فصل اول:

اصل انرژی و بقای انرژی

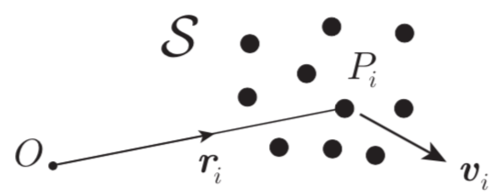
در این فصل اصل انرژی را برای سیستم های چند ذره ای مورد بررسی قرار خواهیم داد و نشان خواهیم داد که تحت شرایط خاصی می توان بقای انرژی را به دست آورد. اکنون می توان بقای انرژی را برای شمار زیادی از سیستم ها بکار گرفت.

نکته: برای سیستم های تنها با یک درجه آزادی رابطه بقای انرژی برای توصیف کامل حرکت سیستم کافی است.

فضای پیکربندی و درجات آزادی

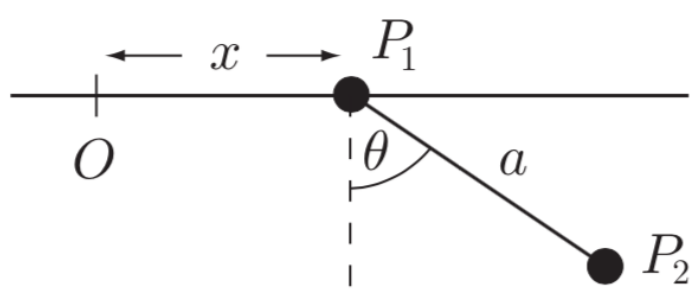
با توجه به شکل سیستم S چند ذره ای $P_1, P_2, \ldots, P_N$ با جرم های $m_1, m_2, \ldots, m_N$ را در نظر می گیریم.

فضای پیکربندی: از لحاظ هندسی به مجموعه بردار مکان $r_1, r_2, \ldots, r_N$ مربوط به ذرات فضای پیکربندی گفته می شود.



نکته: اگر سیستم مقید نباشد مکان مربوط به ذرات مستقل از هم می تواند انتخاب شود، در حالی که برای سیستم های مقید مکان ذرات از همدیگر مستقل نمی باشد و به هم وابسته هستند.

مثال: اگر ذره P_1 و P_2 مطابق شکل زیر با یک میله ای به طول a به یکدیگر متصل باشند در این صورت مکان ذره ۱ مستقل از مکان ذره ۲ نمی باشد و قید $|r_1 - r_2| = a$ میان بردارهای مکان دو ذره حاکم است.



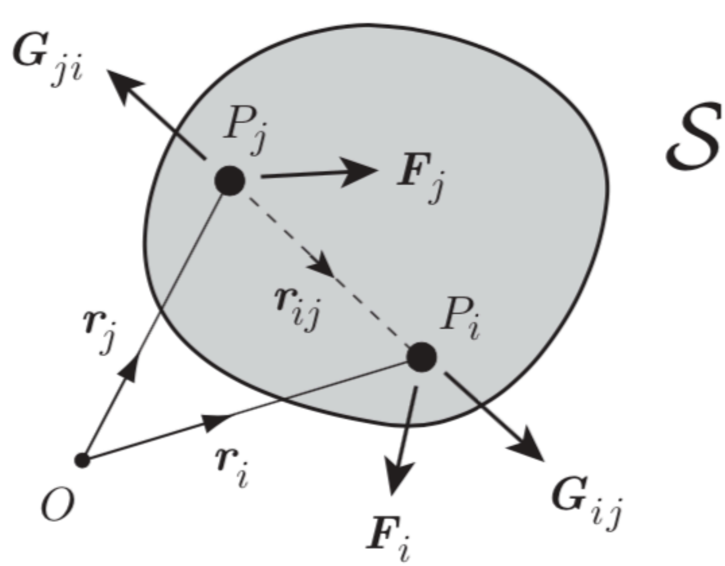
درجه آزادی: به تعداد متغیرهای اسکالری که شما برای توصیف فضای پیکر بندی به آن نیاز دارید. برای مثال اگر سیستم دارای قید نباشد شما مکان هر ذره P را با بردار r مشخص می کنید که هر بردای دارای سه مولفه اسکالر در سه راستای x, y, z است. بنابراین برای توصیف ذره شما سه درجه آزادی دارید. اکنون N ذره دارای $3N$ درجه آزادی است.

نکته: حضور قید در سیستم درجات آزادی را کاهش می دهد. برای نمونه در شکل بالا اگر دو ذره آزاد (بدون قید) بودند شما نیاز به ۶ درجه آزادی برای توصیف آنها داشتید و با وارد کردن قید مثلا حرکت ذره P_1 تنها در جهت x شما از تعداد کل درجات آزادی ۲ عدد کم کردید از طرفی اگر فرض شود ذره P_2 نیز مجاز به نوسان در صفحه $x-y$ باشد ۱ درجه آزادی دیگر نیز از تعداد کل کاسته خواهد شد. از سوی دیکر قید $|r_1 - r_2| = a$ نیز یک درجه آزادی دیگر از سیستم کاهش می دهد پس داریم، $DOF = 6-2-1-1 = 2$ یعنی برای توصیف این سیستم نیاز به دو متغیر اسکالر x و θ است.
نکته: تعداد درجه آزادی برابر با تعداد معادلات مستقل برای توصیف حرکت یک سیستم هستند. برای مثال برای توصیف حرکت سیستم بالا تنها نیاز به دو معادله مستقل است.

تمرین: ۱- برای توصیف یک پاندلم ساده که تنها در صفحه $x-y$ نوسان می کند، نیاز به چند درجه آزادی است؟ ۲- لغزش یک ذره در یک پوسته نیم کره؟

اصل انرژی: بار دیگر سیستم چند ذره ای S در نظر بگیرید، ممکن است به تعدادی از این ذرات نیروی خارجی F_i وارد شود، علاوه بر آن ممکن است ذرات سیستم به یکدیگر نیز نیروی داخلی G_{ij} را وارد کنند. همان طور که در شکل پیداست نیروهای داخلی G_{ji} که از ذره P_j به ذره P_i وارد می شود که در امتداد خط واصل میان دو ذره و در جهت مخالف با نیرود داخلی G_{ij} است که از طرف ذره P_i به P_j وارد می شود. بنابراین

$$\boldsymbol{G}_{ji} = -\boldsymbol{G}_{ij}, \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{G}_{ij} \parallel (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j). \tag{9.1}$$



بنابراین طبق قانون دوم نیوتن، معادله حرکت برای ذره P_i با رابطه زیر داده می شود.

