(۱)

« معادلات دیفرانسیل »

هر معادله به شکل $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{n})=0$ یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n ام نام دارد.

$$y^{n}=f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

مثال : $y'-3xy+4x^{3}=0$, $y^{3}+4xy^{2}-y'=0$

* مرتبهٔ معادله = بزرگترین مرتبهٔ مشتق

درجهٔ معادله = درجهٔ بزرگترین مرتبهٔ مشتق

$(y'')^{2}+3x(y')^{5}-y=0$ درجهٔ ۲ ، مرتبهٔ ۲

$y^{(3)}-4xy'-(y')^{9}=0$ مرتبهٔ ۳ ، درجه ۱

$(y^{(4)})^{5}+y-y''=0$ مرتبهٔ ۴ ، درجهٔ ۵

معادلهٔ خطی : معادلهٔ مرتبهٔ n ام خطی معادله ای به شکل زیر است :

$$a_{n}(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{1}(x)y'+a_{0}(x)y=G(x)$$

$a(x)$ تابعی برحسب x می باشد .

مثال : $(x^{3}+1)y''+4xy'-y=e^{x}$
خطی - مرتبهٔ ۲ - درجهٔ ۱

$y^{2}+4xyy'-y=0 \longrightarrow y+4xy'-1=0$ خطی - درجهٔ ۱ مرتبهٔ ۱

$y^{3}+4xy'y-y^{2}=0 \longrightarrow y^{2}+4xy-y=0$

به دلیل وجود y^{2} غیر خطی است .

جواب یک معادله : معادلهٔ $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ مفروض است . تابع $\varphi(x)$ جواب معادله است ، هرگاه در معادله صدق کند . یعنی :

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))=0$$

واحد زنجان (دانشگاه آزاد) ... دانشکده فنی
(مهندس طاهری)

ثابت اساسی: ثابت های $c_1, c_2, \ldots, c_n$ در یک تابع اساسی می باشند، با شرط اینکه هرگاه قادر به تقلیل آنها باشیم. به عبارت دیگر نتوان تابع را ساده نمود، به شکلی که تعداد ثابت ها کم شود.

مثال:
$$y = c_1 e^x + c_2 e^x + c_3 e^{x^3}$$
$$= (c_1 + c_2) e^x + c_3 e^{x^3} = c_0 e^x + c_3 e^{x^3}$$

$\Leftarrow$ دو ثابت اساسی وجود دارد.

مثال:
$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$\Leftarrow$ دو ثابت اساسی وجود دارد.

برای ساختن معادله دیفرانسیل به تعداد ثابت های اساسی از معادله مشتق می گیریم و ثابت ها را حذف می کنیم.

مثال: در هر مورد معادلهٔ دیفرانسیل مربوط تابع را به دست آورید.

i) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$$\begin{cases} y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ y'' = c_1 \sin x - c_2 \cos x \end{cases} \longrightarrow$$ دستگاه ۲ معادله، ۲ مجهول

که c_1 و c_2 مجهول هستند. پس از محاسبهٔ c_1 و c_2 آنها را در معادله قرار می دهیم (معادلهٔ i)

$\Leftarrow$ راه ساده‌تر حل این مسئله به شکل زیر است:

$$y'' = -(c_1 \sin x + c_2 \cos x) \Rightarrow y'' = -y \Rightarrow \underline{y'' + y = 0}$$

روش کلی:

$$\begin{matrix} \times \sin x \\ \times \cos x \end{matrix} \begin{cases} c_1 \cos x - c_2 \sin x = y' \\ -c_1 \sin x - c_2 \cos x = y'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 \sin x \cos x - c_2 \sin^2 x = y' \sin x \\ -c_1 \sin x \cos x - c_2 \cos^2 x = y'' \cos x \end{cases}$$

$$-c_2 = y'' \cos x + y' \sin x \longrightarrow \boxed{c_2 = -y'' \cos x - y' \sin x}$$

$$c_1\cos^2x - c_2\sin x\cos x = y'\cos x$$
$$c_1\sin^2x + c_2\sin x\cos x = -y''\sin x$$

$$c_1 = y'\cos x - y''\sin x$$

حال مقادیر c_1 و c_2 را در معادلهٔ اصلی قرار می‌دهیم.

$$y = y'\sin x\cos x - y''\sin^2x - y''\cos^2x - y'\sin x\cos x$$
$$y = -y''(\sin^2x+\cos^2x) = -y'' \Rightarrow y = -y''$$
$$\Rightarrow \boxed{y+y''=0}$$ دو ثابت

مثال: $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} \longrightarrow y = c_2e^x + c_3e^{-x}$

$$\begin{cases} y' = c_2e^x - c_3e^{-x} \\ y'' = c_2e^x + c_3e^{-x} \end{cases} \Rightarrow y''=y \Rightarrow y''-y=0$$

مثال: $y = c_1x + c_2x^3$

$$\begin{cases} y' = c_1 + 3c_2x^2 \\ y'' = 6c_2x \end{cases} \longrightarrow c_2 = \frac{y''}{6x}$$

$$c_1 = y - \frac{1}{2}y''x$$

$$\Rightarrow y = \left(y - \frac{1}{2}y''x\right)x + \frac{y''}{6x}\times x^3$$

$$y = xy - \frac{1}{2}y''x^2 + \frac{1}{6}y''x^2 = xy - \frac{1}{3}y''x^2$$

$$\Rightarrow y + \frac{1}{3}y''x^2 = 0$$ خطی، مرتبهٔ دوم، درجهٔ دوم

مثال: $x^2 - y^2 = c^2$

$$2x - 2yy' = 0 \Rightarrow yy' - x = 0$$ غیرخطی، مرتبهٔ ۱، درجهٔ ۱

تمرین: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{x^2}$