناصـر مجموعه فازی با درجه عضویت مثبت است و به صورت ذیل تعریف می شود. نمـایش شـماتیک آن در شکل (۱۴-۲) آمده است.

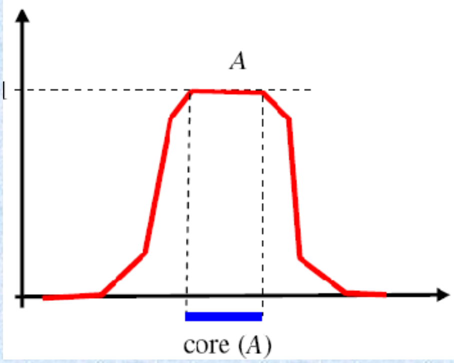
$$Supp(\tilde{A}) = \{\ x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\ \}$$



تعریف ۴-۲- هسته یک مجموعه فازی :

هسته[۱۴] یک مجموعه فازی، زیرمجموعه ای از عناصر آن با درجه عضویت ۱ است.

$$Core(\tilde{A}) = \{\ x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\ \}$$



تعریف ۵-۲- برش α در مجموعه های فازی

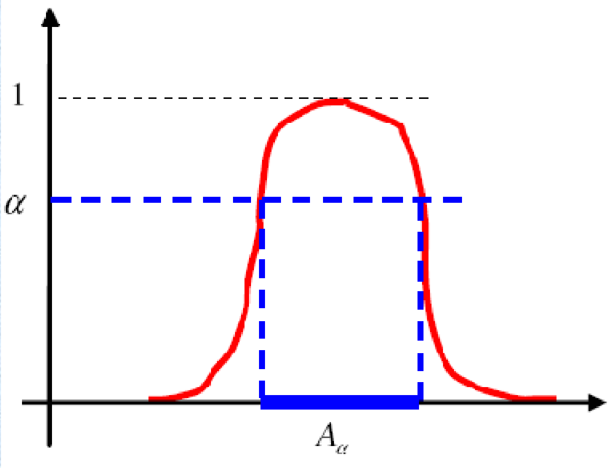
برش α[۱۵] در مجموعه فازی زیر مجموعه ای از عناصر آن است که درجه عضویت آن ها بزرگتر یا مساوی α است و به صورت A_α نشان داده می شود :

$$A_\alpha = \{\ x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\ \}$$

اگر در برش α، زیر مجموعه عناصر با درجه عضویت بزرگتر از α تعیین شوند به آن برش قوی α گفته می شود و به صورت A'_α نشان داده می شود :

$$A'_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

مجموعه های به دست آمده از برش α و برش قوی α مجموعه های کلاسیک هستند.



شکل (۱۶-۲) برش α در یک مجموعه فازی

مثال (۱۰-۲)– فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی مجموعـه جهـانی $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ بـه صورت ذیل تعریف شود :

$$\tilde{A} = \{\frac{1}{a} + \frac{0.9}{b} + \frac{0.6}{c} + \frac{0.3}{d} + \frac{0.01}{e} + \frac{0}{f}\}$$

این مجموعه فازی، با برش مقادیر مختلف α می تواند به مجموعه هـای کلاسـیک تبـدیل شـود مانند :

$$A_1 = \{a\}$$
$$A_{0.6} = \{a, b, c\}$$
$$A_{0+} = \{a, b, c, d, e\}$$
$$A_0 = \{X\}$$

منظور از مقدار $\alpha = 0^+$، یک مقدار خیلی کوچک اما بزرگتر از صفر اسـت. یعنـی خـود صـفر را شامل نمی شود.

