هاورد و. ایوز

آشنایی با

تاریخ ریاضیات

جلد اول

(ویرایش دوم)

ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

آشنایی با

تاریخ ریاضیات

جلد اول

(ویرایش دوم)

هاورد و. ایوز

ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

An Introduction to the History of Mathematics
Howard W. Eves
Fifth Edition
Saunders College Publishing, 1983

آشنایی با تاریخ ریاضیات
جلد اول
تألیف هاورد و. ایوز
ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ دوم ۱۳۶۹ (با تجدیدنظر کلی)
چاپ چهارم ۱۳۷۹
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی: مهدی
لیتوگرافی: رحیمی
چاپ : مروی

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

Eves, Howard Whitley
ایوز، هوارد ویتلی، ۱۹۱۱ -
آشنایی با تاریخ ریاضیات / تألیف هاورد و. ایوز؛ ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل. — [ویرایش ۲]. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹ -
۲ ج. : مصور، نقشه، جدول، عکس، نمودار. — (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۵۵۲. ریاضی، آمار، و کامپیوتر ۷۱)
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: An introduction to the history of mathematics.
واژه‌نامه.
کتابنامه.
چاپ چهارم: ۱۳۷۹
ISBN 964-01-8043-2
۱. ریاضیات — تاریخ. ۲. ریاضیات — مسائل، تمرینها و غیره. الف. وحیدی‌اصل، محمدقاسم، ۱۳۲۶ - ، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
QA۲۱/ ۹الف۵آ
۱۳۶۹
۵۱۰/۹
کتابخانهٔ ملی ایران
۷۰ـ۴۷۹/۷۴م

فهرست

عنوان | صفحه

عنوان	صفحه
۶–۹ پاپوس	۱۸۳
۶–۱۰ شارحین	۱۸۶
مطالعهٔ مسئله‌ای	۱۸۷
۱.۶ اندازه‌گیریهای آریستارخوس و اراتستن	۱۸۷
۲.۶ در باب کره و استوانه	۱۸۸
۳.۶ مسئلهٔ تاج	۱۸۹
۴.۶ گزن وسالینون	۱۹۰
۵.۶ قضیهٔ وترشکسته	۱۹۱
۶.۶ خاصیت کانون-هادی	۱۹۲
۷.۶ تماسها	۱۹۳
۸.۶ مسائلی از آپولونیوس	۱۹۴
۹.۶ جدول اوتار بطلمیوس	۱۹۴
۱۰.۶ تصویر گنجنگاشتی	۱۹۵
۱۱.۶ مسائلی از هرون	۱۹۶
۱۲.۶ دستگاه معادلات همزمان	۱۹۸
۱۳.۶ مسائلی از «آنتولوژی یونانی»	۱۹۹
۱۴.۶ مسئلهٔ گونه‌ها از «آنتولوژی یونانی»	۲۰۰
۱۵.۶ دیوفانتوس	۲۰۰
۱۶.۶ مطالبی از نظریهٔ اعداد «آریثمتیکا»	۲۰۱
۱۷.۶ مسائلی از پاپوس	۲۰۲
۱۸.۶ قضایای مربوط به‌مرکز ثقل	۲۰۳
۱۹.۶ رسم بیضی با پرگار بازودار	۲۰۴
۲۰.۶ قضیهٔ منلائوس	۲۰۴
۲۱.۶ مطالب دیگری دربارهٔ میانگینها	۲۰۵
عنوان مقاله	۲۰۷
کتابنامه	۲۰۷
فصل ۷ ریاضیات چینی، هندی، و عربی	۲۰۹
چین	۲۰۹
۷–۱ منابع و ادوار	۲۰۹
۷–۲ از چو تا تانگ	۲۱۰
۷–۳ از تانگ تا مینگ	۲۱۲
هند	۲۱۶

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

مایهٔ خوشوقتی است که با انتشار این مجلد، که از ویرایش پنجم متن اصلی، آخرین ویرایش انگلیسی آن، برگردانده شده ترجمهٔ کامل آشنایی با تاریخ ریاضیات در اختیار مشتاقان قرار داده می‌شود. دراین ویرایش تغییرات قابل‌ملاحظه‌ای به‌عمل آمده که اهم آنها افزوده شدن تعدادی عناوین مقاله‌های دانشجویی در پایان هر فصل و روزآمدکردن اطلاعات علمی، مثلا در خصوص اعداد متحابه و جز آن است. ترجمه پس از تطبیق با این آخرین ویرایش مجدداً ویراستاری و حروفچینی شده است.

