آمار و احتمالات مهندسی

تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و امید ریاضی

دکتر بهناز بیگدلی

دانشکده مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی شاهرود

ساختار درس

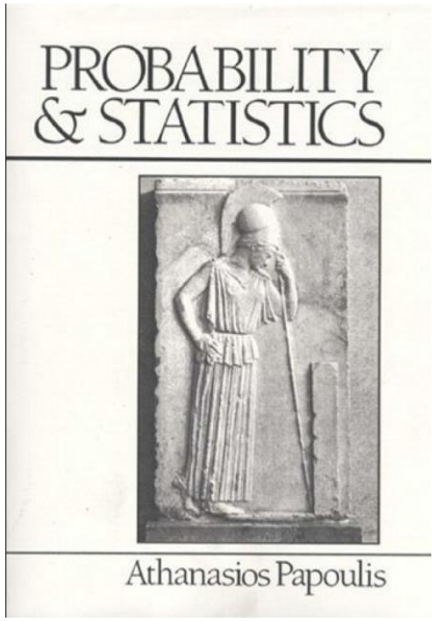
نحوه ارزیابی

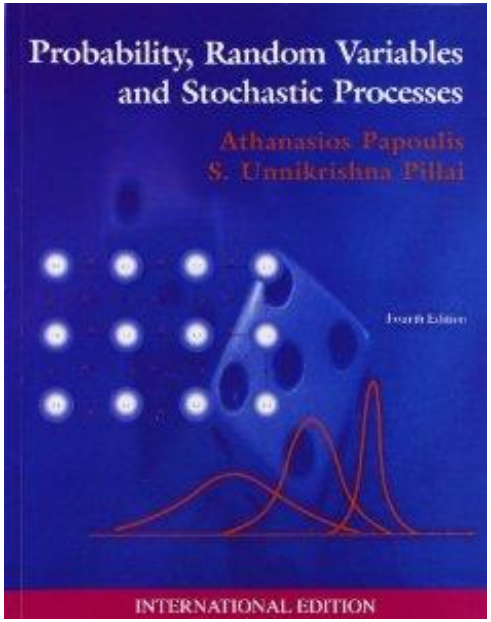
امتحان پایان ترم (۱۴)

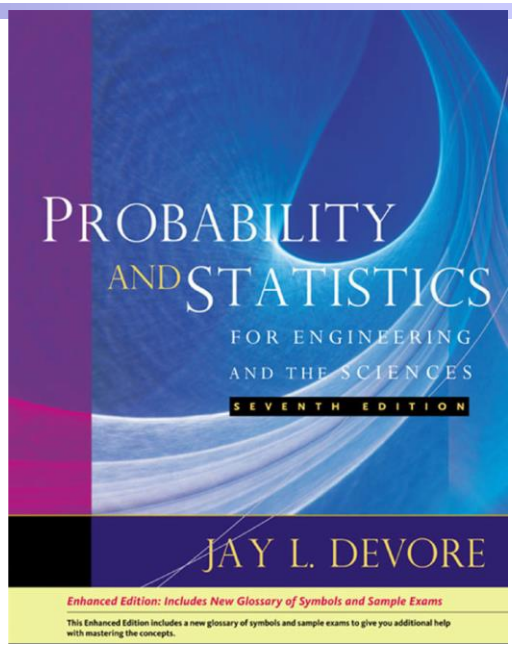
امتحان میان ترم (۴)

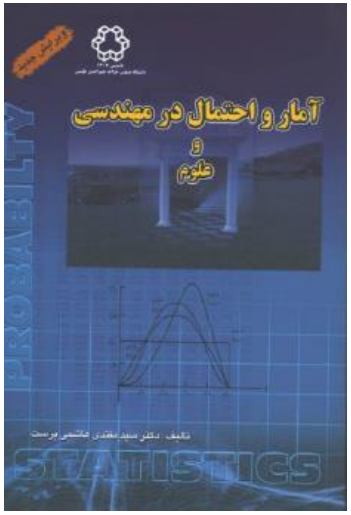
تمرینات و کوئیزها (۲)

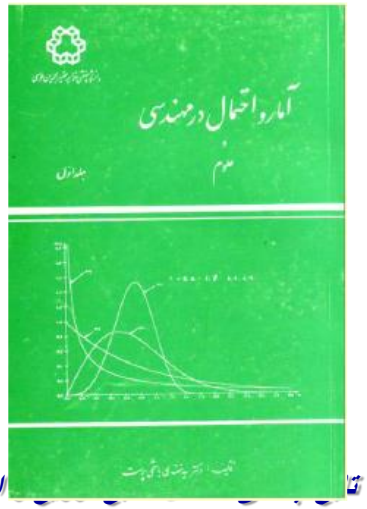
منابع


PROBABILITY
& STATISTICS
Athanasios Papoulis


Probability, Random Variables
and Stochastic Processes
Athanasios Papoulis
S. Unnikrishna Pillai
Fourth Edition
INTERNATIONAL EDITION


PROBABILITY
AND STATISTICS
FOR ENGINEERING
AND THE SCIENCES
SEVENTH EDITION
JAY L. DEVORE
Enhanced Edition: Includes New Glossary of Symbols and Sample Exams
This Enhanced Edition includes a new glossary of symbols and sample exams to give you additional help with mastering the concepts.


