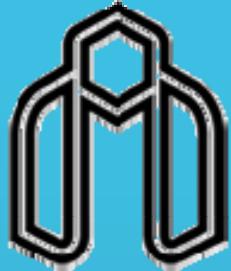
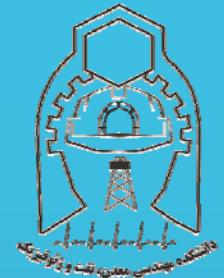


روش‌های عددی



Shahrood
University
Technology

دانشگاه صنعتی شهرورد
دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک



روش‌های عددی

دوره کارشناسی ارشد

تحلیل ماتریسی سازه‌ها

مدرس

دکتر مهدی نوروزی

معادلات جبری سیستم خطی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

که در آن x_1, x_2, \dots, x_n مجھول هستند.

در شکل ماتریسی:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{که در آن:}$$

$$\mathbf{x} = \{x_i\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \{b_i\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

ماتریس $n \times n$ (مربعی) نامیده می‌شود و \mathbf{x} و \mathbf{b} بردارهایی با بعد n هستند.

پردارهای ستونی و ردیفی

□ جمع و قریق ماقریس

برای دو ماتریس A و B , با اندازه‌های یکسان $(m \times n)$, جمع و تفریق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \text{with} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \quad \text{with} \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

فرب اسکالر

$$\lambda \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{ij} \end{bmatrix}$$

□ ضرب ماتریسی

برای دو ماتریس \mathbf{A} (اندازه $m \times n$) و \mathbf{B} (اندازه $n \times l$)، ضرب \mathbf{AB} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \quad \text{with } c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

که در آن:

$$i = 1, 2, \dots, l; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

توجه شود که در حالت کلی

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

□ ترانهاده ماتریسی

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \quad \text{اگر}$$

$$\mathbf{A}^T = [a_{ji}] \quad \text{آنگاه ترانهاده } A \text{ برابر:}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad \text{توجه شود که در حالت کلی}$$

□ ماتریس متقارن

ماتریس مربعی A ($n \times n$) متقارن است، در صورتی که:

$$A = A^T \quad \text{or} \quad a_{ij} = a_{ji}$$

□ ماتریس واحد

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI = A, Ix = x. \quad \text{توجه شود که:}$$

□ دترمینان ماتریس

دترمینان ماتریس A عددی اسکالر است که با $|A|$ نشان داده می‌شود. برای ماتریس‌های 2×2 و 3×3 دترمینان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

□ ماتریس یکتا (Singular)

ماتریس مربعی A یکتا است اگر $\det A = 0$ شود که نشان دهنده مشکلی در سیستم است.

□ معکوس ماتریس

برای ماتریس مربعی و غیریکتای $\det A \neq 0$ ، معکوس آن می‌تواند به صورت زیر بدست آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

ماتریس C هم‌عامل (cofactor) ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

که در آن M_{ij} دترمینان ماتریس کوچکتر حاصل شده توسط حذف i -امین ردیف و j -امین ستون A است.

معکوس ماتریس می‌تواند به صورت زیر کنترل شود:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad \text{توجه شود که در حالت کلی}$$

نکته: در صورتی که $\det \mathbf{A} = 0$ باشد (یعنی \mathbf{A} یکتا باشد)، آنگاه \mathbf{A}^{-1} وجود نخواهد داشت.

نکته: حل سیستم خطی معادلات می‌تواند به صورت زیر بیان شود (با فرض اینکه ماتریس \mathbf{A} غیریکتا است):

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

معادلات جبری سیستم خطی در شکل ماتریسی: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

بنابراین کار اصلی در حل سیستم خطی معادلات، یافتن معکوس ماتریس ضریب است.

□ ماتریس معین مثبت

ماتریس مربعی ($n \times n$) معین مثبت نامیده می‌شود اگر برای بردار غیرصفر \mathbf{x} با بعد n داشته باشیم:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > 0$$

توجه شود که ماتریس‌های معین مثبت غیریکتا هستند.

□ دیفرانسیل و انتگرال ماتریس

اگر

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = \left[\frac{da_{ij}(t)}{dt} \right]$$

$$\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]$$

آنگاه دیفرانسیل و انتگرال به صورت رو برو تعریف می‌شود:

$$\int \mathbf{A}(t) dt = \left[\int a_{ij}(t) dt \right]$$

مثال ۱: اثبات کنید

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

جواب:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۲: معکوس ماتریس زیر را بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{(4-2-1)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

جواب:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

کنترل: