آمار و احتمالات مهندسی

توزیع‌های گسسته و پیوسته مهم

دکتر بهناز بیگدلی

دانشکده مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی شاهرود

ساختار درس

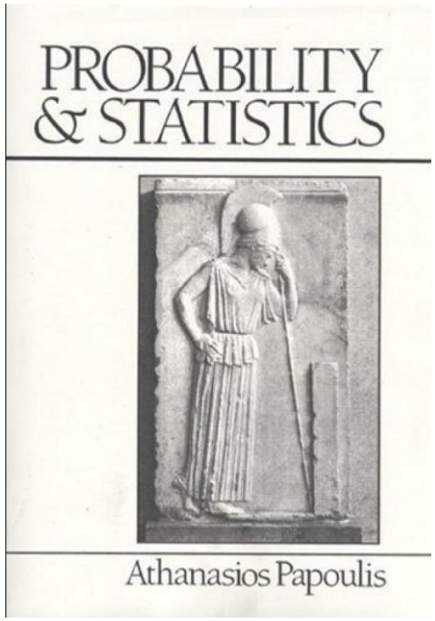
نحوه ارزیابی

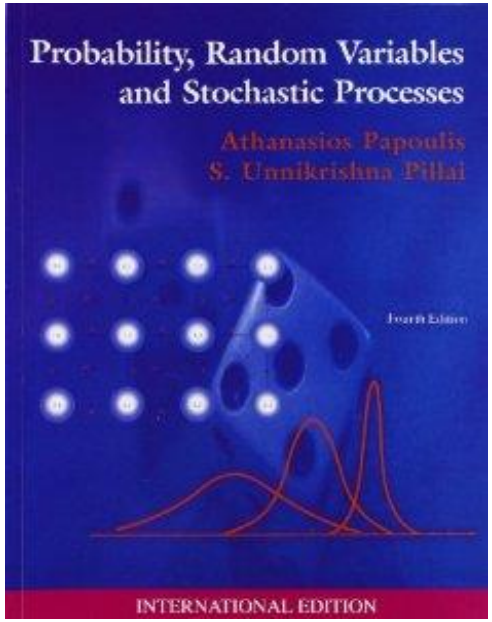
امتحان پایان ترم (۱۴)

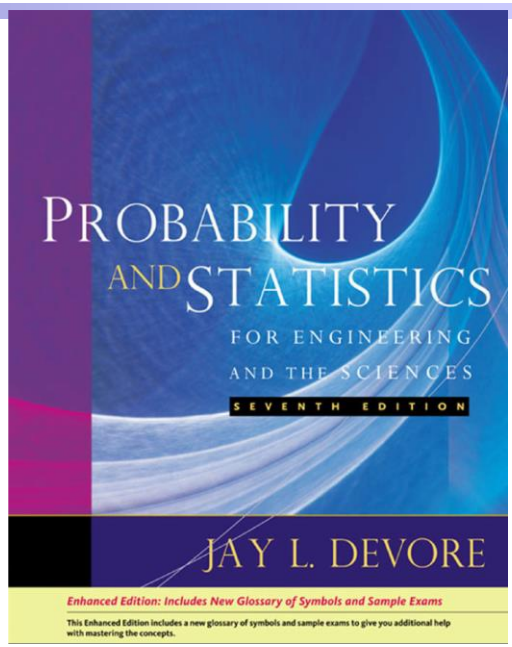
امتحان میان ترم (۴)

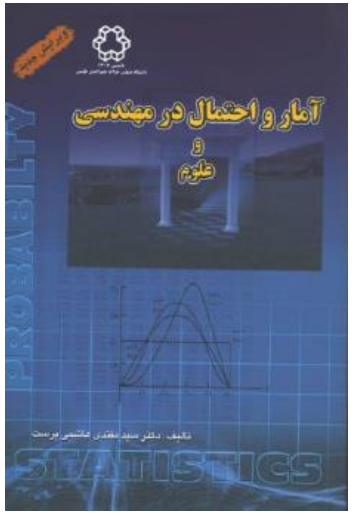
تمرینات و کوئیزها (۲)

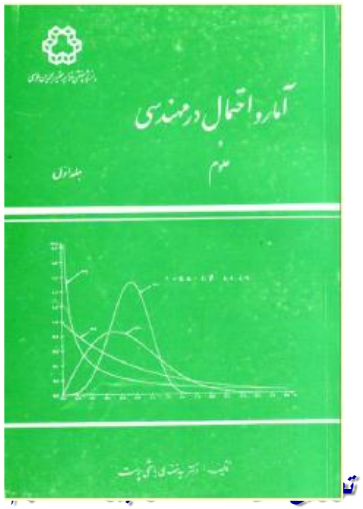
منابع


PROBABILITY
& STATISTICS
Athanasios Papoulis


Probability, Random Variables
and Stochastic Processes
Athanasios Papoulis
S. Unnikrishna Pillai
Fourth Edition
INTERNATIONAL EDITION


PROBABILITY
AND STATISTICS
FOR ENGINEERING
AND THE SCIENCES
SEVENTH EDITION
JAY L. DEVORE
Enhanced Edition: Includes New Glossary of Symbols and Sample Exams
This Enhanced Edition includes a new glossary of symbols and sample exams to give you additional help with mastering the concepts.


آمار و احتمال در مهندسی
و
علوم


آمار و احتمال در مهندسی

فهرست و عناوین درس

میان ترم

I. بخش اول: آمار مقدماتی (توصیفی)

1. آمار مقدماتی
2. اندازه‌گیری پراکندگی، گشاورها، چولگی و کشیدگی
3. برازش خط و منحنی بر داده‌ها
4. توزیع‌های دو بعدی و ضریب همبستگی

II. احتمال

1. احتمال و فضای نمونه
2. فضای نمونه با عناصر متعدد
3. احتمالات شرطی و نابستگی

پایان ترم

4. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و امید ریاضی
5. توزیع‌های گسسته
6. توزیع‌های پیوسته مهم
7. نظریه برآورد
8. آزمون‌های فرض

توزیع‌های گسسته و پیوسته مهم

فهرست مطالب این فصل:

۱- توابع احتمال خاص گسسته

۲- توابع چگالی احتمال خاص پیوسته

توابع احتمال خاص گسسته

- در این بخش توابع احتمال
  - یکنواخت
  - برنولی
  - دوجمله‌ای
  - دو جمله‌ای منفی
  - هندسی
  - فوق هندسی
  - پواسون
  - سری لگاریتمی
  - سری لگاریتمی مارکف
- با ارائه الگو معرفی می‌شود.