آمار و احتمال در مهندسی
و
علوم


آمار و احتمال در مهندسی

فهرست و عناوین درس

I. بخش اول: آمار مقدماتی (توصیفی)

1. آمار مقدماتی
2. اندازه‌گیری پراکندگی، گشاورها، چولگی و کشیدگی
3. برازش خط و منحنی بر داده‌ها
4. توزیع‌های دو بعدی و ضریب همبستگی

II. احتمال

1. احتمال و فضای نمونه
2. فضای نمونه با عناصر متعدد
3. احتمالات شرطی و نابستگی
4. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و امید ریاضی
5. توزیع‌های گسسته
6. توزیع‌های پیوسته مهم
7. نظریه برآورد
8. آزمون‌های فرض

تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و امید ریاضی

فهرست مطالب این فصل:

۱- متغییر تصادفی

۲- تابع توزیع تجمعی

۳- امید ریاضی متغییر تصادفی جدا

۴- گشتاورهای فاکتوریل

۵- توابع مولد گشتاورهای فاکتوریل

۶- کومولان‌ها

۷-تابع مشخص

متغیر تصادفی

- با فرض اینکه هر تجربه تصادفی دارای فضای نمونه S باشد با تدوین یک قانون یا مجموعه‌ای از قوانین می‌توان اعضای فضای نمونه را به وسیله اعداد یا زوج اعداد (X_1,X_2) یا به طور کلی تر با n گانه مرتب اعداد $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ افراز کرد.

متغیر تصادفی گسسته

- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای فضای نمونه یک بعدی A باشد. به طوری که A گسسته و شمارا باشد. هرگاه بتوان تابع احتمال $P(A)$ را برحسب تابع $f(X)$ به شکل زیر تعریف کرد:

$$P(A) = P(X \in A) = \sum_{A} f(x)$$

- به طوری که $f(X)$ در دو شرط زیر صدق کند.

۱- $\forall\ x \in A \quad , \quad f(x) \geq 0$

۲- $\sum_{A} f(x) = 1$

X را متغیر تصادفی از نوع گسسته و $f(X)$ را تابع احتمال یا پخش گسسته X گویند.

متغیر تصادفی پیوسته

- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای فضای نمونه یک بعدی A باشد. به طوری که A پیوسته و بازه از اعداد حقیقی باشد. هرگاه بتوان تابع احتمال $P(A)$ را برحسب تابع $f(X)$ به شکل زیر تعریف کرد:

$$P(A) = P(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

- X را متغیر تصادفی از نوع پیوسته و $f(X)$ را تابع احتمال یا پخش پیوسته X گویند.

تابع توزیع (تجمعی) F(x)

✓ تابع توزیع متغیرهای تصادفی از نوع گسسته و پیوسته به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$F(x) = P[X \le x]$$

✓ در حالت گسسته

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t)$$

✓ در حالت پیوسته

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

خواص تابع توزیع (گسسته یا پیوسته):

۱- $0 \le P(X \le x) \le 1$ یا $0 \le F(x) \le 1$

۲- $F(x)$ یک تابع غیر نزولی (صعودی) است.

۳- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$ و $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

۴- $F(x)$ در هر نقطه x از راست پیوسته است.

۵-

$P(a < X < b) = F(b^-) - F(a)$

$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a^-)$

$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

$P(a \le X < b) = F(b^-) - F(a^-)$

خواص تابع توزیع (گسسته یا پیوسته):

۶- $P(X=b)=F(b)-F(b^-)$

که در آن $F(b^-)$ حد چپ $F(X)$ در نقطه b است.

۷- $F(x^-)\le F(x)\le F(x^+)$

۸- الف: در متغیر پیوسته $f(x)=\dfrac{d\,F(x)}{dx}$ یا $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

۸- ب: در متغیر گسسته $f(x)=F(x)-F(x^-)$

که در آن $F(x)=\sum_{x\le t} f(t)$

۹- $P(X>a)=1-P(X\le a)=1-F(a)$

مثال

مثال: اگر $\{f(x)=e^{-x} \ |x\geq 0\}$ باشد، تابع توزیع متغیر X کدام است؟

جواب:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x} e^{-t}dt=-e^{-t}|_{0}^{x}=1-e^{-x}$$

مثال

مثال: اگر متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع F(X) باشد تابع چگالی احتمال آن را بدست آورید.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{8} & 1\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید F(X) از راست پیوسته است چون:

$$\lim_{x\to 1^+} F(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{8}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon-1)^2}{8}=0$$

F(1)=0

$$F(3)=1$$

$$\lim_{x\to 3^+} F(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} F(3+\varepsilon)=1$$

$$\lim_{x\to 3^-} F(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} F(3-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(3-\varepsilon-1)^2}{8}=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{d\ F(x)}{dx}=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \dfrac{x-1}{4} & 1\le x<3 \end{cases}$$

مد (نما) در متغییرهای گسسته

✓ در یک متغییر تصادفی گسسته مد (نما) عددی است که به ازای آن بیشترین مقدار احتمال را داشته باشیم.