خـواص بـرش α بـر روی عملیـات اسـتاندارد

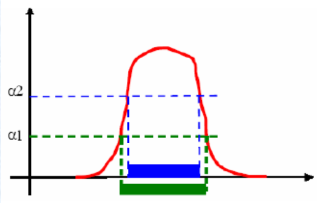
$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$$

$\tilde{A}^C_\alpha \neq A^C_\alpha$: به غیر از مقدار $\alpha = 0.5$

و همین طور برای هر مجموعه فازی A و دو مقدار α_1 و α_2 در بازه $[0,1]$ با فـرض $\alpha_1 < \alpha_2$ خواص ذیل بر قرار است.

$$A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_1}$$
$$A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = A_{\alpha_2}$$
$$A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} = A_{\alpha_1}$$

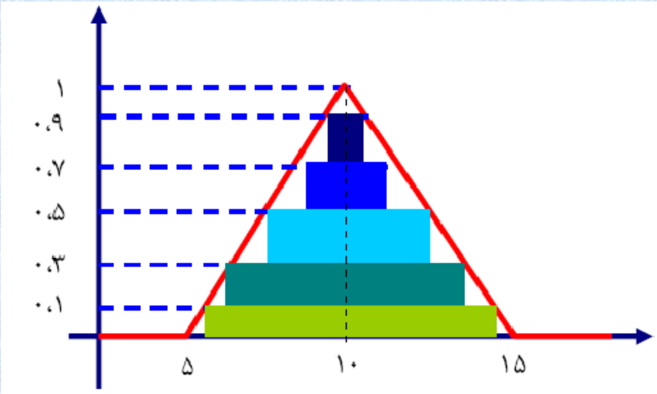


یک راه دیگر نمایش مجموعه های فازی استفاده از برش های α آن اسـت کـه بـه صـورت ذیـل نمایش داده می شود:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \ A_\alpha$$

به این رابطه، اصل تجزیه مجموعه های فازی نیز گفته می شـود. منظـور از αA_α، ضـرب مقـدار α در درجه عضویت عناصر مجموعه A_α است. با این عمل مجموعه کلاسـیک A_α تبـدیل بـه یک مجموعه فازی می شود که درجه عضویت عناصر آن صفر یا α است که بـا $\tilde{A}_\alpha$ نشـان داده می شود. لذا با اجتماع مجموعه های فازی $\tilde{A}_\alpha$ به ازای تمام مقادیر α بین صفر و یک، مجموعه فازی $\tilde{A}$ به دست می آید.

مثال (۱۱-۲) : مجموعه فازی $\tilde{A}$ در بازه $[5,15]$ و به صورت ذیل تعریف می شود. مقادیر مختلفی جهت برش در بازه $[0,1]$ انتخاب شده اند که برابر ۰/۱، ۰/۳، ۰/۵، ۰/۷، ۰/۹ می باشند. برش های تعریف شده در شکل (۱۸-۲) به تصویر کشیده شده است. ملاحظه می شود که با اجتماع مجموعه های فازی حاصل از هر برش ($\tilde{A}_\alpha$)، مجموعه فازی $\tilde{A}$ به دست می آید.

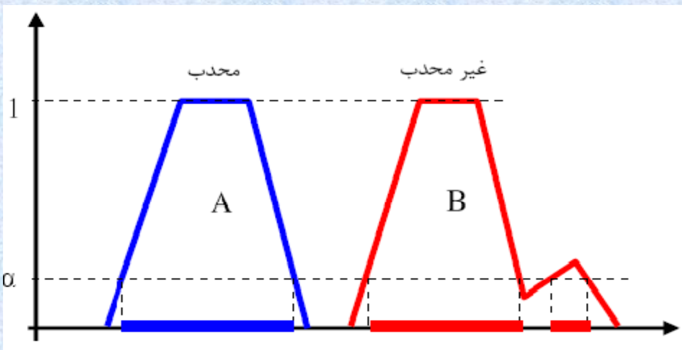


تعریف ۶-۲- مجموعه فازی محدب:

مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب[۱۶] است اگر داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\ \mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\ \}$$

λ عددی بین صفر و یک است. به عبارت دیگر مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر تمام برش های α آن مجموعه محدب باشند که این مفهوم در شکل (۱۹-۲) به تصویر کشیده شده است.



