سوالات برگزیده درس ریاضی۲- فنی (هماهنگ)

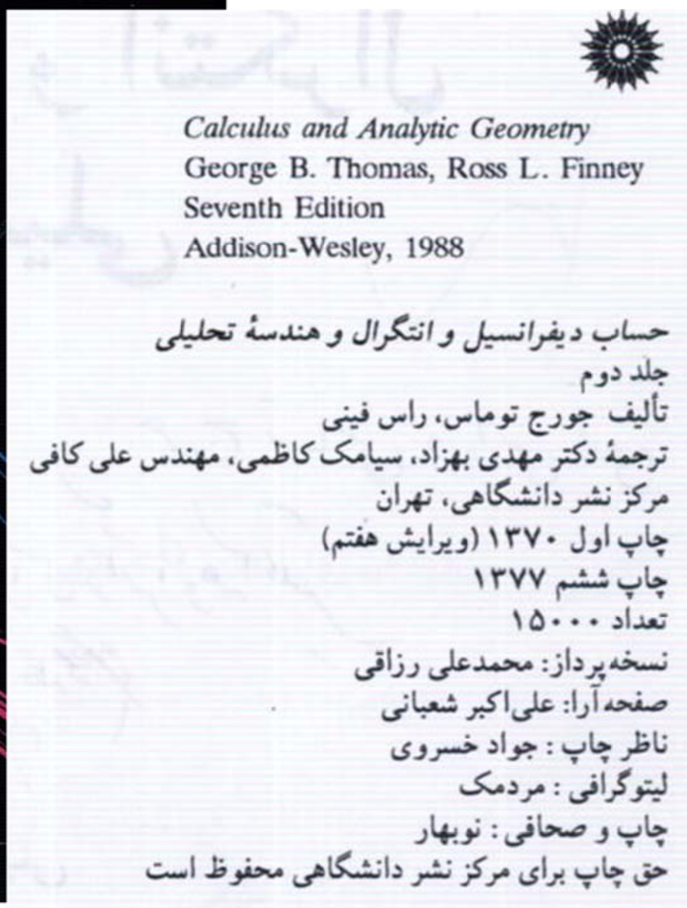
نیمسال۳۹۶۲

همان‌گونه که استحضار دارید، برای هماهنگی بیشتر در تدریس درس ریاضی عمومی ۲ فنی مقرر شد که در سال تحصیلی ۹۷-۱۳۹۶،

کتاب **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (جلد دوم)، تالیف جورج توماس و راس فینی**

به عنوان مرجع اصلی درس معرفی شود. به همین دلیل از فصل‌های ۱۳ تا ۱۹ این کتاب، تعدادی از مسایل مناسبتر آن انتخاب و به صورت تقریبی دسته بندی شده اند و به اطلاع مدرسان و دانشجویان رسیده است.

تعدادی از از تمرینهایی که توقع داریم دانشجویان حل کنند در این فایل آمده است و در کلاس حل تمرین که به صورت هفتگی برای دانشجویان این درس تدارک دیده شده است نیز برخی از تمرینات مشخص شده زیر حل خواهد شد.



Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Ross L. Finney
Seventh Edition
Addison-Wesley, 1988

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی
جلد دوم
تألیف جورج توماس، راس فینی
ترجمهٔ دکتر مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، مهندس علی کافی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۰ (ویرایش هفتم)
چاپ ششم ۱۳۷۷
تعداد ۱۵۰۰۰
نسخه‌پرداز: محمدعلی رزاقی
صفحه‌آرا: علی‌اکبر شعبانی
ناظر چاپ: جواد خسروی
لیتوگرافی: مردمک
چاپ و صحافی: نوبهار

فصل ۱۴
تابعهای برداری و حرکت

صفحه ۵۶

درمسائل ۲۱–۲۲، با استفاده از شتاب و شرایط اولیه، $\mathbf{R}(t)$ را تعیین کنید.

۲۳. $\mathbf{a}(t)=(1+t)^{-1/2}\mathbf{i}-e^{-t}\mathbf{j},\quad \mathbf{v}(0)=-\mathbf{i}+\mathbf{j},$
$\mathbf{R}(0)=(1/3)\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

صفحه ۵۷

۲۹. ذره‌ای روی بیضی $(x/3)^2+(y/2)^2=1$ چنان حرکت می‌کند که مکانش در لحظهٔ t عبارت است از

$$\mathbf{R}(t)=(3\cos t)\mathbf{i}+(2\sin t)\mathbf{j}.$$

مقادیر ماکسیمم و مینیمم اندازهٔ شتاب را بیابید.

۳۰. فرض می‌کنیم بردارهای مکان ذرات P_1 و P_2 که در فضا در حرکت‌اند عبارت‌اند از

$$\mathbf{R}_1(s)=2s\mathbf{i}+(s-5)\mathbf{j}+s\mathbf{k}$$
$$\mathbf{R}_2(t)=(3+t)\mathbf{i}-(2+t)\mathbf{j}+(1+t)\mathbf{k}$$

که در آنها s و t هردو زمان را نشان می‌دهند.