✓ مثال: در تابع احتمال روبرو مد کدام است؟

جواب:

X	0	1	2	3
f(x)	0.1	0.2	0.4	0.3

مد در نقطه $x=2$ بیشترین احتمال یعنی ۰/۴ را دارد، بنابراین $Mo=2$

مد (نما) در یک تابع توزیع

- ✓ مد (نما) عددی است که تابع چگالی احتمال، بیشترین مقدار احتمال را دارد و در واقع جایی است که $f(x)$ ماکزیمم شود، مقدار مد است.
- ✓ لذا برای محاسبه مقدار مد ابتدا از تابع توزیع مشتق می‌گیرم تا تابع چگالی احتمال بدست آید، یعنی $F'(x)=f(x)$ سپس از تابع چگالی احتمال مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم، تا مقادیر مد را محاسبه کنیم.

$$F''(x)=f'(x)=0 \rightarrow x=MO$$

محاسبه چارک‌ها به کمک تابع توزیع

✓ برای محاسبه چارک‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{cases} F(b) = \dfrac{a}{4} \\ a = 1, 2, 3 \end{cases}$$

✓ مثال: در تابع $F(x) = x^2 \quad 0 \le x < 4$ مقدار چارک اول کدام است؟

$$F(b) = \frac{1}{4} \rightarrow b^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \mathrm{b} = \frac{1}{2}$$

میانه

✓اگر در تابع توزیع به جای متغییر تصادفی، میانه را قرار دهیم مقدار آن برابر با $\frac{1}{2}$ است.

$$F(me) = \frac{1}{2}$$

✓نکته:

میانه برابر با چارک دوم است.

تابع احتمال و تابع توزیع توام دو متغیر تصادفی

- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای فضای دوبعدی A باشد. به طوری که A گسسته و شمارا باشد. هرگاه بتوان تابع احتمال P(A) را برحسب تابع f(x,y) به شکل زیر تعریف کرد

$$P(A) = P[(X,Y) \in A] = \sum_A \sum f(x,y)$$

- به طوری که f(x,y) در دو شرط زیر صدق کند.

۱- $f(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in A$

۲- $\sum_A \sum f(x,y) = 1$

- (X,Y) را متغیرهای تصادفی توام از نوع گسسته و f(x,y) را تابع چگالی احتمال یا پخش توام گسسته گویند.

تابع احتمال و تابع توزیع توام دو متغیر تصادفی

- و برای حالتی که X و Y متغیرهای تصادفی از نوع پیوسته‌اند، می‌توان تابع چگالی احتمال $f(x,y)$ را روی همه صفحه تعریف کرد. تابع دو متغیره $f(x,y)$ را تابع چگالی احتمال توام متغیر X و Y گوییم اگر و تنها اگر برای هر ناحیه A از صفحه xy

$$P[(X,Y)\in A]=\int_A\int f(x,y)\,dy\,dx$$

- و $f(x,y)$ همواره در دو شرط زیر صدق نماید.

۱- $$f(x,y)\geq 0 \qquad \forall\ A\in A$$

۲- $$\int_A\int f(x,y)\,dy\,dx=1$$

تابع توزیع توام

✓ اگر X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال توام f(x,y) باشند تابع توزیع یا تابع توزیع تجمعی توام X و Y در حالت گسسته و پیوسته به ترتیب به صورت زیر تعریف می شود.

$$F(x,y)=P[X\le x\,,\,Y\le y]=\sum_{S\le x}\sum_{t\le y} f(s,t)$$

$$F(x,y)=P[X\le x\,,\,Y\le y]=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,dt\,ds$$

✓ تبصره: محاسبه احتمال (Y,X) روی A به طوری که

$$A=\{(x,y)\,|\,a\le x<b \quad , \quad c\le y<d\}$$

از فرمول زیر محاسبه می شود:

$$P[a\le X<b\,,\;\; c\le Y<d]=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)$$