تعریف دیگری برای مجموعه های فازی محدب وجود دارد به طوری که مجموعه فازی $\tilde{A}$ محـدب است اگر برای هر عنصر x_1، x_2 و x_3 که رابطه $x_1 < x_2 < x_3$ برقـرار اسـت رابطـه ذیـل برقـرار باشد.

$$\mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_3)]$$

خاصیت عمومی : اشتراک چند مجموعه فازی محدب، یک مجموعه فازی محدب خواهد بود.

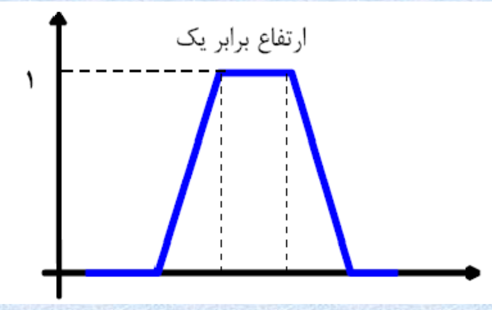
تعریف ۷-۲- ارتفاع مجموعه فازی

ارتفاع[۱۷] یک مجموعه فازی برابر حداکثر درجه عضویت عناصر آن مجموعه است. به عبارت دیگر:

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

تعریف ۸-۲- مجموعه فازی نرمال

مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال[۱۸] است اگر ارتفاع آن برابر یک باشد؛ در غیر این صـورت مجموعـه فـازی زیر نرمال است. در شکل (۳۰-۲) یک مجموعه فازی نرمال به تصویر کشیده شده است.



تعریف ۹-۲- کاردینالیتی یک مجموعه فازی

برای یک مجموعه فازی متناهی $\tilde{A}$، کاردینالیتی[19] آن ($|\tilde{A}|$) به صورت ذیل تعریف می شود :

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

کاردینالیتی نسبی مجموعه فاری $\tilde{A}$ نیز به شرح ذیل تعریف می شود :

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$$

واضح است که کاردینالیتی نسبی یک مجموعه فازی به کاردینالیتی مجموعه جهانی آن بستگی دارد. بنابراین اگر قصد مقایسه دو مجموعه فازی با کاردینالیتی نسبی آن ها را داریم می بایست مجموعه جهانی آن ها یکسان باشد.

به عبارت دیگر کاردینالیتی نسبی می تواند به صورت نسبت عناصر X در مجموعه فازی $\tilde{A}$ با وزن درجه عضویت آن ها در $\tilde{A}$ تعبیر شود.

مثال (۱۲-۲) : برای مجموعه فازی ذکر شده در مثال (۴-۲) که بیانگر میزان راحتی منزل با توجه به تعداد اطاق خواب ها برای یک خانواده چهار نفری است داریم :

$$|\tilde{A}| = 0.2 + 0.5 + 0.8 + 1 + 0.7 + 0.3 = 3.5$$

$$\|\tilde{A}\| = \frac{3.5}{10} = 0.35$$

کاردینالیتی یک مجموعه فازی پیوسته در فضای نامتناهی X نیز به صورت ذیل تعریف می شود:

$$|\tilde{A}| = \int_{x} \mu_{\tilde{A}}(x)dx$$

۴-۲- عملیات بیشتر بر روی مجموعه های فازی

تعریف۱-۴-۲- ضرب کارتزین مجموعه های فازی

فرض کنید $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n$ مجموعه های فازی در $X_1, X_2, ..., X_n$ باشند. ضرب کارتزین[۲۰] آن ها، یک مجموعه فازی روی فضای $X_1.X_2.X_3....X_n$ خواهد بود که تابع عضویت آن به شرح ذیل است :

$$\mu_{(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2...\tilde{A}_n)}(x) = \min_i\{\ \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \mid x = (x_1,...,x_n), x_i \in X_i\ \}$$

تعریف ۲-۴-۲- توان mام یک مجموعه فازی

توان mام مجموعه فازی $\tilde{A}$، یک مجموعه فازی خواهد بود که تابع عضویت آن به شرح ذیل است :

$$\tilde{A}^m = \{(x, \mu_{\tilde{A}^m}(x) \mid \mu_{\tilde{A}^m}(x) = [\mu_{\tilde{A}}(x)]^m, x \in X\}$$

تعریف ۳-۴-۲- جمع جبری مجموعه های فازی

جمع جبری دو مجموعه فازی، یک مجموعه فازی خواهد بود که به شرح ذیل است :

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$$

$$\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) \mid x \in X\}$$

جاییکه :

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$$

در واقع عملگر جمع جبری به عنوان یک عملگر اجتماع مجموعه های فازی می تواند استفاده شود.