الف) نقطهٔ تقاطع مسیرهای P_1 و P_2 را بیابید. در چه لحظه‌ای ذرات به این نقطهٔ تقاطع می‌رسند؟

ب) چون s و t هردو زمان را نشان می‌دهند، s را برابر با t قرار دهید و فاصلهٔ بین P_1 و P_2 را به‌صورت تابعی از t تعیین کنید. در چه لحظه‌ای فاصلهٔ دو ذره کمترین مقدار را دارد؟

صفحه ۶۱

درمسائل ۱–۱۰، بردار $\mathbf{R}(t)$ بردار مکان ذره‌ای است که درصفحه یا در فضا حرکت می‌کند. مطلوب است بردار مماس واحد $\mathbf{T}$ درمورد خمی که ذره روی آن حرکت می‌کند. همچنین طول قطعهٔ مشخص شده از خم را بیابید.

۰۷. $\mathbf{R}(t)=(t\cos t)\mathbf{i}+(t\sin t)\mathbf{j}+(2\sqrt{2}/3)t^{3/2}\mathbf{k}$، قطعهٔ از $t=0$ تا $t=\pi$

۰۸. $\mathbf{R}(t)=(t\sin t+\cos t)\mathbf{i}+(t\cos t-\sin t)\mathbf{j}$، قطعهٔ از $t=0$ تا $t=a$

صفحه ۶۸

درمسائل ۹–۱۴، $\mathbf{B}$، $\mathbf{N}$، κ، $\mathbf{B}$، و τ را درمورد خمهای مفروض بیابید.

۰۱۰. $\mathbf{R}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

۰۱۳. $\mathbf{R}(t)=\frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\mathbf{i}+\frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j}+\frac{1}{3}t\mathbf{k}$

در مسائل ۱۵–۲۰، بدون یافتن $\mathbf{N}$ و $\mathbf{T}$، $\mathbf{a}$ را به صورت $\mathbf{a}=a_T\mathbf{T}+a_N\mathbf{N}$ بنویسید.

۰۱۹. $\mathbf{R}(t)=(a\cos \omega t)\mathbf{i}+(a\sin \omega t)\mathbf{j}+bt\mathbf{k}$

صفحه ۶۹

۳۶. الف) نشان دهید که خمیدگی نمودار تابعی چون $y=f(x)$ که دوبار مشتق‌پذیر است از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}.$$

(راهنمایی: فرض کنید $\mathbf{R}(t)=x\mathbf{i}+f(x)\mathbf{j}$.)

ب) فرمول قسمت الف را درمورد $y=\ln(\cos x)$ به‌کار ببرید و نتیجه‌ای را که به‌دست می‌آورید با نتیجهٔ مسألهٔ ۱ مقایسه کنید.

صفحه ۷۹

۰۳. مطلوب است معادلات پارامتری خط مماس برخم زیر در $t=0$:

$$\mathbf{R}(t)=e^t\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+\ln(1-t)\mathbf{k}.$$

۰۸. مکان ذره‌ای در فضا در $t\geqslant 0$ عبارت است از

$$\mathbf{R}(t)=2t\mathbf{i}+\left(4\sin\frac{t}{2}\right)\mathbf{j}+\left(3-\frac{t}{\pi}\right)\mathbf{k}.$$

نخستین لحظه‌ای را بیابید که در آن، $\mathbf{R}(t)$ بر بردار $\mathbf{B}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$ عمود است.

۰۱۷. مطلوب است $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، κ، $\mathbf{B}$، τ درمورد خم زیر در $t=0$:

$$\mathbf{R}(t)=(e^t\sin 2t)\mathbf{i}+(e^t\cos 2t)\mathbf{j}+(2e^t)\mathbf{k}.$$

۰۱۸. معادلات صفحات بوسان، قائم، و راستگر خم زیر را در نقطهٔ $(1, 1, 1)$ بیابید.

$$\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}.$$

فصل ۱۵
رویه ها ، دستگاههای مختصات و ترسیم

صفحه ۸۵

استوانه‌های مذکور در مسأله‌های ۱–۱۸ را رسم کنید.

۰۵. $z=y^2-1$

۰۶. $x=y^2$

۰۷. $z=4-x^2$

صفحه ۹۲ ، ۹۱

رویه‌های مذکور درمسائل ۱–۳۲ را رسم کنید. درمورد سهمیوارها، هذلولیوارها و مخروطها، نوع رویه را ذکر کنید.

۰۸. $x^2+z^2=y$

۰۲۵. $(y^2/4)+(z^2/9)-(x^2/4)=1$

۳۹. خم

$$\mathbf{R}(t)=(2\sqrt{t}\cos t)\mathbf{i}+(2\sqrt{t}\sin t)\mathbf{j}+\sqrt{1-t}\,\mathbf{k}$$

در بازهٔ $0 \leqslant t \leqslant 1$ بر یک رویهٔ درجهٔ دوم واقع است. معادله‌ای برای این رویه پیدا کنید و نوع آن را مشخص کنید.

صفحه ۹۶

در مسأله‌های ۱۱–۲۰، هرمعادله دریک دستگاه مختصات (دکارتی، استوانه‌ای، یا کروی) داده‌شده‌است. آن‌را به‌معادلاتی در دودستگاه دیگر تبدیل کنید. همچنین، مجموعهٔ نقاطی را که به‌وسیلهٔ معادله تعریف می‌شوند، مشخص کنید.

