

آمار و احتمالات مهندسی

برازش خط و منحنی بر داده‌ها

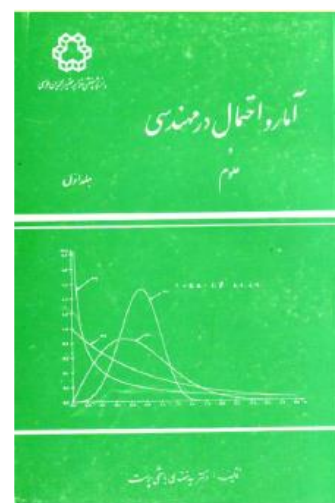
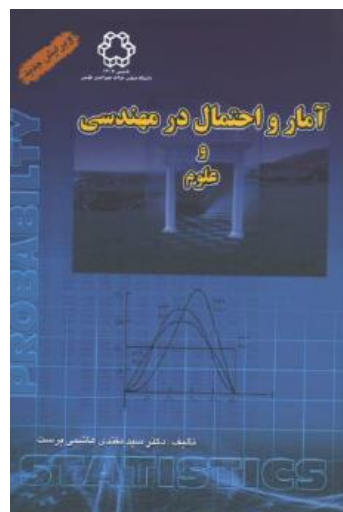
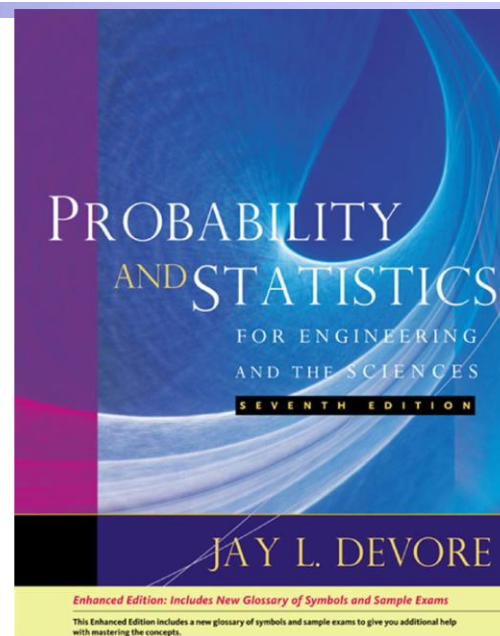
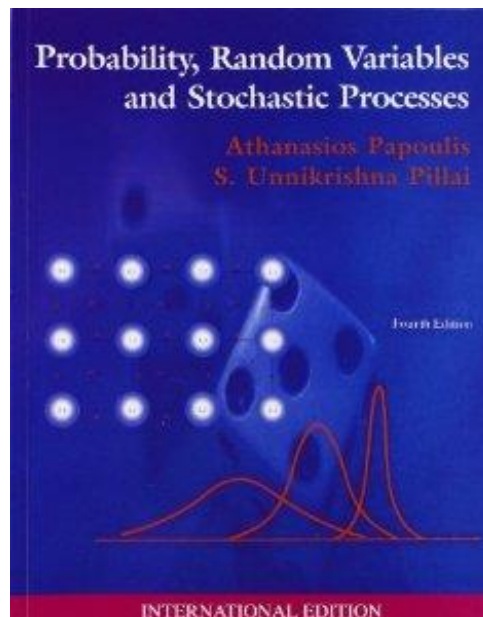
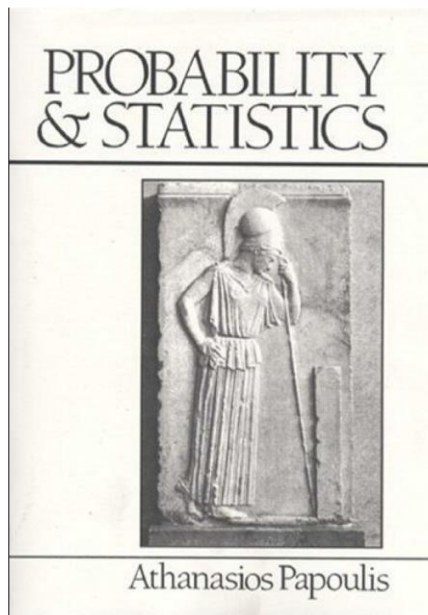
دکتر بهناز بیگدلی
دانشکده مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی شاهرود

نحوه ارزیابی

امتحان پایان ترم (۱۴)

امتحان میان ترم (۴)

تمرینات و کوئیزها (۲)



فهرست و عناوین درس

I. بخش اول: آمار مقدماتی (توصیفی)

1. آمار مقدماتی
2. اندازه‌گیری پراکندگی، گشاورها، چولگی و کشیدگی
3. برازش خط و منحنی بر داده‌ها
4. توزیع‌های دو بعدی و ضریب همبستگی