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{G}_{ij}, \tag{9.2}$$

با ضرب داخلی دو طرف معادله در بردار سرعت داریم

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \boldsymbol{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{G}_{ij} \right\} \cdot \boldsymbol{v}_i, \tag{9.3}$$

اکنون با گرفتن انتگرال از طرفین در بازه زمانی $[t_{\mathscr{A}}, t_{\mathscr{B}}]$ اصل انرژی برای سیستم های چند ذره ای با رابطه زیر داده می شود.

$$\boxed{T_{\mathcal{B}} - T_{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \, dt + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{G}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i \, dt} \tag{9.4}$$

بقای انرژی

سیستم های غیر مقید: زمانی که سیستم بدون هیچ گونه قیدی باشد تمام نیروها اعمال شده به سیستم به طور مستقیم قابل تشخیص هستند. اگر فرض کنیم نیروهای خارجی وارد بر چنین سیستمی نیروهای پایستار باشند یعنی $F_i = -\nabla \phi_i$ که در آن ϕ_i تابع انرژی پتانسیل از نیروی F_i است. در این صورت معادله اول قسمت سمت راست معادله (۹.۴) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \, dt = \sum_{i=1}^{N} \left(\phi_i(\boldsymbol{r}_{\mathcal{A}}) - \phi_i(\boldsymbol{r}_{\mathcal{B}})\right) = \Phi(\mathcal{A}) - \Phi(\mathcal{B}),$$

که در این رابطه به علت عدم وجود هرگونه قیدی می توان پتاسیل ها را به طور مستقل نوشت.

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \phi_1(\boldsymbol{r}_1) + \phi_2(\boldsymbol{r}_2) + \cdots + \phi_N(\boldsymbol{r}_N)$$

مثال: اگر تمام ذرات سیستم S تحت نیروی یکنواخت گرانش قرار گیرید در این صورت نیروی که به ذره P_i نیروی گرانش $F_i = -m_i g k$ است و به علت پاستار بودن نیروی گرانش، انرژی پتانسیل گرانشی با رابطه $\phi_i = m_i g z_i$ داده می شود. (توجه تمام ذرات در جهت z جهت دهی کرده اند.) در این صورت انرژی پتاسیل کل با رابطه زیر محاسبه خواهد شد.

$$\Phi = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \cdots + m_N g z_N.$$

تمرین: رابطه بالا را با استفاده از رابطه مربوط به مختصات مرکز جرم باز نویسی کنید؟

اکنون قصد داریم مشابه قسمت قبل برای نیروهای خارجی، رابطه ی مشابه ای را برای نیروهای داخلی به دست آوریم.

نکته: اگر بزرگی نیروی داخلی G_{ij} تنها به فاصله بین دو ذره r_{ij} بستگی داشته باشد در این صورت نیروی پایستار نامیده می شود. (مانند نیروی گرانش وارد شده از سیارات گوناگون در منظومه شمسی).

حال اگر نیرو داخلی پایستار باشد بنابراین داریم:

$$\boldsymbol{G}_{ij} = h_{ij}(r_{ij})\,\widehat{\boldsymbol{r}}_{ij} \tag{9.5}$$

که در رابطه بالا h_{ij} نیروی دافعه میان دو ذره و نیز بردار یکه با رابطه زیر تعریف می شود.

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \qquad r_{ij} = |\boldsymbol{r}_{ij}| \qquad \widehat{\boldsymbol{r}}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij}/r_{ij}. \tag{9.6}$$

در این صورت داریم.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_{ij}\cdot\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{G}_{ji}\cdot\boldsymbol{v}_j &= \boldsymbol{G}_{ij}\cdot(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) = h_{ij}(r_{ij})\,\widehat{\boldsymbol{r}}_{ij}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_{ij}}{dt} = \left(\frac{h_{ij}(r_{ij})}{r_{ij}}\right)\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_{ij}}{dt}\\ &= h_{ij}(r_{ij})\,\frac{dr_{ij}}{dt},\end{aligned}$$

در رابطه بالا از رابطه $r_{ij} \, . \, \dot{r}_{ij} = r_{ij} r_{ij}$ استفاده شده است. اکنون کارانجام شده توسط نیروی داخلی G_{ji} با

$$\int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} h_{ij}(r_{ij}) \frac{dr_{ij}}{dt} \, dt = \int_{r_{ij}(\mathcal{A})}^{r_{ij}(\mathcal{B})} h_{ij}(r_{ij}) \, dr_{ij} = H_{ij}(r_{ij}(\mathcal{A})) - H_{ij}(r_{ij}(\mathcal{B})),$$

به دست می آید. بنابراین کار کل انجام شده توسط تمام نیروهای داخلی با رابطه زیر داده می شود.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{G}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i \, dt = \Psi(\mathcal{A}) - \Psi(\mathcal{B}),$$

که

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} H_{ij}(r_{ij})$$

انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای داخلی است.

تمرین: اگر سیستمی متشکل از سه ذره باردار با بارهای e_1, e_2, e_3 باشد که در سه راس مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته اند. در این صورت انرژی پتانسیل کل چقدر است؟ نیروی وارد بر ذرات باردار نیروی الکترواستاتیک است. ($h_{ij} = \dfrac{e_i e_j}{r_{ij}}$)

اکنون با تعریف پتانسیل کل به صورت $V = \Phi + \Psi$، معادله پایستگی به صورت $T + V = E$ تعریف می شود.

مثال: اگر فرض کنید ستاره ای پر جرمی به جرم M توسط دو جسم دیگر با جرم های m_1 و m_2 چرخانیده می شود. در این صورت معادله پایستگی این سیستم را به دست آورید؟

به علت بزرگ بودن جرم ستاره می توان آن را تقریبا ثابت و در مبدا O در نظر گرفت در ان صورت نیروی که این ستاره به دو جسم دیگر وارد می کند را به عنوان نیروهای خارجی و نیز نیروهایی که این دو جسم به هم وارد می کنند را به عنوان نیروی داخلی در نظر می گیریم.

نکته: سیستم مذکور را می توان به عنوان یک سیستم دو ذره ای در نظر گرفت.

در این صورت انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی به صورت

$$\Phi = -\frac{M m_1 G}{r_1} - \frac{M m_2 G}{r_2},$$

همچنین نیروی داخلی بین دو جسم با رابطه $h_{ij} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}$ داده می شود. بنابراین انرژی پتانسیل مربوط به نیروی داخلی به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$H_{12} = -\int h_{12}(r_{12})\, dr_{12} = \int \frac{m_1m_2G}{(r_{12})^2}\, dr_{12} = -\frac{m_1m_2G}{r_{12}},$$

نهایتا معادله پایستگی با رابطه زیر نوشته می شود.

$$\tfrac{1}{2}m_1\, |\boldsymbol{v}_1|^2 + \tfrac{1}{2}m_2\, |\boldsymbol{v}_2|^2 - MG\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - \frac{m_1m_2G}{r_{12}} = E,$$

نکته: به علت اینکه درجات آزادی این سیستم ۶ است بنابراین معادله پایستگی به تنهایی برای توصیف تحول سیستم کافی نیست.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

بقای انرژی در سیستم قیدی: زمانی که سیستم دارای قید باشد نیروهای به طور روشنی قابل تشخیص نیستند. در واقع در این سیستم ها نیروهای قیدی، قید روی سیستم را اعمال می کنند. همچنین محاسبه کار انجام شده توسط این نیروهای قیدی خیلی مشکل است بنابراین ما خود را محدود به حالتی می کنیم که کار انجام شده توسط این نیروهای قیدی صفر در نظر گرفته شده باشد.