۱۶. $\sqrt{x^2+y^2}=z$

۱۸. $\tan^2\phi=1$

۲۰. $\rho=6\cos\phi$

۲۴. $r=2\cos\theta$

صفحه ۹۷

درمسأله‌های ۱۳–۱۸، مطلوب‌است توصیف مجموعه‌هایی درفضا که با معادله‌ها و نامعادله‌های داده شده تعریف می‌شوند.

۱۷. $\rho=1,\quad \theta=\phi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$

۲۲. معادلات پارامتری $x=x(\theta)$، $y=y(\theta)$، و $z=z(\theta)$ را برای خمی که فصل مشترک کرهٔ $\rho=a$ با صفحهٔ $y+z=0$ است پیدا کنید.

صفحه ۹۹

۳۱. عبارت $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ را برحسب (الف) مختصات استوانه‌ای r، θ، z، و (ب) مختصات کروی ρ، ϕ، θ بیان کنید (مسألهٔ ۳۰ را ببینید). نتایج خود را به‌صورت هندسی و برحسب اضلاع و قطری از یک مکعب مستطیل تعبیر کنید. شکل بکشید.

۳۲. با استفاده ازنتایج مسألهٔ ۳۱، طول‌خمهای زیر، بین $\theta=0$ و $\theta=\ln 8$، را حساب کنید.

(الف) $z=r=ae^{\theta}$

(ب) $\phi=\pi/6,\quad \rho=2e^{\theta}$

فصل ۱۶

تابعهای دو یا چند متغیره و مشتق آنها

صفحه ۱۰۴

۲۵. خمهای تراز تابع

$$f(x,y)=-(x-1)^2-y^2+1$$

را به‌ازای $f(x,y)=1,0,-3,-8$ رسم کنید.

۲۶. خمهای تراز تابع $f(x,y)=2x^2-y+1$ را به‌ازای $f(x,y)=0,1,2$ رسم کنید.

صفحه ۱۰۵

۳۰. مقدار ماکسیمم تابع $f(x,y,z)=xyz$ را روی خط $x=20-t$، $y=t$، $z=20$ بیابید. درچه نقطه یا نقاطی از خط، این ماکسیمم به‌دست می‌آید؟ (راهنمایی: در امتداد خط، f را می‌توان به‌صورت تابع مشتق‌پذیری از تک‌متغیر t بیان کرد.)

صفحه ۱۱۰

درمسائل ۱۷–۲۲، با درنظر گرفتن خطوط میل مختلف نشان‌دهید که وقتی $(x,y)\to(0,0)$، توابع مفروض حد ندارند.

۲۰. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

۲۱. $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

۲۲. $\dfrac{xy}{|xy|}$

صفحه ۱۱۱

۳۳. درمورد تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مذکور درمثال۳، خمهای تراز $f(x,y)=0$، $f(x,y)=1/2$، و $f(x,y)=-1/2$ را رسم کنید. این‌هم‌راه‌دیگری‌است برای نشان‌دادن ناپیوستگی این تابع در مبدأ.

صفحه ۱۱۴

۲۹. فرض کنید معادلهٔ زیر z را به‌صورت تابع مشتق‌پذیری از دومتغیرمستقل x و y تعریف می‌کند

$$xy+z^3x-2yz=0.$$

مطلوب‌است مقدار $\partial z/\partial x$ درنقطهٔ $(x,y,z)=(1,1,1)$.

۳۰. فرض کنید معادلهٔ زیر x را به‌صورت تابع مشتق‌پذیری از دومتغیرمستقل y و z تعریف می‌کند

$$xz+y\ln x+x^2+4=0.$$

مطلوب‌است مقدار $\partial x/\partial z$ درنقطهٔ

$$(x,y,z)=(1,-1,-3).$$

صفحه ۱۱۵

درمسائل ۳۵–۴۰، مختصات کروی ρ، ϕ، و θ را به‌صورت توابعی از مختصات دکارتی x، y، و z بیان، ومشتقات خواسته‌شده را محاسبه کنید.

۳۵. $\dfrac{\partial\rho}{\partial x}$ ۳۶. $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

۴۱. فرض کنید $\mathbf{R}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ بردار مکان نقطهٔ (x,y,z) در دستگاه مختصات دکارتی باشد. x، y، و z را به صورت توابعی از مختصات کروی ρ، ϕ، و θ بیان و $\partial\mathbf{R}/\partial\rho$، $\partial\mathbf{R}/\partial\phi$، و $\partial\mathbf{R}/\partial\theta$ را محاسبه کنید. سپس این مشتقها را برحسب بردارهای واحد بنویسید.

$$\mathbf{u}_\rho=(\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(\cos\phi)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_\phi=(\cos\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(\cos\phi\sin\theta)\mathbf{j}-(\sin\phi)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_\theta=-(\sin\theta)\mathbf{i}+(\cos\theta)\mathbf{j}.$$

صفحه ۱۲۰

۱۷. اگر $u=x^2+e^{y^2}$، $x=\sin 2t$، و $y=\cos t^2$، کدام یك از عبارات زیر، du/dt را بهدست میدهد؟

الف) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

ب) $4x\cos 2t-4ye^{y^2}t\sin t^2$

پ) $2x\cos 2t-2ye^{y^2}\sin t^2$

۱۸. اگر داشته باشیم

$$w=(x^2+y-2)^4+(x-y+2)^3 \text{ ، } x=u-2v+1$$

و $y=2u+v-2$، مطلوب است $\partial w/\partial v$ وقتی که $u=0$، و $v=0$.