درترجمهٔ کتاب، درعین پایبندی به‌امانت، روانی وسلامت جمله‌ها مد نظر بوده‌است. ترجمهٔ عناوین‌کتابها در متن و عناوین اصلی در پانوشت آمده‌اند. توضیحات مختصری، هر جاکه به‌نظر مترجم لازم آمده در داخل علامت [ ] در متن یا پانوشت افزوده شده است. در نحوهٔ نوشتن اسامی کتابها و اشخاص ومحلها به‌فارسی، از دایرةالمعارف فارسی بهره‌گرفته شده است. در ضبط نامها و اصطلاحات چینی و هندی از راهنمای مختصری که در متن اصلی موجود بوده استفاده شده است. در هر مورد درصورت وجود شکلی مصطلحتر یا مقبولتر در فارسی، از آن استفاده شده است.

دراین ویرایش جدید، برخلاف ویرایش‌پیشین، جوابهای مسائل، واژه‌نامه، وفهرست راهنما آورده شده، وبدین‌ترتیب با دادن هویتی مستقل به آن از بخش دوم، که درمجلدی جداگانه قبلا انتشار یافته، خوانندگانی را که تنها خواهان آشنایی با تاریخ ریاضیات تا عصر رنسانس هستند، برآورده می‌کند. ولی از آنجا که به‌نظر مترجم مجلد اول در حکم مقدمه و مجلد دوم در حکم مؤخره‌ای برای آشنایی با تاریخ ریاضیات است، این مجلد زمانی جوابگوی نیازهای خوانندگان خواهد بود که همراه با مجلد دوم مورد استفاده قرار گیرد.

محمدقاسم وحیدی‌اصل

پیشگفتار مؤلف

این ویرایش پنجم شامل تعداد زیادی اضافات و تغییرات جزئی و کلی است.

اضافات و تغییرات جزئی عمدتاً شرح و تفصیل مطالب تاریخی و روزآمدکردن آنهاست(نظیر آخرین اطلاعات دربارهٔ اعداد تام وحل حدس مشهور چهاررنگ در سال ۱۹۷۶). دربین تغییرات عمده می‌توان ازاینها نام برد (۱) اضافه‌کردن‌چندین‌بخش جدید (شامل دستگاه‌متری و بخشی دربارهٔ «ریاضی جدید» وبورباکی)، (۲) بازنویسی و مبسوط گردانیدن قسمت‌عمدهٔ بخش دوم کتاب،(۳) افزایشی عمده دراطلاعات مربوط به‌زندگینامهٔ ریاضیدانان متأخر، (۴) افزایش بازهم بیشتر تعداد داستانها وماجراهای‌جالب‌از زندگی ریاضیدانان‌بزرگ، (۵) افزوده‌شدن ده دوازده پیکره وتصویر، (۶) مفصل‌کردن‌مطالعه‌های مسئله‌ای و افزودن برآنها، (۷) افزوده شدن فهرستی از عناوین مقاله‌ها به هرفصل‌که ممکن است به‌عنوان مقاله‌های دانشجویی به‌کار آیند.

جای مسرت‌خاطر است که یك‌بار دیگر مراتب حقشناسی خود را از استقبال گرمی که هم ازجانب معلمان مدارس و هم ازجانب استادان دانشگاه ازاین‌کتاب به عمل آمده است، ابرازدارم. استفادهٔ‌گسترده ازمطالعه‌های مسئله‌ای برای آشنا کردن دانشجویان‌جوان با تحقیقات سادهٔ ریاضی به‌ویژه مایهٔ خوشحالی من است.

بسیاری از مدرسان مدارس و دانشگاهها از این مطالب برای روح دادن و تکمیل دروس‌مختلف نیز استفاده‌کرده‌اند، و عدهٔ زیادی ازدانش‌آموزان دبیرستانها این‌مطالب را در نمایشگاههای ریاضی دبیرستانها مورد استفاده قرار داده‌اند. از آنجا که مسئله‌ها قلب ریاضیات‌اند*، دروسی صرفاً متشکل از مسئله منحصراً برپایهٔ مطالعه‌های مسئله‌ای این کتاب عرضه شده است.

