آمار و احتمالات مهندسی

آزمون‌های فرض

دکتر بهناز بیگدلی

دانشکده مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی شاهرود

ساختار درس

نحوه ارزیابی

امتحان پایان ترم (۱۴)

امتحان میان ترم (۴)

تمرینات و کوئیزها (۲)

فهرست و عناوین درس

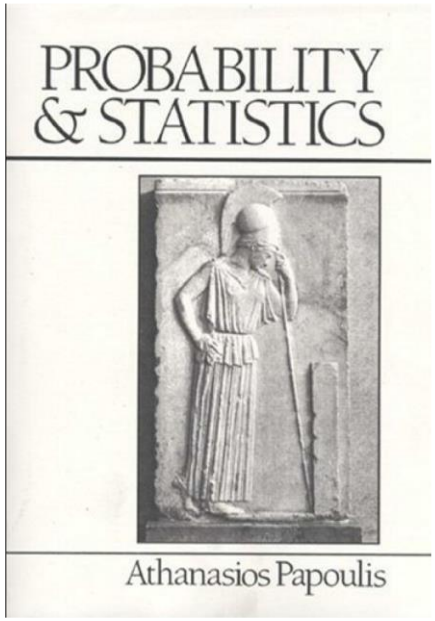
I. بخش اول: آمار مقدماتی (توصیفی)

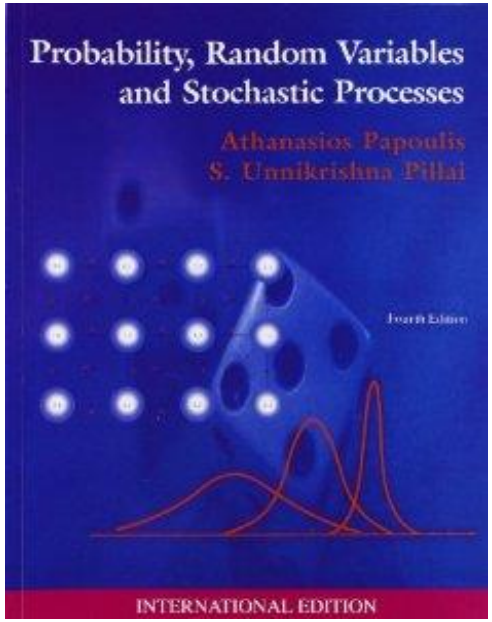
1. آمار مقدماتی
2. اندازه‌گیری پراکندگی، گشاورها، چولگی و کشیدگی
3. برازش خط و منحنی بر داده‌ها
4. توزیع‌های دو بعدی و ضریب همبستگی

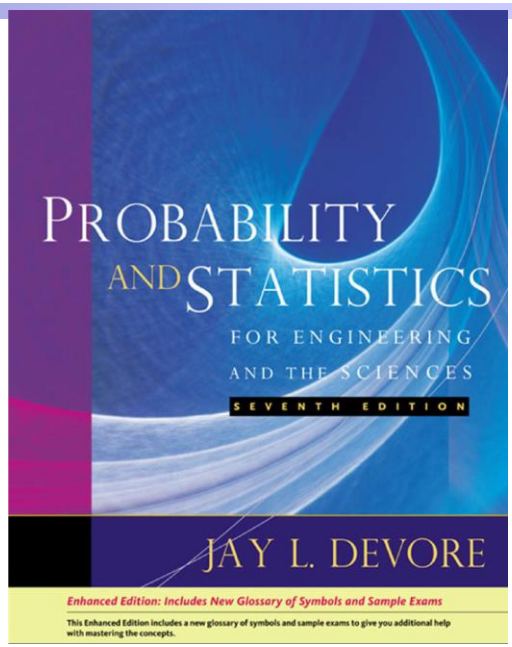
II. احتمال

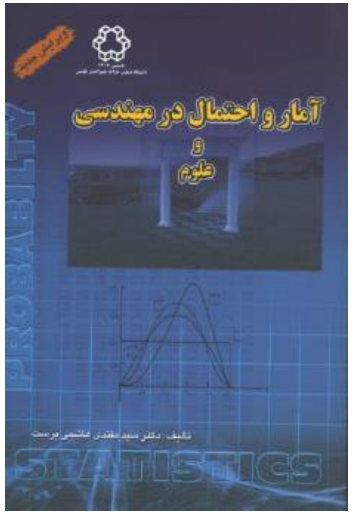
1. احتمال و فضای نمونه
2. فضای نمونه با عناصر متعدد
3. احتمالات شرطی و نابستگی
4. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و امید ریاضی
5. توزیع‌های گسسته
6. توزیع‌های پیوسته مهم
7. نظریه برآورد
8. آزمون‌های فرض

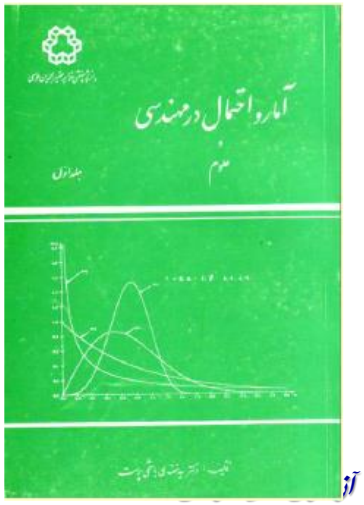
منابع


PROBABILITY
& STATISTICS
Athanasios Papoulis


Probability, Random Variables
and Stochastic Processes
Athanasios Papoulis
S. Unnikrishna Pillai
Fourth Edition
INTERNATIONAL EDITION


PROBABILITY
AND STATISTICS
FOR ENGINEERING
AND THE SCIENCES
SEVENTH EDITION
JAY L. DEVORE
Enhanced Edition: Includes New Glossary of Symbols and Sample Exams
This Enhanced Edition includes a new glossary of symbols and sample exams to give you additional help with mastering the concepts.


آمار و احتمال در مهندسی
و
علوم


آمار و احتمال در مهندسی

آزمون‌های فرض

فهرست مطالب این فصل:

۱- مفاهیم اولیه
۲-مراحل انجام آزمون فرض
۳-انواع آزمون‌های فرض آماری روی پارامترهای جامعه
۴-آزمون برازش- آزمون خی دو ساده
۵- آزمون استقلال
۶- مقدار p یا (p-value)
۷- طرز محاسبه احتمال خطای نوع دوم بودن داشتن ناحیه بحرانی
۸-طرز محسبه احتمال خطای نوع اول و دوم با داشتن ناحیه بحرانی
۹- تعیین اندازه نمونه در آزمون فرض

مفاهیم اولیه

- در بحث آزمون فرضیه باید ابتدا از دو حکم یا ادعایی که درباره پارامتر مجهول جامعه است یکی را فرضیه‌ای به نام فرض صفر (H_0) و دیگری را فرض مقابل (H_1) می‌نامیم.
- بسیار مهم است که بیان کنیم که کدام فرض صفر و کدام فرض مقابل است. قبل از آنکه نتیجه‌گیری کنیم که حکم یا ادعایی معتبر است باید شواهد و دلایل کافی برای تایید آن وجود داشته باشد. بنابراین رویه در آزمون فرضیه بدین صورت است حکم یا ادعا را غلط می‌دانیم مگر اینکه شواهد کافی خلاف آن را قویاً تایید نماید. بنابراین فرض H_0 صحیح است مگر آن که داده‌های آماری خلاف آن را نشان دهند.