II. احتمال

1. احتمال و فضای نمونه
2. فضای نمونه با عناصر متعدد
3. احتمالات شرطی و نایبستگی
4. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و امید ریاضی
5. توزیع‌های گسسته
6. توزیع‌های پیوسته مهم
7. نظریه برآورد
8. آزمون‌های فرض

برازش خط و منحنی بر داده‌ها

فهرست مطالب این فصل:

- ۱- دستگاه معادلات خطی
- ۲- روش کمترین مربعات
- ۳- برازاندن منحنی
- ۴- برازاندن خط مستقیم
- ۵- برازاندن سهمی درجه ۲
- ۶- برازاندن سهمی درجه n
- ۷- برازاندن منحنی نمایی و دیگر منحنی‌ها

✓ حوادث متعددی در طبیعت اتفاق می افتد که بین آنها همبستگی یا رابطه وجود دارد. منظور از رابطه بین متغیرها وجود رابطه علت معلولی نیست.

نکته: همبستگی رابطه بین دو متغیر در جامعه را توصیف می کند که متغیرها را یکی را X و دیگری را Y می نامند.

دستگاه معادلات خطی

✓ موجه ترین جواب m معادله و n مجهولی بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

✓ تحت شرایط مختلف، ضرایب مجهولات معادله بالا ممکن است

✓ یک جواب منحصر بفرد

✓ یا بی نهایت جواب بر حسب یک یا چند پارامتر

✓ اصلاً جواب نداشته باشد

✓ اگر تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد، موجه ترین جواب حل کمترین مربعات است.

روش کمترین مربعات

✓ فرض می‌کنیم x_1, x_2, \dots, x_n موجه ترین جواب برای مجهولات در معادله صفحه قبل متناظر A امین معادله خواهد بود.

$$E_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i$$

✓ برای حل کمترین مربعات آن باید معادله زیر را حل کنیم.

$$S = \sum_{i=1}^m E_i^2$$

✓ با انجام مشتق‌گیری از رابطه بالا به حل مورد نظر خواهیم رسید.

$$\frac{\partial S}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

✓ موجه ترین جواب برای X, Y را از معادلات زیر محاسبه کنید.

$$x + 2y = 3; \quad 2x - y = 1; \quad 3x + y = 9$$

✓ حل:

$$s = (x + 2y - 3)^2 + (2x - y - 1)^2 + (3x + y - 9)^2$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 2(x + 2y - 3) + 4(2x - y - 1) + 6(3x + y - 9) = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = 4(x + 2y - 3) - 2(2x - y - 1) + 2(3x + y - 9) = 0$$

$$14x + 3y = 32$$

$$3x + 6y = 14$$

$$\implies x = 2, \quad y = 1.33$$

برازاندن منحنی

✓ یک منحنی معلوم چند جمله‌ای از درجه n

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

✓ حال اگر قرار باشد این منحنی از نقاط زیر بگذرد.

$$(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$$

$$Y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \cdots + a_nx_i^n$$

$$s = \sum (Y_i - y_i)^2$$

برازاندن خط مستقیم

✓ برای برازش خط مستقیم $y=a+bx$ لازم است که در رابطه صفحه قبل ترم‌های درجه دو به بعد را حذف کنیم.

$$s = \sum (Y_i - y_i)^2$$

$$Y_i = a + bx_i$$

$$s = \sum (a + bx_i - y_i)^2$$

برازاندن خط مستقیم

✓ حل

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum 2(a + bx_i - y_i) = 0 \implies \sum a + \sum bx_i - \sum y_i = 0$$

$$na + b \sum x_i = \sum y_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum 2x_i(a + bx_i - y_i) = 0 \implies \sum ax_i + \sum bx_i^2 - \sum x_i y_i = 0$$

$$a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

برازاندن خط مستقیم

✓ حل دو معادله و دو مجهول

$$\begin{cases} na + b \sum x_i = \sum y_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b\bar{X} = \bar{Y} \\ a\bar{X} + b\overline{X^2} = \overline{XY} \end{cases}$$

برازاندن سهمی درجه ۲

با در نظر گرفتن معادله کلی با درجه ۲ خواهیم داشت.

$$y = a + bx + cx^2$$

$$s = \sum (Y_i - y_i)^2$$

$$Y_i = a + bx_i + cx_i^2$$

$$s = \sum (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2$$

برازاندن سهمی درجه ۲

✓ حل

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum 2(a + bx_i + cx_i^2 - y_i) = 0$$

$$na + b \sum x_i + c \sum x_i^2 = \sum y_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum 2x_i(a + bx_i + cx_i^2 - y_i) = 0$$

$$a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 = \sum x_i y_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = \sum 2x_i^2(a + bx_i + cx_i^2 - y_i) = 0$$

