بسمه تعالی

تکلیف مکانیک آماری پیشرفته ۲

۱- دستگاه گاز یک بعدی متشکل از الکترونهای بدون اسپین یک بعدی با هامیلتونی $\mathcal{H} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_k^\dagger a_k$ را در نظر بگیرید. می خواهیم پاسخ خطی دستگاه به پتانسیل خارجی $\phi_{ext}(x,t)$ را محاسبه نمائیم. هامیلتونی اختلال به صورت $\mathcal{H}' = \int dx\ \phi_{ext}(x,t)\rho_e(x) = -e\int dx\ \phi_{ext}(x,t)a_k^\dagger(x)a_k(x)$ خواهد بود. با استفاده از فرمول کوبو پاسخ خطی یا تابع قطبش پذیری $\chi_e^R(x-x',t-t')$ را بدست آورید. نشان دهید می توان تبدیل فوریه $\chi_e^R(x-x',t-t')$ در فضای تکانه و فرکانس یعنی $\chi_e^R(q,\omega)$ را به شکل زیر نوشت:

$$\chi_e^R(q,\omega) = e^2 \sum_k \frac{f(\epsilon_{k+q}) - f(\epsilon_k)}{\omega + \epsilon_k - \epsilon_{k+q} + i\eta}\ , \qquad \eta \to 0^+$$

که در آن $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ بوده و $f(\epsilon)$ تابع توزیع فرمی دیراک می باشد. عامل ساختار دینامیکی $S(q,\omega)$ را در حد دماهای بسیار پائین $(T \to 0)$ بیابید.

۲- یکی از آشنا ترین مثالهای مربوط به رفتار عدم تعادل و اتلاف، پدیده اصطکاک است. به ذره ای به جرم m که در یک محیط با سرعت v به پیش رانده می شود، نیروی بازدارندهٔ اصطکاکی وارد می آید که سرعت ذره را کاهش می دهد. حرکت چنین ذره ای با معادله لانژون (Langevin)، $m\dot{v} = -\gamma v + F(t)$، توصیف می شود. γ ضریب ثابت میرایی ناشی از اصطکاک بوده و F(t) بیانگر نیرویی کاتوره ای است که میانگین آن طی یک بازه زمانی طولانی، $\langle F(t)\rangle$، صفر خواهد بود. معادله لانژون را حل نموده تابع همبستگی سرعت ذره، $\langle v(0)v(t)\rangle$، را بدست آورید.

۳- حرکت کاتوره ای یک ذره کوچک (با قطری از مرتبه بزرگی میکرون) در یک سیال که از افت و خیز گرمایی فشار وارد بر ذره ناشی می شود، حرکت براونی نامیده می شود. در غیاب نیروهای خارج از دستگاه ذره و سیال، بررسی حرکت براونی بر اساس معادله لانژون و با احتساب نیروهای کاتوره ای و اصطکاک که توسط قضیه اتلاف افت و خیز به هم مربوط می شوند، میسر است. در بسیاری از موارد نیروی اصطکاک بخش قالب نیروی لحظه ای وارد بر ذره را تشکیل می دهد. با فرض اینکه در زمان اولیه t_0 ذره دارای سرعت معین v_0بوده و تابع همبستگی زمانی نیروی کاتوره ای به شکل $\langle F(t)F(t')\rangle = A\delta(t-t')$ است، تابع همبستگی بین نیروی کاتوره ای و سرعت $\langle v(t)F(t')\rangle$ را بدست آورید.