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع حاشیه‌ای

- فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام f(x,y) باشند و بخواهیم احتمال پیشامد $-\infty < X \le x$ را حساب کنیم. محاسبه احتمال پیشامد $-\infty < X \le x$ برای دو متغیر تصادفی X و Y با تابع چگالی احتمال توام f(x,y) هم ارز است با محاسبه احتمال پیشامد

$$-\infty < X \le x \,, -\infty < Y < \infty$$

- پس

$$P[-\infty < X \le x] = P[-\infty < Y < \infty \;,\; -\infty < X \le x]$$

- محاسبه احتمال رابطه اخیر در حالت گسسته و پیوسته به ترتیب برابرند با:

$$P[-\infty < X \le x,\; -\infty < Y < \infty] = \sum_{S \le x} \sum_{-\infty}^{\infty} f(s,y)$$

$$P[-\infty < X \le x,\; -\infty < Y < \infty] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,y)\, dy\, ds$$

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع حاشیه‌ای

✓ اگر تعریف کنیم:

$$F_X(x) = P[X \le x] = P[-\infty < X \le x\ ,\ \ -\infty < Y < \infty] = \sum_{s \le x} \sum_{-\infty}^{\infty} f(s,y) = \sum_{s \le x} f_x(s)$$

$$F_X(x) = P[X \le x] = P[-\infty < X \le x,\ -\infty < Y < \infty] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,y)\,dy\,ds = \int_{-\infty}^{x} f_x(s)ds$$

✓ تابع‌های $F_X(x) = \sum_{s \le x} f_x(s)$ و $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(s)\,ds$ را به ترتیب تابع توزیع حاشیه‌ای در حالت گسسته و پیوسته گویند. با معلوم بودن تابع توزیع حاشیه‌ای، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای برای متغیرهای گسسته و پیوسته به ترتیب از رابطه های زیر بدست می آیند.

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع حاشیه‌ای

✓ تابع حاشیه‌ای X در حالت گسسته

$$f_x(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

✓ تابع حاشیه‌ای Y در حالت گسسته

$$f_y(y) = F_Y(y) - F_Y(y^-)$$

✓ تابع حاشیه‌ای X در حالت پیوسته

$$f_x(x) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$

✓ تابع حاشیهای Y در حالت پیوسته

$$f_y(y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$$

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع حاشیه‌ای

- اگر تابع چگالی احتمال توام $f(x,y)$ معلوم باشد تابع چگالی احتمال حاشیه ای X و Y برای حالت گسسته و پیوسته به ترتیب از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) \quad , \quad f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad , \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

- یادآوری می‌شود که هریک از توابع چگالی حاشیه‌ای X و Y به نوبه خود تابع چگالی احتمال می‌باشند و در تمام شرایط تابع چگالی بودن صدق می‌کنند.

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع شرطی

✓ فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y از نوع گسسته، دارای تابع احتمال توام $f(x,y)$، تابع‌های چگالی احتمال حاشیه‌ای $f_X(x)$، $f_Y(y)$ و فضای نمونه A باشند. دو پیشامد A_1 و A_2 را به صورت زیر درنظر می گیریم.

می دانیم که:

$$A_1 \subset A = \{(x,y) | x = x_1, -\infty < y < +\infty\}$$

$$A_2 \subset A = \{(x,y) | -\infty < x < +\infty, y = y_1\}$$

$$P(A_1) = P[(x,y) \in A_1] = \sum_x \sum_y f(x,y) = \sum_x f_x(x) = f(x)$$

$$P(A_2) = P[(x,y) \in A_2] = \sum_x \sum_y f(x,y) = \sum_y f_y(y) = f(y)$$

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع شرطی

✓ احتمال شرطی پیشامد A_1 به شرط A_2 برابر است با:

$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{f(x_1, y_1)}{f(y)}$$

✓ اگر تعریف کنیم:

$$f(x_1 \mid y_1) = \frac{f(x_1, y_1)}{f(y_1)}$$

✓ آنگاه تابع احتمال شرطی X_1 به شرط Y_1 برابر است با:

$$f(x_1 \mid y_1) = \frac{f(x_1, y_1)}{f(y_1)} \quad , \quad f(y_1) > 0$$

✓ برای سادگی تابع احتمال X به شرط Y را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \quad , \quad f(y) > 0$$

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع شرطی

- تابع احتمال Y به شرط X را به صورت $f(y|x)$ تعریف می کنیم.

$$f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f(x)} \qquad , \qquad f(x)>0$$

- در حالتی که متغیرهای تصادفی X و Y پیوسته باشند از همین نماد استفاده می‌کنیم.

$$f(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}=\frac{f(x,y)}{f(y)} \qquad , \qquad f(y)>0$$

$$f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy}=\frac{f(x,y)}{f(x)} \qquad , \qquad f(x)>0$$

- یادآوری می‌شود که تابع چگالی احتمال شرطی نیز به نوبه خود یک تابع چگالی احتمال است و در تمام شرایط تابع چگالی صدق می‌کند.