H_0: نقیض ادعا

H_1: ادعا

مفاهیم اولیه

✓ تعریف آماره آزمون:

آماره‌ای که براساس مقادیر مشاهده شده آن یک فرضیه را رد یا قبول می کنیم، آماره آزمون نام دارد.

✓ تعریف ناحیه بحرانی:

ناحیه‌ای است که مقدار آماره آزمون متعلق به این ناحیه باشد، آنگاه باید فرض صفر (H_0) را رد کرد.

✓ تعریف:

هر فرض آماری که توزیع جامعه را کاملاً مشخص کند فرض ساده و فرضی که توزیع جامعه را مشخص نکند فرض مرکب گویند.

مفاهیم اولیه

✓ تعریف خطای نوع اول:

رد کردن فرض صفر (H_0) درصورتی که فرض درست باشد، خطای نوع اول می‌باشد و به احتمال خطای نوع اول α یا سطح معنی‌دار گفته می‌شود.

$$\alpha = P(H_0 \text{ رد} | H_0 \text{ درست باشد})$$

✓ تعریف خطای نوع دوم:

پذیرش فرض صفر (H_0) درصورتی که فرض صفر (H_0) درست نباشد، خطای نوع دوم می‌باشد و به احتمال خطای نوع دوم β گفته می‌شود.

$$\beta = P(H_0 \text{ پذیرش} | H_1 \text{ درست باشد})$$

مفاهیم اولیه

✓ تعریف توان آزمون:

احتمال رد کردن فرض صفر $H_\circ$ درصورتیکه H_1 درست باشد، یعنی احتمال رد کردن فرض $H_\circ$ به درستی را توان آزمون گویند. توان آزمون مکمل خطای نوع دوم است.

$$\text{توان آزمون} = \beta^* = \pi = P\left(H_\circ \text{ رد کردن} \middle| H_1 \text{ درست باشد}\right) =$$
$$1 - P\left(H_\circ \text{ پذیرش} \middle| H_1 \text{ درست باشد}\right) = 1 - \beta$$

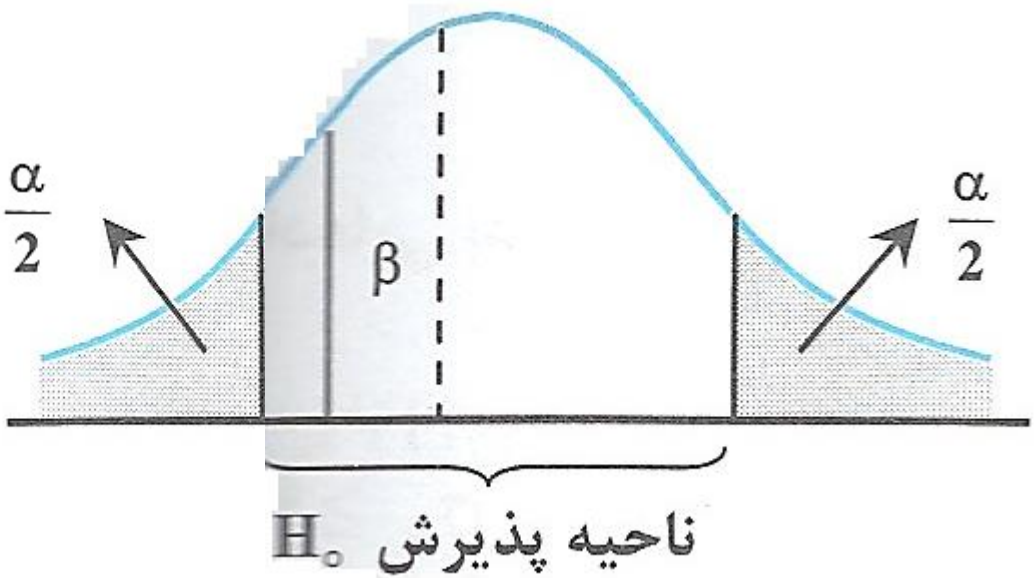
مفاهیم اولیه

✓ در فرض‌هایی که روی پارامتر جامعه اتخاذ می‌شود ممکن است فرض ساده یا مرکب باشد و برای آزمون آنها ممکن است مرتکب خطای نوع اول یا نوع دوم یا تواماً نوع اول یا دوم شویم که در این فصل فقط خطای نوع اول و دوم را مورد بحث قرار می‌دهیم.

	واقعیت	
نتیجه‌گیری از نمونه	H_0 درست است	H_0 غلط است
H_0 پذیرفته می‌شود	تصمیم درست است	خطای نوع دوم
H_0 رد می‌شود	خطای نوع اول	توان آزمون

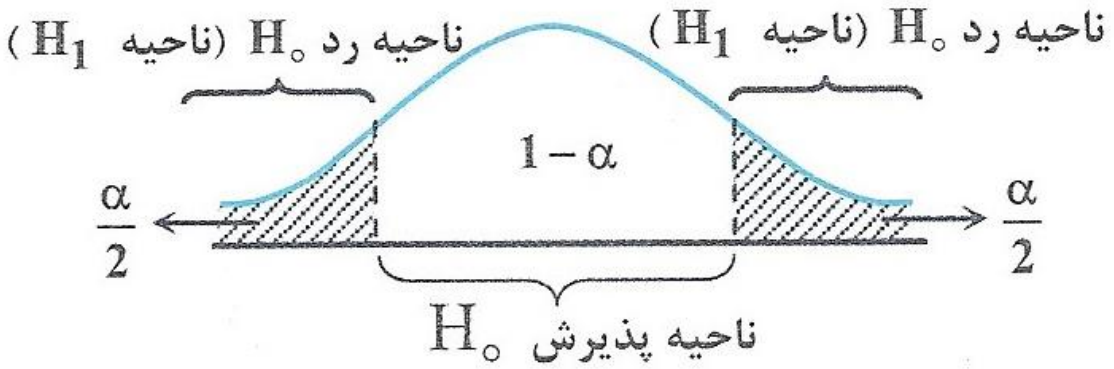
مفاهیم اولیه

✓ مقدار α همیشه در ابتدای انجام آزمون فرضیه ها مشخص می‌شود و سعی می‌شود که با ثابت نگاه داشتن α مقدار β را کاهش دهند. چرا که نمی‌توان هم‌زمان هر دوی آنها را حداقل کرد.