نکته: نیروهای قیدی را می توان به دو دسته نیروهای قیدی خارجی (مانند نیروی است ذرات سیستم را ساکن نگه داریم و یا روی سطح نگه داریم.) و نیروهای قیدی داخلی (مثلا نیروی که لازم است تا ذرات نسبت به یکدیگر در فاصله مشخصی قرار گیرند.)

قضیه: اگر روی سیستم این قید که ذرات از هم فاصله ثابتی داشته باشند، را اعمال کنیم، در این صورت کار انجام شده توسط نیروی قیدی داخلی صفر است.

اثبات: فرض کنید دو ذره P_i و P_j نسبت به هم دارای فاصله ثابت a باشند یعنی

$$|\, r_i - r_j\,| = (r_i - r_j)\,.\,(r_i - r_j) = a$$

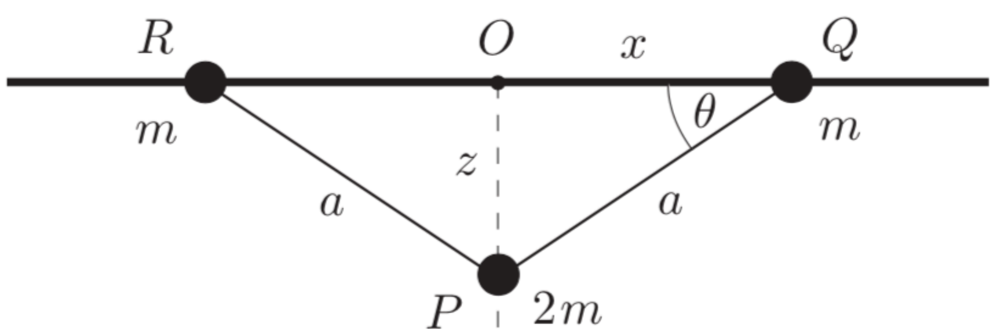
با گرفتن مشتق زمانی از رابطه بالا داریم,

$$(r_i - r_j)\,.\,(v_i - v_j) = 0$$

که نشان می دهد $v_i - v_j$ عمود بر خط واصل است. بنابراین به علت اینکه نیروهای داخلی G_{ij} موازی با خط واصل است بنابراین

$$\boldsymbol{G}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{G}_{ji} \cdot \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{G}_{ij} \cdot \left(\boldsymbol{v}_i - \cdot\boldsymbol{v}_j\right) = 0,$$

در این صورت طبق رابطه ۹.۴ کار انجام شده توسط نیرهای داخلی با اعمال قید ثابت بودن فاصله ذرات در سیستم برابر با صفر است.
نکته: همچنان می توان حتی با وجود قید بقای انرژی را برای سیستم در نظر گرفت.



مثال: مانند شکل بالا یک سیستم سه جسمی را در نظر بگیرید. در ابتدا جسم R و Q و P در روی ریل قرار دارند و سپس جسم P در جهت z شروع به نوسان کند اگر فرض کنیم دو فاصله میان دو ذره با P برابر با a باشد در این صورت مطلوبست:
الف: تعداد درجات آزادی سیستم چقدر است؟
ب: معادله بقای انرژی را به دست آورید.
ج: چه زمانی دو ذره R و Q با یکدیگر برخورد می کنند؟
الف: اگر سه ذره آزاد بودند ما ۹ درجه آزادی داشتیم اما به علت اینکه دو ذره Q و R مقید به حرکت در راستای x هستند و نیز ذره P مقید به حرکت تنها در راستای z است بنابراین از درجات آزادی ۶ درجه آزادی کاسته خواهد شد. از طرفی دیگر به علت دو قید یعنی ثابت بودن فاصله دو ذره Q و R از ذره P، ۲ درجه آزادی دیگر نیز کاسته خواهد شد. بنابراین $DOF = 9 - 6 - 2 = 1$ است.

ب: با توجه به شکل آن درجه آزادی را زاویه θ در نظر می گیرم بنابراین می توان $x = a\cos(\theta)$ و $y = a\sin(\theta)$ تعریف نمود.
در این صورت انرژی جنبشی کل با رابطه زیر محاسبه می شود.

$$T = \tfrac{1}{2}(2m)\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = ma^2\dot{\theta}^2.$$

در این سیستم ذرات Q و R روی سطح ریل قرار دارند بنابراین به آنها نیروی خارجی قیدی (نیروی عمود) بر سطح وارد می شود که به علت عمود بودن بر سرعت دو ذره، هیچ کاری انجام نمی دهد. از طرف دیگر نیروی برهم کنشی میان دو ذره Q و R و ذره P به علت ثابت بودن فاصله هیچ گونه کاری انجام نمی دهد.
نکته: به علت اینکه سرعت دو ذره Q و R با هم برابر است لذا نیروی داخلی میان دو ذره هیچ کاری انجام نمی دهد.
بنابراین انرژی پتانسیل کل برابر با

$$V = -(2m)gz + 0 + 0 = -2mga\sin\theta,$$

است. در این صورت معادله بقای انرژی با رابطه زیر به دست می آید.

$$ma^2\dot{\theta}^2 - 2mga\sin\theta = E.$$

با توجه به شرایط اولیه $\theta = \dot{\theta} = 0$ مقدار انرژی $E = 0$ است. بنابراین داریم،

$$\dot{\theta}^2 - \frac{2g}{a}\sin\theta = 0$$

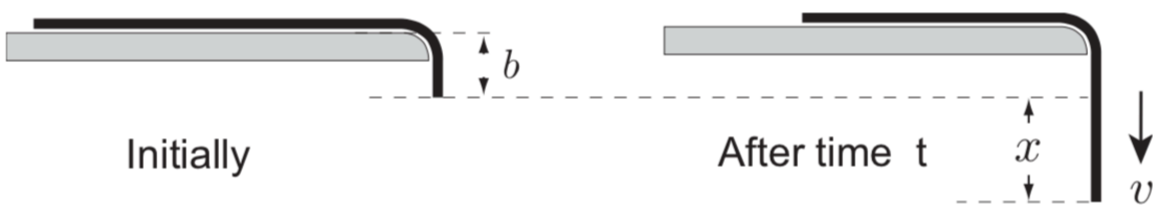
ج: زمانی که $z = a(\theta = \dfrac{\pi}{2})$ شود دو ذره Q و R با یکدیگر برخود خواهند کرد. بنابراین

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\left(\frac{2g}{a}\right)^{1/2}(\sin\theta)^{1/2},$$

و زمان برخورد با رابطه زیر داده می شود.

$$\tau = \left(\frac{a}{2g}\right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\sin\theta)^{1/2}} \approx 1.85 \left(\frac{a}{g}\right)^{1/2}$$