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i$$

برازاندن سهمی درجه ۲

✓ حل سه معادله و سه مجهول

$$\left\{ \begin{array}{l} na + b \sum x_i + c \sum x_i^2 = \sum y_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + b\bar{X} + c\bar{X}^2 = \bar{Y} \\ a\bar{X} + b\bar{X}^2 + c\bar{X}^3 = \overline{XY} \\ a\bar{X}^2 + b\bar{X}^3 + c\bar{X}^4 = \overline{X^2Y} \end{array} \right.$$

برازاندن سهمی درجه p

با در نظر گرفتن معادله کلی با درجه p خواهیم داشت.

$$y = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p$$

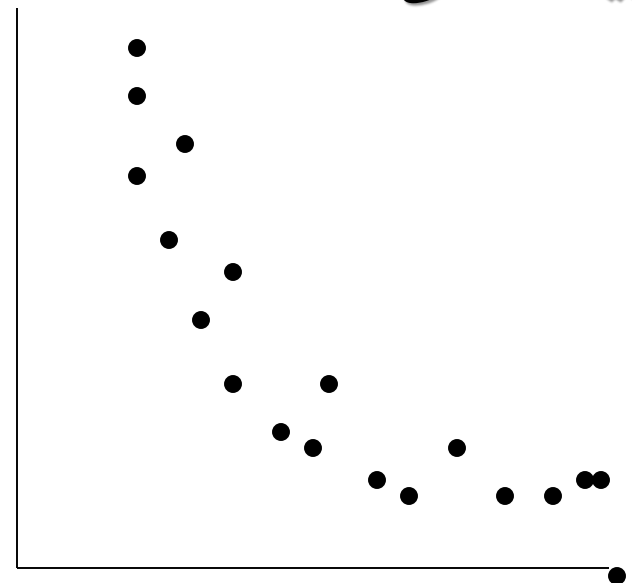
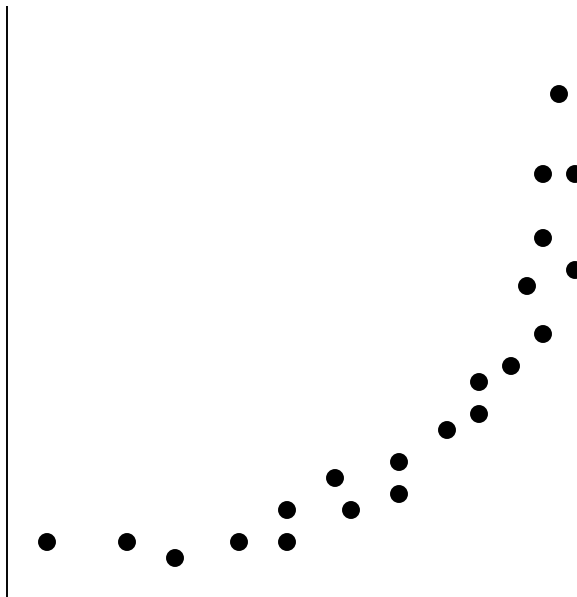
$$s = \sum (Y_i - y_i)^2$$

$$Y_i = a_0 + a_1x_i + \cdots + a_px_i^p$$

$$s = \sum (a_0 + a_1x_i + \cdots + a_px_i^p - y_i)^2$$

برازاندن منحنی نمایی و دیگر منحنی‌ها

در برخی از مواقع رابطه بین متغیرها به صورت خطی نیست بلکه شبیه منحنی است.



برازاندن منحنی نمایی و دیگر منحنی‌ها

سه دسته مهم از توابع وجود دارد که لازم است منحنی برازش شود.

$$y = ae^x$$

نوع اول

$$y = ax^b$$

نوع دوم

$$y = ae^{bx}$$

نوع سوم

برازاندن منحنی نمایی و دیگر منحنی‌ها

حل نوع اول

$$y = ae^x$$

$$\log y = \log a + x \log e$$

$$\begin{cases} \log y = Y \\ \log a = A \\ \log e = B \end{cases} \Rightarrow Y = A + Bx$$

برازاندن منحنی نمایی و دیگر منحنی‌ها

حل نوع دوم

$$y = ax^b$$

$$\log y = \log a + b \log x$$

$$\begin{cases} \log y = Y \\ \log a = A \\ \log x = X \end{cases} \Rightarrow Y = A + bX$$

برازاندن منحنی نمایی و دیگر منحنی‌ها

حل نوع سوم

$$y = ae^{bx}$$

$$\log y = \log a + bx \log e$$

$$\begin{cases} \log y = Y \\ \log a = A \\ b \log e = C \end{cases} \implies Y = A + Cx$$

تشکر از توجه شما