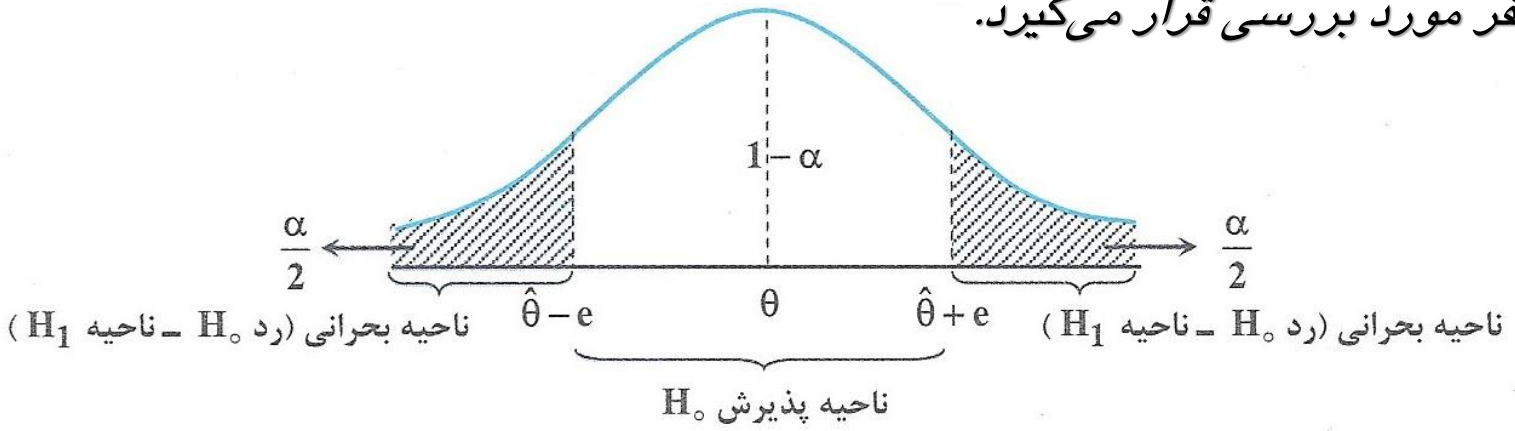
مفاهیم اولیه

- ✓ احتمال خطای نوع اول (α) و احتمال خطای نوع دوم (β) با یکدیگر رابطه معکوس دارند، با افزایش یکی، دیگری کاهش می‌یابد و بالعکس.
- ✓ با افزایش حجم نمونه (n) مقادیر α و β کاهش می‌یابد.
- ✓ همواره مجموع مقادیر α و β کمتر یا مساوی یک است ($\alpha + \beta \leq 1$).
- ✓ احتمال خطای نوع اول (α) و توان آزمون ($1 - \beta$) با یکدیگر رابطه مستقیم دارند.
- ✓ احتمال خطای نوع اول (α) با e خطای برآورد (دقت برآورد) رابطه معکوس دارد.
- ✓ احتمال خطای نوع دوم (β) با e خطای برآورد (دقت برآورد) رابطه مستقیم دارد.



مفاهیم اولیه

- ✓ سطح معنی دار α چیست؟
- ✓ پس مشخص کردن فرضیه‌های آماری یعنی H_0 و H_1 مرحله بعد مشخص کردن مقداری می‌باشد که اختلاف بین مقدار ادعا شده ومقدار واقعی پارامتر جامعه را نشان می‌دهد، این احتمال به صورت قرار دادی انتخاب می‌شود و قاعده مشخصی ندارد. مقدار α معمولاً ۰/۰۱ یا ۰/۰۵ یا ۰/۱ در نظر گرفته می‌شود.
- ✓ انتخاب α به عوامل بسیار زیادی بسته به نوع مساله است. سطح معنی‌دار تاثیر مستقیم در رد یا قبول H_0 دارد لذا محقق قبل از شروع مساله آن را مشخص می‌کند.
- ✓ توجه شود که همیشه فرضیه H_0 رد می‌شود یا اینکه رد نمی‌شود. یعنی همواره فرضیه صفر مورد بررسی قرار می‌گیرد.



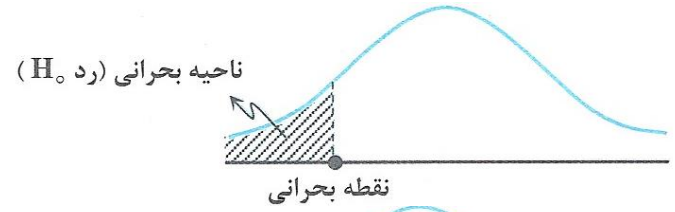
آزمونهای یک دامنه و دو دامنه

✓ به فرضیه هایی که فرضیه H_1 آنها به صورت نامساوی است مانند $\mu_1 \neq \mu_2$ فرضیه‌های **دو دامنه** و به فرضیه‌هایی که فرضیه H_1 آنها فقط یک جهت دارد مانند، $\mu_1 < \mu_2$ و $\mu_1 > \mu_2$ فرضیه‌های **یک دامنه** گویند.

آزمون یک دامنه

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

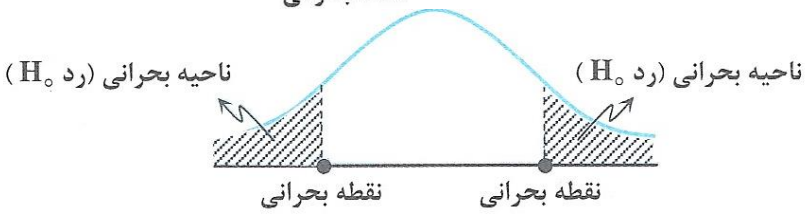
(دامنه به چپ)



آزمون دو دامنه

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

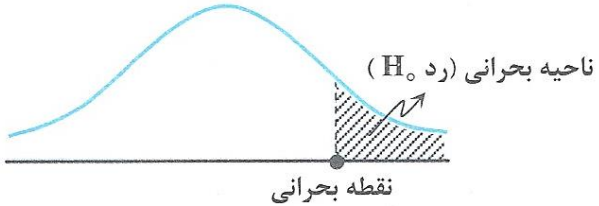
(دو دامنه)



آزمون یک دامنه

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

(دامنه به راست)



مراحل انجام آزمون فرض

۱- تعیین فرض‌های صفر (H_0) و مقابل (H_1)

۲- تعیین سطح معنی‌داری (α) که معمولاً ۰/۰۱ یا ۰/۰۵ یا ۰/۱ در نظر گرفته می‌شود.

۳- تعیین آماره آزمون متناسب با پارامترهای جامعه (μ,σ^2,p) و محاسبه آماری آزمون.

۴- تعیین ناحیه بحرانی که براساس آماره آزمون، فرض مقابل آزمون و سطح معنی‌دار (α) می‌باشد. جایی است که فرضیه H_0 رد می‌شود یعنی ناحیه‌ای که تفاوت معنی‌دار است.

۵- نتیجه‌گیری: اگر مقدار محاسبه شده آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر اینصورت دلیلی بر رد H_0 وجود ندارد.

انواع آزمون‌های فرض آماری روی پارامترهای جامعه

۱- استنباط بر روی میانگین جامعه (واریانس جامعه معلوم است).

۲- استنباط بر روی میانگین جامعه (واریانس جامعه نامعلوم و حجم نمونه $n \geq 30$ است).

۳- استنباط بر روی میانگین جامعه نرمال (واریانس جامعه نامعلوم و حجم نمونه $n < 30$ است).

۴- استنباط بر روی میانگین جامعه (توزیع جامعه نامشخص، استفاده از نامساوی چی بی شف).

۵- استنباط بر روی واریانس جامعه نرمال (σ^2).

۶- استنباط بر روی نسبت جامعه (p).

۷- استنباط بر روی میانگین دو جامعه مستقل (واریانس دو جامعه معلوم است).

۸- استنباط بر روی میانگین دو جامعه نرمال (واریانس دوجامعه نامعلوم ولی مساوی و $n_1, n_2 < 30$).