۲۷. اگر

$$F(x,y)=\int_0^{x^2y}\cos\sqrt{t}\,dt$$

$\partial F/\partial x$ را در $(x,y)=(\pi,1)$ بیابید.

صفحه ۱۲۱

۳۶. اگر مختصات قطبی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ را در یك تابع پیوستهٔ $w=f(x,y)$ که مشتقات جزئی پیوسته دارد قرار دهیم، نشان دهید که

$$\frac{\partial w}{\partial r}=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta$$

و

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}=-f_x\sin\theta+f_y\cos\theta.$$

۳۸. در ارتباط با مسألهٔ ۳۶ نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2=f_x^2+f_y^2.$$

صفحه ۱۲۶

۷. فرض کنید که $x^2+y^2=r^2$ و $x=r\cos\theta$ (همانطور که درمختصات قطبی داریم). مطلوب است

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y.$$

۸. فرض کنید معادلهٔ $g(x,y,z)=0$، z را بهصورت تابع مشتقپذیری از متغیرهای مستقل x و y بهدست میدهد، و نیز فرض کنید $g_z\neq 0$. نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=-\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z}.$$

۹. با فرض $f(x,y,z)=0$، رابطهٔ زیر را که درهیدرودینامیك کاربرد زیادی دارد ثابت کنید

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1.$$

صفحه ۱۳۱

۳۳. مطلوب است مشتق $f(x,y,z)=xyz$ درجهت بردار سرعت پیچ زیر در $t=\pi/3$:

$$\mathbf{R}(t)=(\cos 3t)\mathbf{i}+(\sin 3t)\mathbf{j}+3t\mathbf{k}.$$

۳۴. درمورد تابع $f(x,y)=x^2y+2y^2x$ در نقطهٔ $P_0(1,3)$ مطلوب است

الف) جهت بزرگترین افزایش f

ب) مشتق f درجهت بزرگترین افزایش f

پ) جهت بزرگترین کاهش f

ت) جهتهایی که در آنها مشتق f صفر است.

صفحه ۱۳۵

درمسائل ۲۹–۳۴، مطلوب است معادلات پارامتری خطی که در نقطهٔ مفروض برخم محل تلاقی رویهها مماس است.

۳۰. رویهها: $xyz=1$ ، $x^2+2y^2+3z^2=6$

نقطه: $(1,1,1)$

۴۱. نقاطی از رویهٔ

$$(y+z)^2+(z-x)^2=16$$

را بیابید که درآنها، خط قائم با صفحهٔ yz موازی است.

۴۳. نشان دهید که خم زیر وقتی $t=1$، بر رویهٔ $x^2+y^2-z=1$ قائم است

$$\mathbf{R}(t)=\sqrt{t}\,\mathbf{i}+\sqrt{t}\,\mathbf{j}-\frac{1}{2}(t+3)\mathbf{k}.$$

صفحه ۱۳۹

در مسائل ۱–۶، مطلوب است $\partial^2 f/\partial x^2$، $\partial^2 f/\partial y^2$، و $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$.

۱. $f(x, y)=\ln(x^2+y^2)$

۲. $f(x, y)=e^x \ln(3-y^2)$

۱۴. اگر $z=f(u, v)$، $u=x^2+y^2$ و $v=2xy$، z_{xx} را بیابید. جواب را برحسب x، y، f_u، و f_v بیان کنید.

۳۰. تابع زیر به‌ازای چه مقادیری از n در معادلهٔ لاپلاس دو بعدی (۱۲) صدق می‌کند؟

$$f(x, y, z)=(x^2+y^2+z^2)^n$$

صفحه ۱۴۲

۴. فرض کنید تابع $f(x, y)$ با معادلات زیر تعریف بشود

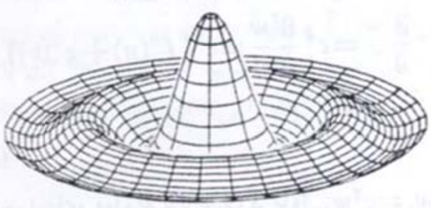
$$f(x, y)=\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}, \quad |x|+|y| \neq 0$$
$$f(0, 0)=0.$$

آیا f در مبدأ پیوسته است؟

۱۱. فرض کنید

$$f(r, \theta)=\begin{cases} \dfrac{\sin 6r}{6r} & r \neq 0 \\ 1 & r=0 \end{cases}$$

(شکل ۳۰.۱۶ را ببینید.) مطلوب است: (الف) $\lim_{r\to 0} f(r, \theta)$، (ب) $f_r(0, 0)$، (پ) $f_\theta(r, \theta),\ r\neq 0$.



صفحه ۱۴۴

۲۳. مقداری برای x بیابید که انتگرال زیر را ماکسیمم کند

$$\int_x^{x+3} t(5-t)\, dt$$

۲۷. اگر $z=f(u)$ و $u=(x-y)/y$، نشان دهید که $x(\partial z/\partial x)+y(\partial z/\partial y)=0$.