تابع احتمال یکنواخت

- متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال یکنواخت با پارامتر k است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد: $X \sim DU(k)$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{k} \qquad x = 1,2,\ldots,k$$

- الگو: جعبه‌ای شامل کلیدها با شماره‌های ۱ تا k است. اگر هم شانس بودن را برای همه شماره‌ها یکسان درنظر بگیریم و تعریف کنیم
- X شماره کلیدهای خارج شده باشد آنگاه X دارای تابع چگالی احتمال یکنواخت گسسته است.

تابع احتمال یکنواخت- پارامترها

$$E(X)=\sum_{x=1}^{k} xf(x)=\sum_{x=1}^{k} x.\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x=\frac{k+1}{2}$$

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{k} x^2 f(x)=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x^2=\frac{1}{k}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{(k+1)^2}{4}=\frac{k^2-1}{12}$$

$$M_X(t)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e^{tx_i}=\frac{e^t(1-e^{kt})}{k(1-e^t)}$$

$$F(X)=\begin{cases} 0 & x<x_1 \\ \frac{i}{k} & x_i<x<x_{i+1} \\ 1 & x\geq x_k \end{cases}$$

تابع احتمال برنولی (دو نقطه‌ای)

- ✓ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال برنولی با پارامتر (شانس) p است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد. $X \sim B(1,p)$

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x = 0,1$$

- ✓ الگو: جعبه‌ای شامل کلیدهایی از نوع دست دوم و نو با نسبت‌های p-1 و p است. یک کلید به تصادف از جعبه خارج کنیم و اگر متغیر X را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{اگر صفحه کلید خارج شده دست دوم باشد} \\ 1 & \text{اگر صفحه کلید خارج شده نو باشد} \end{cases}$$

آنگاه X دارای تابع برنولی است.

تابع احتمال برنولی (دو نقطه‌ای) – پارامترها

$$f(x) = p(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad x = 0,1$$

$$E(X) = \mu = p$$

$$Var(X) = \sigma^2 = p(1-p)$$

$$M_X(t) = 1 - p + pe^t$$

تابع احتمال برنولی (دو نقطه‌ای)

- ✓ مثال: فرض کنید پاسخ گویی به یک سوال دارای شانس ۰/۲۵ باشد اگر سوالی را به تصادف انتخاب کنیم و متغییر تصادفی X دارای دو حالت صحیح پاسخ گفتن و غلط پاسخ گفتن باشد، واریانس این متغیر تصادفی را حساب کنید.

- ✓ جواب:

$$Var(X) = p(1-p) = 0.25 \times (1-0.25) = \frac{3}{16}$$

تابع احتمال دوجمله‌ای

- متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال دوجمله‌ای با پارامترها n و p است. اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد. . $X \sim B(n,p)$

$$f(x) = p(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

- الگو: جعبه‌ای شامل صفحه کلیدهای از نوع دست دوم و نو با نسبت‌های p و $p-1$ است. از این جعبه در شرایط یکسان و به تصادف n صفحه کلید یکی یکی و با جایگذاری خارج می‌کنیم و اگر تعریف کنیم
- X : تعداد صفحه کلیدهای نو خارج شده آنگاه X دارای توزیع دوجمله‌ای است.

ویژگی‌های توزیع دوجمله‌ای

۱-
$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=[p+(1-p)]^n=1$$

۲- دارای نمای منحصر به فرد است.

۳- برای $n=1$ تابع چگالی احتمال دو جمله‌ای همان تابع احتمال برنولی است.

۴- دارای میانگین np و واریانس $np(1-p)$ است.

۵-
$$f(x)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x f(0)$$

۶-
$$M_X(t)=(1-p+pe^t)^n$$

۷- برای مقادیر مختلف n, p می‌توان از جداول موجود مقدار $F(x)$ را محاسبه کرد.

حالت خاص نمایش توزیع دوجمله‌ای

- اگر در توزیع دوجمله‌ای پارامتر $p=0.5$ باشد، توزیع دوجمله‌ای به شکل زیر در خواهد آمد.

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{\binom{n}{x}}{2^{n}}$$

- مثال: اگر تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $f(x) = \binom{50}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ باشد، میانگین و واریانس این متغیر را حساب کنید.
- جواب: $n=50$, $p=0.5$

$$E(X) = np = 50 \times 0.5 = 25,$$
$$Var(X) = np(1-p) = 50 \times 0.5 \times 0.5 = 12.5$$

تابع احتمال دو جمله‌ای منفی (پاسکال)

- ✓ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال دو جمله‌ای منفی با پارامتر r و p است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد. . $X \sim NB(r,p)$

$$f(x) = p(X = x) = \binom{x+r-1}{r-1} p^r (1-p)^x \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

ویژگی‌های توزیع دوجمله‌ای منفی

۱-

$$\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+r-1}{r-1}p^r(1-p)^x=\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+r-1}{x}p^r(1-p)^x=p^r p^{-r}=1$$

۲- دارای میانگین $\frac{r(1-p)}{p}$ و واریانس $\frac{r(1-p)}{p^2}$ است.

تابع احتمال دو جمله‌ای منفی (پاسکال)

- ✓ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال دو جمله‌ای منفی با پارامتر r و p است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد. $X \sim NB(r,p)$

$$f(x) = p(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \qquad x = r, r+1, r+2, \ldots$$

X : تعداد آزمایش‌های مستقل برنولی تا رسیدن به rامین موفقیت

ویژگی‌های توزیع دوجمله‌ای منفی

۱- دارای میانگین

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

۲- دارای واریانس

$$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

۳- دارای تابع مولد

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$$

تابع احتمال هندسی

- متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال هندسی با پارامتر p است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد. $X \sim Ge(p)$

$$f(x) = p(X = x) = p(1-p)^{x-1} \qquad x = 1,2,\ldots$$

- حالت خاص از توزیع دوجمله‌ای منفی است با $r=1$ ، یعنی بخواهیم تعداد آزمایش‌ها تا رسیدن به اولین موفقیت را مشخص کنیم.

ویژگی‌های توزیع هندسی

۱- این توزیع فاقد حافظه است یعنی

$$p[X \geq s+t \mid X \geq t] = p[X \geq s]$$

۲- دارای میانگین $\frac{1}{p}$ و $\frac{1-p}{p^2}$ واریانس است.