---

* نگاه کنید به پ. ر. هالموس، «قلب ریاضیات» در
The American Mathematical Monthly 87 (1980): 519–24

میل دارم مراتب تشکرخودرا به گریگوریو جی. فوئنتس[1] ازدانشگاه مین[2]، و لیپ ا. جانسن[3] از دانشگاه کارولینای شمالی[4]، و جانی و. لات[5] از دانشگاه مونتانا[6] که هریك از آنها تذکرات سودمندی برای ویرایش جدید دادند، ابراز دارم، و به خصوص از رابرت م. تامس[7] به خاطر یاوریهای توأم باصبرش سپاسگزارم. وبازهم تشکرات صمیمانهٔ خود را از همهٔ کسانی که از کتاب استفاده کرده‌اند، به‌ویژه آنهایی که با صرف‌وقت و تحمل زحمت جملات محبت‌آمیزی دربارهٔ آن نوشته‌اند، و پیشنهادهایی برای اصلاحات بیشتر داده‌اند، اعلام می‌دارم. هر ویرایش جدید کتاب عمدتاً از گردآوری دقیق این پیشنهادها سرشته شده است.

فاکس‌هالو[8]، لوبك[9]، مین

تابستان ۱۹۸۱

ه.ا.

---

1. Gregorio J. Fuentes
2. University of Maine
3. Phillip E. Johnson
4. University of North Carolina
5. Johnny W.Lott
6. University of Montana
7. Robert M. Thomas
8. Fox Hollow
9. Lubec

مقدمه

این کتاب با اغلب کتابهای تاریخ ریاضی موجود تفاوت دارد، زیرا اثری نیست که فقط برای قسمت مراجع [در کتابخانه‌ها] تهیه شده باشد؛ بلکه کوششی است برای معرفی تاریخ ریاضیات به صورتی که قابل استفاده در کلاسهای درس دورهٔ لیسانس باشد. بنابراین، علاوه برروایت تاریخ، از ابزارهای آموزشی هم برای علاقه‌مند ساختن و به میدان آوردن دانشجو استفاده شده است. همچنین، با اعتقاد به اینکه درس تاریخ ریاضیات باید در وهلهٔ اول یك درس ریاضی باشد، کوشش شده است تا مقدار قابل ملاحظه‌ای ریاضیات اصیل در آن گنجانده شود.

عمده‌ترین ابزارهای آموزشی و ریاضی در این کتاب، «مطالعه‌های مسئله‌ای» هستند که درخاتمهٔ هر فصل آمده‌اند. هر مطالعهٔ مسئله‌ای شامل تعدادی مسئلهٔ وابسته وسؤالاتی راجع به برخی از قسمتهای مطالب آن فصل است. به‌نظرمن با طرح تعدادی از این مطالعه‌های مسئله‌ای در کلاس و واگذار کردن بقیه برای حل در منزل، این درس برای دانشجو ملموستر و پرمعنی‌تر خواهد شد و دانشجو بربرخی ازمفاهیمی که اهمیت تاریخی دارند، بیشتر احاطه خواهد یافت. به‌عنوان مثال، درك و فهم دستگاههای عددی به‌بهترین صورت، جز از طریق کارکردن عملی با این دستگاهها حاصل نخواهد شد. به جای اینکه صرفاً به دانشجو بگوییدکه یونانیان باستان معادلات درجهٔ دوم‌را به‌طریق هندسی حل کرده‌اند، از او بخواهیدکه چندتایی ازاین معادلات را به روش یونانی حل کند؛ با این عمل وی نه تنها روش یونانی را به طور کامل خواهد فهمید، بلکه دستاوردهای ریاضیات یونانی را هم عمیقتر درك خواهد کرد. بدین‌ترتیب امید می‌رود که دانشجو قسمت اعظم تاریخ ریاضیات و همچنین نکات جالبی درریاضیات را ازطریق این مطالعه‌های مسئله‌ای بیاموزد. برخی ازمطالعه‌های مسئله‌ای به مسائل و روشهایی‌که ازنظر تاریخی مهم‌اند، می‌پردازند؛ بعضی دیگرمطالب پرارزشی دراختیار معلمین آیندهٔ دبیرستانها و مدارس عالی می‌گذارند؛ برخی دیگر هم صرفاً جنبهٔ تفریحی دارند، و بسیاری از آنها می‌توانند منشأ مقاله‌های تحقیقی کوتاه توسط دانشجویان شوند.

البته، تعداد مطالعه‌های مسئله‌ای بیش از آن است که امکان طرح همهٔ آنها در یك یا دو نیمسال مقدور باشد، و از لحاظ دشواری نیز باهم تفاوت دارند. این موضوع به‌معلم امکان می‌دهد که مسائلی را که مناسب استعداد دانشجویانش می‌بیند، انتخاب کند و تکالیف را سال به سال تغییر دهد. در پایان کتاب مجموعه‌ای از راهنماییها برای حل بسیاری از مطالعه‌های مسئله‌ای وجود دارد.