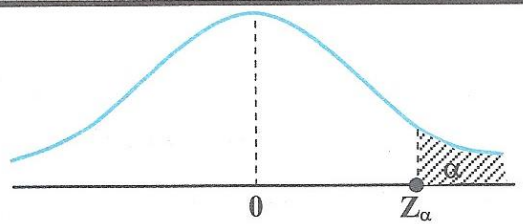
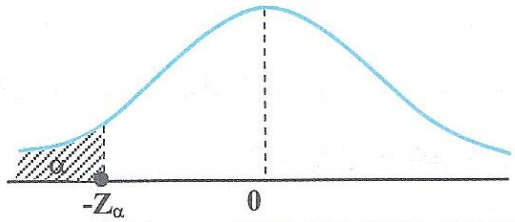
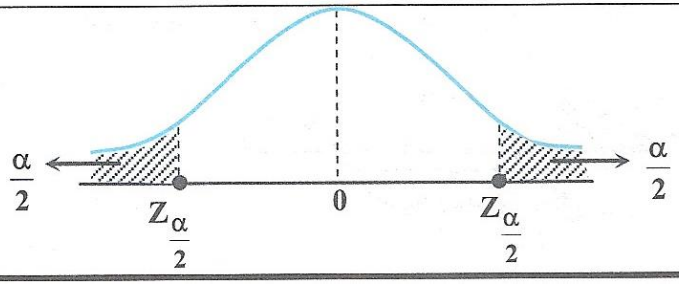
۹- استنباط بر روی میانگین جامعه در نمونه های زوج شده.

۱۰- استنباط بر روی نسبت دو جامعه ($n_1, n_2 \geq 30$).

۱۱- استنباط بر روی واریانس دو جامعه.

۱- استنباط بر روی میانگین جامعه (واریانس جامعه معلوم است)

✓ جامعه نرمال یا $n \geq 30$

فرضیه‌ها	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$Z > Z_\alpha$ 
$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$Z < -Z_\alpha$ 
$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$\lvert Z \rvert > Z_{\frac{\alpha}{۲}}$ 

۱- استنباط بر روی میانگین جامعه (واریانس جامعه معلوم است)

✓ مثال: یک نمونه ۳۶ تایی از جامعه‌ای نرمال با انحراف معیار ۹ انتخاب کرده‌ایم. اگر میانگین این نمونه برابر با ۴۲/۵ باشد، در سطح معنی دار ۰/۰۵ آیا فرض میانگین کل جامعه کمتر از ۴۵ قبول می‌باشد؟

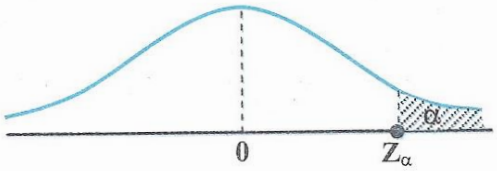
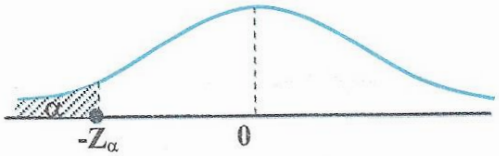
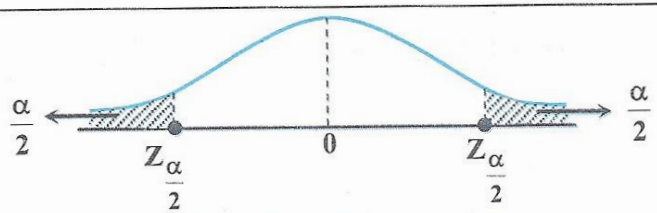
✓ جواب:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 45 \\ H_1: \mu < 45 \end{cases}, \qquad \alpha = 0.05, n = 36, \sigma = 9, \bar{X} = 42.5, \mu_0 = 45$$

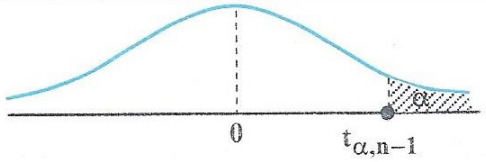
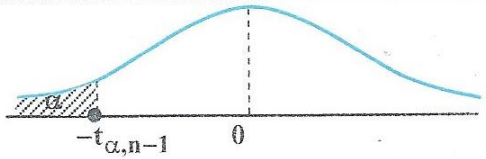
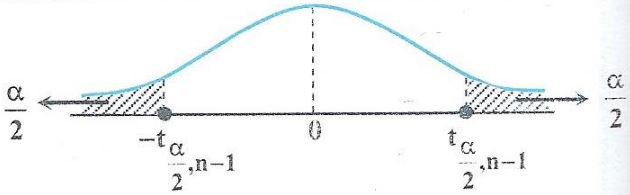
$$Z = \frac{42.5 - 45}{\frac{9}{\sqrt{36}}} = -1.67, \qquad Z < -Z_\alpha; -Z_\alpha = -1.65$$

با توجه به مقدار آماره آزمون (۱/۶۷-) در ناحیه بحرانی قرار می گیرد فرضیه صفر رد می شود.

۲- استنباط بر روی میانگین جامعه
(واریانس جامعه نامعلوم و حجم نمونه $n \geq 30$ است)

فرضیه‌ها	آماره آزمون	ناحیه بحرانی	
$\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	$Z > Z_\alpha$	
$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	$Z < -Z_\alpha$	
$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	$\lvert Z \rvert > Z_{\frac{\alpha}{۲}}$	

۳- استنباط بر روی میانگین جامعه نرمال (واریانس جامعه نامعلوم و حجم نمونه $n>۳۰$ است).

فرضیه‌ها	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
$\begin{cases} H_۰ : \mu \le \mu_۰ \\ H_۱ : \mu > \mu_۰ \end{cases}$	$t = \dfrac{\bar{X} - \mu_۰}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	$t > t_{\alpha,n-۱}$ 
$\begin{cases} H_۰ : \mu \ge \mu_۰ \\ H_۱ : \mu < \mu_۰ \end{cases}$	$t = \dfrac{\bar{X} - \mu_۰}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	$t < -t_{\alpha,n-۱}$ 
$\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu \ne \mu_۰ \end{cases}$	$t = \dfrac{\bar{X} - \mu_۰}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	$\lvert t \rvert > t_{\frac{\alpha}{۲},n-۱}$ 

۳- استنباط بر روی میانگین جامعه نرمال (واریانس جامعه نامعلوم و حجم نمونه $n>۳۰$ است).

✓ مثال: نمونه۸ تایی از نمرات دانشجویان در درس آمار و احتمال به صورت ۱۲و۷و۸و۱۹و۱۳و۱۱و۱۶و۹ با فرض نرمال بودن توزیع جامعه می‌خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم، مقدار آماره آزمون کدام است؟

$$\begin{cases} H_0: \mu = 11 \\ H_1: \mu \neq 11 \end{cases}$$

✓ جواب:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = 11.875$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = 16.696, \qquad S = 4.086$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightarrow t = 0.61$$

۴- استنباط بر روی میانگین جامعه
(توزیع جامعه نامشخص، استفاده از نامساوی چی بی شف)