۳-

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x = 1$$

۴- دارای تابع مولد

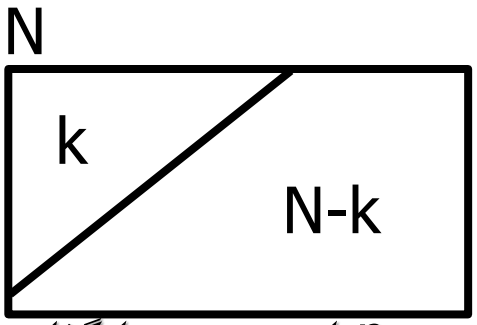
$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

تابع احتمال فوق هندسی

✓ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال فوق هندسی با پارامترهای N، k و n است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = P[X = x] = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

$$x \le k, \qquad n - x \le N - k$$



نمونه nتایی بدون جایگذاری

✓ X: تعداد موفقیت‌ها در انجام n بار آزمایش غیرمستقل

ویژگی‌های توزیع فوق هندسی

۱-

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x} = \binom{N}{n}$$

۲-دارای میانگین $\frac{nk}{N}$ و واریانس $\left(\frac{nk}{N}\right)\left(\frac{N-k}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ است.

تابع احتمال فوق هندسی

✓ مثال: از بین ۱۰ نفری که متقاضی استخدام هستند، سه نفر قادر به انجام کار هستند. دو نفر بطور تصادفی انتخاب میکنیم. احتمال آنکه هر دو قادر به انجام کار باشند، کدام است.

✓ جواب:

$$N = 10, k = 3, n = 2$$

$$f(x) = P[X = 2] = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}$$

تابع احتمال پواسون

- متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال پواسون با پارامتر λ است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد. $X \sim P(\lambda)$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

- λ: متوسط تعداد اتفاقات نادر در یک فاصله زمانی یا در یک مکان است.

ویژگی‌های توزیع پواسن

۱-

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!}=1$$

۲- دارای نمای منحصر به فرد است.

۳- دارای میانگین λ و واریانس λ است.

۴- برای مقادیر مختلف λ می‌توان از جدول ضمیمه مقدار $F(x)$ را محاسبه کرد.

۵- تابع مولد آن به شکل زیر است.

$$M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

تابع احتمال پواسون

✓ مثال: بطور متوسط با توزیع پواسون در هر ساعت دوازده ماشین برای بنزین زدن به پمپ مراجعه می‌نمایند. احتمال آنکه در ۱۵ دقیقه ۳ ماشین مراجعه کنند، چقدر است؟

✓ جواب:

ماشین	دقیقه
12	60
$\lambda = 3$	15

$$P(X=3)=\frac{e^{-3}3^3}{3!}=4.5e^{-3}$$

تابع احتمال سری لگاریتمی

- ✓ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال سری لگاریتمی با پارامتر α است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{-1}{\ln(1-\alpha)} \frac{\alpha^x}{x} \qquad x = 1,2,\ldots$$

تابع احتمال سری لگاریتمی مارکف

- ✓ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال سری لگاریتمی مارکف با پارامتر α و β است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{-1}{\ln(1-\alpha)} \cdot \frac{(1-\beta)^x - \left[1 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right]^x}{x} \qquad x = 1,2,\ldots$$

ویژگی‌های توزیع سری لگاریتمی مارکف

۱- برای β=۱-α توزیع سری لگاریتمی مارکف به توزیع سری لگاریتمی تبدیل می‌شود.

۲- دارای میانگین $\frac{-\alpha}{\beta \ln(1-\alpha)}$ است.

مثال: طول نوبت بارندگی دارای توزیع سری لگاریتمی مارکف با α =۰/۶۳ و β =۰/۳ است مطلوبست:

الف- احتمال اینکه طول نوبت بارندگی برابر با ۱ باشد.

ب- احتمال اینکه طول نوبت بارندگی حداکثر ۲ باشد.

$$f(x)=P(X=x)=\frac{-1}{\ln(1-0.63)}\cdot\frac{(1-0.3)^x-\left[1-\frac{0.3}{1-0.63}\right]^x}{x} \longrightarrow f(1)=0.514$$

$$f(x\le 2)=f(1)+f(2)=0.514+0.228=0.742$$

توزیع‌های مهم گسسته

نام	توزیع	میانگین μ	واریانس σ^2	تابع مولد گشتاور $M_X(t)$
یکنواخت	$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{k} \\ x = x_1, \dots, x_n \end{cases}$	$\frac{k+1}{2}$	$\frac{k^2-1}{12}$	$\frac{e^t(1-e^{kt})}{k(1-e^t)}$
برنولی	$\begin{cases} f(x;p) = p^x(1-p)^{(1-x)} \\ x = 0, 1 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$[1+p(e^t-1)]$
دوجمله ای	$\begin{cases} b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{(n-x)} \\ x = 0, 1, \dots, n \end{cases}$	np	$np(1-p)$	$[1+p(e^t-1)]^n$

توزیع‌های مهم گسسته

دوجمله ای منفی	$\begin{cases} b^*(x;k,p) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{(x-k)} \\ x = k, k+1, k+2, \dots \end{cases}$	$\frac{k}{p}$	$\frac{k}{p}(\frac{1}{p} - p)$	$(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t})^k$
هندسی	$\begin{cases} g(x;p) = p(1-p)^{(x-1)} \\ x = 1,2,3, \dots \end{cases}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
فوق هندسی	$\begin{cases} h(x;M,N,K) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-k}{M-x}}{\binom{N}{M}} \\ x = 0,1,\dots,M, \quad x \le K; \\ M - x \le N - K \end{cases}$	$\frac{MK}{N}$	$\frac{MK(N-K)(N-M)}{N^2(\mathrm{N}-1)}$	
پواسون	$\begin{cases} P(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ x = 0,1,2, \dots \end{cases}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$

توابع چگالی احتمال خاص پیوسته

- در این بخش توابع چگالی احتمال
  - یکنواخت پیوسته
  - نرمال
  - نرمال استاندارد
  - نمایی
  - گاما
  - کی‌دو
  - بتا
  - استیودنت و
  - فیشر
  - ویشارت
- ارائه می‌شود.

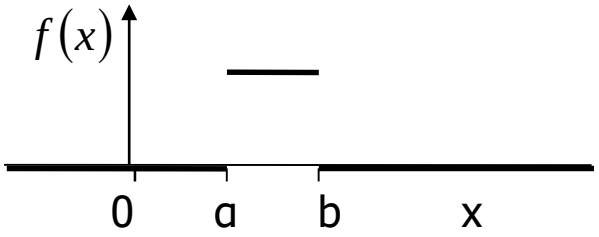
تابع احتمال یکنواخت (مستطیلی)

- ✓ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال یکنواخت با پارامترهای a و b است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a < x < b$$

ویژگی‌های تابع چگالی احتمال یکنواخت

۱- نمودار $f(x)$ برای $-\infty < a < b < \infty$ به صورت زیر است.



۲- تابع توزیع $F(x)$ برابر است با:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

۳- تابع مولد گشتاور

$$M_X(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

ویژگی‌های تابع چگالی احتمال یکنواخت

۴- دارای میانگین $\frac{a+b}{2}$ و $\frac{(b-a)^2}{12}$ واریانس است.