۲۸. اگر $f(x, y, z)=0$ و $z=x+y$، مطلوب است dz/dx.

۳۰. مشتق تابع زیر را در نقطهٔ (۱، ۳، ۳) در جهت بردار $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ بیابید

$$f(x, y, z)=x^2-2y^2+z^2.$$

۳۲. جهت بزرگترین تغییر تابع زیر را در نقطهٔ $(1, 1, \sqrt{14})$ بیابید

$$f(x, y, z)=x^2-y^2+z^2.$$

۳۳. مشتق $f(x, y, z)=xyz$ را در جهت بردار $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ در نقطهٔ (۱، ۱، ۱) بیابید. بزرگترین مقدار مشتقهای جهتی f در (۱، ۱، ۱) چیست؟

صفحه ۱۴۵

۴۵. نشان دهید که خط قائم بر رویهٔ $xy+z=2$ در نقطهٔ (۱، ۱، ۱) از مبدأ می‌گذرد.

۴۶. الف) گرادیان $f(x, y)=x^5+4xy^3-3y^5$ را بیابید.
ب) برای خط واقع در صفحهٔ xy که بر خم زیر در نقطهٔ (۱، ۱) مماس باشد معادله‌ای بنویسید

$$x^5+4xy^3-3y^5=2$$

۴۹. الف) رویهٔ $x^2-y^2+z^2=4$ را رسم کنید.
ب) یک بردار قائم بر این رویه در (۲، −۳، ۳) بیابید.
پ) معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم در (۲، −۳، ۳) را بیابید.

۵۰. الف) برای صفحهٔ مماس بر رویهٔ

$$x^3+xy^2+y^3+z^3+1=0$$

در نقطهٔ (−۲، ۱، ۲)، معادله‌ای بنویسید.
ب) معادلات خط قائم بر این رویه در نقطهٔ (−۲، ۱، ۲) را بیابید.

صفحه ۱۴۷

۶۹. فرض کنید

$$f(x, y)=\begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y)\neq(0, 0) \\ 0 & (x, y)=(0, 0). \end{cases}$$

مطلوب است $f_{yx}(0, 0)$ و $f_{xy}(0, 0)$. شکل ۳۲.۱۶ را ببینید.

فصل ۱۷

کاربردهای مشتقات جزئی

صفحه ۱۵۴

توابع زیر را از لحاظ داشتن ماکسیممها، مینیممها، و نقاط زینی بیازمایید. در این نقاط، مقادیر تابعها را بیابید.

۱۸. $f(x,y)=3+2x+2y-2x^2-2xy-y^2$

۱۹. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-4y+5$

۲۰. $f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x+2y-4$

درمسائل ۳۱-۳۸، ماکسیممها و مینیممهای مطلق توابع را بر دامنه‌های مفروض بیابید.

۳۱. $f(x,y)=2x^2-4x+y^2-4y+1$ بر ناحیهٔ مثلثی شکل بستهٔ محدود به‌خطوط $x=0$، $y=2$، $y=2x$ و واقع در ربع اول.

صفحه۱۵۵

۳۷. $f(x,y)=(x^2-4x)\cos y$ بر ناحیهٔ $1\leqslant x\leqslant 3$، $-\pi/4\leqslant y\leqslant \pi/4$.

۴۰. نقطهٔ بحرانی

$$f(x,y)=xy+2x-\ln x^2y$$

را در ربع اول باز ($x>0$، $y>0$) بیابید و نشان دهید که f دراین نقطه یك مینیمم دارد.

۴۷. مطلوب است تعیین مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق توابع مفروض بر نواحی زیر

i) ربع بیضی $(x^2/9)+(y^2/4)=1$ واقع در ربع اول

ii) نیم بیضی $(x^2/9)+(y^2/4)=1$، $y\geqslant 0$، و

iii) بیضی کامل $(x^2/9)+(y^2/4)=1$.

الف) $f(x,y)=x^2+3y^2$

ب) $f(x,y)=2x+3y$

صفحه ۱۶۳

درمسائل ۷-۱۲، صورت خطی $L(x,y)$ تابع $f(x,y)$ را در P_0 بیابید. آنگاه با استفاده از معادلهٔ (۱۲) کران بالایی برای اندازهٔ خطای E ناشی از تقریب‌زدن $f(x,y)\approx L(x,y)$ بر مستطیل R بیابید.

۷. $f(x,y)=x^2-3xy+5,\quad P_0(2,1)$

$R: |x-2|\leqslant 0.1,\quad |y-1|\leqslant 0.1$

صفحه ۱۶۴

۱۵. الف) آیا تابع $f(x,y)=x^2(y+1)$ در اطراف نقطهٔ $(1,0)$ نسبت به تغییرات x حساستراست یا نسبت به تغییرات y؟

ب) چه نسبتی از dx به dy، df را در $(1,0)$ برابر با صفر می‌کند؟

صفحه ۱۶۵

۳۴. اگر $|a|$ خیلی بزرگتر از $|b|$، $|c|$، و $|d|$ باشد، تعیین کنید مقدار دترمینان زیر نسبت به کدام درایه ازهمه حساستراست؟

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

صفحه ۱۷۳

۸. مطلوب است نزدیکترین ودورترین نقاط خم $x^2+xy+y^2=1$ به‌مبدأ.