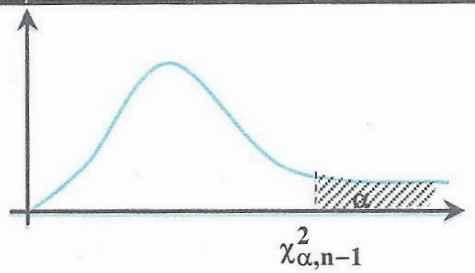
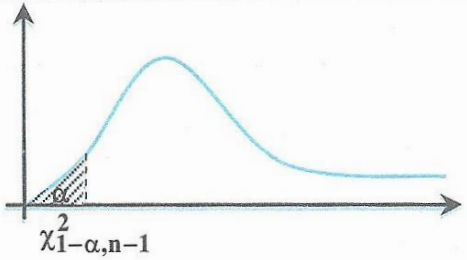
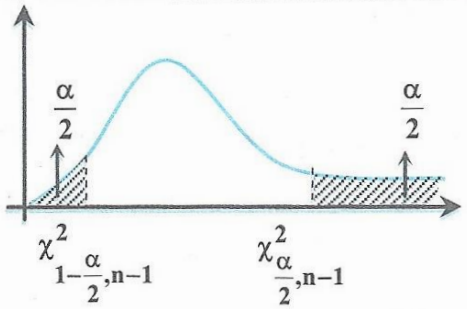
$$P(|\bar{X}-\mu|<k\sigma_{\bar{x}}) \geq ۱-\frac{۱}{k^۲} \Rightarrow P(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma_{\bar{x}}} \geq k) \leq \frac{۱}{k^۲}$$

فرضیه‌ها $\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu \neq \mu_۰ \end{cases}$

مقدار آماره آزمون $k = \dfrac{|\bar{x}-\mu_۰|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

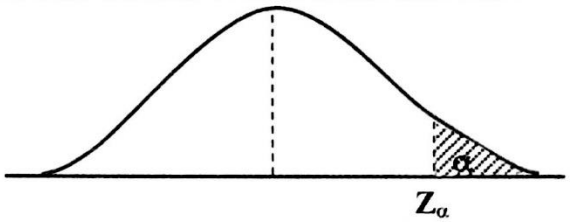
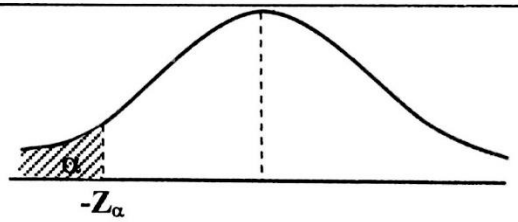
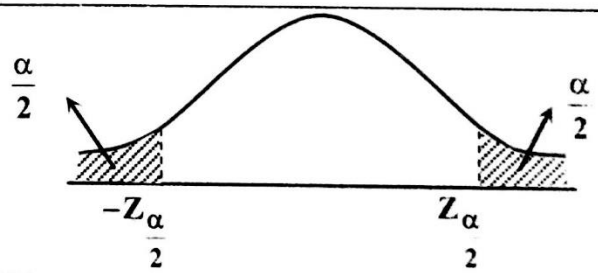
ناحیه بحرانی : $\dfrac{۱}{k^۲} \leq \alpha$

۵- استنباط بر روی واریانس جامعه نرمال (σ^2).

فرضیه‌ها	آماره آزمون	ناحیه بحرانی	
$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$	
$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$	
$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2 \end{cases}$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ یا $\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$	

۶- استنباط بر روی نسبت جامعه (p)

$n \geq 30$

فرضیه‌ها	آماره آزمون	ناحیه بحرانی	
$\begin{cases} H_0 : p \leq p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$	$Z > Z_\alpha$	
$\begin{cases} H_0 : p \geq p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$	$Z < -Z_\alpha$	
$\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P \neq P_0 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$	$\lvert Z \rvert > Z_{\frac{\alpha}{2}}$	

۶- استنباط بر روی نسبت جامعه (p)

✓ مثال: محموله‌ای شامل ۵۰ رایانه است، اگر ۸ رایانه در این محموله معیوب باشد، آیا در سطح ۵ درصد می‌توان گفت نسبت معیوب در جامعه کمتر از ۲۰٪ است؟

✓ جواب:

$n = 50, \qquad x = 8, \qquad \alpha = 0.05, \qquad P_\circ = 0.2$

$H_\circ: P \geq 0.2$

$H_1: P < 0.2$

آماره آزمون

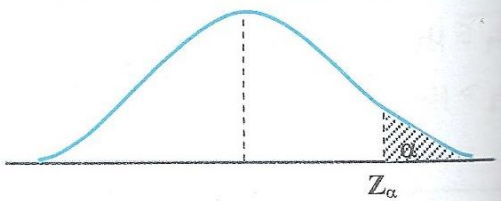
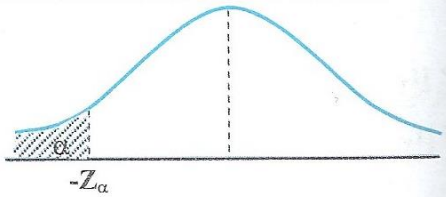
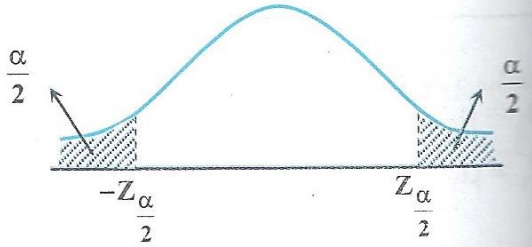
$$Z = \frac{\frac{X}{n} - P_\circ}{\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}{n}}} = \frac{\frac{8}{50} - 0.2}{\sqrt{\frac{\frac{8}{50}(1-\frac{8}{50})}{50}}} = -0.7715$$

مقدار جدول $P[Z < Z_\alpha] = 0.05 \rightarrow -Z_\alpha = -1.64$ است چون $Z < -Z_\alpha$ نیست

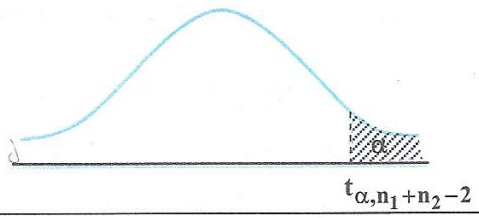
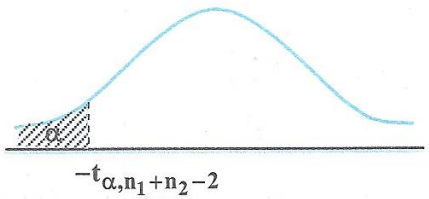
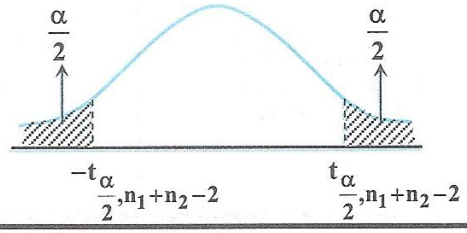
پس فرض $H_\circ$ پذیرفته می‌شود.

