حل

تغییر شکل‌ها

پیچ‌های CD و GH. سفت کردن مهره‌ها باعث ایجاد کشش در پیچ‌ها می‌شود. به‌علت تقارن، هر دو پیچ تحت نیروی داخلی یکسان P_b قرار می‌گیرند و تغییرشکل یکسان δ_b را می‌دهند:

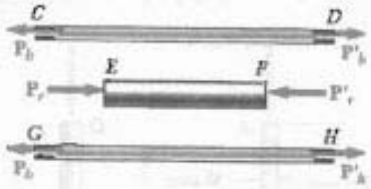
$$\delta_b = +\frac{P_b L_b}{A_b E_b} = +\frac{P_b(450\text{ mm})}{\frac{1}{4}\pi(18\text{ mm})^2(200\times10^3\text{ N/mm}^2)}$$

$$= +8.842\times10^{-6}P_b \qquad (1)$$

میله EF. این میله تحت فشار است. اگر مقدار نیرو در میله را با P_r و تغییرشکل میله را با δ_r نشان دهیم،

$$\delta_r = -\frac{P_r L_r}{A_r E_r} = -\frac{P_r(300\text{ mm})}{\frac{1}{4}\pi(38\text{ mm})^2(70\times10^3\text{ N/mm}^2)}$$

$$= -3.779\times10^{-6}P_r \qquad (2)$$



تغییرشکل D نسبت به B. سفت کردن مهره‌ها به اندازه یک چهارم دور باعث می‌شود دو سر D و H تغییر مکان $\frac{1}{4}(2.5\text{ mm})$ را نسبت به قطعه B بدهند. با در نظر گرفتن سر D، می‌نویسیم:

$$\delta_{D/B} = \frac{1}{4}(2.5\text{ mm}) = 0.625\text{ mm} \qquad (3)$$

امّا $\delta_{D/B} = \delta_D - \delta_B$، که در آن δ_D و δ_B تغییرمکان‌های D و B هستند. اگر فرض کنیم قطعه A در یک مکان ثابت نگه داشته می‌شود و مهره‌های D و H سفت می‌شوند، این تغییر مکان‌ها، به‌ترتیب، با تغییرشکل پیچ‌ها و میله برابرند. بنابراین،

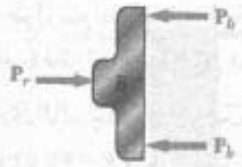
$$\delta_{D/B} = \delta_b - \delta_r \qquad (4)$$

با جایگذاری از (۱)، (۲) و (۳) در (۴)،

$$0.625\text{ mm} = 8.842\times10^{-6}P_b + 3.779\times10^{-6}P_r \qquad (5)$$

جسم آزاد: قطعه B

$$+\rightarrow \sum F = 0: \quad P_r - 2P_b = 0 \Longrightarrow P_r = 2P_b \qquad (6)$$



نیرو در پیچ‌ها و در میله

با جایگذاری P_r از (۶) در (۵)،

$$0.625\text{ mm} = 8.842\times10^{-6}P_b + 3.779\times10^{-6}(2P_b)$$

$$\Longrightarrow P_b = 38.1\times10^3\text{ N} = 38.1\text{ kN}$$

$$P_r = 2P_b = 2(38.1\text{ kN}) = 76.2\text{ kN}$$

تنش در میله

$$\sigma_r = \frac{P_r}{A_r} = \frac{72.6\text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi(38\text{ mm})^2} \Longrightarrow \sigma_r = 67.19\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

مسائل

۲-۱ یک میله فولادی به طول ۲٫۲ m است و تحت بار ۸٫۵ kN نباید بیش از ۱٫۲ mm افزایش طول دهد. اگر $E = 200\text{ GPa}$، مطلوبست: (الف) کمترین قطر میله، (ب) تنش قائم متناظر تحت بار ۸٫۵ kN.

۲-۲ یک سیم فولادی به طول ۶۰ m تحت نیروی کششی ۶ kN است. اگر $E = 200\text{ GPa}$ و افزایش طول میله ۴۸ mm باشد، مطلوبست: (الف) کمترین قطر سیم، (ب) تنش قائم متناظر.

۲-۳ یک میله کنترل از جنس برنج زرد تحت کشش ۳٫۲ kN نباید بیش از ۳ mm کشیده شود. اگر $E = 105\text{ GPa}$ و ماکزیمم تنش قائم مجاز ۱۸۰ MPa باشد، مطلوبست: (الف) کمترین قطر میله، (ب) ماکزیمم طول متناظر میله.

۲-۴ دو علامت‌سنجه دقیقاً به فاصله ۲۵۰ mm روی یک میله آلومینیمی، با $E = 73\text{ GPa}$ و با استقامت نهایی ۱۴۰ MPa و به قطر ۱۲ mm، قرار دارند. اگر فاصله بین این دو علامت پس از اعمال نیرو ۲۵۰٫۲۸ mm باشد، مطلوبست: (الف) تنش در میله، (ب) ضریب اطمینان.

RuEB

۵-۲ یک نخ نایلونی تحت نیروی کششی ۸ N قرار دارد. اگر $E = 5\ GPa$ و طول نخ به اندازه ۱٫۱ درصد افزایش یابد، مطلوبست: (الف) قطر نخ، (ب) تنش در نخ.

۶-۲ از یک لوله چدنی برای تحمل بار فشاری استفاده می‌شود. اگر $E = 69\ GPa$ و ماکزیمم تغییر مجاز طول لوله ۰٫۰۲۵٪ باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش قائم در لوله، (ب) مینیمم ضخامت دیواره لوله برای بار ۷٫۲ kN در صورتی که قطر لوله ۵۰ mm باشد.

۷-۲ سیم فولادی به‌طول ۹ mm و به‌قطر ۶ mm تحت نیروی کششی P به اندازه ۱۱ mm افزایش طول می‌دهد. اگر $E = 200\ GPa$، مطلوبست: (الف) مقدار P، (ب) تنش قائم متناظر در سیم.

۸-۲ سیم چهارگوش آلومینیومی تحت بار کششی نباید بیش از ۱٫۴ mm افزایش طول دهد. اگر $E = 70\ GPa$ و تنش مجاز کششی ۱۲۰ MPa باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم طول مجاز سیم، (ب) ابعاد موردنیاز مقطع عرضی برای بار کششی ۲۸ kN.

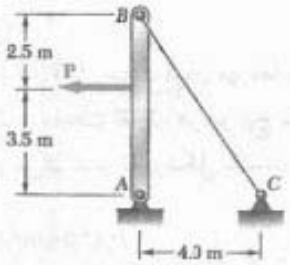
۹-۲ بار کششی ۹ kN بر یک سیم فولادی، به طول ۵۰ m و با $E = 200\ GPa$، وارد می‌شود. اگر تنش قائم در سیم نباید از ۱۵۰ MPa و افزایش طول آن نباید از ۲۵ mm بیشتر شود، کمترین قطر سیم را بیابید.

۱۰-۲ قطعه‌ای به طول ۲۵۰ mm و با مقطع عرضی ۴۰ mm × ۵۰ برای تحمل بار فشاری مرکزی P به‌کار می‌روند. این قطعه از برنز، با $E = 95\ GPa$، ساخته شده است. اگر تنش قائم در قطعه نباید از ۸۰ MPa و کاهش طول آن نباید از ۰٫۱۲ طول اولیه‌اش بیشتر شود، ماکزیمم باری را که می‌توان بر قطعه وارد کرد بیابید.

۱۱-۲ میله آلومینیومی به‌طول ۱٫۵ mm تحت بار محوری ۳ kN نباید بیش از ۱ mm افزایش طول دهد و تنش قائم در آن نباید بیش از ۴۰ MPa باشد. اگر $E = 70\ GPa$، قطر موردنیاز میله را بیابید.

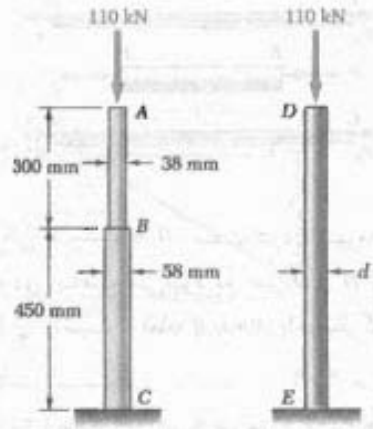
۱۲-۲ نخ نایلونی تحت بار ۱۰ N قرار دارد. $E = 3.5\ GPa$ و ماکزیمم تنش قائم مجاز ۴۲ MPa است. افزایش طول نخ نباید بیش از ۱٪ باشد. قطر نخ را بیابید.

۱۳-۲ کابل BC به قطر ۴ mm از فولاد، $E = 200\ GPa$، ساخته شده است. اگر ماکزیمم تنش در کابل نباید از ۱۹۰ MPa و افزایش طول کابل نباید از ۶ mm بیشتر شود، ماکزیمم بار P را که می‌توان وارد کرد بیابید.



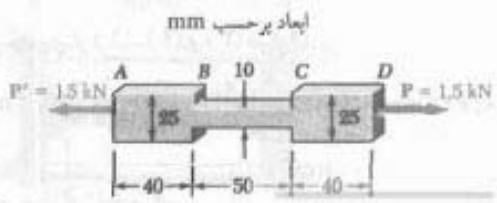
شکل م ۲-۱۳

۱۴-۲ میله آلومینیومی ABC ($E = 70\ GPa$)، از دو قسمت AB و BC تشکیل شده است و می‌خواهیم آن را با میله فولادی استوانه‌ای DE ($E = 200\ GPa$) با همان طول کلی جایگزین کنیم. تحت بار یکسان، تغییرشکل میله فولادی نباید بیشتر از تغییرشکل میله آلومینیومی باشد و تنش مجاز آن ۶۵ MPa است. قطر میله فولادی را بیابید.



شکل م۲-۱۴

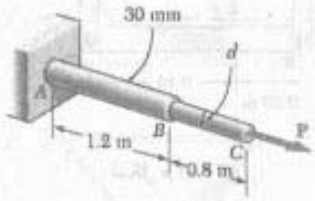
۱۵-۲ قطعه نشان داده شده از ورقی به ضخامت 5 mm ساخته شده است. برای $E = 3.10\ GPa$، مطلوبست: (الف) تغییر شکل کلی قطعه، (ب) تغییرشکل قسمت مرکزی BC.



شکل م۲-۱۵

FNuEB

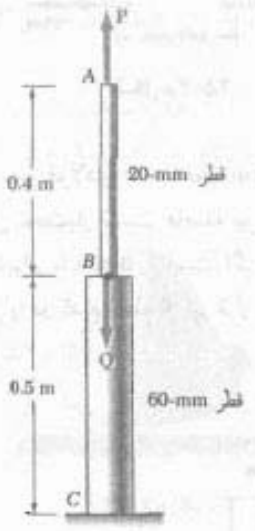
۱۶-۲ بار محوری با مقدار $P = 58\ kN$ بر انتهای C میله برنجی ABC وارد می‌شود. اگر $E = 105\ GPa$، مطلوبست قطر قسمت BC که به ازای آن انحراف نقطه C برابر با $3\ mm$ باشد.