۱۲. از شرکتی خواسته شده مخزنی برای انبارکردن گاز مایع طراحی کند. مشتری مخزنی می‌خواهد که استوانه‌ای‌شکل ودوانتهای آن به‌صورت نیمکره، و ظرفیت آن $8000\ \mathrm{m}^3$ باشد. مشتری می‌خواهد درساختن این مخزن ازحداقل ورق استفاده شود. شعاع و ارتفاع بخش استوانه‌ای مخزن چقدر باید باشد؟

صفحه ۱۷۴

۲۰. مطلوب است نقاطی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=25$ که درآنها تابع $f(x,y,z)=x+2y+3z$ مقادیرماکسیمم و مینیمم‌خود را اختیار می‌کند.

۲۶. مطلوب است مقادیر اکسترمم $f(x,y,z)=x^2yz+1$ برمحل تقاطع صفحهٔ $z=1$ با کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2$.

صفحه ۱۸۰

درمسائل ۱-۶، بااستفاده ازفرمول تیلر یك چندجمله‌ای درجهٔ دوم بیابیدکه $f(x,y)$ را درنزدیکی مبدأ تقریب بزند.

۱. $f(x,y)=e^x\cos y$

۲. $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$

۵. $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y}$

صفحه ۱۸۱

درمسائل ۱-۸، مقادیرماکسیمم و مینیمم‌مطلق $f(x,y)$ را بر ناحیهٔ R بیابید.

۶. $f(x,y)=4xy-x^4-y^4+16$

R: ناحیهٔ مثلثی واقع دربالای خط $y=-2$، زیرخط $y=x$، و سمت چپ خط $x=2$.

۱۲. مقدار ماکسیمم تابع $xye^{-(2x+3y)}$ را در ربع اول بیابید.

فصل ۱۸

انتگرالهای چندگانه

صفحه ۱۹۳

درمسائل ۱۷–۲۲، ناحیه‌ای را رسم کنید که انتگرالگیری روی آن صورت می‌گیرد و انتگرال معادلی را بیابید که ترتیب انتگرالگیری در آن، معکوس ترتیب انتگرال مفروض باشد. هر دو انتگرال را محاسبه کنید.

۲۲. $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 dx\,dy$

۲۳. $\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\,dx\,dy$

۲۴. $\int_0^1\int_0^{4-x^2} dy\,dx$

صفحه ۱۹۴

انتگرالهای مسائل ۳۱–۳۶ را به این ترتیب محاسبه کنید که با معکوس کردن ترتیب انتگرالگیری انتگرال معادلی بیابید و سپس از آن انتگرال بگیرید.

۳۵. $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

۳۶. $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

صفحه ۱۹۸

در مسائل ۱–۸، مساحت ناحیهٔ محدود به خمها و خطوط مفروض را به‌کمک انتگرالگیری دوگانه بیابید.

۸. از بالا به $y=x^2$، از پایین به $y=-1$، از چپ به $x=-2$، و از راست به $y=2x-1$

صفحه ۱۹۹

انتگرالهای مسائل ۹–۱۴، مساحت نواحیی از صفحهٔ xy را مشخص می‌کنند. در هر مورد، ناحیهٔ را رسم کنید، خمهای محدود کنندهٔ آن را با معادلاتشان مشخص کنید. مختصات نقاط مرزی یعنی محل تقاطع خمها را بیابید. سپس مساحت ناحیه را تعیین کنید.

۱۳. $\int_{-1}^0\int_{-2x}^{1-x}dy\,dx+\int_0^2\int_{-x/2}^{1-x}dy\,dx$

۱۴. $\int_0^2\int_{x^2-4}^0 dy\,dx+\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}}dy\,dx$

صفحه ۲۰۸

۱۰. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$

۱۳. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy\,dx$

۱۵. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که خم $r=(2-\sin 2\theta)^{1/2}$ از ربع اول جدا می‌کند.

۲۲. از تابع $f(x,y)=(\ln(x^2+y^2))/(x^2+y^2)$ روی ناحیهٔ بین دوایر $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=e^2$ انتگرال بگیرید.

صفحه ۲۰۹

۳۵. فرض کنید R ناحیه‌ای واقع در ربع اول صفحهٔ xy و محدود به هذلولیهای $xy=1$ و $xy=9$ و خطوط $y=x$ و $y=4x$ باشد (شکل ۳۱.۱۸). با استفاده از تبدیل $x=u/v$، $y=uv$ با ضوابط $u>0$ و $v>0$، انتگرال

$$\iint_R\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dx\,dy$$

را به صورت انتگرالی روی ناحیهٔ مناسبی چون G واقع در صفحهٔ uv بنویسید. سپس این انتگرال را روی G محاسبه کنید.

۳۸. انتگرال

$$\int_0^2\int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\,dx\,dy$$

را با استفاده‌از تبدیل $x=u+1/2v$، $y=v$ وتبدیل این انتگرال به‌یک انتگرال روی ناحیه‌ای چون G درصفحهٔ uv، محاسبه کنید.

صفحه ۲۱۴

درمسائل ۵–۱۸، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱۸. $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{4x^2}^{5-x^2}(x-y+1)\,dz\,dy\,dx$

درمسائل ۲۳–۳۸، حجم اشکال و نواحی را بیابید.

