معادله ترتیب اول : هر معادله به فرم $f(x, y, y') = 0$ باشد معادله مرتبه اول است.

برای حل معادله ترتیب اول آن ها را دسته بندی می کنیم و روش حل هر یک به صورت زیر است :

الف) معادله جدائی پذیر (تفکیک پذیر) : هر معادله ای که در آن بتوان متغیرهای x و y را از یکدیگر جدا کرد معادله تفکیک پذیر نامیده می شود و برای حل آن به طریقه زیر عمل می کنیم

$$f(x, y, y') = 0 \Rightarrow y' = f(x, y) \rightarrow y' = P(x)\,q(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\,q(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int P(x)\,dx$$

مثال : معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

1) $xy' + y = 0$

$$xy' = -y \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-dx}{x}$$

$$y' = \frac{-y}{x} \qquad \ln y = -\ln x + \ln c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \qquad \ln y = \ln \frac{c}{x}$$

$$\frac{-dy}{y} = \frac{dx}{x} \qquad y = \frac{c}{x}$$ جواب عمومی

۲) $y' = \frac{xy+x}{xy+y}$

$y' = \frac{x(y+1)}{y(x+1)}$

$y'y\,(x+1) = x(y+1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y+1)}{y(x+1)}$

$\frac{dy \cdot y}{y+1} = \frac{x \cdot dx}{x+1}$

$\frac{x+1-1}{x+1}\,dx + \frac{y+1-1}{y+1}\,dy = 0$

$\int \left[1 - \frac{1}{x+1}\right] dx + \int \left[1 - \frac{1}{y+1}\right] dy = 0$

$\int dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int dy - \int \frac{1}{y+1}\,dy = 0$

$x - \ln(x+1) + y - \ln y+1 = 0$

۳) $y' + xy + y + x + 1 = 0$

$y' + y(x+1) + x + 1 = 0$

$y' + [x+1][y+1] = 0$

$y' = -(x+1)(y+1)$

$\frac{dy}{dx} = -(x+1)(y+1)$

$\frac{dy}{(y+1)} = -(x+1)\,dx$

$\ln(y+1) = -\frac{1}{2}x^2 + x + C$

$y+1 = e^{-1/2 + x + C} = C_1 e^{-1/2 x^2 - x}$

$y = C_1 e^{-1/2 x^2 - x} - 1$

۴) $e^{x+2y} = y'$

$\frac{dy}{dx} = e^{x+2y}$

$\frac{dy}{dx} = e^{x} \cdot e^{2y}$

$\frac{dy}{e^{2y}} = e^{x} \cdot dx$

$\int e^{-2y} \cdot dy = \int e^{x} \cdot dx$

$-\frac{1}{2} e^{-2y} = e^{x} + C$

۵) $e^{y}dx + x\ln x\, dy = 0$

$e^{y}dx = -x\ln x\, dy$

$\frac{dx}{x\ln x} = \frac{-dy}{e^{y}}$

$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{-dy}{e^{y}}$

$\ln(\ln x) + \ln c = e^{-y}$

$\ln(c\ln x) = e^{-y}$

۶) $y' = \frac{3e^{x}\,tg\,y}{(e^{x}-2)\sec^{2}y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{x}\,tg\,y}{(e^{x}-2)\sec^{2}y}$

$\frac{\sec^{2}y\,dy}{tg\,y} = \frac{3e^{x}\,dx}{e^{x}-2}$

$\ln tg\,y = 3\ln(e^{x}-2) + \ln c$

$\ln(tg\,y) = \ln(e^{x}-2) + \ln c$

$\cancel{\ln}(tg\,y) = \cancel{\ln}\, c(e^{x}-2)$

$tg\,y = c(e^{x}-2)$

۷) $y' = \frac{\sin x}{1-3y^{2}}$ $\quad y(0)=1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{1-3y^{2}}$

$(1-3y^{2})dy = \sin x\,dx$

$\int dy - \int 3y^{2}dy = \int \sin x\,dx$

$y - \frac{3}{3}y^{3} = -\cos x + c$

$y - y^{3} = -\cos x + c$

$\xrightarrow{x=0,\ y=1}$ $\underset{0}{\cancel{1-1}} = -\overset{-1}{\cancel{\cos 0}} + c$

$c = 1$

$\Longrightarrow y - y^{3} = -\cos x + 1$

ب) معادلات قابل تبدیل به معادلات جدائی پذیر :

۱- هر معادله که به فرم $y' = f(ax+by+c)$ باشد با تغییر متغیر زیر قابل تبدیل به یک معادله جدائی پذیر میباشد.

$ax+by+c=u$

$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \quad a+by'=u'$

$by'=u'-a$

$y'=\dfrac{u'-a}{b}$

$\dfrac{u'-a}{b}=f(u)$

$u'=bf(u)+a=F(u)$

$\dfrac{du}{dx}=F(u)$

$\int\dfrac{du}{F(u)}=\int dx$

معادلات زیر را حل کنید.

1) $y'=3x+2y+5$

$3x+2y+5=u \quad \Longrightarrow \quad 3+2y'=u'$

$y'=\dfrac{u'-3}{2} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{u'-3}{2}=u$

$u'=2u+3 \qquad \dfrac{du}{dx}=2u+3$

$\dfrac{du}{2u+3}=dx \qquad \int\dfrac{du}{2u+3}=\int dx$

$\dfrac{1}{2}\ln(2u+3)=x+c \qquad \dfrac{1}{2}\ln(6x+4y+13)=x+c$

۲) $y' = tg(x+y) - 1$

$x+y=u \qquad 1+y'=u'$

$y'=u'-1 \qquad u'-1=u$

$u'-\cancel{1} = tg(x+y)-\cancel{1} \qquad u'=tg(x+y)$

$u'=tg(u) \qquad \frac{du}{dx}=tg\,u$

$\frac{du}{tg\,u}=dx \qquad \int\frac{du}{tg\,u}=\int dx$

$\int \frac{\cos u}{\sin u}\,du=\int dx \qquad Ln|\sin u|=x+c$

$\sin u = e^{x+c}=c_1e^{x} \quad \therefore \quad \sin(x+y)=c_1e^{x}$

۳) $y'=(x+y)^{2} \qquad x+y=u \qquad 1+y'=u'$

$y'=u'-1 \xrightarrow{x+y=u} u^{2}=u'-1$

$u'=u^{2}+1 \qquad \frac{du}{dx}=u^{2}+1$

$\frac{du}{u^{2}+1}=dx \qquad \int\frac{du}{u^{2}+1}=\int dx$

$Arc\,tg\,u = x+c \qquad Arc\,tg(x+y)=x+c$