۵- برای $a=1$، $b=1$ تابع $f(x)$ را روی بازه $(0,1)$ گویند و آن را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$f(u)=1 \qquad 0<u<1$$

$$f(u)=I_{(0,1)}^{(u)}$$

که $I_{(0,1)}^{(u)}$ را تابع نشانگر گویند.

ذکر این نکته ضروری است که تابع توزیع هر متغیر تصادفی همانند $0<u<1$ و $F(u)$ عمل می کند چون $F(+\infty)=1$ ، $F(-\infty)=0$ پس $u=F(x)$ است. از این خاصیت در آمار برای شبیه سازی متغیرهای تصادفی استفاده می‌کنند.

تابع احتمال نرمال

- ✓ متغیر تصادفی نرمال یکی از توزیع های مهم آماری در حالت پیوسته است. متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

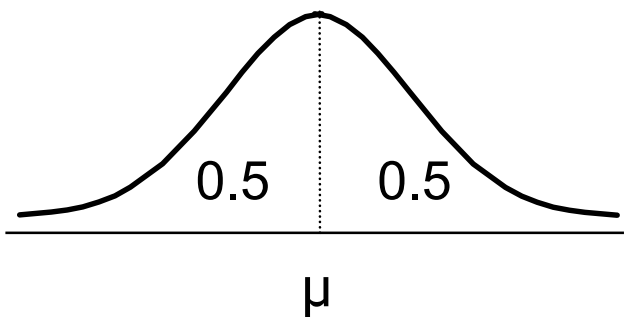
$$\sigma > 0$$

μ و σ^2 پارامترهای توزیع نرمال هستند.

ویژگی‌های توزیع نرمال

۱- این توزیع نسبت به محور $y=\mu$ دارای تقارن است.

۲- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$



۳- $$P[X \le \mu] = P[X \ge \mu] = 0.5$$

۴- برای $\mu=0$ و $\sigma^2=1$ ، توزیع نرمال را توزیع نرمال استاندارد گویند.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

۵- $$M_X(t) = e^{\mu t + 0.5\sigma^2 t^2}$$

تابع احتمال نرمال استاندارد

- متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < Z < \infty$$

- همانطور که ملاحظه می‌کنید این توزیع فاقد پارامتر است و برای راحتی متغیر نرمال استاندارد را با Z نمایش می‌دهند. در حقیقت Z همان متغیر X است با میانگین صفر و واریانس یک.

$$f(x) = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < z < \infty$$

- مقادیر مختلف $F(x)$ را می‌توان با توجه به ویژگی Z از جداول ضمیمه بدست آورد که

$$F(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

- متغیر تصادفی نرمال استاندارد نسبت به محور دارای تقارن است. یعنی:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{2}$$

تابع احتمال نرمال استاندارد

✓ اگر X دارای توزیع نرمال $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ باشد خواهیم داشت.

$$P(a < x < b) = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

✓ رابطه بین مقادیر منفی در توزیع نرمال

$$F(-x) = 1 - F(x)$$

✓ گشتاور مرکزی در توزیع نرمال

$$\mu_{2k} = \frac{\sigma^{2k} \times (2k)!}{2^k \times k!}$$

تابع احتمال نرمال

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

$$1)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

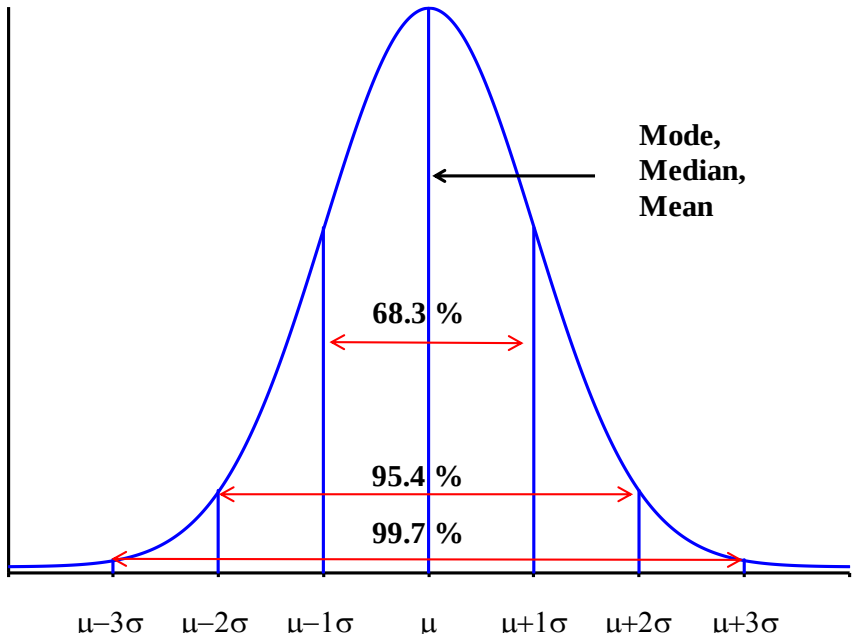
$$2)\ f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

$$3)\ \operatorname{Arg}[Max(f(x))] = \mu$$

$$4)\ F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$5)\ f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2}; -\infty < z < +\infty \rightarrow z \sim N(0,1)$$

تابع احتمال نرمال



$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.683$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954$$

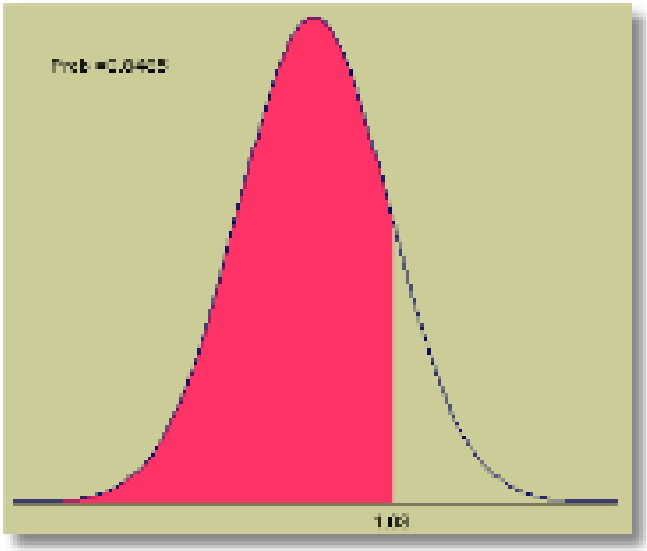
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$$

تابع احتمال نرمال

TABLE G.1 Cumulative Normal Distribution. Table Entry Is $\Phi(z) = \text{Prob}[Z \le z]$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

