آمار و احتمالات مهندسی

فضای نمونه با عناصر متعدد

دکتر بهناز بیگدلی

دانشکده مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی شاهرود

ساختار درس

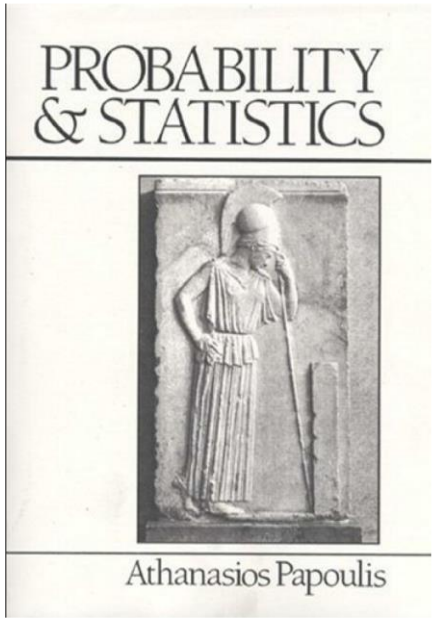
نحوه ارزیابی

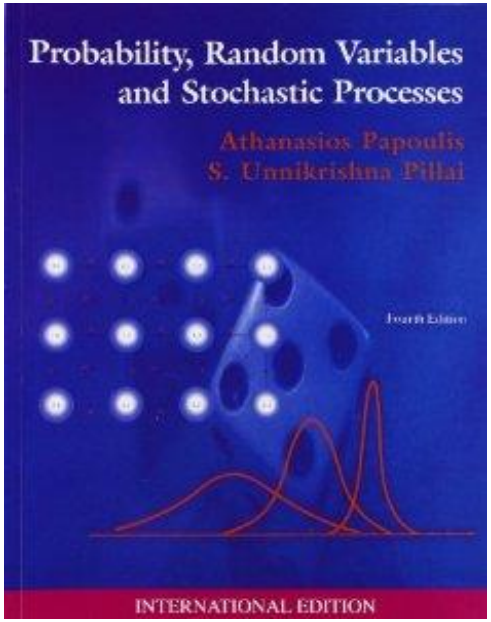
امتحان پایان ترم (۱۴)

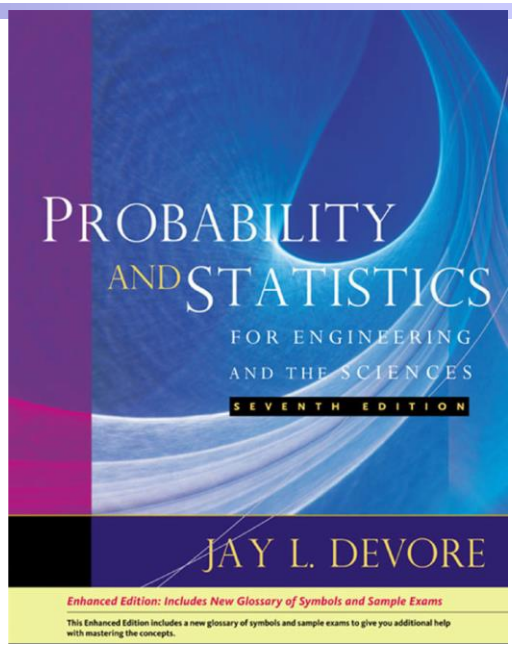
امتحان میان ترم (۴)

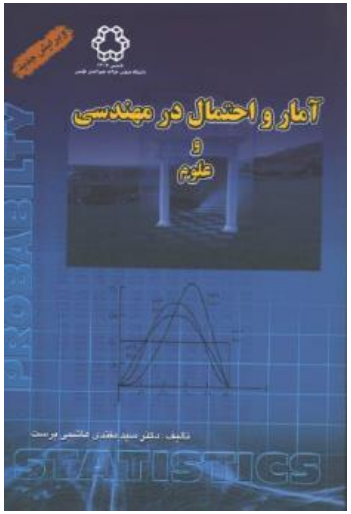
تمرینات و کوئیزها (۲)