جسم صلب: زمانی که تعداد ذرات یک سیستم چند ذره ای به سمت بی نهایت میل کند، جسم صلب داریم.
نکته:۱- نیروهای خارجی مانند نیروی گرانش وارد بر جسم صلب به مرکز جرم جسم صلب وارد می شوند. ۲- نیروهای داخلی در جسم صلب به علت قضیه ثابت بودن فاصله همواره هیچ کاری انجام نمی دهند به عبارت دیگر در معادله بقای انرژی نقشی ندارند.
۳- در جسم صلب پتاسیل کل تنها از نیروهای خارجی سهم می گیرد.
تمرین: مرکز جرم مربوط به میله ای به طول L و نیز نیم صفحه دایره ای به شعاع a را به ترتیب محاسبه نمایید؟
مثال: مطابق شکل طناب از لبه میز اویزان است اگر رها شود در این صورت سرعت آن زمانی که به اندازه x از مکان اولیه پایین آمد چقدر است؟ و نیز جابه جایی طناب را بر حسب زمان محاسبه نمایید؟



الف: زمانی که جسم به فاصله x اویزان است مرکز جرم آن در نقطه $y_{com} = b + \frac{x}{2}$ قرار دارد. بنابراین انرژی پتانسیل کل و انیز انرژی جنبشی کل با روابط زیر داده می شود.

$$V = -\left(\frac{Mx}{a}\right) g \left(b + \tfrac{1}{2}x\right).$$

$$T = \tfrac{1}{2} M v^2.$$

نکته: به علت توزیع یکنواخت جرم اگر جرم کل طناب را M و طول کل آن را a در نظر بگیریم آنگاه جرم مقدار اویزان شده از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\frac{M}{a} = \frac{M'}{x} \Rightarrow M' = x\frac{M}{a}$$

بنابراین معادله پایستگی انرژی با رابطه زیر داده می شود.

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 - \left(\frac{Mx}{a}\right) g \left(b + \tfrac{1}{2}x\right) = E.$$

اکنون با توجه به شرایط اولیه $v = x = 0$ مقدار انرژی $E = 0$ است. بنابراین داریم

$$v^2 = \frac{g}{a}\, x\,(x + 2b).$$

برای یافتن جابجایی در هر زمانی کافی رابطه بالا را به صورت

$$\frac{dx}{dt} = \pm n\, x^{1/2}(x + 2b)^{1/2},$$

نوشته و سپس با گرفتن انتگرال زمانی داریم.

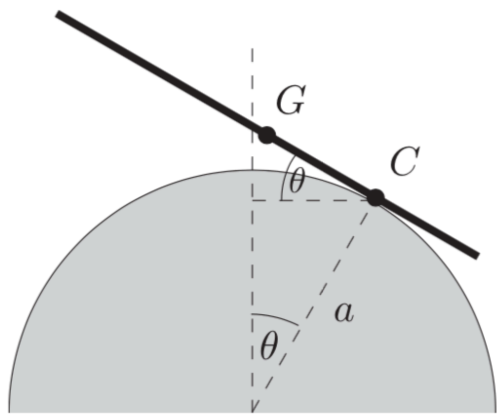
$$\begin{aligned} nt &= \int \frac{dx}{x^{1/2}(x + 2b)^{1/2}} \\ &= 2\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2b}\right)^{1/2} + C, \end{aligned}$$

که با استفاده از شرایط اولیه $x = t = 0$ مقدار $C = 0$ و جابجایی نهایتا با رابطه زیر داده می شود.

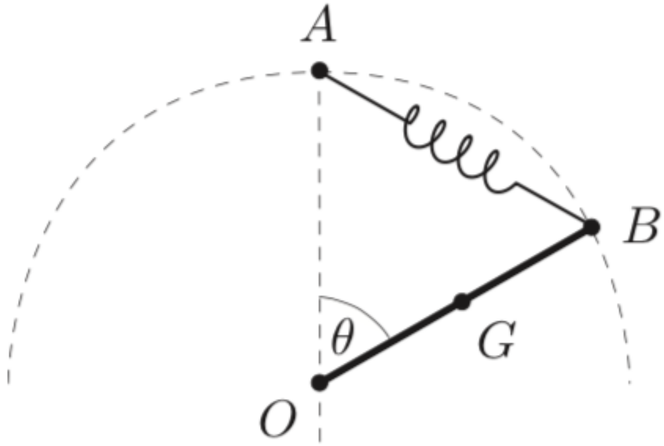
$$x = b(\cosh nt - 1)$$

تمرین: مطابق شکل میله ای را روی سکه ای به شعاع a در نظر بگیرید که بدون لغزش روی سکه می غلتد. نشان دهید که نقطه تعادلی در این سیستم زمانی است که میله به طور متقارن در بالای سکه قرار می گیرید؟

نکته: برای به دست آوردن نقطه تعادل ابتدا بایستی پتانسیل کل V مربوط به این سیستم را محاسبه نمود و سپس با گرفتن مشتق از آن نقاط اکسترمم را محاسبه نمود ($V' = 0$). نقطه تعادلی نقطه مینیمم پتانسیل است یعنی در این نقطه $V'' > 0$ است.



مثال: مطابق شکل یک سر از میله ای به طول $2a$ به نقطه O و سر دیگر آن توسط فنری با طول اولیه a و جرم ناچیز و ثابت فنر $\alpha = \dfrac{mg}{2a}$ به نقطه ی A متصل است. نقطه تعالی و غیر تعادلی این پیکر بندی را مشخص نمایید.



همان طور که پیداست انرژی پتانسیل شامل انرژی پتانسیل فنر و انرژی پتانسیل گرانشی است زیرا در این سیستم تنها نیروهای خارجی نیروی گرانش و نیروی بازگرداننده فنر است. همچنین کار تمام نیروهای داخلی صفر است.

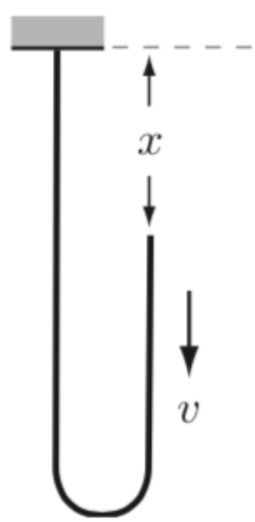
با توجه به شکل طول $AB = 4a\sin(\dfrac{\theta}{2})$ است بنابراین طول بازشدگی فنر از نقطه تعادلی برابر با $d = a\left[4\sin(\dfrac{\theta}{2}) - 1\right]$ و نیز انرژی پتانسیل فنر برابر با

$$\phi_s = \frac{1}{2}\alpha d^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{2a}\right)a^2(4\sin(\frac{\theta}{2}) - 1)^2$$

از طرفی دیگر انرژی پتانسیل مربوط به گرانش با $\phi_g = mga\cos(\theta)$ است.