۲۸. ناحیهٔ واقع در یک هشتم اول و محدود به‌صفحات مختصات، استوانهٔ $x^2+y^2=4$، و صفحهٔ $x+z=3$.

۲۹. ناحیهٔ واقع دریک هشتم اول که به‌صفحات مختصات، و از بالا به استوانهٔ $x^2+z=1$ و از راست به سهمیوار $y=x^2+z^2$ محدود است. (راهنمایی: نخست نسبت به y انتگرال بگیرید.)

۳۷. ناحیهٔ محصور در بیضیوار

$$(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1$$

۳۹. دامنهٔ انتگرالگیری انتگرال زیر را رسم کنید

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} dz\,dy\,dx.$$

سپس این انتگرال را به‌صورت یک انتگرال مکرر معادل با ترتیبهای زیر بنویسید.

الف) $dy\,dz\,dx$ ب) $dy\,dx\,dz$

پ) $dx\,dy\,dz$ ت) $dx\,dz\,dy$

ث) $dz\,dx\,dy$

صفحه ۲۲۶

۱۳. مطلوب‌است تشکیل یک انتگرال سه‌گانهٔ مکرر برای حجم کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ در مختصات (الف) کروی، (ب) استوانه‌ای، و (پ) قائم.

۲۲. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از پایین به سهمیوار $z=x^2+y^2$، از اطراف به‌استوانهٔ $x^2+y^2=1$، و از بالا به‌سهمیوار $z=x^2+y^2+1$ محدود است.

۲۹. در کاسه‌ای که به‌شکل نیمکره‌ای به‌شعاع ۵ سانتیمتراست، تا ارتفاع ۳ سانتیمتری آب‌ریخته‌ایم. حجم آب درون کاسه را بیابید.

۴۸. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از درون به رویهٔ $\rho=1+\cos\phi$ و از بیرون به کرهٔ $\rho=2$ محدود است.

صفحه ۲۳۲

۲۹. انتگرال

$$\iint \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

را روی ناحیهٔ محصور در یك طوق از پروانهٔ

$$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$$

۴۰. مطلوب‌است حجم ناحیهٔ محدود به‌صفحهٔ $z=0$، استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$، و استوانهٔ $az=a^2-x^2$.

۴۴. مطلوب‌است حجم ناحیهٔ محصور در رویهٔ $\rho=a\sin\phi$ درمختصات کروی.

فصل ۱۹

میدانهای برداری و انتگرالگیری

صفحه ۲۴۰

درمسائل ۹ـ۲۰، انتگرال $f(x,y,z)$ را روی خم مفروض محاسبه کنید.

۱۷. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$

$\mathbf{R}(t)=(t\sin t+\cos t)\mathbf{i}+(t\cos t-\sin t)\mathbf{j},$

$0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$

۱۸. $f(x,y,z)=3z\sqrt{3x^2+y^2+z^2}$

$\mathbf{R}(t)=\mathbf{i}+t\mathbf{k},\quad -1\leqslant t\leqslant 1$

۱۹. $f(x,y,z)=\sqrt{3}/(x^2+y^2+z^2)$

$\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k},\quad 1\leqslant t\leqslant 2$

صفحه ۲۴۷

درمسائل ۹ـ۱۲، مطلوب‌است کاری که نیروی $\mathbf{F}(x,y,z)$ روی مسیرمفروض درجهت افزایش مقدار t انجام می‌دهد.

۱۰. $\mathbf{F}(x,y,z)=2y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$

$\mathbf{R}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+\frac{t}{6}\mathbf{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۱۲. $\mathbf{F}(x,y,z)=6z\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+12x\mathbf{k}$

$\mathbf{R}(t)=(\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}+\frac{t}{6}\mathbf{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

درمسائل ۱۳ـ۱۶، انتگرال شارش میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z)$ را روی خم مفروض محاسبه‌کنید.

۱۴. $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$

$\mathbf{R}(t)=3t\mathbf{j}+4t\mathbf{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

۱۵. $\mathbf{F}(x,y,z)=(x-z)\mathbf{i}+x\mathbf{k}$

$\mathbf{R}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{k},\quad 0\leqslant t\leqslant\pi$

صفحه ۲۴۸

۲۴. مطلوب‌است شار میدانهای برداری

$\mathbf{F}_1(x,y)=2x\mathbf{i}-3y\mathbf{j}$ و $\mathbf{F}_2(x,y)=2x\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$

گذرنده از دایرهٔ

$\mathbf{R}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

صفحه ۲۵۹

درمسائل ۵ـ۱۰، با استفاده از قضیهٔ گرین، گردش درخلاف جهت ساعت و شار برونسو را درمورد میدان $\mathbf{F}$ و خم C بیابید.

۷. $\mathbf{F}(x,y)=(xy+x)\mathbf{i}+(xy-y)\mathbf{j}$

C: مربع محدود به $x=0$، $x=1$، $y=0$، $y=1$

۸. $\mathbf{F}(x,y)=(x^2-y)\mathbf{i}+(x+y^2)\mathbf{j}$

C: مثلث محدود به $y=0$، $x=1$، و $y=x$

با استفاده از یکی از دوصورت قضیهٔ گرین، انتگرالهای خمیده خطی درمسائل ۱۳ـ۱۸ را محاسبه کنید.