$P(z \le 1.03) = .8485$

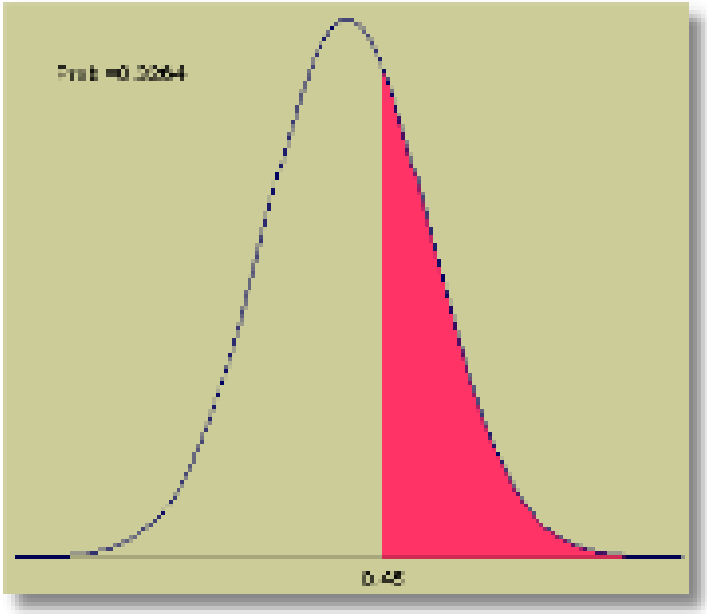


تابع احتمال نرمال

TABLE G.1 Cumulative Normal Distribution. Table Entry Is $\Phi(z) = \text{Prob}[Z \le z]$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

$P(z \ge 0.45) = 1 - .6736$

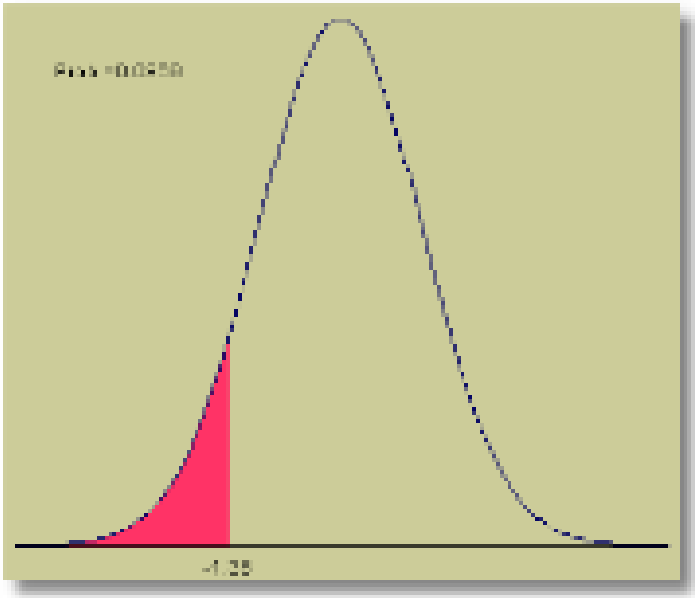


تابع احتمال نرمال

$$P(z < -1.36) = P(z \geq +1.36)$$
$$= 1 - .9131$$
$$= .0869$$

TABLE G.1 Cumulative Normal Distribution. Table Entry Is $\Phi(z) = \text{Prob}[Z \leq z]$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

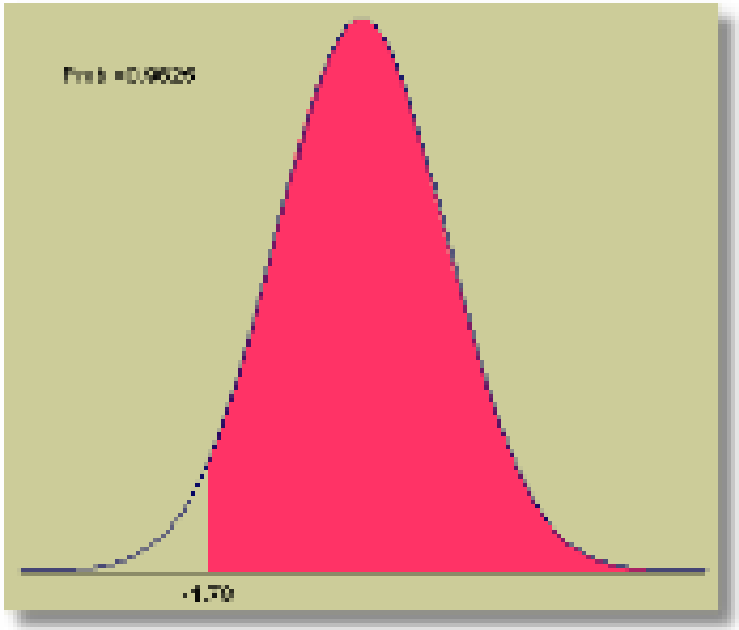


تابع احتمال نرمال

$P(z \geq -1.78) =$
$P(z \leq +1.78) = .9625$

TABLE G.1 Cumulative Normal Distribution. Table Entry Is $\Phi(z) = \text{Prob}[Z \leq z]$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

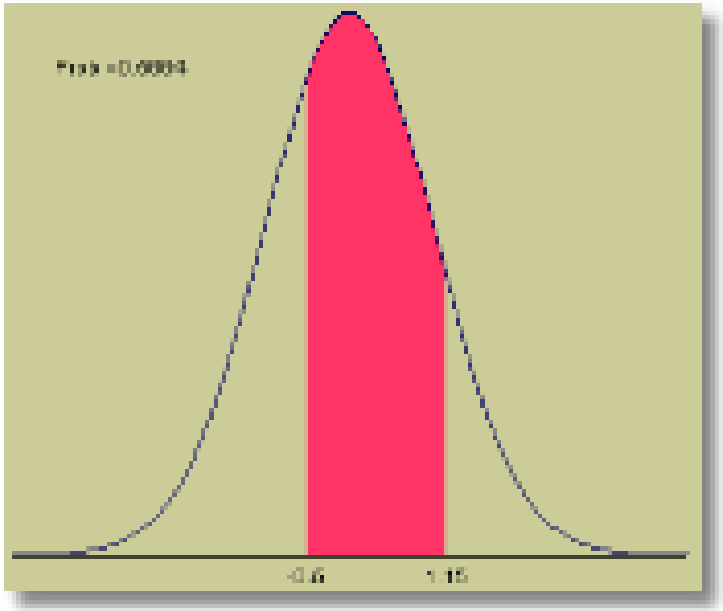


تابع احتمال نرمال

$$P(-.5 \le z \le 1.15) = P(z \le 1.15) - P(z \le -.5) = .8749 - (1 - .6915) = .5664$$