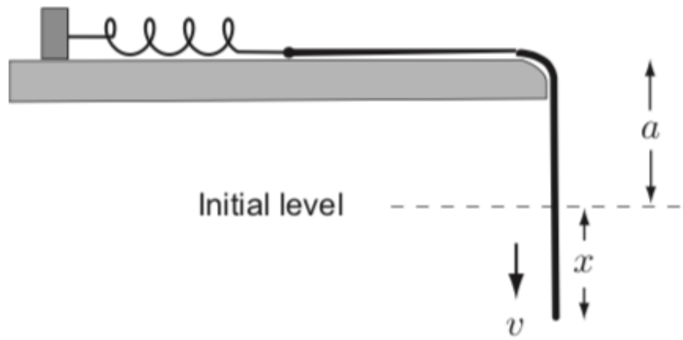
تمرین: ادامه محاسبه را انجام دهید.

تمرین: مطابق شکل طنابی به جرم M و طول a از دیوار اویزان شده است اگر در انتدا دو سر این طناب به دیوار باشد و سپس قسمت سمت راست رها شود در این صورت سرعت این طناب زمانی که به مکان x می رسد چقدر است؟ به در چه فاصله ای شتاب این طناب به $5g$ خواهد رسید؟



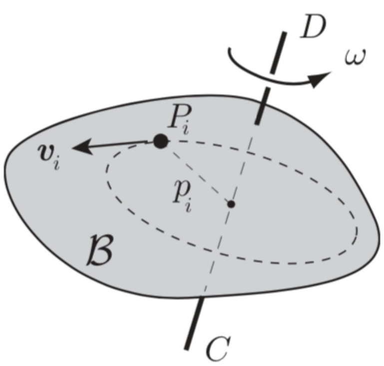
تمرین: مطابق شکل یک سر از طنابی به جرم M و طول $4a$ به فنری با ثابت فنر $\alpha = \dfrac{Mg}{2a}$ متصل شده و سر دیگر ان از میز آویزان است. اگر طناب را رها کنیم مطلوبست محاسبه:

الف: سرعت طناب زمانی که به مکان x می رسد؟ ب: دوره تناوب فنر؟



٪٪٪

انرژی جنبشی مربوط به اجسام صلب



جسم صلب با محور ثابت: فرض کنید مطابق شکل جسم صلب $\mathscr{B}$ حول محور CD در حال دوران با سرعت زاویه ای ω باشد. در این صورت اگر ذره P_i از این جسم را در نظر بگیریم این ذره به فاصله p_i از محور دوران با سرعت $v_i = p_i\omega$ د حال حرکت دایره ای است. بنابراین انرژی جنبشی این حرکت با

$$T = \sum_{i=1}^{N} \left(\tfrac{1}{2} m_i \,(\omega p_i)^2\right) = \tfrac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \; {p_i}^2\right) \omega^2.$$

که جمله داخل پرانتز لختی دورانی نامیده می شود.

نکته: برای اجسام صلب به علت بینهایت بودن تعداد ذرات جمع در رابطه بالا به انتگرال تبدیل می شود.

$$I_{CD} = \int p^2 dm \Rightarrow T = \frac{1}{2} I_{CD}\omega^2$$

تمرین: لختی دورانی مربوط به میله به طول a و جرم M را که محور چرخش در وسط میله قرار دارد را بیابید؟

تمرین: لختی دورانی مربوط به قرصی به جرم M و شعاع a که محور دوران از وسط آن می گذرد را محاسبه نمایید.

در جدول زیر لختی دورانی مربوط به شکل های مختلف آورده شده است.

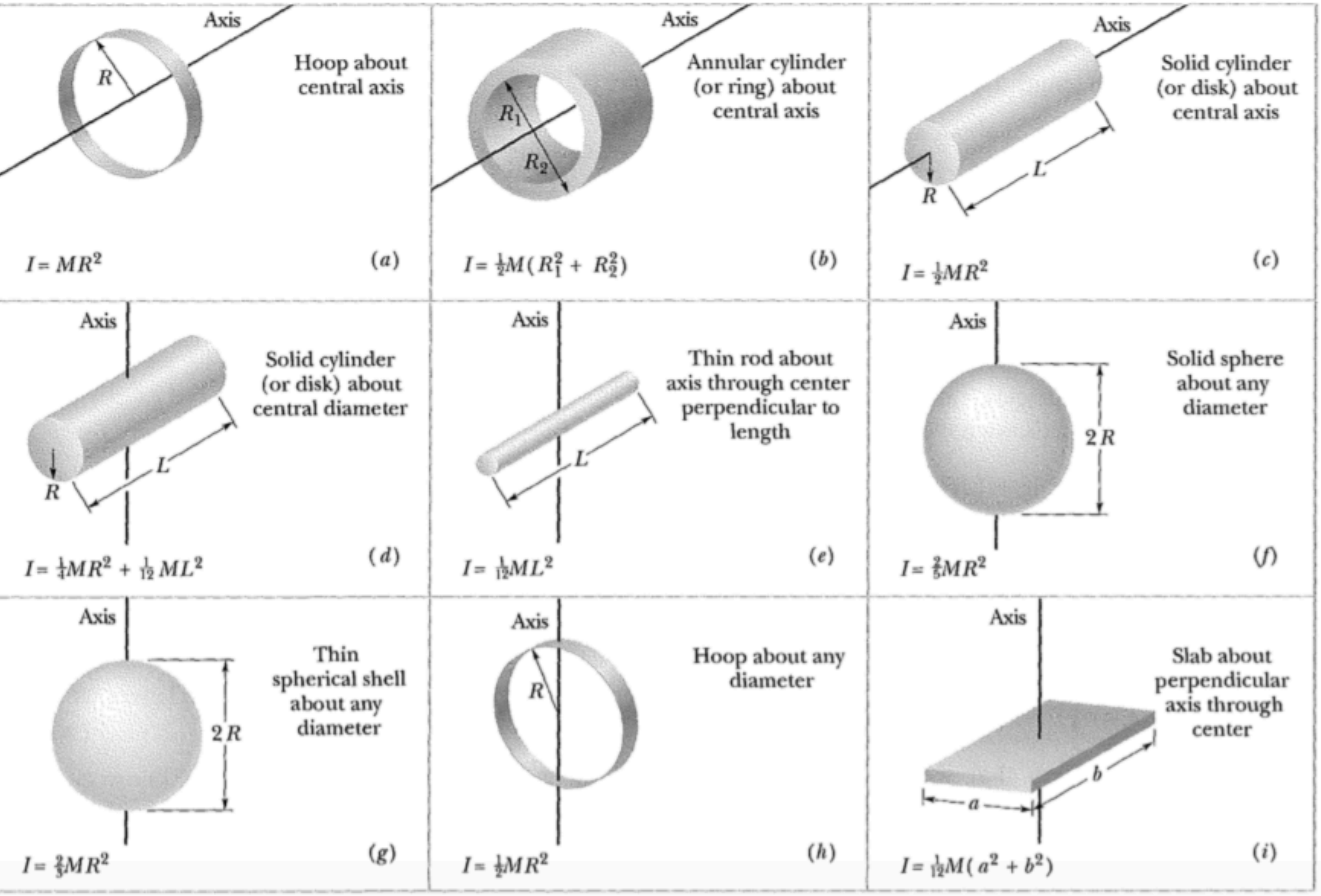
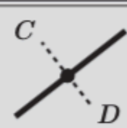
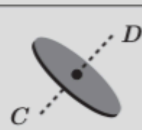
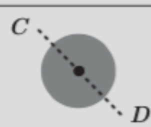
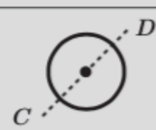
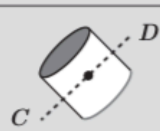