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع شرطی

✓ مثال: توزیع احتمال مشترک دو متغییر تصادفی X, Y بصورت زیر است، مقدار $P(X=3|Y=-3)$ کدام است؟

X,Y	-3	2	4
1	0.1	0.2	0.2
3	0.3	0.1	0.1

✓ جواب:

$$P(X=3|Y=-3)=\frac{P(X=3,Y=-3)}{P(Y=-3)}=\frac{0.3}{0.1+0.3}=\frac{3}{4}$$

استقلال دو متغیر تصادفی

- فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام $f(x,y)$، توابع چگالی حاشیه‌ای $f_X(x)$، $f_Y(y)$ و توابع چگالی احتمال شرطی $f(x|y)$ و $f(y|x)$ باشند. گوییم دو متغیر تصادفی X و Y به طور احتمالی مستقل‌اند اگر:

$$f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$$

- یا تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط Y مستقل از Y باشد یا تابع چگالی احتمال شرطی Y به شرط X مستقل از X باشد. یا:

$$f(x,y) = f(X \mid y) f_y(y) = f(Y \mid x) f_X(x)$$

امید ریاضی

- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. امید ریاضی در حالت گسسته و پیوسته به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(X) = \sum_{x} x \,.\, f(x)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

- در ادبیات آماری امید ریاضی را معمولاً با μ نمایش می‌دهند.

ویژگی‌های امید ریاضی

۱- امید ریاضی مقدار ثابت برابر با خودش است.

$$E(c) = c$$

۲-

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

۳-

$$E\left[\sum a_i X_i + \sum b_i Y_i\right] = \sum a_i E(X_i) + \sum b_i E(Y_i)$$

۴- اگر X و Y مستقل از هم باشند.

$$E(XY) = E(X).E(Y)$$

۵-

$$V(X) = Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

گشتاورها

- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f(x)$ و a یک عدد ثابت حقیقی باشد گشتاورهای مرتبه rام حول نقطه a در جامعه در حالت گسسته و پیوسته به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(X-a)^r = \sum_x (x-a)^r f(x)$$

$$E(X-a)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^r f(x)\,dx$$

- در ادبیات آماری، معمولاً گشتاورهای حول نقطه میانگین جامعه μ را گشتاورهای مرکزی می‌گویند و با نماد μ_r نمایش می‌دهند.

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \sum_x (x-\mu)^r f(x)$$

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)\,dx$$

واریانس

- اگر در فرمول گشتاورهای مرکزی r برابر با ۲ درنظر گرفته شود واریانس جامعه بدست می‌آید و معمولاً آن را با نماد σ^2 یا $V(X)$ نمایش می‌دهند.

$$V(X)=\sigma^2=E(X-\mu)^2=\sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

$$V(X)=\sigma^2=E(X-\mu)^2=\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

- باتوجه به خواص عملگر E می‌توان واریانس X را به صورت زیر تعریف کرد.

$$V(X)=E(X-\mu)^2=E[X^2+\mu^2-2\mu X]=E(X^2)+\mu^2-2\mu E(X)$$
$$=E(X^2)+\mu^2-2\mu^2=E(X^2)-\mu^2$$

ویژگی‌های واریانس

۱- واریانس مقدار ثابت صفر است.

$$V(C)=0$$

۲-

$$V(aX)=a^2V(X)$$

۳-

$$V(aX+a)=a^2V(X)+0$$

۴-

$$V\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i)$$

۵- جذر واریانس را انحراف معیار گویند.

$$\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{V(X)}=\sigma$$

برای نمونه ویژگی ۳ را می‌توان به صورت زیر ثابت کرد.

$$V(aX+c)=E[aX+c-E(aX+c)]^2$$

$$=E[aX+c-aE(X)-c]^2=E[aX-aE(X)]^2$$

$$=E[a(X-E(X))]^2=a^2E(X-\mu)^2=a^2V(X)$$

کوواریانس دو متغیر تصادفی

- اگر متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام $f(x,y)$ باشند کوواریانس آنها به صورت زیر تعریف می شود.

$$Cov(X,Y) = E(X-\mu_x)(Y-\mu_y)$$

- که μ_x و μ_y به ترتیب امید ریاضی X و Y می‌باشند. رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[XY-\mu_y X-\mu_x Y+\mu_x\mu_y] \\ &= E(XY)-\mu_y E(X)-\mu_x E(Y)+\mu_x\mu_y \\ &= E(XY)-\mu_x\mu_y-\mu_x\mu_y+\mu_x\mu_y = E(XY)-\mu_x\mu_y \end{aligned}$$

قضیه ۱- اگر دو متغیر X و Y مستقل باشند آنگاه:

$$Cov(X,Y)=0$$

قضیه۲- اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام $f(x,y)$ باشند آنگاه:

$$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$$

کوواریانس دو متغیر تصادفی

✓ مثال: مقدار کوواریانس را محاسبه کنید.