برخی از مدرسان تاریخ ریاضیات مایل‌اند نوشتن مقاله‌هایی را به دانشجویان خود واگذار کنند. بنابراین در پایان هر فصل، بلافاصله بعد از مطالعهٔ مسئله‌ای، تعدادی عنوان مقاله فهرست شده که به مطالب مندرج در همان فصل مربوط می‌شوند. این عنوانها صرفاً جنبهٔ پیشنهادی دارند. هرمدرسی می‌تواند فهرست جامعتری ازعناوین ازاین نوع را برای خود تهیه کند. عنوان مقاله‌ای که به دانشجو واگذار می‌شود باید مستلزم آن باشد که وی مطالبی بیش از متن کتاب را مطالعه کند و خود را نیازمند آن ببیند که کندوکاوی در کتبی که فهرستشان در کتابنامهٔ فصل مربوطه داده شده‌اند، بنماید.

مسلم است که تاریخ یك موضوع را دست کم بدون آشنایی اجمالی باخود موضوع نمی‌توان به طور شایسته‌ای درك کرد.* از این‌رو کوشش به عمل آمده است که، به خصوص در فصول نهایی که مطالب پیشرفته‌ترند، مطالب مورد بحث توضیح داده‌شوند. بنابراین دانشجوی‌مبتدی می‌تواند علاوه‌بر تاریخ ریاضیات، مقدار نسبتاً زیادی ریاضیات از مطالعهٔ این کتاب بیاموزد. موضوعات تاریخی به ترتیب گاهشناختی عرضه شده‌اند، و خواننده درخواهدیافت که اطلاع ازحساب معمولی و جبر، هندسه، و مثلثات دبیرستانی عموماً برای فهم نه فصل اول کافی است. دانستن مقدمات هندسهٔ تحلیلی در صفحه برای فصل ۱۰ ضروری است و آگاهی برمفاهیم اولیهٔ حسابان برای فصول باقیماندهٔ از ۱۱ تا ۱۵ مورد نیاز است. امیدواریم که هر مفهوم یا مبحثی که در این کتاب ظاهر می‌شود و ماهیت پیشرفته‌تری دارد به حدکافی در جایی که معرفی شده است، توضیح داده شده باشد. البته بهتراست که دانشجو در ریاضیات تاحدودی خبرگی داشته باشد، اما اینکه فصلهای نهم، دهم، یازدهم یا همهٔ پانزده فصل تدریس شوند به وقت کلاس وآمادگی قبلی دانشجویان بستگی دارد.

پیداست که پرداختن به همهٔ تاریخ ریاضیات ازعهد باستان تا اعصارجدید تنها در یك درس نیمسالی با سه ساعت درس در هفته آسان نیست؛ زیرا چنین‌کاری مستلزم این است که دانشجو مقداربسیار زیادی از مطالب را شخصاً مطالعه کند واز قسمتهای مربوط

---

* بالعکس جالب و در خور ذکر است که درك درست هرشاخه‌ای از ریاضیات بدون آشنایی با تاریخ این موضوع غیرممکن است؛ زیرا ریاضیات عمدتاً مطالعهٔ اندیشه‌هاست، و فهم صحیح اندیشه‌ها بدون تحلیل سرچشمه‌های آنها مقدور نیست. مثال بسیار واضح در این مورد، مطالعهٔ هندسهٔ نااقلیدسی است. گفتهٔ ج.و.ل. گلیشر (J.W.L.Glaisher) بجاست که «من یقین دارم هیچ موضوعی بیشتر از ریاضیات از تلاش برای جدا کردن آن از تاریخش آسیب نمی‌بیند».

به مسائل تقریباً به‌طور کامل چشم‌پوشی نماید. وضعیت مطلوب، این است که درسی در این موضوع به مدت یك سال ارائه شود که در نیمسال اول (هشت فصل اول) یا بخش ۱ [جلد ۱ ترجمه] را همراه با گزیده‌هایی از فصول ۹، ۱۰، ۱۱ شامل شود، ودر نیمسال دوم شامل بخش۲ [جلد ۲ ترجمه] یا مطالب باقیمانده باشد و دانشجویان پیشرفته و دانشجویان رشتهٔ ریاضی در هردو ترم ثبت‌نام کنند. دانشجویان مبتدی و کسانی که در آینده معلم ریاضی در دبیرستان می‌شوند احتمالا فقط در نیمسال اول ثبت نام می‌نمایند.