شکل م ۲-۱۶

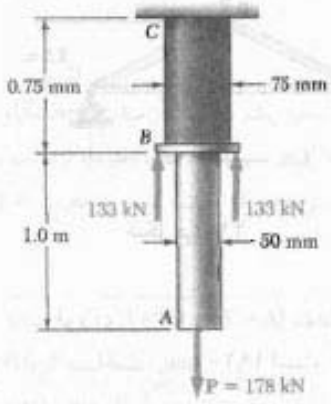
۱۷-۲ میله ABC از آلومینیم ($E = 70\ GPa$) ساخته شده است. اگر $P = 6\ kN$ و $Q = 42\ kN$، مطلوبست: (الف) مقدار Q به‌طوری که انحراف نقطه A صفر باشد، (ب) انحراف نقطه B.

۱۸-۲ میله ABC از آلومینیوم $E = 70\ GPa$، ساخته شده است. برای $P = 6\ kN$ و $Q = 42\ kN$، مطلوبست: (الف) انحراف A، (ب) انحراف B.



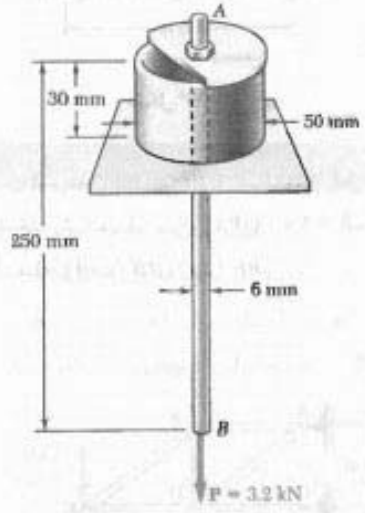
شکل م ۲-۱۷ و م ۲-۱۸

۱۹-۲ دو میله استوانه‌ای در B به‌هم متصل شده‌اند. میله AB از فولاد ($E = 200\ GPa$) و BC از برنج ($E = 105\ GPa$) است. مطلوبست: (الف) تغییرشکل کلی میله مرکب ABC، (ب) انحراف نقطه B.



شکل م ۲-۱۹

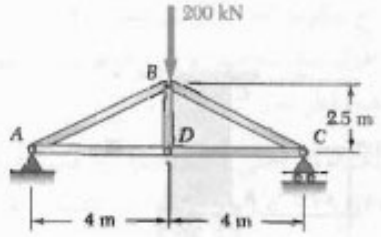
۲۰-۲ استوانه توخالی با ضخامت دیواره $3\ mm$ از جنس پلی‌استیرن ($E = 3\ GPa$)، و ورق دایره‌ای (که فقط قسمتی از آن نشان داده شده است) میله فولادی ($E = 200\ GPa$) به‌قطر $6\ mm$ را نگه داشته‌اند. برای $P = 3.2\ kN$، مطلوبست: (الف) افزایش طول AB، (ب) انحراف نقطه B، (ج) تنش قائم متوسط در میله AB.



شکل م ۲-۲۰

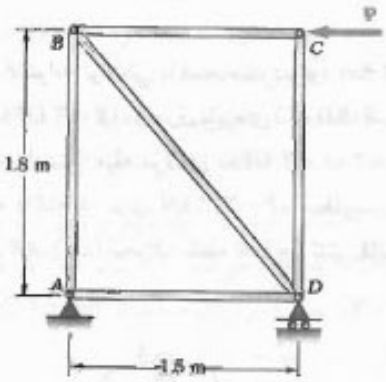
۲۱-۲ برای خرپای فولادی ($E = 200\ GPa$) و بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست تغییرشکل عضوهای AB و AD، در صورتی که مساحت مقطع عرضی آنها، به‌ترتیب، $2400\ mm^2$ و $1800\ mm^2$ باشد.