۷- استنباط بر روی میانگین دو جامعه مستقل (واریانس دو جامعه معلوم است)

✓ توزیع دو جامعه نرمال یا $n_1, n_2 \geq 30$

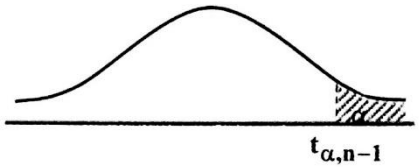
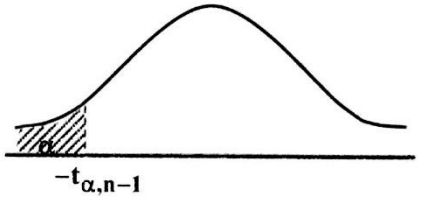
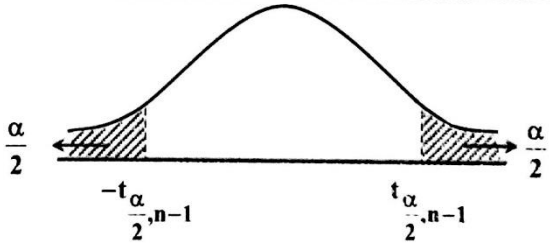
فرضیه‌ها	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$	$Z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$Z > Z_\alpha$ 
$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$Z < -Z_\alpha$ 
$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\lvert Z \rvert > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ 

۸- استنباط بر روی میانگین دو جامعه نرمال (واریانس دو جامعه نامعلوم ولی مساوی و $n_1,n_2 < 30$ است)

فرضیه‌ها	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \le \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$	$S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ و $t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$t > t_{\alpha,n_1+n_2-2}$ 
$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \ge \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$	$t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$t < -t_{\alpha,n_1+n_2-2}$ 
$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \ne \mu_2 \end{cases}$	$t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$\lvert t \rvert > t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$ 

۹- استنباط بر روی میانگین جامعه در نمونه های زوج شده

- ✓ در اینجا فرض بر این است که نمونه‌ها وابسته‌اند. اگر دو نمونه تصادفی به صورت (X_i,Y_i) اختیار شوند در این صورت $d_i = X_i - Y_i$ را تعریف می کنیم و واریانس این تفاضل‌ها به صورت $S_d^2 = \frac{\sum(d_i-\bar{d})^2}{n-1}$ محاسبه می‌گردد.

فرضیه‌ها	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
$\begin{cases} H_0: \mu_d \le 0 \\ H_1: \mu_d > 0 \end{cases}$	$t = \frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$	$t > t_{\alpha,n-1}$ 
$\begin{cases} H_0: \mu_d \ge 0 \\ H_1: \mu_d < 0 \end{cases}$	$t = \frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$	$t < -t_{\alpha,n-1}$ 
$\begin{cases} H_0: \mu_d = 0 \\ H_1: \mu_d \ne 0 \end{cases}$	$t = \frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$	$\lvert t \rvert > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ 

۹- استنباط بر روی میانگین جامعه در نمونه های زوج شده

✓ مثال: جیره غذایی ۵ نفر را در یک اردو تغییر مختصری می‌دهیم و وزن آنها را پیش از این تغییر و سه پس از آن اندازه‌گیری می‌کنیم. فرض افزایش وزن آنها را آزمون می‌کنیم. مقدار آماره آزمون مناسب کدام است؟

i	۱	۲	۳	۴	۵
پیش از رژیم غذایی	۱۶۲	۱۹۲	۱۳۸	۱۸۲	۱۵۹
پس از رژیم غذایی	۱۶۶	۱۹۶	۱۳۶	۱۹۰	۱۶۰

✓ جواب:

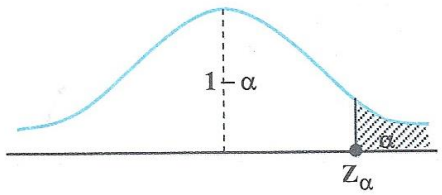
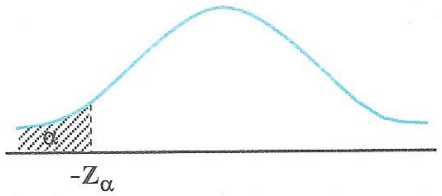
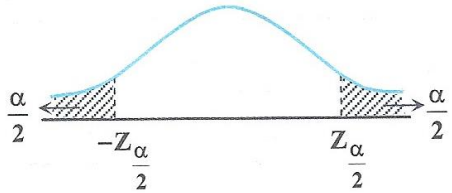
$$\begin{cases} H_0: \mu_x \geq \mu_y \\ H_1: \mu_x < \mu_y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} H_0: \mu_d \geq 0 \\ H_1: \mu_d < 0 \end{cases}$$

$$\bar{d} = \bar{X} - \bar{Y} = -3$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}} = 3.74$$

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{-3}{\frac{3.74}{\sqrt{5}}} = -1.79$$

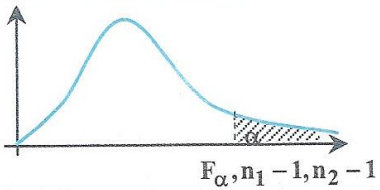
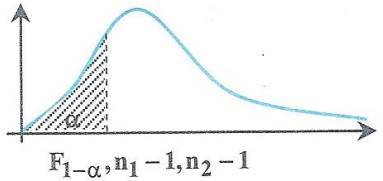
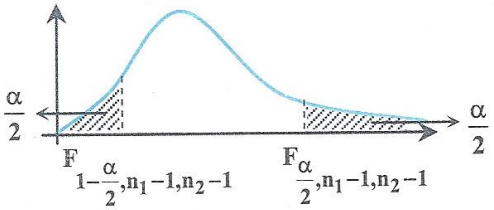
۱۰- استنباط بر روی نسبت دو جامعه ($n_1, n_2 \geq 30$)

فرضیه‌ها	آماره آزمون	ناحیه بحرانی	
$\begin{cases} H_0: p_1 \leq p_2 \\ H_1: p_1 > p_2 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\bar{P}\bar{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ $\bar{P} = \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$	$Z > Z_\alpha$	
$\begin{cases} H_0: p_1 \geq p_2 \\ H_1: p_1 < p_2 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\bar{P}\bar{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ $\bar{P} = \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$	$Z < -Z_\alpha$	
$\begin{cases} H_0: p_1 = p_2 \\ H_1: p_1 \neq p_2 \end{cases}$	$Z = \dfrac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\bar{P}\bar{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ $\bar{P} = \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$	$\lvert Z \rvert > Z_{\frac{\alpha}{2}}$	

✓ هرگاه نمونه‌های مورد نظر از یک جامعه انتخاب نشوند آماره تعریف شده بصورت زیر می‌باشد.

$$Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\frac{\bar{P}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{P}_2\bar{q}_2}{n_2}}}$$

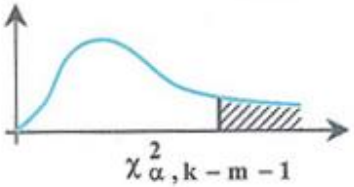
۱۱- استنباط بر روی واریانس دو جامعه

فرضیه‌ها	آماره آزمون	ناحیه بحرانی
$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F > F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$ 
$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F < F_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$ 
$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2 \end{cases}$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F > F_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}$ یا $F < F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}$ 

$$F_{\alpha, n_1-1, n_2-1} = \frac{1}{F_{1-\alpha, n_2-1, n_1-1}}$$

آزمون برازش- آزمون خی دو ساده

- ✓ در آزمون‌هایی که تاکنون مطرح شده است فرض کردیم که توزیع جامعه نرمال باشد، در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که می‌خواهیم توزیع جامعه را به توزیع مشخصی نسبت داده و آن را آزمون کنیم یعنی در اینجا توزیع جامعه مجهول است.