تاریخ ریاضیات آن‌چنان گسترده است که حتی در دونیمسال، فقط آشنایی اجمالی با آن امکان‌پذیر است. دانشجوی علاقه‌مند طالب مراجعه به‌آثار دیگر خواهد شد. از این‌رو، به هرفصل، کتابنامه‌ای منضم شده است که مربوط به مطالب آن فصل است. یك کتابنامهٔ عمومی، که بلافاصله بعد از فصل آخر آمده است، تقریباً برای همهٔ فصلها به‌کار می‌آید. باید توجه شود که این کتابنامه، هرچندکه گسترده است، ادعای کمال ندارد و صرفاً منظور آن است که نقطهٔ شروعی باشد برای یافتن مطالب بیشتر. تنها به معدودی مأخذ ادواری اشاره شده است، اما منبعی عالی از چنین مآخذی درانتهای کتابنامهٔ عمومی دیده می‌شود؛ این نوع مآخذ فراوان‌اند ودانشجوی جستجوگر در یافتن آنها مشکلی نخواهد داشت؛ مآخذی که در اینجا داده شده‌اند عموماً در دسترس و به زبان انگلیسی هستند.

بخشهایی از مطالب فصول نهایی این کتاب از هاورد ایوز و س. و. نیوسام، آشنایی با مبانی و مفاهیم اساسی ریاضیات[1]، چاپ تجدید نظر شده، اقتباس شده‌اند.

---

1. Howard Eves and C.V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, revised edition, Holt, Rinehart and Winston, 1965.

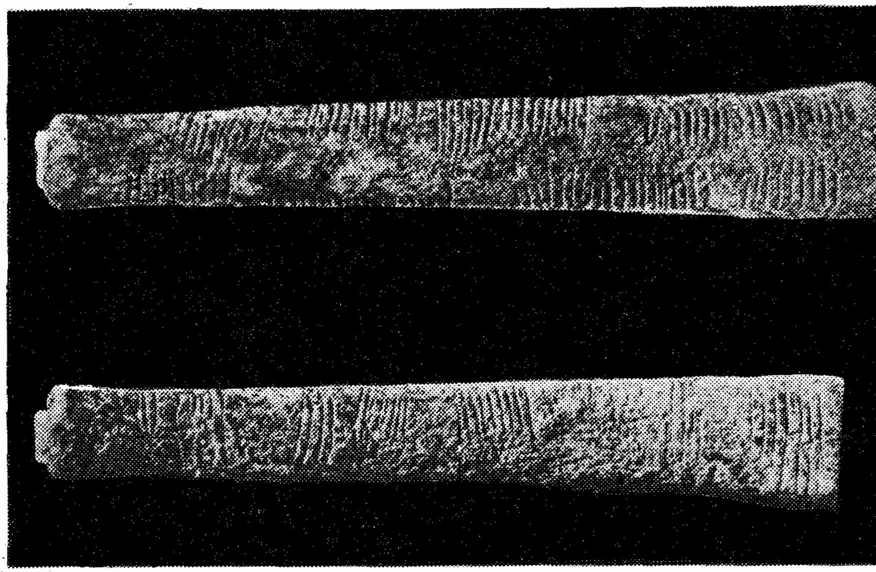
۱

دستگاههای عددنویسی

۱ـ۱ شمارشهای ابتدایی

مفهوم عدد و فرایند شمارش به‌قدری پیش از تاریخ مضبوط تکوین یافته که کیفیت این تکوین تاحدود زیادی حدسی است. با این حال، تصور چگونگی ظهور احتمالی آن، دشوار نیست. می‌توان گفت که بشر، حتی در قدیمیترین اعصار، درکی از عدد داشته، یعنی دست‌کم مفهوم بیشی و کمی را وقتی که اشیایی به‌گروه کوچکی اضافه یا از آن برداشته می‌شدند، درك می‌کرده است؛ زیرا مطالعات نشان داده‌اند که بعضی حیوانات از این درك برخوردارند. با تکامل تدریجی جامعه، شمارشهای ساده ضروری شد. هرقبیله باید می‌دانست که چند عضو و چند دشمن دارد، وهرفرد باید می‌دانست که آیا گلهٔ گوسفندانش درحال‌کاهش است یا نه. شاید قدیمیترین راه‌نگهداشتن حساب، نوعی روش سادهٔ چوبخط بوده که درآن ازاصل تناظر یك‌به‌یك استفاده می‌شده است. به‌عنوان مثال، در ضبط شمارهٔ گوسفندان برای هر گوسفند یك انگشت تا می‌شده است. نگهداشتن حساب با دسته‌کردن سنگریزه یا چوب، با کشیدن شیارهایی روی گل یا سنگ، باکندن دندانه‌هایی بر یك قطعه چوب، یا زدن گرههایی بریك نخ نیز میسر بود. ازاین‌رو، شاید بعدها، ترکیبی از اصوات زبانی به عنوان یك چوبخط صوتی در قبال شمارهٔ اشیای موجود در یك گروه کوچك پدیدآمده است. و زمانی بعدتر، بابهبودکارنوشتن، ترکیبی ازعلایم برای نمایش این اعداد، تکوین یافته‌اند. این سیرتکوین تخیلی را گزارشهای مطالعات انسان‌شناسان دراقوام بدوی امروزی تأیید می‌کند.