تعریف ۴-۴-۲- جمع کران دار مجموعه های فازی

جمع کران دار[21] دو مجموعه فازی به صورت ذیل تعریف می شود :

$$\tilde{C} = \tilde{A} \oplus \tilde{B}$$

$$\tilde{C} = \{ (x, \mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x)) | \ x \in X \}$$

جاییکه :

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x) = \min\{ 1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) \}$$

این عملگر نیز می تواند به عنوان یک عملگر اجتماع مجموعه های فازی استفاده شود.

تعریف ۵-۴-۲- تفاضل کران دار مجموعه های فازی

تفاضل کران دار[22] دو مجموعه فازی به صورت ذیل تعریف می شود :

$$\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$$

$$\tilde{C} = \{ (x, \mu_{\tilde{A} - \tilde{B}}(x) | \ x \in X \}$$

جاییکه :

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \max\{ 0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1 \}$$

عملگر تفاضل کران دار می تواند به عنوان یک عملگر اشتراک مجموعه های فازی استفاده شود.

تعریف ۶-۴-۲- ضرب جبری مجموعه های فازی

ضرب جبری دو مجموعه فازی به صورت ذیل خواهد بود :

$$\tilde{C} = \tilde{A}.\tilde{B}$$

$$\tilde{C} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)) | \ x \in X \}$$

عملگر ضرب جبری نیز می تواند به عنوان یک عملگر اشتراک استفاده شود.

مثال (۱۳-۲)- فرض کنید مجموعه های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت ذیل تعریف شوند :

$$\tilde{A} = \{ (3,0.5), (5,1), (7,0.6) \}$$
$$\tilde{B} = \{ (3,1), (5,0.6) \}$$

با اعمال عملگرهای تعریف شده خواهیم داشت :

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \{ [(3,3),0.5],[(5,3),1],[(7,3),0.6],[(3,5),0.5],[(5,5),0.6],[(7,5),0.6] \}$$
$$\tilde{A}^2 = \{ (3,0.25),(5,1),(7,0.36) \}$$
$$\tilde{A} + \tilde{B} = \{ (3,1),(5,1),(7,0.6) \}$$
$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{ (3,1),(5,1),(7,0.6) \}$$
$$\tilde{A} - \tilde{B} = \{ (3,0.5),(5,0.6) \}$$
$$\tilde{A}.\tilde{B} = \{ (3,0.5),(5,0.6) \}$$

۵-۲- نظریه عملیات مجموعه ها

در این بخش دو طبقه از عملگرها ارزیابی می شوند. عملگرهای اجتماع و اشتراک مجموعه های فازی که به فرم های مثلثی s-norms و t-norms معروف هستند. به طور کلی عملگرهای s-norms که به اختصار عملگرهای s نامیده می شوند برای اجتماع مجموعه های فازی و عملگرهای t-norms که به اختصار عملگرهای t نامیده می شوند برای اشتراک مجموعه های فازی استفاده می شوند. در این خصوص نمادهای ذیل تعریف شده اند :

$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = S[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$: (عملگر اجتماع فازی)

$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = t[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$: (عملگر اشتراک فازی)

عملگرهای s:

اگر برای هر عملگر s، به ازای مقادیر x، y، z و w در بازه [۱و۰] روابط ذیل برقرار باشند آن گاه آن عملگر متعلق به طبقه عملگرهای s-norms خواهد بود.

