دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک

روش های عددی

دوره کارشناسی ارشد

تحلیل ماتریسی سازه‌ها

مدرس
دکتر مهدی نوروزی

معادلات جبری سیستم خطی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \ldots\ldots. \\
& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

که در آن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مجهول هستند.

در شکل ماتریسی:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

که در آن:

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \left\{x_i\right\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \left\{b_i\right\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

A ماتریس n×n (مربعی) نامیده می شود و **x** و **b** بردارهایی با بعد n هستند.

❑بردارهای ستونی و ردیفی

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

بردار ردیفی　　　　بردار ستونی

❑جمع و تفریق ماتریس

برای دو ماتریس **A** و **B**، با اندازه‌های یکسان (m×n)، جمع و تفریق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \text{with} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$
$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \quad \text{with} \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

❑ضرب اسکالر

$$\lambda \mathbf{A} = \left[\lambda a_{ij} \right]$$

❑ضرب ماتریسی

برای دو ماتریس **A** (اندازه l×m) و **B** (اندازه m×n)، ضرب **AB** به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \quad \text{with } c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

که در آن:

$$i = 1, 2, \ldots, l; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

توجه شود که در حالت کلی

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

❑ترانهاده ماتریس

اگر

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]$$

آنگاه ترانهاده A برابر:

$$\mathbf{A}^T = \left[a_{ji}\right]$$

توجه شود که در حالت کلی

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

❑ماتریس متقارن

ماتریس مربعی $(n\times n)$ **A** متقارن است، در صورتی که:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \qquad \text{or} \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

❑ماتریس واحد

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

توجه شود که:

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A},\ \mathbf{Ix} = \mathbf{x}.$$

❑دترمینان ماتریس

دترمینان ماتریس **A** عددی اسکالر است که با $\det \mathbf{A}$ یا $|\mathbf{A}|$ نشان داده می‌شود. برای ماتریس‌های 2×2 و 3×3 ، دترمینان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

❑ماتریس یکتا (Singular)

ماتریس مربعی A یکتا است اگر $\det \mathbf{A} = 0$ شود که نشان دهنده مشکلی در سیستم است.

❑معکوس ماتریس

برای ماتریس مربعی و غیریکتای $\mathbf{A}$ ($\det \mathbf{A} \neq 0$)، معکوس آن می‌تواند به صورت زیر بدست آید:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{C}^{T}$$

ماتریس $\mathbf{C}$ هم‌عامل (cofactor) ماتریس $\mathbf{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

که در آن M_{ij} دترمینان ماتریس کوچکتر حاصل شده توسط حذف i امین ردیف و j امین ستون $\mathbf{A}$ است.

معکوس ماتریس می تواند به صورت زیر کنترل شود:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

توجه شود که در حالت کلی $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$

نکته: در صورتی که $\det \mathbf{A} = 0$ باشد (یعنی $\mathbf{A}$ یکتا باشد)، آنگاه $\mathbf{A}^{-1}$وجود نخواهد داشت.

نکته: حل سیستم خطی معادلات می‌تواند به صورت زیر بیان شود (با فرض اینکه ماتریس $\mathbf{A}$ غیریکتا است):

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

معادلات جبری سیستم خطی در شکل ماتریسی: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

بنابراین کار اصلی در حل سیستم خطی معادلات، یافتن معکوس ماتریس ضریب است.

❑ماتریس معین مثبت

ماتریس مربعی $(n \times n)$ $\mathbf{A}$ معین مثبت نامیده می شود اگر برای بردار غیرصفر $\mathbf{x}$ با بعد n داشته باشیم:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$$

توجه شود که ماتریس‌های معین مثبت غیریکتا هستند.

❑دیفرانسیل و انتگرال ماتریس

اگر

$$\mathbf{A}(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$$

آنگاه دیفرانسیل و انتگرال به صورت روبرو تعریف می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \left[\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right]$$

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \left[\int a_{ij}(t)dt\right]$$

مثال ۱: اثبات کنید

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

جواب:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۲: معکوس ماتریس زیر را بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

جواب:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{(4-2-1)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

کنترل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$