در مراحل اولیهٔ دورهٔ شمارش شفاهی، مثلا برای دو گوسفند و دو مرد از اصوات



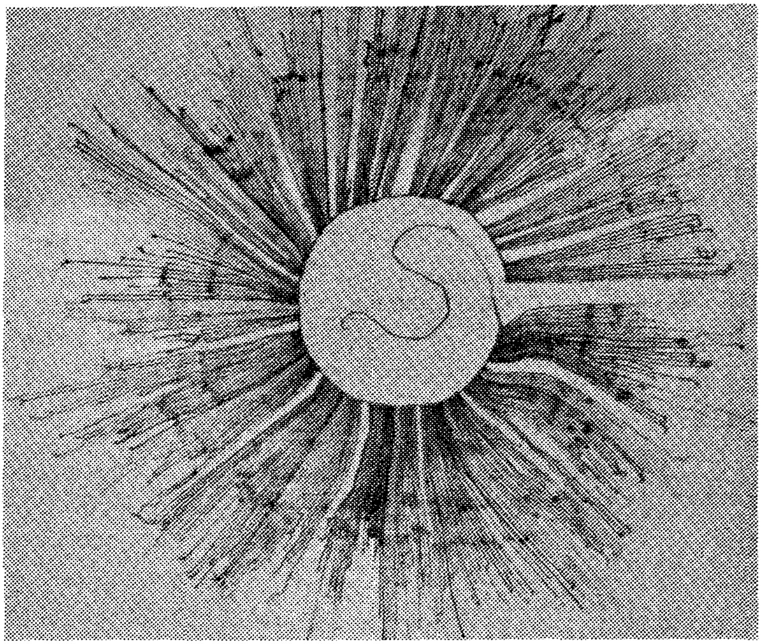
دو منظر از استخوان ایشانگو[1] که متجاوز از ۸۰۰۰ سال قدمت دارد و در ایشانگو، برساحل دریاچهٔ ادوارد[2] در زئیر (کنگو) پیدا شده و اعـدادی را نشان می‌دهد که با کندن دندانه‌هایی براستخوان ثبت گردیده‌اند (دکتر دو هاینتسلین[3]).

(کلمات)مختلف استفاده‌می‌شده‌است. (مثلاً، در زبـان انگلیسی، ترکیبهای تیم اسبها[4]، یك جفت گاو[5]، یك زوج کبك[6]، یك جفت کفش[7] را درنظر بگیرید.) تجرید خاصیت مشترك دو، ازطریق نمایش آن با صوتی که مستقل از هرتداعی مشخص تلقی شود، احتمالا مدت زیـادی طول کشیده است. کلمـات عددی امـروزی، به احتمـال قـوی بدواً اشاره به مجموعه‌هایی ازبرخی اشیای مادی مشخص داشته‌اند، اما این پیوندها، بجز درموردآنکه شاید پنج و دست را به‌هم مربوط می‌کند، اکنون برما نامعلوم است.

۱ـ۲ پایهٔ اعداد

وقتی انجام شمارشهای وسیعتر لازم گـردید، لازم بود عمل شمارش به صورت منسجمی درآید. این کار با مرتب‌کردن اعداد در گروههای پایه‌ای مناسب انجام شد کـه اندازهٔ گروهها عمدتاً با عمل تطابق به کارگرفته شده معین می‌گردید. به بیانـی ساده‌تر، روش مزبور چنیـن بود: عددی مانند b به عنوان پایهٔ شمارش (که مبنا یا مقیاس نیز خوانـده می‌شود) انتخاب می‌شد و نامهایی به اعـداد ۱، ۲، ...، b داده می‌شد. سپس نامهای اعداد

1. Ishango 2. Edward 3. Dr. de Heinzelin 4. team of horses
5. yoke of oxen 6. brace of partridge 7. pair of shoes



یك کیپوی[۱] سرشماری بومیان پـرو که ثبت اعداد را به‌کمك گرههایی برنخ نشان می‌دهـد. گرههای بزرگتر مضاربی از گرههای کوچکترند و رنگ نخ، نر را از ماده متمایز می‌کند. (مجموعهٔ موزهٔ انسان‌شناسی[۲]، پاریس.)

بزرگتر از b، اساساً با ترکیب نامهای اعدادی که قبلا انتخاب شده بود، تعیین می‌شد.