X,Y	-1	0	P(Y=y)
0	0.3	0.3	0.6
1	0.3	0.1	0.4
P(X=x)	0.6	0.4	

✓ جواب:

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y)$$

$$E(XY) = (-1 \times 0) \times 0.3 + (0 \times 0) \times 0.3 + (-1 \times 1) \times 0.3 + (0 \times 1) \times 0.1 = -0.3$$

$$E(X) = -1 \times 0.6 + 0 \times 0.4 = -0.6$$

$$E(Y) = 0 \times 0.6 + 1 \times 0.4 = 0.4$$

$$COV(X,Y) = -0.3 - (-0.6 \times 0.4) = -0.06$$

خواص کوواریانس دو متغیر تصادفی

۱- $COV(X,X) = V(X) = Var(X)$

۲- $COV(X,Y) = COV(Y,X)$

۳- $COV(X,a) = 0$

۴- $COV(aX \pm b, cY \pm d) = ac \times COV(X,Y)$

۵- $COV(aX_1 + bX_2, Y) = a \times COV(X_1,Y) + b \times COV(X_2,Y)$

۶- $Var(aX \pm bY \pm c) = a^2 \times Var(X) + b^2 \times Var(Y) \pm 2ab \times COV(X,Y)$

ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی

✓ ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y را در جامعه با ρ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X-\mu_x)^2 . E(Y-\mu_y)^2}}$$

ویژگی‌های ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی

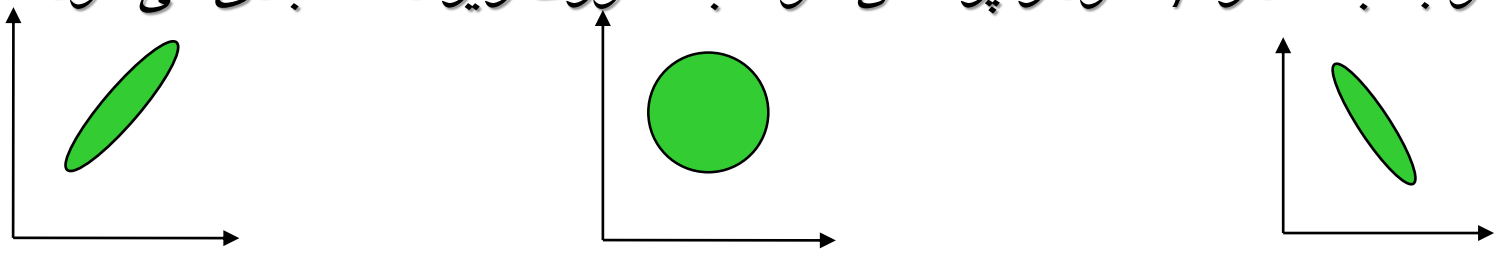
۱- همواره $-1 \le \rho \le 1$ و مستقل از واحد اندازه گیری است.

۲- هنگامی که $\rho = 1$ است همبستگی دو متغیر X و Y شدید و هم سو است.

۳- هنگامی که $\rho = -1$ است همبستگی دو متغیر X و Y شدید و خلاف هم است.

۴- هنگامی که ρ در همسایگی صفر است همبستگی دو متغیر ضعیف است.

۵- باتوجه به مقدار ρ، نمودار پراکنش X و Y به صورت زیر دسته بندی می‌شود



ρ=1 ρ=0 ρ=-1

۶- $$\rho_{aX+b,\ cY+d} = \rho_{X,Y}$$

یعنی اگر متغیرهای X و Y را در مقدار ثابت ضرب کنیم و مقدار ثابت به آنها اضافه کنیم تغییری در همبستگی ایجاد نمی‌شود.

امید ریاضی شرطی

✓ اگر تابع احتمال دو متغییر تصادفی گسسته یا پیوسته موجود باشد، می‌توان امید ریاضی شرطی دو متغییر تصادفی X/Y یا Y/X را محاسبه کرد.

✓ برای گسسته

$$\begin{cases} E(X|Y=y) = \sum_{x} x.P(X|Y=y) \\ E(Y|X=x) = \sum_{y} y.P(Y|X=x) \end{cases}$$

✓ برای پیوسته

$$\begin{cases} E(X|Y=y) = \int x.f(x|y)dx \\ E(Y|X=x) = \int y.f(y|x)dy \end{cases}$$

امید ریاضی شرطی

✓ مثال: فرض کنید که X, Y دارای توزیع توام زیر باشند، مقدار E(X|Y=0) را محاسبه کنید.