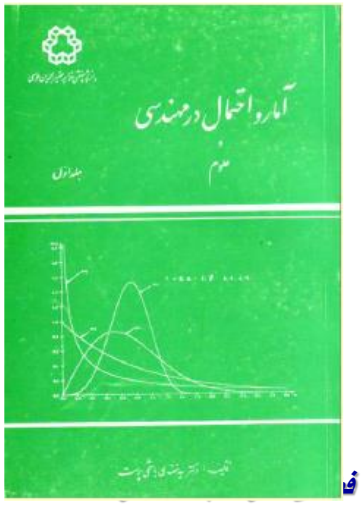
منابع


PROBABILITY
& STATISTICS
Athanasios Papoulis


Probability, Random Variables
and Stochastic Processes
Athanasios Papoulis
S. Unnikrishna Pillai
Fourth Edition
INTERNATIONAL EDITION


PROBABILITY
AND STATISTICS
FOR ENGINEERING
AND THE SCIENCES
SEVENTH EDITION
JAY L. DEVORE
Enhanced Edition: Includes New Glossary of Symbols and Sample Exams
This Enhanced Edition includes a new glossary of symbols and sample exams to give you additional help with mastering the concepts.


آمار و احتمال در مهندسی
و
علوم


آمار و احتمال در مهندسی

فهرست و عناوین درس

I. بخش اول: آمار مقدماتی (توصیفی)

1. آمار مقدماتی
2. اندازه‌گیری پراکندگی، گشاورها، چولگی و کشیدگی
3. برازش خط و منحنی بر داده‌ها
4. توزیع‌های دو بعدی و ضریب همبستگی

II. احتمال

1. احتمال و فضای نمونه
2. فضای نمونه با عناصر متعدد
3. احتمالات شرطی و نابستگی
4. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و امید ریاضی
5. توزیع‌های گسسته
6. توزیع‌های پیوسته مهم
7. نظریه برآورد
8. آزمون‌های فرض

فضای نمونه با عناصر متعدد

فهرست مطالب این فصل:

۱- اصل اساسی شمارش

۱-۱- تعاریف

۱-۲- شمارش

۲- جایگشت‌ها

۳- ترکیب

۴- ترتیب

۵- چند رابطه مهم

۶- چند قضیه مهم

تعاریف اولیه

✓ فاکتوریل: حاصل‌ضرب اعداد طبیعی ۱ تا n را با نماد $n!$ نشان می‌دهیم.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n! = \begin{cases} n \leq 1 & 1 \\ n > 1 & n(n-1)! \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad\qquad 0! = 1$$

شمارش

- ✓ تعیین تعداد عناصر یک فضای نمونه متناهی به وسیله شمارش مستقیم، واقعاً مشکل یا لااقل خسته کننده است.

اصول شمارش

✓ فرض کنید کار X با m طریق به نام‌های $X_1, X_2, \ldots, X_m$ و کار Y با n طریق به نام‌های $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ قابل انجام باشند. اصول شمارش عبارتند از:

اصل اول شمارش : اگر انجام کار Z منوط به انجام کار X و Y باشد آنگاه کار Z را می‌توان به **$m+n$** طریق $X_1, X_2, \ldots, X_m$ و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ انجام داد.

اصل دوم شمارش : اگر انجام کار Z منوط به انجام کار X یا Y باشد آنگاه کار Z را می‌توان به **$m \times n$** طریق زیر انجام داد:

$$
\begin{array}{l}
(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_1, y_n) \\
(x_2, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_2, y_n) \\
\vdots \\
(x_m, y_1), (x_m, y_2), \ldots, (x_m, y_n)
\end{array}
$$

اصول شمارش

✓ مثال:

چند عدد زوج سه رقمی از ارقام ۱، ۲، ۵، ۶ و ۹ می‌توان نوشت به طوری‌که هر رقم فقط یک بار استفاده شود؟

✓ جواب:

از اینکه اعداد زوج باشد، برای رقم یکان فقط دو انتخاب وجود دارد پس کل طرق برابر است با ۲×۴×۳=۲۴ .