از آنجا که انگشتان انسان چنین وسیلهٔ بسیار آسانی را برای تطابق دراختیارقرارمی‌دهد، تعجب‌آور نیست که نهایتاً ۱۰ درغالب موارد به عنوان پایهٔ b انتخاب شده است. بـرای مثال، کلمه‌های عددی امروزی انگلیسی را در نظـر بگیرید که براساس انتخاب ۱۰ به عنوان پایه ساخته شده‌اند. ما اسامی خاص *one*، *two*،...، *ten* را بـرای اعداد ۱،۲،...، ۱۰ داریم. وقتی به ۱۱ می‌رسیم، می‌گوییـم *eleven*، که بنا بـه گفتهٔ زبانشناسان از *ein lifon* به معنی «یکـی باقیمانـده»، یا یك روی ده، مشتق شده است. بـه طـور مشابه، *twelve* از *twe lif* به معنی «دو روی ده» گرفته شده است. پس‌ازآن داریم، *thirteen* «سه و ده»، *fourteen* «چهار و ده»، تـا *nineteen* «نه و ده». سپس *twenty* (*twe-tig* یا «دو ده»)، *twenty-one* «دو ده و یك» و غیره می‌آیند. گفته می‌شود که کلمهٔ *hundred* در اصل مشتق از واژه‌ای است که به معنی «ده برابر» (ده) می‌باشد.

---

۱. quipu وسیله‌ای که از یك نخ اصلی و تعدادی نخهای الوان کوچکتر ساخته می‌شد و بومیان پرو با زدن گرههایی برآن، ازآن برای انجام محاسبات استفاده می‌کردند. ــم.

2. Musee de L’Homme

شواهـدی وجود داردکه ۲،۳، و ۴ به عنوان پایه‌هـای عددی اولیه مورد استفاده بوده‌اند. برای مثال روش شمارش برخی از بومیان کوئینزلند[1] چنین است: «یك، دو، دو و یك، دو دو، خیلی» وبعضی‌ازپیگمه‌های افریقا ازاصوات *a*،*oa*،*ua*،*oa-oa*،*oa-oa-a*، و*oa-oa-oa* برای شمارش ۱،۲،۳،۴،۵،و۶ استفاده می کنند. قبیله‌ای از تی‌یرا دل فوئگو[2] برای نامهای چندعدد نخستین، پایهٔ ۳ را دارند و بعضی قبایل آمریکای جنوبی نیـزاز ۴ استفاده می کنند.

همچنانکه انتظـار می‌رود، مقیاس پنج پنجی، یا دستگاه عددی به مبنای ۵، اولیـن مقیاسی بودکه به طـور وسیعی مورد استفاده واقع شد. در حال حاضر نیـز بعضی قبایل آمریکای جنوبی با دست می‌شمارند: «یك، دو، سه، چهار، دست، دست و یك»، و الی آخر. یوکاقیر[3]های سیبری از مقیاس مرکبی بـرای شمارش استفاده می کنند «یك، دو، سه، سه و یك، پنج، دوسه، یکی بیشتر، دوچهار، ده یکی کم، ده». درتقویمهای دهقانی آلمان تاحدود سال ۱۸۰۰ از مقیاس پنج پنجی استفاده می‌شد.

همچنین شواهدی در دست است که احتمالا ۱۲ به عنوان پایـه در دوره‌های پیش از تاریخ، عمدتاً دراندازه گیریها، مورد استفاده بوده است. این پایه ممکن است به خاطر تعداد تقریبی ماههای قمری در یك سال، یا شاید به دلیل اینکه ۱۲ دارای مقسوم‌علیه‌های زیادی است، مطرح شده باشد. به هرصورت، ۱۲ را به عنوان تعداد اینچهای موجود در یك فوت، اونسهای یك‌پوند قدیم، پنیهای یك شیلینگ، تقسیم بندی ساعتها، وتعداد ماههای سال داریم، و از کلمات دوجین و قراص[4] به عنوان واحدهای بالاتر استفاده شده است.