RuEB



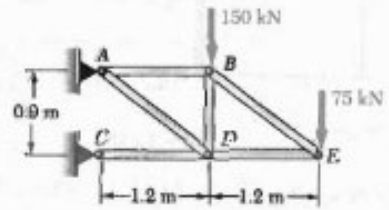
شکل م۲-۲۱

۲-۲۲ قاب فولادی ($E = ۲۰۰$ GPa) نشان داده شده دارای مهار قطری BD با مساحت $۱۹۲۰\ mm^2$ است. اگر تغییر طول عضو BD نباید از $۱٫۶$ mm بیشتر شود، بیشترین بار مجاز **P** را بیابید.



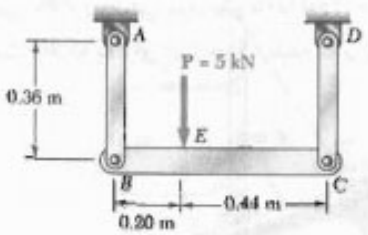
شکل م۲-۲۲

۲-۲۳ عضوهای AB و BE از میله‌های فولادی به‌قطر ۲۵ mm ساخته شده‌اند. برای $E = ۲۰۰$ GPa، مطلوبست افزایش طول میله: (الف) AB، (ب) BE.



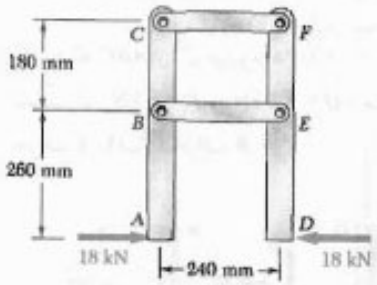
شکل م۲-۲۳

۲-۲۴ هر یک از بازوهای AB و CD از آلومینیم ($E = ۷۵$ GPa) ساخته شده است و دارای مساحت مقطع عرضی $۱۲۵\ mm^2$ است. اگر این بازوها عضو صلب BC را نگه دارند، انحراف نقطه E را بیابید.



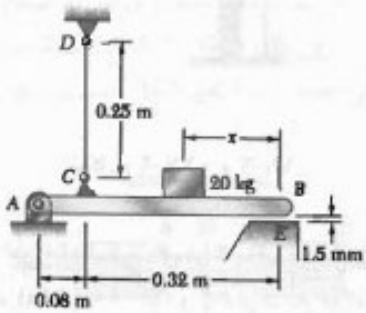
شکل م۲-۲۴

۲-۲۵ عضوهای ABC و DEF توسط عضوهای فولادی ($E = ۲۰۰$ GPa) به هم متصل شده‌اند. هر یک از بازوها از زوج ورق‌های ۲۵×۳۵ mm ساخته شده است. مطلوبست تغییر طول: (الف) عضو BE، (ب) عضو CF.



شکل م۲-۲۵

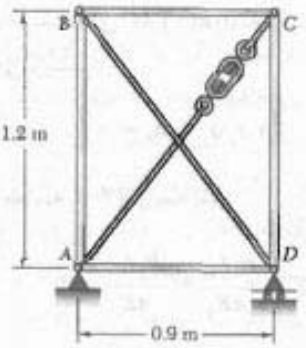
۲-۲۶ سیم فولادی CD به‌قطر ۲ mm طوری تنظیم شده است که وقتی تحت‌بار نیست فاصله بین سر B از تیر ACB با نقطه تماس E برابر با $۱٫۵$ mm است. اگر $E = ۲۰۰$ GPa، قطعه ۲۰ کیلوگرمی را در کدام نقطه از تیر قرار دهیم تا نقاط B و E با هم تماس گیرند؟



شکل م۲-۲۶

RuEB

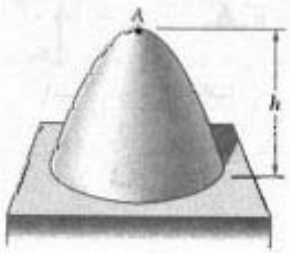
۲-۲۷ عضوهای AB و CD از نوع میله‌های فولادی به قطر ۳۰ mm و عضوهای BC و AD از نوع میله‌های فولادی به قطر ۲۲ mm هستند. وقتی بست قورباغه‌ای سفت می‌شود، عضو قطر AC تحت کشش قرار می‌گیرد. اگر $E = ۲۰۰$ GPa، مطلوبست بیشترین کشش مجاز در AC به‌طوری که تغییرشکل عضوهای AB و CD از ۰٫۱ mm بیشتر نشود.