جایگشت (تبدیل)

- ✓ راه‌های مرتب کردن n شیء **متمایز** در کنار یکدیگر را جایگشت آن n شیء خوانده می‌شود.

- ✓ انواع جایگشت
  - جایگشت خطی
  - جایگشت دایره‌ای
  - جایگشت یک در میان
  - جایگشت با تکرار

جایگشت خطی

- ✓ تعداد راه‌هایی که می‌توان n شیء متمایز را در یک خط یا در یک صف مرتب کرد، برابر $n!$ است.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- ✓ مثال: به چند طریق می‌توان ۳ تهرانی، ۲ اصفهانی و ۲ کرمانی را در یک صف مرتب کرد،بطوری که تهرانی‌ها کنار یکدیگر باشند؟

- ✓ جواب: ابتدا ۳ تهرانی را در یک دسته فرض می کنیم (یک نفر)، بنابراین با این دسته‌بندی تهرانی‌ها همواره در کنار هم خواهند بود، حال ۵ نفر مانده‌اند و یعنی ۵ حالت در کنار یکدیگر جابه‌جا شوند، اما خود تهرانی ها هم با !۳ در بین خودشان هستند پس

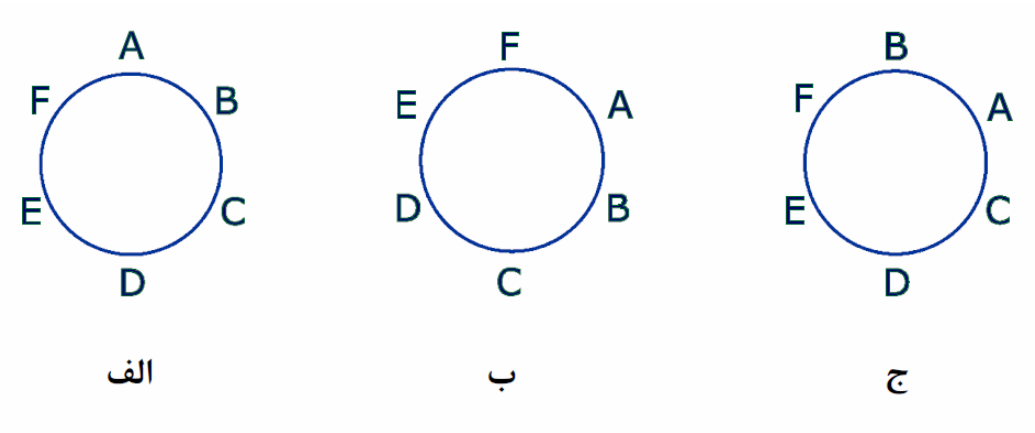
$$۵!\times ۳!$$

جایگشت دایره‌ای

- ✓ تعداد راه‌هایی که می‌توان n شیء متمایز را روی محیط یک دایره مرتب کرد، برابر $(n-1)!$ است.

- ✓ مثال: به چند طریق ۶ نفر می‌توانند دور یک میز دایره ای بنشینند؟

- ✓ جواب: $(6-1)!$



جایگشت یک در میان

✓ اگر بخواهیم m شیء از یک گروه و n شیء از گروهی دیگر را بصورت یک در میان در یک خط مرتب کنیم، دو حالت وجود دارد:

- تعداد دو گروه با هم برابر باشد.

اگر $m=n \Rightarrow$ تعداد حالات $=2\times m! \times n!$

- دو گروه با یکدیگر یک واحد اختلاف داشته باشند.

اگر $m=n+1 \Rightarrow$ تعداد حالات $=m! \times n!$

✓ مثال: به چند طریق ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی را به صورت یک در میان در کنار یکدیگر مرتب کرد؟

✓ جواب: تعداد دو گروه با هم برابر نیستند، پس $2! \times 3!$

جایگشت دایره‌ای و یک در میان

- بطور کلی اگر بخواهیم n شیء از یک گروه و n شیء از گروهی دیگر را بصورت یک در میان دور یک دایره مرتب کنیم، تعداد حالات برابر است با:

$$(n-1)! \times n!$$

- مثال: به چند طریق میتوان ۳ مهره قرمز و ۳ مهره آبی را به صورت یک در میان دور یک میز مرتب کرد؟
- جواب: تعداد حالات $2! \times 3!$