X,Y	0	1	P(Y=y)
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
P(X=x)	$\frac{11}{24}$	$\frac{13}{24}$	1

✓ جواب:

$$P(X|Y=0)=\frac{P(X,Y=0)}{P(Y=0)}\rightarrow$$

X=x	0	1
$P(X\|Y=0)$	$\frac{P(0,0)}{P(Y=0)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{1}{4}$	$\frac{P(1,0)}{P(Y=0)}=\frac{3}{4}$

$$E(X|Y=0)=\sum x\times P(X|Y=0)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

تابع مولد گشتاورها

- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد تابع مولد گشتاورها در حالت گسسته و پیوسته به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} f(x)$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

بطوری که $|t|<h$

- تابع مولد گشتاورها تعریف خاصی از امید ریاضی است. اگر $h(X)=e^{tx}$ تعریف شود $E[h(X)]$ همان تعریف تابع مولد گشتاورها است و در مواقعی که محاسبه $E(X^r)$ برای بعضی از توزیع ها وقت گیر است از $M_X(t)$ استفاده می‌شود.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

تابع مولد گشتاورها

- از $M_X(t)$ نسبت به t مشتق‌های متوالی می‌گیریم.

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt} E[e^{tX}] = E(X\, e^{tX})$$

$$M''_X(t) = \frac{d^2}{dt^2} E[e^{tX}] = E(X^2\, e^{tX})$$

- پس از r بار مشتق‌گیری

$$M^r_X(t) = \frac{d^r}{dt^r} E[e^{tX}] = E(X^r\, e^{tX})$$

- برای $t=0$ در مشتق rام

$$E(X^r) = M^r_X(0)$$

ویژگی‌های تابع مولد گشتاورها

$$M_X(0) = 1$$

$$M'_X(0) = E(X) = \mu$$

$$M''_X(0) - (M'_X(0))^2 = V(X)$$

$$M_{\frac{X+a}{b}}(t) = e^{\frac{at}{b}} M_X\left(t/b\right)$$

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t)$$

توزیع تابع‌هایی از متغیرهای تصادفی

- فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی با توزیع مشخصی باشند. در اینجا می‌خواهیم توزیع تابعی از این n متغیر تصادفی بدست آوریم.
- مثلاً بدانیم $Y=X_1+X_2$ یا $Y=X_1X_2$ دارای چه تابع توزیعی می‌باشد.

توزیع تابع‌هایی از متغیرهای تصادفی

✓ روش تابع توزیع

در این روش ابتدا تابع توزیع متغیر تصادفی Y را بدست آورده سپس از تابع توزیع مشتق می‌گیریم تا تابع چگالی احتمال بدست آید.

مثال: فرض کنید که تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X بصورت باشد، تابع چگالی احتمال $Y=X^3$ را بدست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) \xRightarrow{Y=X^3} P(X^3 \le y) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X} \le y^{\frac{1}{3}}\right) = \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} 1dx = y^{\frac{1}{3}}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

توزیع تابع‌هایی از متغیرهای تصادفی

✓ روش معکوس

فرض کنید که $f_X(x)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X و تابعی به صورت $Y=g(X)$ داده شده، مشتق پذیر و به ازای تمام مقادیر x اکیداً صعودی یا نزولی باشد، در این صورت برای بدست آوردن تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \times \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

در اینجا g^{-1} معکوس g است.

نامساوی مارکف و چبیشف

نامساوی مارکف

- ✓ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای فضای مفروض A باشد به طوری که اعضای A همه مثبت باشند و a یک عدد بزرگتر از صفر باشد. نامساوی مارکف را تحت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه: اگر متغیر تصادفی X دارای فضای A باشد و $E(X)$ موجود باشد آنگاه همواره:

$$P[X \geq a] \leq \frac{E(X)}{a}$$

برهان: تابع اشاره $I(X)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$I(X) = \begin{cases} 1 & X \geq a \\ 0 & X < a \end{cases}$$

چون $X \geq 0$ است پس:

$$I(X) \leq \frac{X}{a}$$

از طرفین رابطه اخیر امید ریاضی می‌گیریم:

$$E[I(X)] \leq E\left[\frac{X}{a}\right]$$

$$1 \times P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad , \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

نامساوی مارکف و چبیشف

نامساوی چبیشف

- ✓ اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه برای هر $k>0$

$$P[|X-\mu| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

اثبات:

- ✓ اگر k^2 را برابر a و $(X-\mu)$ را X فرض کنیم شرایط مارکف تأمین می‌شود و

$$P[(X-\mu)^2 \geq k^2] \leq \frac{E(X-\mu)^2}{k^2}$$

$$P[|X-\mu|^2 \geq k^2] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$P[|X-\mu| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

نامساوی مارکف و چبیشف

✓ اهمیت نامساوی مارکف و چبیشف در این است که ما را قادر می‌سازد با معلوم بودن میانگین و واریانس جامعه، کران‌های بالا و پایین را برای مقادیر مختلف احتمال بدست آوریم، گرچه فرم تابع چگالی احتمال معلوم نیست.