TABLE G.1 Cumulative Normal Distribution. Table Entry Is $\Phi(z) = \text{Prob}[Z \le z]$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

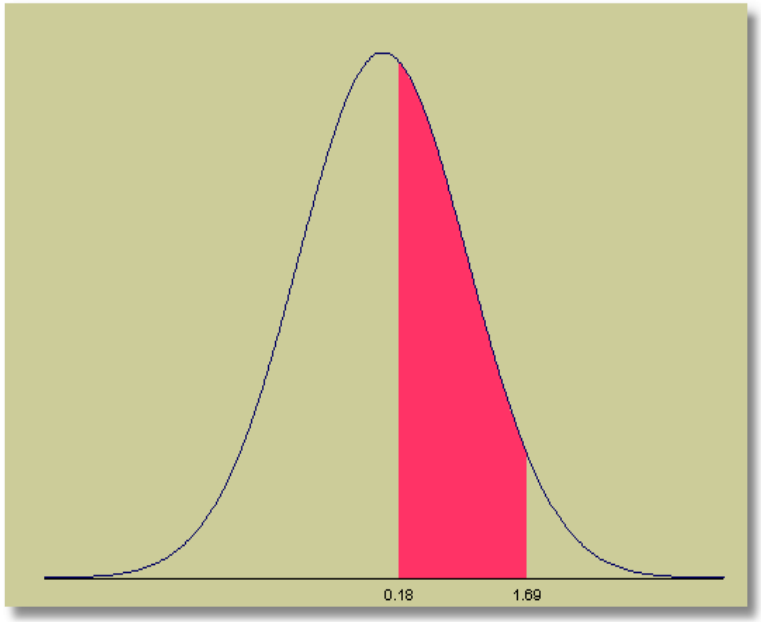


تابع احتمال نرمال

$$P(0.18 \leq z \leq 1.67) = P(z \leq 1.67) - P(z \leq 0.18) = 0.9525 - 0.5714 = 0.3811$$

TABLE G.1 Cumulative Normal Distribution. Table Entry Is $\Phi(z) = \text{Prob}[Z \leq z]$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990



تابع احتمال نرمال استاندارد

✓ مثال: فرض کنیم متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با $X \sim N(1,4)$ باشد. احتمال انکه قدرمطلق X از ۴ بزرگتر باشد چقدر است؟

$$P(|x| > 4) = P(x < -4) + P(x > 4)$$

✓ جواب:

$$= P\left(Z < \frac{-4-\mu}{\sigma}\right) + P\left(Z > \frac{4-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{-4-1}{2}\right) + P\left(Z > \frac{4-1}{2}\right)$$

$$= F\left(-\frac{5}{2}\right) - F\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{5}{2}\right) + 1 - F\left(\frac{3}{2}\right) = 0.0730$$

تابع چگالی احتمال نمایی

- متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال نمایی با پارامتر θ است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \theta\, e^{-\theta x} \qquad x > 0 \;, \quad \theta > 0$$

- توزیع نمایی کاربردهای مهمی دارد. از جمله در مدل‌های صف‌بندی، می‌توان نشان داد که زمان انتظار مابین ورودی‌های متوالی از توزیع نمایی پیروی می کند.

ویژگی‌های توزیع نمایی

۱-

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1 - e^{-\theta x}$$

۲- فاقد حافظه است.

$$P[X > s + t \mid X > t] = P(X > s)$$

۳- دارای میانگین $\frac{1}{\theta}$ و واریانس $\frac{1}{\theta^2}$ است.

۴- تابع مولد گشتاور

$$M_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}$$

۴- اگر u دارای توزیع یکنواخت روی $(0,1)$ باشد آنگاه $-\ln(u)$ دارای توزیع نمایی با $\theta = ۱$ است.

ویژگی‌های توزیع نمایی

✓ مثال: بطور متوسط ۵۰ تصادف رانندگی در یک ساعت رخ می‌دهد. احتمال آنکه حداقل ۲ دقیقه طول بکشد تا تصادف بعدی رخ دهد، کدام است؟

✓ جواب: ابتدا باید مقدار پارامتر θ را محاسبه کنیم.

دقیقه	تصادف
60	50
$\theta = ?$	1

$$\theta = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{5}{6}e^{-\frac{5}{6}x} \quad \rightarrow P(X \geq 2) = \int_2^{\infty} \frac{5}{6} e^{-\frac{5}{6}x} dx = e^{-\frac{5}{3}}$$

تابع چگالی احتمال گاما

- متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال گاما با پارامترهای α و β است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد. $X \sim Gamma(\alpha,\beta)$

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad , x \geq 0 \ , \alpha, \beta \geq 0$$

- حالت خاص: برای $\alpha=1$ ، $\beta = 1/\theta$ توزیع گاما به توزیع نمایی تبدیل می‌شود. تابع چگالی احتمال گاما باتوجه به ویژگی تابع گاما تعریف می‌شود.

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx = (\beta-1)\Gamma(\beta-1)$$

$$\beta \in \mathrm{N} \Rightarrow \Gamma(\beta) = (\beta-1)!$$

ویژگی‌های توزیع گاما

۱-

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{1}{i!}(\beta x)^i e^{-\beta x}$$

۲- دارای میانگین α/β و واریانس α/β^2 است.

۳- تابع مولد گشتاور

$$M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$$

ویژگی‌های توزیع گاما

مثال :

در یک شهر مصرف برق روزانه دارای توزیع گاما با α=۳ و β=۲ است. اگر ظرفیت روزانه ۱۲میلیون کیلووات ساعت باشد. احتمال اینکه برق موجود برای یک روز کافی باشد چقدر است؟

$$P(X \le 12) = F(12) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i!}(2*12)^i e^{-2*12} = 0.849$$

تابع چگالی احتمال ارلنگ

- متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال ارلنگ با پارامترهای α و β است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد. $X \sim Erlang(\alpha,\beta)$

$$f_X(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{(\alpha-1)!} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad , x \geq 0 \ , \alpha, \beta \geq 0$$

- حالت خاص: همان تابع توزیع گاما در حالتی است که $\alpha \in \mathrm{N}$ است

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\beta x)^i}{(i)!}$$

تابع چگالی احتمال کی دو

- متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال کی‌دو با پارامتر r است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-x/2} \qquad x > 0 \ , \quad r = 1,2,3,\ldots$$

- توزیع کی دو حالت خاص توزیع گاما است. $\left(\alpha = \frac{r}{2}, \quad \beta = 2\right)$

ویژگی‌های توزیع کی دو

۱- r را درجه آزادی توزیع گویند.