جایگشت با تکرار

- تعداد جایگشت‌های مختلف n عنصر از n_1 تای آن از نوع اول، n_2 تای آن از نوع دوم و n_k تای آن از نوع kام می‌باشد برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k\,!}; \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

- مثال: به حروف کلمه statistics چند کلمه ۱۰ حرفی می‌توان نوشت؟

- جواب: این کلمه شامل ۱۰ حرف مختلف است که تعدادی از آنها تکراری است، مانند {sss,ttt,ii,a,c} که چند حرف s, t, i از حروف تکراری هستند. پس

$$\frac{10!}{3! \times 3! \times 2!}$$

ترتیب

- انتخاب r شیء از n شیء زمانی که **ترتیب** انتخاب r شیء **مهم باشد** و با جابه‌جایی این r شیء حالت جدیدی به وجود آید، ترتیب r شیء از n شیء نامیده می‌شود و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P_n^r = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- مثال: با پنج دانشجو به چند صورت می‌توان صف‌های سه نفری ساخت؟
- جواب:

$$P_5^3 = (5)_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

ترکیب

- انتخاب r شیء از n شیء زمانی که **ترتیب** انتخاب r شیء **مهم نباشد** ترکیب نام دارد و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

- مثال: به چند طریق می‌توان از یک گروه ۱۲ نفره یک تیم حداقل ۱۰ نفره انتخاب کرد؟
- جواب:

$$\binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12} = 66 + 12 + 1 = 79$$

چند رابطه مهم

✓ رابطه اول

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

✓ رابطه دوم

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

✓ رابطه سوم

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$$

چند رابطه مهم

✓ رابطه چهارم

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

✓ رابطه پنجم

$$(a+b)^n=\sum\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

✓ رابطه ششم

$$r!\times C_n^r=P_n^r$$

چند قضیه مهم

✓ قضیه اول: تعداد حالات مختلف تقسیم n شیء متمایز بین k دسته مختلف به طوری که در دسته اول n_1 عضو، در دسته دوم n_2 عضو و ... در دسته kام n_k عضو قرار گیرد، برابر است با:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k}$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

چند قضیه مهم

✓ قضیه دوم: تعداد حالات تقسیم n شیء نامتمایز (مشابه) بین k فرد مختلف، برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

✓ مثال: به چند طریق می‌توان سه مداد مشابه را بین پنج نفر تقسیم کرد؟

✓ جواب:

$$\begin{cases} n = 3 \\ k = 5 \end{cases} \rightarrow \binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$$

چند قضیه مهم

✓ قضیه سوم: تعداد حالات انتخاب k شیء از بین n شیء متمایز با تکرار، برابر است با:

$$H_n^r = \binom{n+k-1}{k}$$

✓ مثال: می‌خواهیم از سه دسته اسکناس ۱۰۰ و ۲۰۰ و ۵۰۰ تومانی پنج اسکناس انتخاب کنیم، این کار به چند طریق انجام می‌شود؟

✓ جواب:

$$\begin{cases} n = 3 \\ k = 5 \end{cases} \rightarrow \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$$

چند قضیه مهم

✓ قضیه چهارم: تعداد حالات تقسیم n شیء متمایز (متفاوت) بین k فرد مختلف، برابر است با:

$$A_n^k = k^n$$

✓ مثال: به چند طریق می‌توان به ۵ سوال ۲ گزینه‌ای پاسخ داد؟

✓ جواب:

$$\begin{cases} n = 5 \\ k = 2 \end{cases} \rightarrow \ 2^5 = 32$$

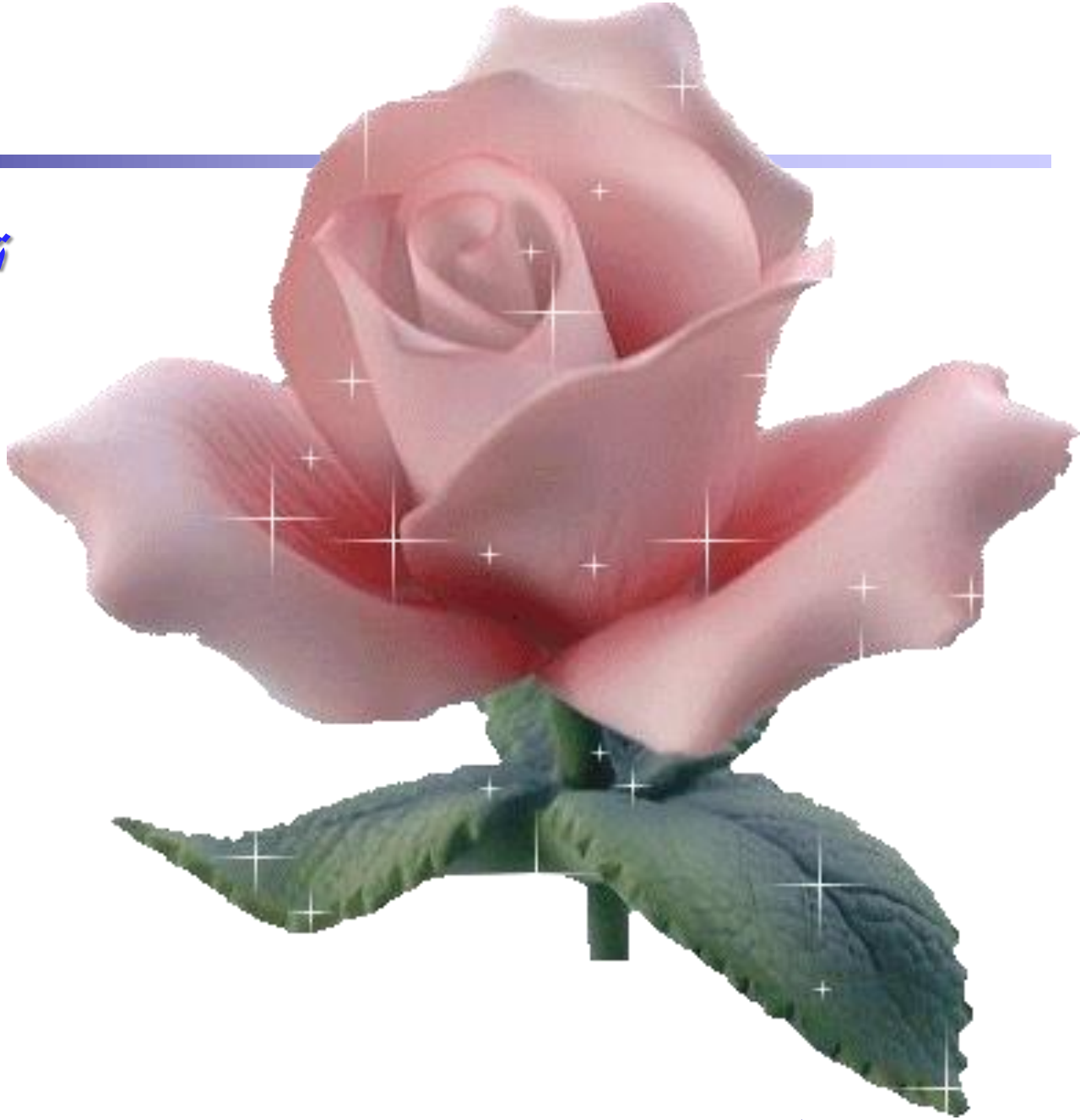
چند قضیه مهم

✓ قضیه پنجم: تعداد راه‌های تقسیم n توپ با شماره‌های ۱ تا n در n ظرف به شماره‌های ۱ تا n به طوری که هیچ توپی در ظرف هم شماره‌اش قرار نگیرد برابر است با:

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{k!}=n!\,(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\dots(-1)^n\frac{1}{n!})$$

✓ مثال: ۴ نامه برای ۴ نفر فرستاده می‌شود، به چند طریق ممکن است نامه‌ی هیچ کس به دست خودش نرسد؟

✓ جواب:

$$4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=12-4-1=9$$

تشکر از توجه شما