TABLE OF MOMENTS OF INERTIA

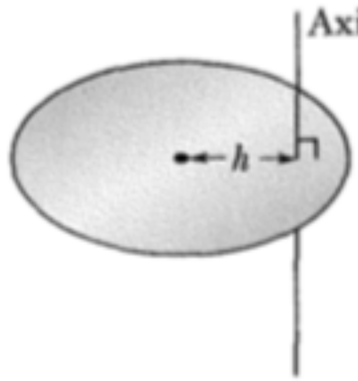
Body	Axis	Moment of inertia
Thin rod mass M length $2a$		$I_{CD} = \frac{1}{3}Ma^2$
Circular hoop mass M radius a		$I_{CD} = Ma^2$
Circular disk mass M radius a		$I_{CD} = \frac{1}{2}Ma^2$
Solid sphere mass M radius a		$I_{CD} = \frac{2}{5}Ma^2$
Spherical shell mass M radius a		$I_{CD} = \frac{2}{3}Ma^2$
Circular cylinder mass M radius a length $2b$		$I_{CD} = \frac{1}{4}Ma^2 + \frac{1}{3}Mb^2$

قضیه محورهای موازی: با داشتن لختی دورانی حول مرکز جرم می توان لختی دورانی حول هر محور دیگر که به فاصله a از محور دوران حول مرکز جرم قرار دارد را با رابطه زیر محاسبه نمود.

$$I = I_G + Ma^2$$

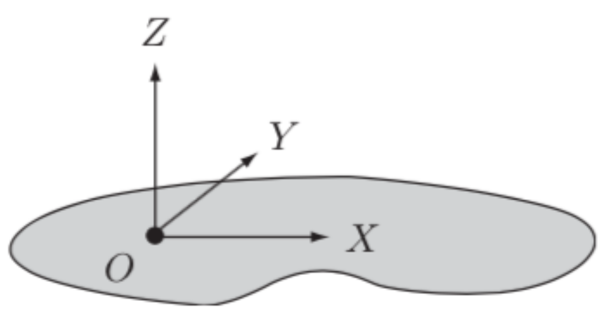
اثبات: در صفحه ۵۷۲ کتاب آورده شده است.

تمرین: ممان اینرسی (لختی دورانی) مربوط به دیسک شکل مقابل را محاسبه نمایید.



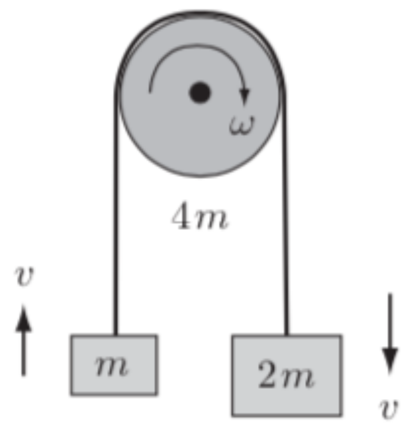
قضیه محورهای عمود: اگر سه محور OX و OY و OZ بر یکدیگر عمود باشند به طوری که جسم در صفحه $X-Y$ باشد در این صورت لختی دورانی حول محورها با رابطه زیر به هم مربوط می شوند.

$$I_{OZ} = I_{OX} + I_{OY}$$



تمرین: اگر مستطیلی با طول a و عرض $2a$ را حول محوری عمود بر آن دوران دهیم در این صورت لختی دورانی آن چقدر است؟

ماشین اتود: دو جسم به جرم های m و $2m$ مطابق شکل با طناب ناچیزی در دو طرف قرقره ای به جرم $4m$ قرار دارند. در این صورت شتاب جسم m را حساب کنید.



نکته: برای قرقره تنها انرژی جنبشی دورانی و برای اجسام دیگر تنها انرژی جنبشی انتقالی داریم.
انرژی جنبشی دورانی برای قرقره با رابطه

$$T_{pulley} = \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(4m)a^2\right)\left(\frac{v}{a}\right)^2$$

انرژی کل برای این سیستم سه ذره ای با رابطه زیر داده می شود.

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2m)v^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(4m)a^2\right)\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \tfrac{5}{2}mv^2.$$

همچنین انرژی پتانسیل کل،

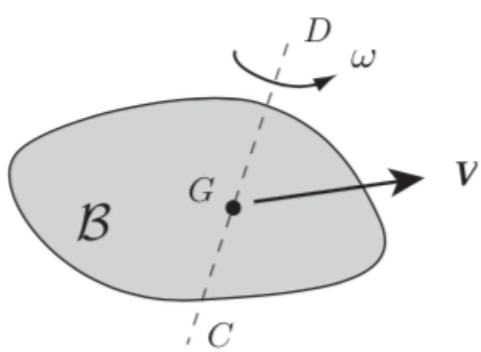
$$V = mgz - (2m)gz = -mgz.$$

نکته: به علت اینکه نیروی عکس العمل میان قرقره و طناب بر بردار سرعت قرقره عمود است لذا این نیرو هیچ کاری انجام نمی دهد و متقابلا هیچ انرژی پتانسیلی ندارد. همچنین نیروهای کششی طناب به علت اینکه برای جسم ها در خلاف جهت هم هستند لذا کار کل انجام شده توسط آنها نیز صفر است. از سوی دیگر نیروی داخلی قیدی برای قرقره به علت جسم صلب بودن آن هیچ گونه

کاری انجام نمی دهند. بنابراین انرژی پتانسیل تنها از نیروی خارجی گرانش اعمال شده بر سیستم است.
بنابراین معادله بقای انرژی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\tfrac{5}{2}mv^2 - mgz = E,$$

به علت اینکه شتاب جسم مد نظر است، بنابراین کافی است از رابطه بالا مشتق بگیریم که داریم $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{5}g$.



حرکت کلی جسم صلب

به طور کلی حرکت واقعی یک جسم صلب شامل حرکت چرخشی و حرکت انتقالی است.

قضیه: فرض کنید سیستم چند ذره ای S دارای جرم کلی M و مرکز جرم آن G با سرعت V حرکت کند (مطابق شکل). در این صورت انرژی جنبشی کل با رابطه زیر داده می شود.