1. $S[1,1]=1, S[0,x]=S[x,0]=X$

2. $S[x,y]\le S[z,w] \quad if \quad x\le z \quad and \quad y\le w$

3. $S[x,y]=S[y,x]$

4. $S[x,S[y,z]]=S[S[x,y],z]$

لازم به ذکر است که عملگر حداکثر تعریف شده در بخش (۲-۲-۲) برای اجتماع مجموعه های فازی و همین طور عملگرهای جمع جبری و جمع کران دار تعریف شده در بخش (۴-۲) که برای اجتماع مجموعه های فازی استفاده می شوند نیز جزء عملگرهای s-norms هستند و برخی از عملگرهای s-norms دیگر که اجتماع فازی را مدل می کنند به شرح ذیل است :

$$(s1)\ \ Drastic\ Sum: \quad S^D[x,y]=\begin{cases}\max(x,y), & if\ \min(x,y)=0\\ 1, & if \quad x>0 \quad and \quad y>0\end{cases}$$

$$(s_2)\ \ Hamacher\ Sum: \quad A[x,y]=\frac{x+y-2xy}{1-xy}$$

توجه: برای مجموعه های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، پارامترهای $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $\mu_{\tilde{B}}(x)$ جایگزین x و y در روابط فوق می شوند.

عملگرهای t:

اگر برای هر عملگر t، به ازای مقادیر x، y، z و w در بازه [۱و۰] روابط ذیل برقرار باشند آن گـاه آن عملگر متعلق به طبقه عملگرهای t-norms خواهد بود.

1) $t[0,0]=0 \;,\; t=[1,x]=t[x,1]=X$

2) $t[x,y]\le t[z,w] \;,\; \text{if}\quad x\le z \quad\text{and}\quad y\le w$

3) $t[x,y]=t[y,x]$

4) $t[x,\; t[y,z]]=t[t[x,y],z]$

عملگر حداقل تعریف شده جهت اشتراک مجموعه هـای فـازی در بخـش (۲-۲-۲) و همـین طـور عملگرهای ضرب جبری و تفاضل کران دار تعریف شده در بخش (۴-۲) که برای اشتراک مجموعـه های فازی استفاده مـی شـوند نیـز متعلـق بـه طبقـه عملگرهـای t-norms هسـتند و برخـی از عملگرهای t-norms دیگراشتراک مجموعه های فازی را مدل می کنند به شرح ذیل است :

(t1) Drastic product : $t^{D}[x,y] = \begin{cases} \min\ (x,y)\ , & if\ \ \max\ (x,y) = 1 \\ 0 & ,\ if\ \ x<1\ ,\ y<1 \end{cases}$

(t2) Hamacher product : $t\,[x,y] = \dfrac{xy}{x+y-xy}$

خواص عملگرهای s و t :

مهمترین خواص عملگرهایs و t به شرح ذیل طبقه بندی می شوند :

الف) عملگرهای s-norms در حد پایین به عملگر حداکثر و در حد بالا به عملگر s_1 محدود هستند. یعنی :

$$\max[\mu_A(x),\mu_B(x)] \le S[\mu_A(x),\mu_B(x)] \le S^D[\mu_A(x),\mu_B(x)]$$

ب) عملگرهای t-norms نیز در حد پایین به عملگر t_1 و در حد بالا به عملگر حداقل محدود هستند. یعنی :

$$t^D[\mu_A(x),\mu_B(x)] \le t[\mu_A(x),\mu_B(x)] \le \min[\mu_A(x),\mu_B(x)]$$

ارتباط بین عملگرهای t و s :

تبدیل عملگرهای t به s و بالعکس در فضای ($[0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$) از طریق رابطه ذیل انجام می شود :

$$t[x,y] = 1 - s[1-x, 1-y]$$

اگر مجموعه مکمل را به صورت ذیل در نظر بگیریم :

$$c[x] = 1 - x$$

آن گاه خواهیم داشت:

$$s[x,y] = c\,[\,t[c(x)\,,\,c(y)]\,]$$
$$t[x,y] = c\,[\,s[c(x)\,,\,c(y)]\,]$$

که همان قوانین عمومی دمورگان هستند.