مثال: فرض کنید تعداد محصولات تولید شده در یک کارخانه در طول هفته یک متغیر تصادفی با میانگین ۵۰= μ و واریانس ۲۵= σ^2 باشد. مطلوبست:

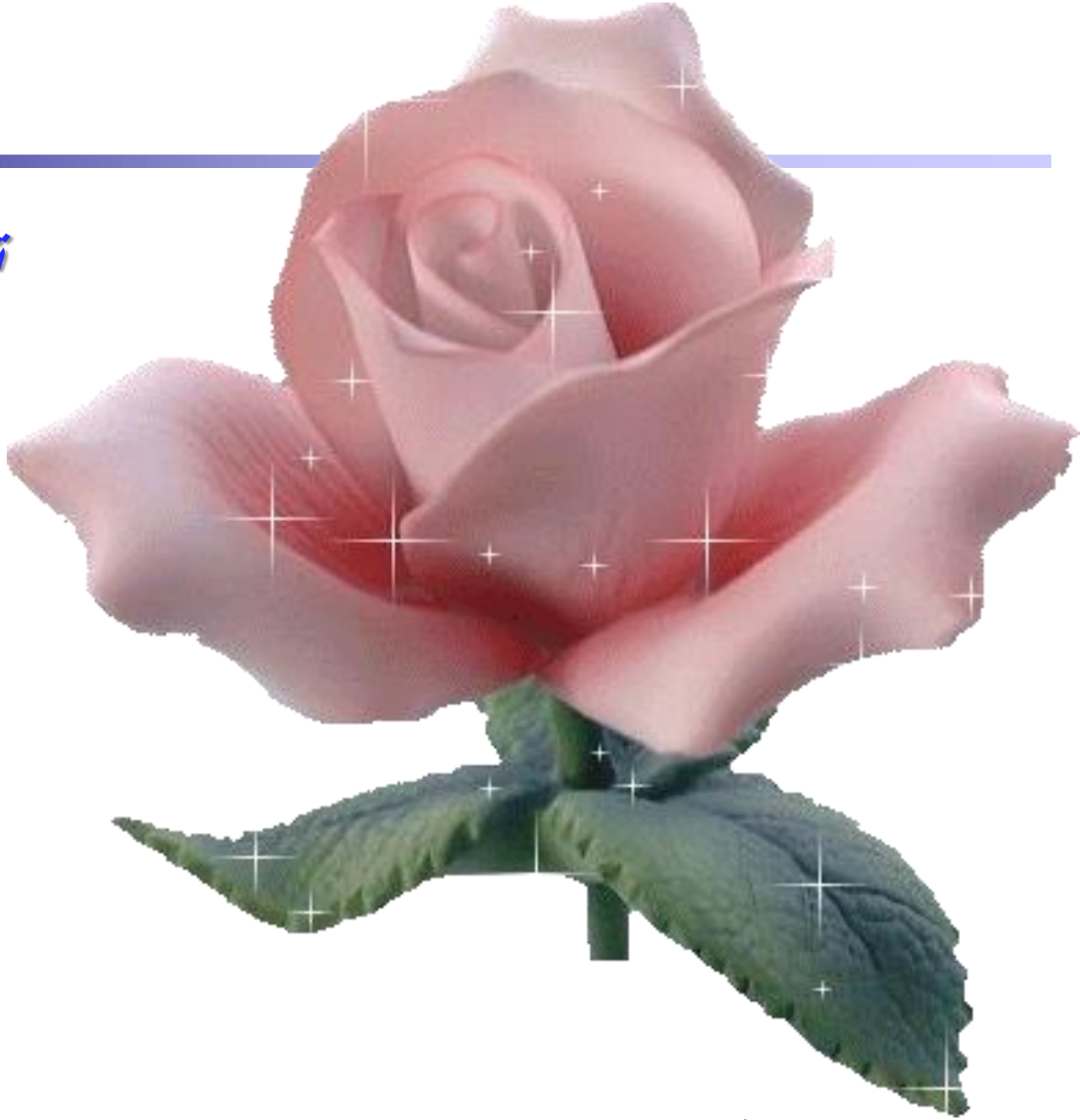
الف- احتمال اینکه تولید محصول در یک هفته معین بیش از ۷۵ باشد.

ب- احتمال اینکه محصول یک هفته معین بین ۴۰ و ۶۰ باشد.

$$P[X \geq 75] \leq \frac{E(X)}{75} \quad , \qquad P(X \geq 75) \leq \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

$$P[40 \leq X \leq 60] = P[-10 \leq X - 50 \leq 10] = P[-10 \leq X - \mu \leq 10$$

$$P[|X - \mu| \leq 10] = 1 - P[|X - \mu| > 10]$$

$$P[|X - \mu| > 10] \leq \frac{E(X-\mu)^2}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \longrightarrow \begin{cases} P[40 \leq X \leq 60] \geq 1 - \frac{1}{4} \\ P[40 \leq X \leq 60] \geq 0.75 \end{cases}$$

تشکر از توجه شما