۲- دارای میانگین r و واریانس $2r$ است.

۳- $$F(x) = P(X \le x) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{x}{2}\right)^i e^{-x/2}$$

۴- مقادیر مختلف $F(x)$ را می‌توان برای مقادیر مختلف r از جداول ضمیمه بدست آورد.

۵- مولد گشتاور $$M_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}$$

تابع چگالی احتمال بتا

- ✓ متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال بتا با پارامترهای α و β است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} \qquad 0 < x < 1\ , \quad \alpha > 0\ , \quad \beta > 0$$

ویژگی‌های توزیع بتا

۱-

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

۲- برای $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ توزیع بتا به توزیع یکنواخت پیوسته تبدیل می‌شود.

۳- دارای میانگین $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ و واریانس $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$ است.

تابع چگالی احتمال استودنت (توزیع t)

✓ متغیر تصادفی X دارای توزیع t با پارامتر r است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد. $X \sim t(r)$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{(r+1)}{2}\right]}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{r}\right)^{\left(\frac{r+1}{2}\right)}} \qquad -\infty < x < \infty \quad , \quad r > 0$$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X^2}{r}}} \sim t(r)$$

ویژگی‌های تابع چگالی احتمال استودنت (توزیع t)

۱-

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

۲- برای $r<1$ دارای میانگین صفر و برای $r<2$ دارای واریانس $\frac{r}{r-2}$ است.

۳- در توزیع استودنت اگر درجه آزادی r از حد تصور بزرگتر باشد توزیع، بر توزیع نرمال استاندارد منطبق می‌شود.

۴- مقادیر مختلف $F(x)$ برای مقادیر مختلف درجه آزادی r از جداول ضمیمه قابل محاسبه است.

تابع چگالی احتمال فیشر

- متغیر تصادفی X دارای توزیع فیشر با پارامترهای r_1 و r_2 است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد. $X \sim F(r_1, r_2)$

$$F = \frac{\frac{U}{r_1}}{\frac{U}{r_2}}$$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{(r_1 + r_2)}{2}\right]}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} \frac{x^{\frac{r_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{r_1}{r_2}.x\right)^{\frac{r_1+r_2}{2}}} \qquad x > 0$$

- که r_1 و r_2 به ترتیب درجه آزادی صورت و مخرج خوانده می‌شود برای مقادیر مختلف r_1 و r_2 مقادیر مختلف $F(x)$ از جداول ضمیمه قابل محاسبه است.

تابع چگالی احتمال ویشارت

- ✓ اگر k بردارهای بابعد p به شکل $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_k$ به صورت مستقل با توزیع نرمال وجود داشته باشد که دارای میانگین صفر $0_{p\times 1}$ و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{p\times p}$ باشد، بردار U را به شکل زیر تعریف می‌نماییم.

$$U_{p\times p} = Z_1 Z_1' + Z_2 Z_2' + \ldots + Z_k Z_k'$$

- ✓ U دارای توزیع ویشارت با k درجه آزادی و کورایانس $\Sigma_{p\times p}$ می‌باشد.

$$U \sim W_p(k, \Sigma)$$

تابع چگالی احتمال ویشارت

- تابع چگالی احتمال U را به شکل زیر تعریف می‌نماییم.

$$f_U\left(\underset{p\times p}{u}\right)=\frac{|u|^{(k-p-1)/2}\exp\left[-\frac{1}{2}tr\left(\Sigma^{-1}u\right)\right]}{2^{kp/2}|\Sigma|^{k/2}\Gamma_p(k/2)}$$

- که دراین رابطه $\Gamma_p(\cdot)$ تابع گاما می‌باشد.

$$\text{i.e. } \Gamma_p(k/2)=\pi^{p(p-1)/4}\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left[(k+1-j)/2\right]$$

- اگر $\Sigma = 1$, $p=1$ باشد، در این حالت تابع توزیع ویشارت به تابع توزیع χ^2 با k درجه آزادی می‌باشد.

تابع چگالی احتمال ویشارت

✓ قضیه ۱:

✓ اگر U دارای توزیع ویشارت به صورت $U \sim W_p(k,\Sigma)$ باشد و C ماتریس با ابعاد $q \times p$ باشد، به طوری که $q < p$

$$V = CUC^T \sim W_p(k, C\Sigma C^T)$$

نتیجه یک:

$$v = \vec{a}'U\vec{a} \sim W_1\left(k, \vec{a}'\Sigma\vec{a}\right) \equiv \sigma_{\vec{a}}^2 \chi_k^2$$

$$\sigma_{\vec{a}}^2 = \vec{a}'\Sigma\vec{a}$$

نتیجه دو: اگر u_{ii} i امین المان قطر اصلی ماتریس U باشد، بنابراین $u_{ii} \sim \sigma_{ii}\chi_k^2$ که $\Sigma = \left(\sigma_{ij}\right)$

تابع چگالی احتمال ویشارت

✓ قضیه ۲:

✓ اگر U_1 دارای توزیع ویشارت به صورت $U_1 \sim W_p(k_1, \Sigma)$ باشد و U_2 دارای توزیع ویشارت به صورت $U_2 \sim W_p(k_2, \Sigma)$ و مستقل باشند. آنگاه

$$V = U_1 + U_2 \sim W_p(k_1 + k_2, \Sigma)$$

✓ قضیه ۳:

✓ اگر U_1 دارای توزیع ویشارت به صورت $U_1 \sim W_p(k_1, \Sigma)$ باشد و U_2 مستقل باشد و $V = U_1 + U_2 \sim W_p(k, \Sigma)$ با $k_1 < k$ در این صورت:

$$U_2 \sim W_p(k - k_1, \Sigma)$$

تابع چگالی احتمال ویشارت

✓ قضیه ۴:

✓ اگر $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ نمونه هایی با توزیع نرمال $N_p\left(\vec{\mu}, \Sigma\right)$ باشد، آنگاه

$$U = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{x}_i - \vec{\mu}\right)\left(\vec{x}_i - \vec{\mu}\right)' \sim W_p\left(n, \Sigma\right)$$

✓ قضیه ۵:

✓ اگر $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ نمونه هایی با توزیع نرمال $N_p\left(\vec{\mu}, \Sigma\right)$ باشد، آنگاه

$$U_1 = n\left(\bar{\vec{x}} - \vec{\mu}\right)\left(\bar{\vec{x}}_i - \vec{\mu}\right)' \sim W_p\left(1, \Sigma\right)$$

تابع چگالی احتمال ویشارت

✓ نتیجه گیری:

✓ اگر $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ نمونه هایی با توزیع نرمال $N_p\left(\vec{\mu}, \Sigma\right)$ باشد، آنگاه

$$\boxed{\bar{\vec{x}} \sim N_p\left(\vec{\mu}, \tfrac{1}{n}\Sigma\right)}$$

و

$$\boxed{U = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{x}_i - \bar{\vec{x}}\right)\left(\vec{x}_i - \bar{\vec{x}}\right)' = (n-1)S \sim W_p\left(n-1, \Sigma\right)}$$

همچنین

$$\frac{1}{\sigma^2}u_{ii} = \frac{n-1}{\sigma^2}s_{ii} \sim \chi^2\left(n-1\right)$$

توزیع‌های مهم پیوسته

یکنواخت	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$	$\frac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{t(\beta-\alpha)}$
گاما	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{r-1}e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^r\Gamma(r)} & x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$	$r\beta$	$r\beta^2$	$(1-\beta t)^{-r}$
نمایی	$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{\frac{-x}{\lambda}}}{\lambda} & x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$	λ	λ^2	$(1-\lambda t)^{-1}$

توزیع‌های مهم پیوسته

خی دو	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{\upsilon-2}{2}}e^{\frac{-x}{2}}}{2^{\frac{\upsilon}{2}}\Gamma(\frac{\upsilon}{2})} & x>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$	υ	2υ	$(1-2t)^{-\frac{\upsilon}{2}}$
بتا	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	
نرمال	$n(x;\mu,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

تقریب یک توزیع با توزیع‌های دیگر

۱- تقریب توزیع پواسون با توزیع نرمال

هرگاه در توزیع پواسون پارامتر λ بزرگتر از ۱۰ باشد،توزیع نرمال تقریب بسیار خوبی برای توزیع پواسن است.

$$\lim_{\lambda>10} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \cong \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \equiv\equiv\gg \begin{cases} \mu = \lambda \\ \sigma^2 = \lambda \end{cases}$$

تقریب یک توزیع با توزیع‌های دیگر

۲- تقریب توزیع دوجمله‌ای با توزیع نرمال

در یک توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n, p در صورتیکه $np>5$ باشد، در این صورت توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = np$ و $\sigma^2 = np(1-p)$ تقریب بسیار خوبی برای توزیع دو جمله‌ای است.

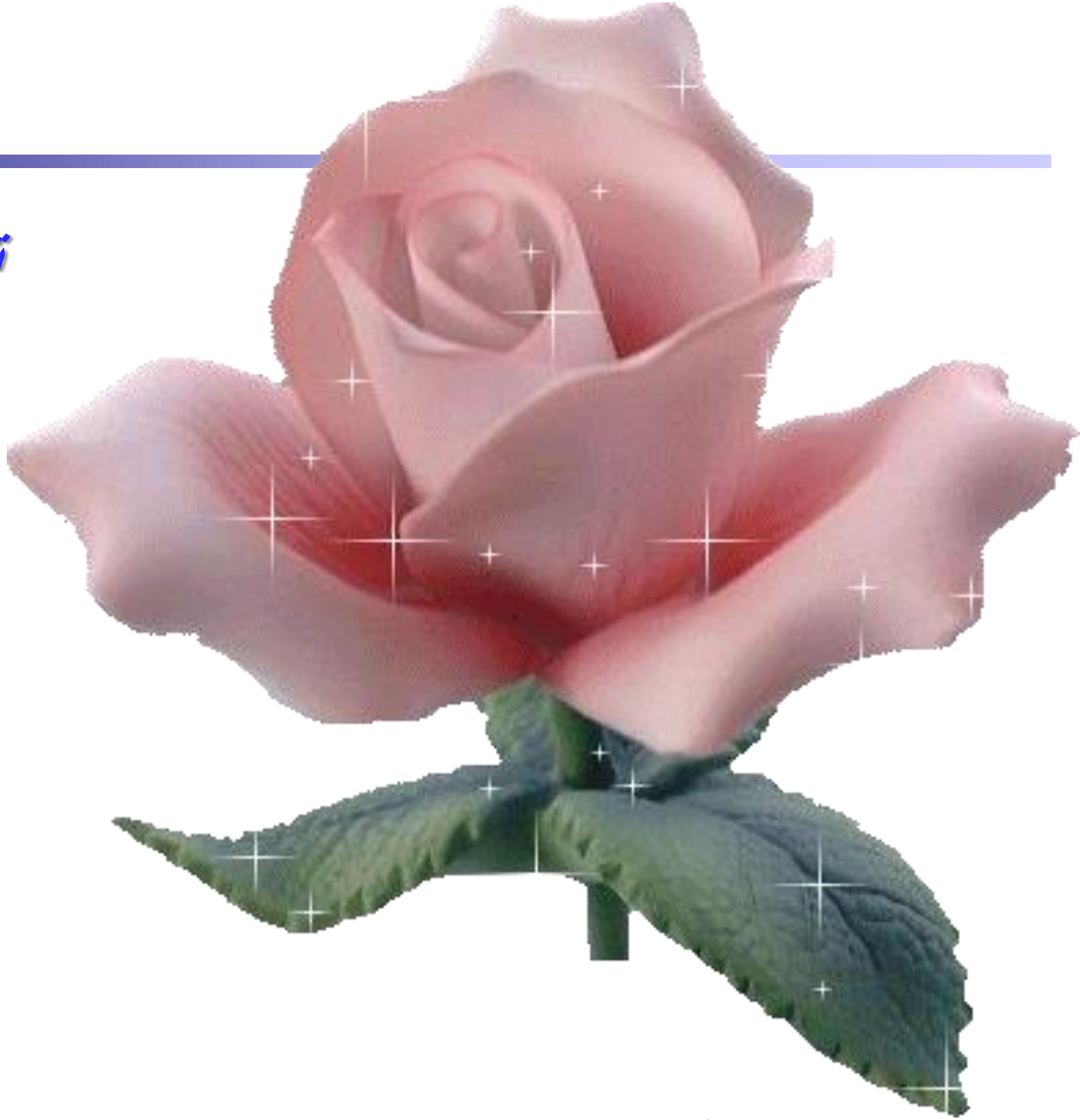
تقریب یک توزیع با توزیع‌های دیگر

۳- تقریب توزیع دوجمله‌ای با توزیع پواسون

اگر در توزیع دو جمله‌ای با پارامتر n به سمت بینهایت میل کند و p به سمت صفر به نحوی که $np \to \lambda$ باشد، در این صورت توزیع دو جمله‌ای به توزیع پواسون با پارامتر λ تبدیل می‌شود.

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

$$\lambda = np \to p = \frac{\lambda}{n}$$

$$M_X(t) == (1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^t)^n_{n\to\infty} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

تشکر از توجه شما