فرضیه‌ها	H_0: توزیع جامعه همان است که فرض کرده‌ایم ≡ فراوانی‌های نظری و تجربی یکسان می‌باشند. H_1: توزیع جامعه مطابق فرض نیست ≡ فراوانی‌های نظری و تجربی یکسان نمی‌باشند.
آمار آزمون	در آماره آزمون e_i, o_i به ترتیب فراوانی‌های مشاهده شده و فراوانی‌های تجربی (مورد انتظار) می‌باشد. k تعداد طبقات و m تعداد پارامترهای مستقل است. $\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$
ناحیه بحرانی	$\chi^2_{obs} > \chi^2_{\alpha,k-m-1}$ 

آزمون برازش- آزمون خی دو ساده

✓ مثال: در یک کارخانه، اطلاعات کارکرد ماشین به صورت جدول زیر می‌باشد. حال می‌خواهیم ببینیم که آیا این جدول توزیع یکنواخت دارد؟ سطح معنی‌دار برابر ۵٪ می‌باشد.

ساعات کار X_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد خرابی O_i	۱۸	۱۷	۲۲	۲۰	۲۳	۱۹	۲۴	۱۷

✓ جواب:

$$n = 18 + 17 + 22 + \cdots + 17 = 160$$

$$e_i = n \times p_i = 160 \times \frac{1}{8} = 20$$

$$\chi^2_{obs} = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 2.6, \qquad df = k - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$\chi^2_{obs} > \chi^2_{\alpha,k-1}; \chi^2_{\alpha,k-1} = \chi^2_{0.05,7} = 14.067$$

با توجه به اینکه آماره آزمون (۲/۶) در ناحیه بحرانی قرار نمی‌گیرد، بنابراین فرض صفر رد نمی‌شود، یعنی توزیع کارکرد ماشین یکنواخت است.

آزمون استقلال

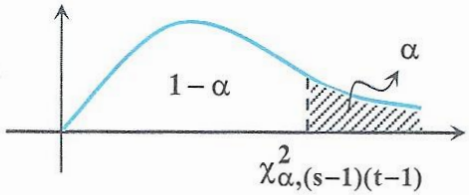
- در آزمون استقلال می‌خواهیم فرض استقلال دو متغیر تصادفی را آزمون کنیم. این آزمون یک دامنه به راست است. در این آزمون دست کم یکی از متغیرها کیفی است.
- فرض کنید مشاهدات دو صفت X,Y به صورت زیر در جدولی شامل s سطر و t ستون باشد. در این صورت فرضیه‌ها خواهیم داشت.

	y_1	y_2	…	y_j	…	y_t	$O_{i.}$
x_1	O_{11}	O_{12}	…	O_{1j}	…	O_{1t}	$O_{1.}$
x_2	O_{21}	O_{22}	…	O_{2j}	…	O_{2t}	$O_{2.}$
:							:
x_j							
:							
x_s	O_{s1}	O_{s2}	…	O_{sj}	…	O_{st}	$O_{s.}$
$n_{o.j}$	$O_{.1}$	$O_{.2}$				$O_{.t}$	$n_{o.j}=N$

آزمون استقلال

✓ اگر پس از آزمون متوجه شویم که بین دو صفت وابستگی وجود دارد، قدرت این وابستگی را با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آوریم. به این مقدار **ضریب توافقی** گفته می‌شود.

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}}$$

فرضیه‌ها	$\begin{cases} H_0: & \text{دو صفت از هم مستقلند} \\ H_1: & \text{دو صفت از هم مستقل نیستند} \end{cases}$
آمار آزمون	$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$; ناحیه بحرانی: $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,(s-1)\cdot(t-1)}$
ناحیه بحرانی	$e_{ij} = \frac{o_{i.} \times o_{.j}}{N}$ 

آزمون استقلال

✓ **مثال:** توزیع فراوانی کارکنان یک موسسه برحسب جنس X و شغل Y طبق جدول زیر مرتب شده است. آیا در سطح $\alpha = 0.05$ شغل از جنس مستقل است؟

X \ Y	کارگر	استاد کار	مهندس	کارمند	$o_{i.}$
مرد	۱۵۰	۷۶	۴۴	۳۰	۳۰۰
زن	۷۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰۰
$o_{.j}$	۲۲۰	۸۶	۵۴	۴۰	۴۰۰

✓ **جواب:**

$$\begin{cases} H_0: & \text{دو صفت از هم مستقلند} \\ H_1: & \text{دو صفت از هم مستقل نیستند} \end{cases}$$

(تشکیل فرضیه‌ها)

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

$$e_{11} = \frac{۲۲۰\times۳۰۰}{۴۰۰} = ۱۶۵ \qquad e_{21} = \frac{۲۲۰\times۱۰۰}{۴۰۰} = ۵۵$$

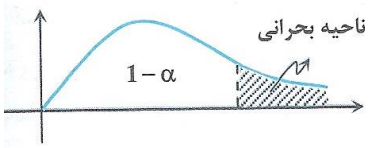
$$e_{12} = \frac{۸۶\times۳۰۰}{۴۰۰} = ۶۴/۵ \qquad e_{22} = \frac{۸۶\times۱۰۰}{۴۰۰} = ۲۱/۵$$

$$e_{13} = \frac{۵۴\times۳۰۰}{۴۰۰} = ۴۰/۵ \qquad e_{23} = \frac{۵۴\times۱۰۰}{۴۰۰} = ۱۳/۵$$

$$e_{14} = \frac{۴۰\times۳۰۰}{۴۰۰} = ۳۰ \qquad e_{24} = \frac{۴۰\times۱۰۰}{۴۰۰} = ۱۰$$

$$\chi^2 = \sum\sum\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(۱۵۰-۱۶۵)^2}{۱۶۵} + \frac{(۷۶-۶۴/۵)^2}{۶۴/۵} + \cdots + \frac{(۱۰-۱۰)^2}{۱۰} = ۱۴/۸۷$$

با توجه به اینکه مقدار آماره آزمون (۱۴/۸۷) در ناحیه بحرانی (قسمت هاشور خورده) قرار می‌گیرد، بنابراین فرض صفر رد می‌شود، یعنی شغل از جنس مستقل نیست.



$$\chi^2 > \chi^2_{\alpha,(s-1).(t-1)} \quad ; \quad \chi^2_{0/05,(4-1).(2-1)} = 7/81$$

مقدار p یا (p-value)

- ✓ آقای فیشر نشان داد، کمترین مقداری از α (سطح آزمون) که با نمونه‌ی مشاهده شده موجب رد فرض صفر می‌گردد، p_value نام دارد.
- ✓ کوچکترین مقداری که برای α می‌توان درنظر گرفت تا H_0 رد شود، برابر با مقدار احتمال (p_value) است اگر p_value از این α که پژوهشگر انتخاب کرده است کمتر باشد فرض H_0 رد می‌شود. با این روش نیازی به داشتن ناحیه بحرانی برای آزمون نیست.
- ✓ طرز محاسبه p_value : اگر T آماره آزمون و t مقدار یافته آن باشد،

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases} \Rightarrow P-Value = P_{\theta_0}(T \geq t)$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \Rightarrow P-Value = P_{\theta_0}(T \leq t)$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases} \Rightarrow P-Value = 2\min\left\{ P_{\theta_0}(T \leq t), P_{\theta_0}(T \geq t) \right\}$$

مقدار p یا (p-value)

✓ مثال: در آزمون $\begin{cases} H_0: \mu \leq 100 \\ H_1: \mu > 100 \end{cases}$ در توزیع نرمالی با انحراف معیار ۱۲ و سطح آزمون ۰/۰۵ است. اگر حجم نمونه ۳۶ و $\bar{X} = 106$ باشد مقدار p_value چقدر است؟

✓ جواب:

$$\text{p_value}=P(\bar{X} \geq 106|\mu = 100)=P(Z \geq \frac{106-100}{\frac{12}{\sqrt{36}}})=P(Z \geq 3)=P(Z \leq -3)=0.0013$$

طرز محاسبه احتمال خطای نوع دوم (β) بودن داشتن ناحیه بحرانی

✓ اگر آزمون یک دامنه به چپ باشد:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases} \Longrightarrow \beta = P_{H_1}(Z < K - Z_\alpha)$$

✓ اگر آزمون یک دامنه به راست باشد:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases} \Longrightarrow \beta = P_{H_1}(Z > K - Z_\alpha)$$

✓ اگر آزمون دو دامنه باشد:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases} \Longrightarrow \beta = P_{H_1}(K - Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < K + Z_{\frac{\alpha}{2}})$$

در اینجا K مقدار آماره آزمون متناسب با پارامتر μ به ازای مقدار واقعی μ می‌باشد.