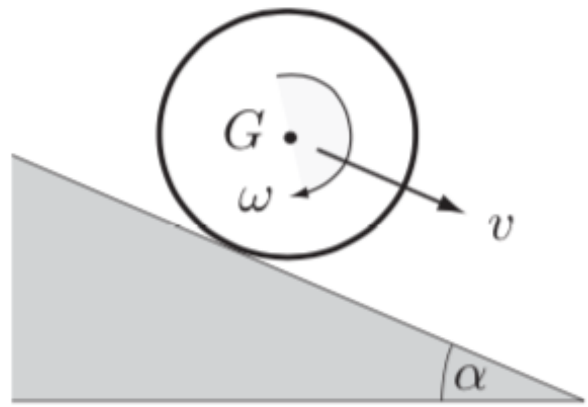
$$T = \tfrac{1}{2}MV^2 + T^G,$$

اثبات:

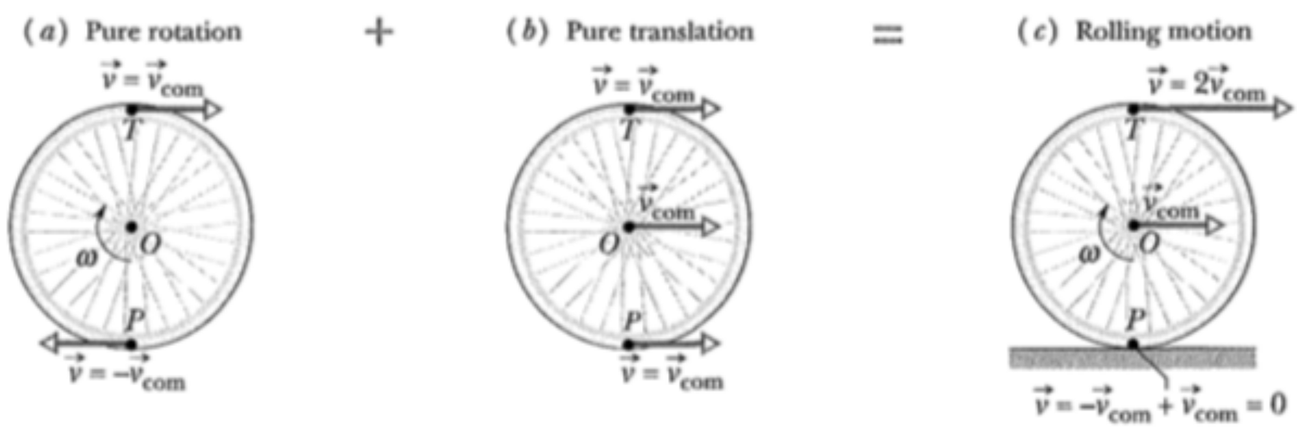
$$\begin{aligned}
T^G &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}m_i\ (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V})\cdot(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i\right)\cdot\boldsymbol{V} - \frac{1}{2}\boldsymbol{V}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V} \\
&= T - \tfrac{1}{2}(M\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{V} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{V}\cdot(M\boldsymbol{V}) + \tfrac{1}{2}M(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}) \\
&= T - \tfrac{1}{2}MV^2,
\end{aligned}$$

در رابطه بالا $T^G = \frac{I_G}{2}\omega^2$ مربوط به حرکت چرخشی و نیز جمله $\frac{1}{2}MV^2$ انرژی جنبشی انتقالی است. بنابراین انرژی کل $T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$ است.

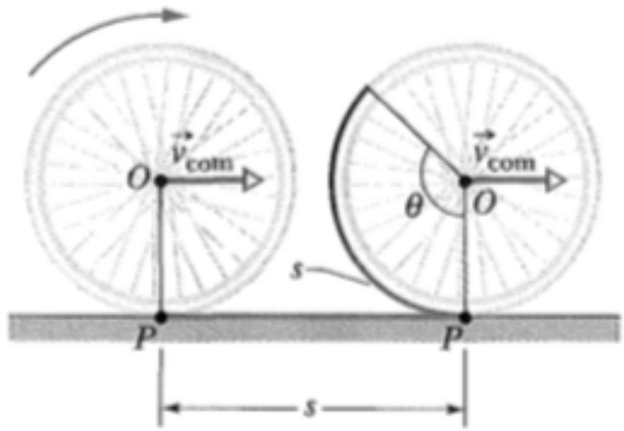
مثال: شتاب استوانه توخالی که روی سطح شیب داری با زاویه α می غلتد چقدر است؟



نکته: حرکت غلتشی شامل حرکت دورانی و حرکت انتقالی است اما حرکت لغزشی فقط شامل حرکت انتقالی است مانند لغزش یک جسم روی سطح شیب دار



نکته: در حرکت غلتشی چرخ میزان چرخش چرخ (کمان طی شده) با میزان انتقال چرخ برابر است، یعنی $S = R\theta$ است.



بنابراین انرژی جنبشی کل برابر است با

$$T = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I\left(\frac{v}{b}\right)^2$$

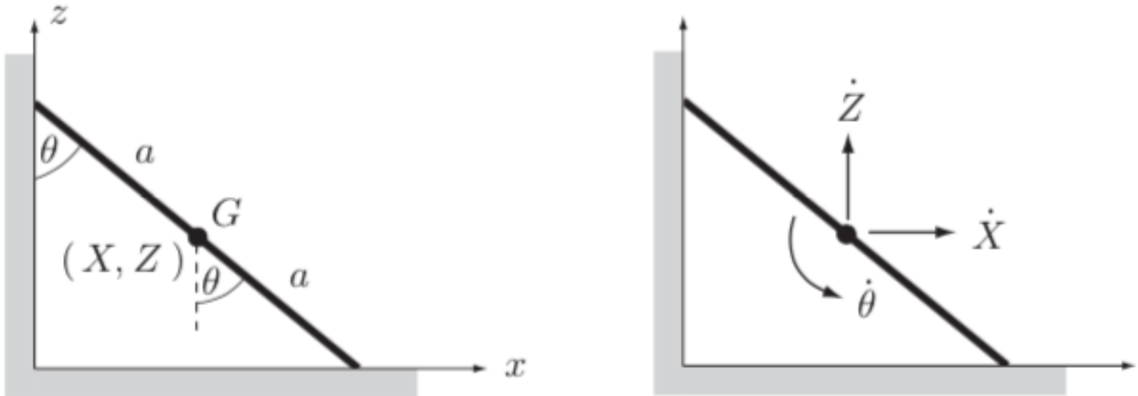
با توجه به اینکه لختی دورانی برای استوانه توخالی به شعاع b، $I = Mb^2$ است بنابراین انرژی جنبشی $T = MV^2$ است. از طرفی انرژی پتانسیل کل نیز $V = -\,Mgx\,\sin(\alpha)$ است.
نکته: نیروهای عکس العملی که از سطح به استوانه وارد می شود به علت اینکه در نقطه تماس در حرکت غلتشی سرعت صفر است بنابراین این نیروها هیچ کاری انجام نمی دهند. از طرف دیگر تمام نیروهای داخلی در استوانه به علت جسم صلب بودن نیز هیچ کاری انجام نمی دهند.