۶-۲- توابع عضویت

نحوه ایجاد مجموعه های فازی و تعریف تابع عضویت آن ها بستگی به زمینـه و دامنـه کـاربری آن ها دارد. تعریف یک مجموعه فازی برای مفهوم مورد نظر با تعریف یک تابع عضویت مناسـب بـرای آن کامل می شود. تعریف تابع عضویت مناسب بسیار مهم است؛ زیرا اگر تابع عضویت تعریف شـده برای مجموعه فازی مناسب نباشد کلیه تحلیل و بررسی های پس از آن دچار انحراف می شوند. در ادبیات نظریه مجموعه های فازی، روش های مختلفی برای تعریف تابع عضویت معرفی شده اسـت. در ادامه ابتدا شرح مختصری از روش های تعریف تابع عضویت آورده می شـود و پـس از آن توابـع عضویت استاندارد و معروف ارایه شده در ادبیات نظریه مجموعه های فازی معرفی می شوند.

۱-۶-۲- روش های ایجاد تابع عضویت

روش های مختلف ارایه شده برای ایجاد تابع عضویت را می توان به دو طبقه عمده بـه شـرح ذیـل تقسیم نمود :

- روش های مستقیم
- روش های غیر مستقیم

هر یک از روش های فوق می توانند توسط یک خبره و یا چند خبره انجام شوند. به طـور کلـی در روش های مستقیم، فرد یا افراد خبره به سئوالاتی پاسخ می دهند که به طـور مسـتقیم منجـر بـه تعریف تابع عضویت می شود. در حالی که در روش های غیر مسـتقیم آن هـا بـه تعـدادی سـئوال ساده پاسخ می دهند که تابع عضویت با تحلیل پاسخ ها توسط یـک فـرد متخصـص و تحلیـل گـر برآورد می شود.

اگر تابع عضویت تعریف شده نتواند به طور کامل همه عناصر مجموعه فازی را پوشش دهد موجه نیست. لذا برای حصول اطمینان از موجه بودن تابع عضویت لازم است درجه عضویت برخی از عناصر توسط یک یا چند فرد خبره بررسی شود. این امر می تواند با پاسخ به سئوالات ذیل انجام شود :

- درجه عضویت عنصر X در مجموعه فازی چیست ؟
- درجه سازگاری عنصر X با عبارت کلامی مورد نظر مجموعه فازی چیست ؟

سئوالات فوق می توانند به صورت معکوس نیز مطرح شوند :

- کدام عنصر دارای درجه عضویت $\mu(x)$ در مجموعه فازی خواهد بود؟
- درجه سازگاری کدام عنصر با عبارت کلامی مورد نظر مجموعه فازی، $\mu(x)$ است ؟

اگر تعداد عناصر مجموعه فازی کم باشد به طوری که امکان پاسخ به سئوالات و تعیین درجه عضویت همه عناصر ممکن باشد، آن گاه برای کلیه عناصر با روش فوق درجه عضویت تعیین می شود. اما اگر تعداد عناصر مجموعه فازی زیاد یا این که مجموعه فازی مورد نظر پیوسته باشد آن گاه برای یک تعداد از عناصر مجموعه با روش فوق درجه عضویت تعیین شده و برای سایر اعضاء با برازش منحنی مناسب، تابع عضویت به دست می آید.

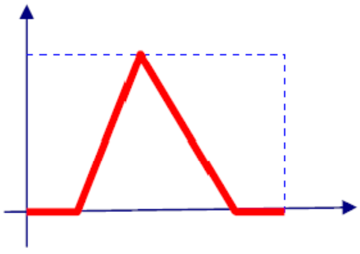
۲-۶-۲- توابع عضویت استاندارد

در ادبیات نظریه مجموعه های فازی، چند تابع عضویت به طور استاندارد معرفی شده و کاربرد های بسیاری در عمل داشته اند که در ادامه معرفی می شوند.