سوالات برگزیده درس ریاضی ۲- فنی (هماهنگ)
نیمسال ۳۹۶۲

۱۵. $\oint_C (6y+x)\,dx+(y+2x)\,dy$

C عبارت است از دایرهٔ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$.

۱۷. $\oint_C 2xy^3\,dx+4x^2y^2\,dy$

C عبارت است از ناحیهٔ «مثلثی‌شکل» واقع در ربع اول که به‌محور x ، خط $x=1$ ، و خم $y=x^3$ محدود است.

۱۸. $\oint_C (4x-2y)\,dx+(2x-4y)\,dy$

C عبارت‌است از دایرهٔ $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

صفحه ۲۶۷

۵. مطلوب‌است مساحت بخشی از رویهٔ $x^2-2y-2z=0$ که بالای مثلثی واقع درصفحهٔ xy ومحدود به‌خطوط $x=2$ ، $y=0$ ، و $y=3x$ قرار دارد.

۱۹. مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرال $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ بر رویه‌ای که صفحات $x=0$ و $x=h$ از استوانهٔ $y^2+z^2=a^2$ جدا می‌کنند. h را بزرگتر از ۰ اختیار کنید.

۲۰. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $g(x,y,z)=x^2+y^2$ بر نیمکرهٔ $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

صفحه ۲۶۸

درمسائل ۲۱-۲۶، مطلوب‌است شار میدان برداری $\mathbf{F}$ گذرنده‌از بخشی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ واقع در یک هشتم اول و در جهتی که ازمبدأ دور می‌شود.

۲۵. $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

صفحه ۲۶۹

۳۰. فرض‌کنید S آن بخش از استوانهٔ $y=\ln x$ واقع در یک‌هشتم اول باشدکه تصویر قائمش برصفحهٔ xz مستطیل $R_{xz}: 1\leqslant x\leqslant e,\ 0\leqslant z\leqslant 1$ است. نیز فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار واحدی‌باشدکه بر S عمود ومتوجه بیرون‌صفحهٔ xz است. مطلوب است شار $\mathbf{F}=2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ گذرنده از S و درجهت $\mathbf{n}$.

صفحه ۲۷۷

درمسائل ۱-۱۲، با استفاده ازقضیهٔ دیورژانس، شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از مرز ناحیهٔ D را بیابید.

۵. $\mathbf{F}(x,y,z)=y\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

D: ناحیهٔ واقع در درون‌استوانهٔ توپر $x^2+y^2\leqslant 4$ و بین‌صفحهٔ $z=0$ و سهمیوار $z=x^2+y^2$

۷. $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2\mathbf{i}-2xy\mathbf{j}+3xz\mathbf{k}$

D: ناحیه‌ای که کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ از یک‌هشتم اول جدا می‌کند.

۹. $\mathbf{F}(x,y,z)=2xz\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$

D: گوه‌ای که‌صفحهٔ $z=y$ و استوانهٔ بیضوی $x^2+4y^2=16$ از یک‌هشتم اول جدا می‌کنند.

صفحه ۲۸۴

درمسائل ۱-۶، با استفاده از انتگرال رویه‌ای در قضیهٔ استوکس، گردش میدان $\mathbf{F}$ را روی خم C درجهت مشخص شده بیابید.

۶. $\mathbf{F}=x^2y^3\mathbf{i}+\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

C: مرز دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ واقع‌درصفحهٔ xy ، درخلاف جهت ساعت هرگاه ازبالا نگاه‌کنیم.

۷. فرض‌کنید S ناحیهٔ محدود به بیضی $C: 4x^2+y^2=4$ و واقع درصفحهٔ $z=1$ باشد. نیز فرض کنید $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ و

$$\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}.$$

مطلوب‌است مقدار

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}.$$

صفحه ۲۹۲

درمسائل ۱۱-۲۰، انتگرالها را محاسبه‌کنید.

۱۹. $\int_{(0,1,1)}^{(2,2,1)} 3x^2\,dx+\frac{z^2}{y}\,dy+2z\ln y\,dz$

۲۰. $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y\cos x\,dx+\cos y\sin x\,dy+dz$

۲۳. انتگرال زیر را روی پاره‌خطی که $(0,0,0)$ را به $(0,3,4)$ وصل می‌کند محاسبه کنید

$$\int_C x^2\,dx+yz\,dy+y^2\,dz.$$

صفحه ۲۹۴

۱۴. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای بیضوی که استوانهٔ $x^2+y^2=1$ ازصفحهٔ $x+y+z=1$ جدا می‌کند.

۱۶. مطلوب‌است مساحت ناحیهٔ واقع در بالای صفحهٔ xy که استوانهٔ $x^2+y^2=2ax$ ازمخروط $x^2+y^2=z^2$ جدا می‌کند.

صفحه ۲۹۵

۱۸. سوراخی به‌مقطع مربع و به‌ضلع $2\sqrt{2}$ به‌صورت متقارن درکره‌ای به‌شعاع ۲ ایجاد می‌شود. نشان دهید که مساحت رویهٔ جدا شده برابر است با $16\pi(\sqrt{2}-1)$.

۱۳۹۶/۱۱/۲۵