شکل م ۲-۲۷

۲-۲۸ برای سازه داده شده در مسئله ۲-۲۷، مطلوبست: (الف) فاصله h به‌طوری که تغییرشکل عضوهای AB، BC، CD و AD برابر باشند، (ب) کشش متناظر در عضو AC.

۲-۲۹ انحراف رأس A مخروط همگن دوّاری به ارتفاع h، چگالی ρ و مدول الاستیسیته E را تحت تأثیر وزن مخروط بیابید.



شکل م ۲-۲۹

۲-۳۰ کابل همگنی به طول L و با مقطع عرضی یکنواخت از یک سر آویزان شده است. (الف) اگر چگالی کابل را با ρ و مدول الاستیسیته آن را با E نشان دهیم، افزایش طول کابل را بر اثر وزن آن بیابید. (ب) نشان دهید که اگر کابل افقی بود و نیرویی برابر با نصف وزنش بر هر سر آن وارد می‌شد، همان افزایش طول را می‌داد.

۲-۳۱ اگر "کرنش مهندسی" در یک نمونه کششی را با ε نشان دهیم، ثابت کنید که کرنش حقیقی عبارت است از $\varepsilon_t = \ln(1 + \varepsilon)$.

۲-۳۲ حجم یک نمونه آزمایشی هنگام تغییرشکل پلاستیک اساساً ثابت می‌ماند. اگر قطر اوّلیه نمونه d_0 باشد، نشان دهید که وقتی قطر d است، کرنش حقیقی عبارت است از $\varepsilon_t = 2 \ln(d_0/d)$.

۲-۹ مسائل نامعین استاتیکی

در قسمت قبل، برای تعیین نیروهای داخلی در قسمت‌های مختلف عضوی که تحت بارگذاری قرار داشت از نمودار آزاد و معادله‌های تعادل استفاده می‌کردیم. سپس، با جایگذاری مقادیر حاصل در معادله (۲-۸) یا (۲-۹)، تغییرشکل عضو را به‌دست می‌آوردیم.

ولی، در بسیاری از مسائل نمی‌توان به‌صورت بالا عمل کرد. در این مسائل، معادله‌های تعادل را باید با رابطه‌هایی که شامل تغییرشکل‌ها هستند تکمیل کرد؛ این تغییرشکل‌ها از هندسه مسئله تعیین می‌شوند. چون صرفاً با استاتیک نمی‌توان واکنش‌ها یا نیروهای داخلی را پیداکرد، این نوع مسائل را نامعین استاتیکی می‌گویند.

مثال ۲-۳

میله‌ای به طول L، مساحت مقطع عرضی A_1، و مدول الاستیسیته E_1 در داخل لوله‌ای به طول L و با مساحت مقطع عرضی A_2 و مدول الاستیسیته E_2 قرار دارد (شکل ۲-۲۵الف). اگر نیروی $\mathbf{P}$ بر صفحه صلب انتهایی وارد شود، تغییرشکل میله و لوله را بیابید.

نیروهای محوری در میله و لوله را، به‌ترتیب، با P_1 و P_2 نشان می‌دهیم و نمودار آزاد سه جزء نشان داده شده را رسم می‌کنیم (شکل ۲-۲۵ب، ج، د). در نمودار آخر،

$$P_1 + P_2 = P \qquad (۲-۱۱)$$

با این معادله نمی‌توان دو نیروی داخلی مجهول P_1 و P_2 را حل کرد و مسئله نامعین استاتیکی است.

RNUEB