تابع عضویت مثلثی :

تابع عضویت مثلثی[۲۳] توسط سه پارامتر $\{a,b,c\}$ تعریف می شود که به شرح ذیل است :

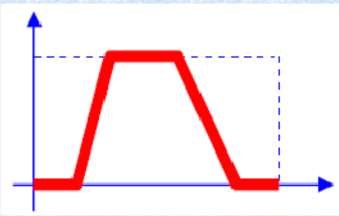
$$trn(x:a,b,c)=\begin{cases}0 & ,x<a\\ (x-a)/(b-a) & ,a\le x\le b\\ (c-x)/(c-b) & ,b\le x\le c\\ 0 & ,x>c\end{cases}$$



تابع عضویت ذوزنقه ای :

تابع عضویت ذوزنقه ای[۲۴] توسط چهار پارامتر $\{a,b,c,d\}$ به شرح ذیل تعریف می شود :

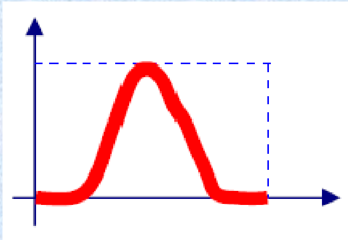
$$trp(x:a,b,c,d)=\begin{cases}0 & ,x<a\\ (x-a)/(b-a) & ,a\le x<b\\ 1 & ,b\le x<c\\ (d-x)/(d-c) & ,c\le x<d\\ 0 & ,x>d\end{cases}$$



تابع عضویت گوسی:

تابع عضویت گوسی[۲۵] با دو پارامتر $\{ a,\sigma \}$ به شرح ذیل تعریف می شود:

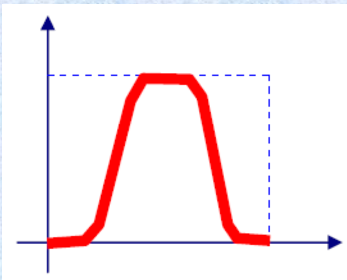
$$gsn(x:a,\sigma)=\exp\left(\frac{-(x-a)^2}{\sigma^2}\right)$$



تابع عضویت زنگوله ای:

تابع عضویت زنگوله ای[۲۶] با سه پارامتر $\{ a,b,\sigma \}$ به شرح ذیل تعریف می شود:

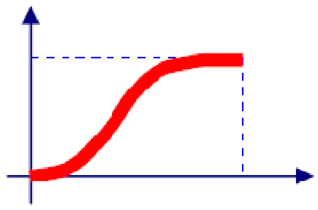
$$bll(x:a,b,\sigma)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-\sigma}{a}\right|^{2b}}$$



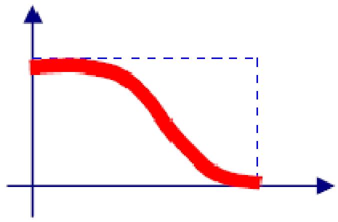
تابع عضویت سیگمویدال :

تابع عضویت سیگمویدال[۲۷] با دو پارامتر a و b به شرح ذیل تعریف می شود:

$$Sgm\ (x : a, b) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}$$



شکل (۲۵-۲ الف) تابع عضویت افزایشی



شکل (۲۵-۲ ب) تابع عضویت کاهشی

۷-۲- انواع مجموعه های فازی

مجموعه فازی تعریف شده در بخش (۲-۲) تنها یکی از انواع مختلف مجموعه های فازی است که مجموعه فازی نوع معمولی نامیده می شود. برای یک مجموعه جهانی X، هر مجموعه فازی معمولی ($\tilde{A}$) به صورت ذیل تعریف می شود :

$$\tilde{A} : X \to [0,1]$$

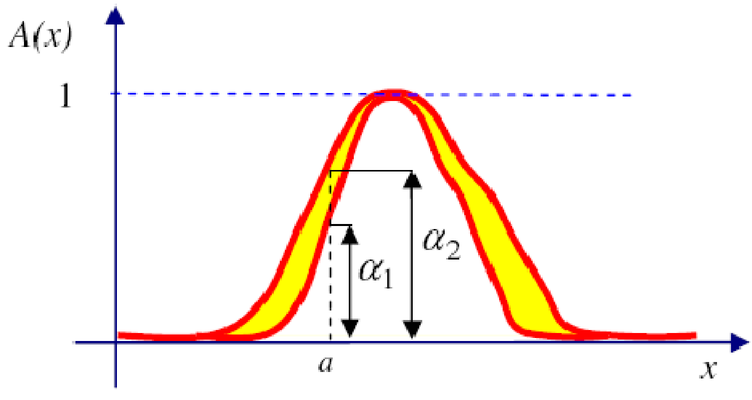
درجه عضویت هر عنصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ ، عددی بین صفر و یک خواهد بود. این نوع مجموعه فازی، یکی از پرکاربردترین انواع مجموعه های است که در ادبیات نظریه مجموعه های فازی و کاربردهای آن معرفی شده است. اما در حالت عمومی، انواع دیگر مجموعه های فازی در ادبیات معرفی شده اند که در ادامه برخی از آن ها تشریح می گردد.