طرز محاسبه احتمال خطای نوع اول (α) و دوم (β) با داشتن ناحیه بحرانی

✓ مثال: فرض کنید که X متغیر تصادفی با چگالی احتمالی

$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}}, x > 0$ باشد برای آزمون $\theta = 1000$ در برابر $\theta = 2000$ مشاهده‌ای به حجم $n=1$ اختیار شده است، اگر $X_1 > 1000$ باشد فرض H_0 را رد می‌کنیم. مقادیر α,β کدام است؟

جواب:

$$\alpha = P(H_0 \text{ رد} | H_0 \text{ درست باشد}) = P(X_1 > 1000 | \theta = 1000) = \int_{1000}^{\infty} \frac{1}{1000} e^{\frac{-x}{1000}} dx = e^{-1}$$

$$\beta = P(H_0 \text{ پذیرش} | H_0 \text{ نادرست باشد}) = P(X_1 < 1000 | \theta = 2000) = \int_{0}^{1000} \frac{1}{2000} e^{\frac{-x}{2000}} dx = 1 - e^{-1/2}$$

تعیین اندازه نمونه در آزمون فرض

✓ الف: در آزمون $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ که به صورت دو دامنه می‌باشد، اندازه نمونه به ازای مقادیر معلوم α و β برابر است با:

$$n = \frac{\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + Z_\beta\right)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

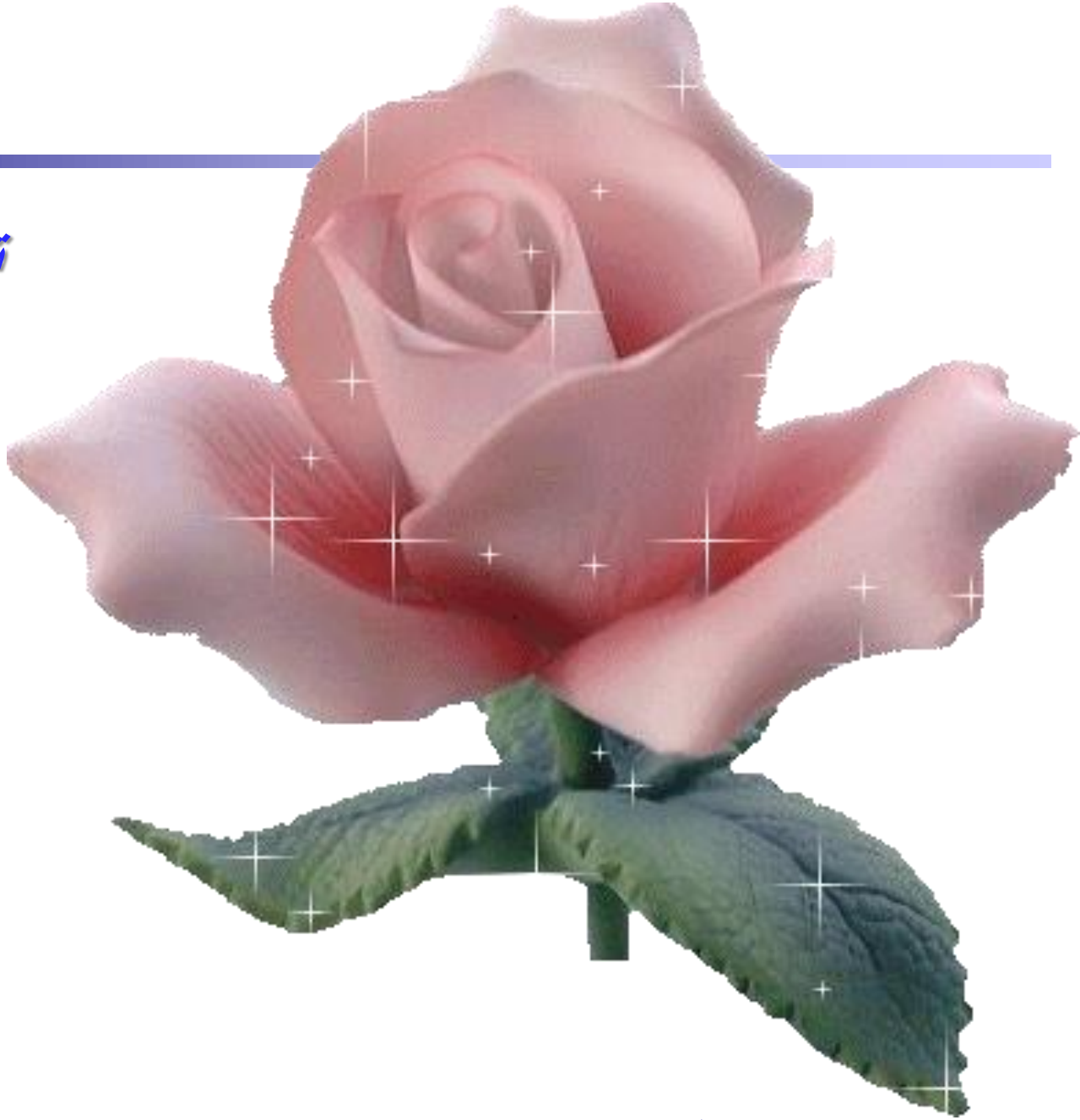
✓ ب: در آزمون‌های یکطرفه (به چپ یا به راست) $\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$، اندازه نمونه به ازای مقادیر معلوم α و β برابر است با:

$$n = \frac{\left(Z_\alpha + Z_\beta\right)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

تعیین اندازه نمونه در آزمون فرض

✓ مثال: به منظور رد یا قبول ادعای $H_0: \mu = 60$ در برابر $H_1: \mu < 60$ چه تعداد نمونه انتخاب کنیم تا در سطح احتمال $\alpha = 0.01$ و $\beta = 0.05$ میانگین واقعی جامعه $\mu = 62.5$ و $\sigma^2 = 62.5$ باشد.

✓ جواب:

$$\begin{cases} \alpha = 0.01 \Longrightarrow Z_{0.01} = 1.28 \\ \beta = 0.05 \Longrightarrow Z_{0.05} = 1.65 \end{cases} \Longrightarrow n = \frac{(1.28 + 1.65)^2 62.5}{(62.5 - 60)^2} = 85.85 \approx 86$$

تشکر از توجه شما