معادله بقای انرژی با رابطه زیر داده می شود.

$$Mv^2 - Mgx\sin\alpha = E,$$

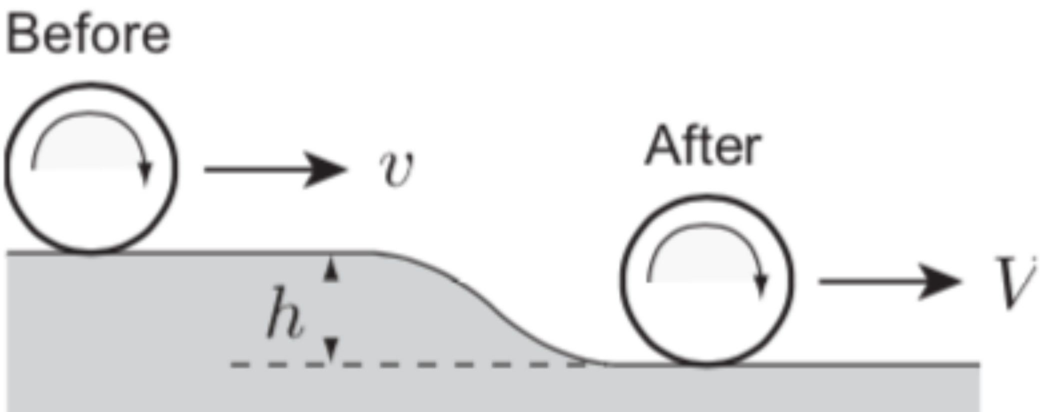
اکنون با گرفتن مشتق زمانی از رابطه بالا شتاب حرکت $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2}g\,\sin(\theta)$ به دست می آید.

تمرین: مطابق شکل نرده ای به طول $2a$ از حالت سکون زمانی که با دیوار عمودی زاویه ۶۰ درجه ساخته بود، رها می شود معادله بقای انرژی را برای این سیستم بنویسید؟



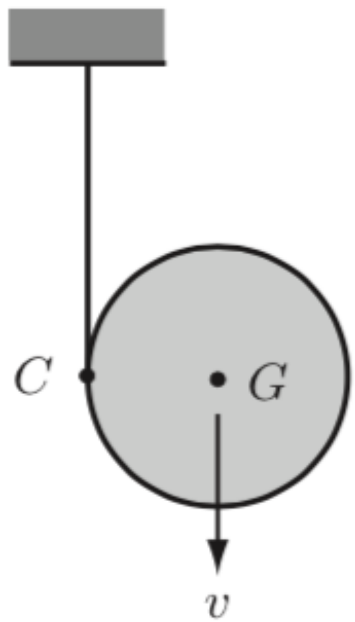
فرض کنید در زمان t زاویه نرده با دیوار عمودی برابر θ باشد.

مثال: مطابق با شکل قرصی با سرعت اولیه v شروع به حرکت کند و از سطح ناهمورای به ارتفاع h عبور کند بعد از آن سرعت این قرص چقدر است؟

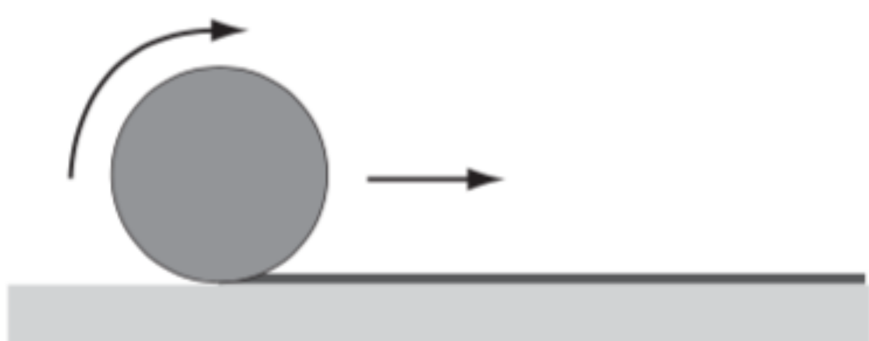


انرژی جنبشی اولیه این قرص برابر با $T_i = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(Ma^2\right)\left(\frac{v}{a}\right)^2 = Mv^2$ است
همچنین انرژی پتانسیل اولیه برابر با $V_i = Mg(a+h)$ است (توجه نیروی گرانش به مرکز جرم قرص وارد می شود.). به طور مشابه انرژی جنبشی نهایی $T_f = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\left(Ma^2\right)\left(\frac{V}{a}\right)^2 = MV^2$ و انرژی پتانسیل نهایی $V_f = Mga$ هستند. حال با استفاده از رابطه بقای انرژی $T_i + V_i = E = T_f + V_f$ سرعت نهایی $V = (v^2 + gh)^{\frac{1}{2}}$ است.

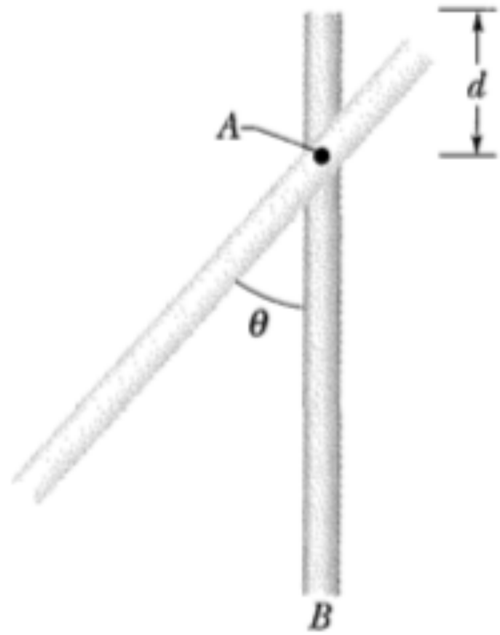
تمرین: یویو شکل مقابل را در نظر بگیرید اگر این یویو رها شود با فرض اینکه قرقره تنها رو طناب بغلتد شتاب آن چقدر است؟ شعاع قرقره را a در نظر بگیرید.



تمرین: مطابق شکل ورق کاغذی را می خواهیم به صورت یک رول در بیاوریم اگر شعاع اولیه این رول در شروع a و با سرعت اولیه V باشد زمانی که شعاع رول به b می رسد، سرعت آن چقدر می شود؟ نشان دهد در شعاع $R = a\left(\dfrac{3V^2}{4ag} + 1\right)^{\frac{1}{3}}$ جسم به حالت سکون می رسد.



تمرین: مطابق شکل میله ای به طول L حول نقطه ی A (که در فاصله $d = L/5$ از سر میله قرار دارد) شروع به نوسان می کند دوره تناوب این نوسان چقدر است؟


d
A
θ
B

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%