اولین دلیل برای عمومی کردن و توسعه مجموعه فازی معمولی، فرض دقیق و قطعی بودن درجه های عضویت در آن ها است. زیرا لازم است برای هر عنصر مجموعه فازی یک عدد حقیقی بین صفر و یک به عنوان درجه عضویت تخصیص یابد. این فرض در برخی از مفاهیم و زمینه ها ممکن

است عملی نباشد. به طوری که تعیین یک عدد حقیقی بین صفر و یک برای درجه عضویت ممکن است بسیار دشوار باشد، در حالی که می توان یک بازه با دو حد پایین و بالا برای آن تعریف کرد. در این حالت می توان دو رویکرد در نظر گرفت. رویکرد اول در نظر گرفتن عدد میانه بازه تعیین شده برای درجه عضویت است. رویکرد دوم در نظر گرفتن بازه تعریف شده با دو حد پایین و بالا به عنوان درجه عضویت هر عنصر است. مجموعه فازی که با رویکرد دوم به دست می آید، مجموعه فازی بازه ای نامیده می- شود و به صورت ذیل تعریف می شود :

$$\tilde{A}: X \to \varepsilon([0,1])$$

$\varepsilon([0,1])$ بیانگر مجموعه همه بازه های بسته ای است که روی اعداد حقیقی بین صفر و یک



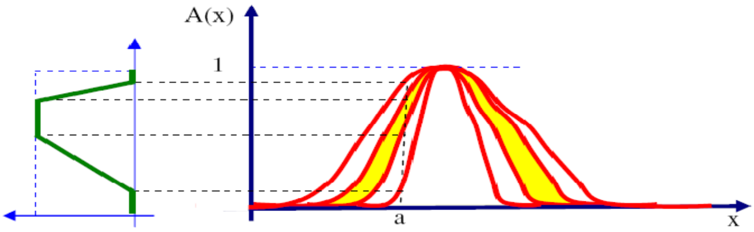
شکل (۲۶-۲)- یک نمونه از مجموعه فازی بازه ای

$$A(a) = [\alpha_1 , \alpha_2]$$

مجموعه های فازی بازه ای می توانند بیشتر عمومی تر شوند به گونه ای که درجه های عضویت به صورت فازی تعریف شوند. در واقع درجه عضویت هر عنصر در مجموعه فازی، خود می توانـد یـک مجموعه فازی باشد. به این نوع از مجموعه های فازی، مجموعه های فازی نوع دوم گفته می شـود که به صورت ذیل تعریف می شود :

$$\widetilde{A}: X \to \Psi([0,1])$$

جاییکه، $\Psi([0,1])$ مجموعه تمام مجموعه های فازی معمـولی روی فضـای بسـته $[0,1]$ اسـت.



شکل (۲-۲۷)- مفهوم مجموعه های فازی نوع دوم

یک رویکرد دیگر عمومی تر کردن مجموعه های فازی معمولی، این است که عناصر مجموعه هـای فازی معمولی، خود مجموعه فازی باشند. به این نوع از مجموعه های فـازی، مجموعـه هـای فـازی سطح دوم گفته می شود که تابع عضویت آن ها اعداد حقیقی بین صفر تا یـک و بـه صـورت ذیـل است :

$$\widetilde{A}: \gamma(X) \to [0,1]$$

جاییکه، $\gamma(X)$ مجموعه تمام مجموعه های فازی معمولی عناصر X است.