مقیـاس بیست بیستی، یا دستگاه اعداد به مبنای ۲۰، به طور وسیعی به‌کار می‌رفته و یادآور روزهای پابرهنگـی انسان است. این مقیاس را اقوام سرخ‌پوست آمـریکا به‌کار می‌بـردند و شناخته‌شده‌ترین موردآن، دستگاه عـددی کاملا پیشرفتهٔ قوم مایاست. آثاری از وجود پایهٔ ۲۰، که ریشهٔ سلتی[5] دارنـد، درکلمات فرانسوی *quatre-vingt* [چهار بیست] بـه جای *huitante* [هشتاد] و *quatre-vingt-dix* [چهـار بیست ـ ده] به جای *nonante* [نود] دیده می‌شود. چنیـن اثراتی در زبانهای گیلی[6]، دانمارکی[7]، و ویلزی[8] نیز یافت می‌شود. گرینلندیها[9] از عبارت «یك مرد» به‌معنی ۲۰، «دو مرد» به معنی ۴۰، و الی آخر، استفاده می کنند. در زبان انگلیسی کلمهٔ بسیار رایج *score* هم به معنی چوبخط و هم به معنی گروه بیست‌تایی را داریم.

مقیاس شصتگانی، دستگاه عددی به مبنای ۶۰ مورد استفادهٔ بـابلیهای باستان بوده است وهنوزهم دراندازه گیری زمان و زوایا برحسب دقیقه و ثانیه به‌کار می‌رود.

۱ـ۳ دستگاه عددی نوشتاری

علاوه‌براعداد لفظی، **اعداد انگشتی** زمانی به‌طور وسیع مورد استفاده بوده‌انـد. درواقع،

---

1. Queensland 2. Tierra del Fuego 3. Yukaghir 4. gross
5. Celtic 6. Gaelic 7. Danish 8. Welsh 9. Greenland

نمایش اعداد به وسیلهٔ وضعیتهای مختلف انگشتان و دستها، احتمالا قدمتی بیش از علایم عددی یا نامهای عددی دارد. مثلا، علایم نوشتاری برای ۱، ۲، ۳، و ۴ همیشه عبارت از تعداد مناسبی از پاره‌خطهای قائم یا افقی بودند که تعداد انگشتهای بلند شده یا کشیده شده را نمایش می‌دادند، وکلمهٔ دیجیت (به معنی انگشت در لاتین) برای اعداد ۱ تا ۹ نیز از همان منشأ آمده است.

به مرور زمان، اعداد انگشتی برای دربرگرفتن بزرگترین اعدادی که در داد و ستدهای بازرگانی مطرح می‌شدند، گسترش یافتندودر آغازقرون وسطی درسراسرجهان به‌کارمی‌رفتند. درمرحلهٔ نهایی این تحول، اعداد ۱، ۲، ...، ۹و۱۰، ۲۰، ...، ۹۰ روی دست چپ، و اعداد ۱۰۰، ۲۰۰، ...، ۹۰۰ و ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ...، ۹۰۰۰ روی دست راست نمایش داده می‌شدند. بدین طریق، هرعدد تا ۱۰۰۰۰ با استفاده از دو دست قابل‌نمایش بود. تصاویری از این اعداد انگشتی درکتابهای حساب متأخرتر داده شده‌اند. به عنوان مثال، روی دست‌چپ عدد ۱ با تاکردن جزئی انگشت کوچك نمایش داده می‌شد، ۲ با تاکردن جزئی انگشت‌کوچك و انگشت حلقه، ۳ با تاکردن جزئی انگشت‌کوچك، حلقه، و وسطی، ۴ با تاکردن انگشتهای وسطی و حلقه، ۵ با تاکردن انگشت وسطی، ۶ با تاکردن انگشت حلقه، ۷ با تاکردن‌کامل انگشت‌کوچك، ۸ با تاکردن‌کامل انگشتهای‌کوچك وحلقه، و ۹ با تاکردن کامل انگشتهای کوچك، حلقه، و وسطی.

اعداد انگشتی دارای این مزیت بودند که براختلافات زبانی غالب می‌آمدند، اما نظیر اعداد صوتی استمرار نداشتند و برای انجام محاسبات مناسب نبودند. قبلا از به‌کارگیری‌نشانه‌هاودندانه‌ها به‌عنوان‌راههای اولیهٔ ضبط‌اعداد یادکرده‌ایم. احتمالا نخستین کوششهای بشر را برای نوشتن‌باید درچنین تدابیری جستجو کرد. به‌هرصورت، دستگاههای اعداد نوشتاری مختلف، تدریجاً از این تلاشهای اولیه برای ضبط ماندگار اعداد صوتی پدیدار شده‌اند. هرعدد نوشتاری یك **شمار** نامیده می‌شود و ما اکنون توجه خود را به دسته‌بندی ساده‌ای از دستگاههای شمار اولیه معطوف می‌کنیم.

۱ـ۴ دستگاههای گروه‌بندی ساده

شاید تقریباً قدیمیترین دستگاه شماری که تکوین‌یافته همان باشد که **دستگاه گروه‌بندی ساده** نامیده شده است. دراین دستگاه، عددی مانند b برای پایهٔ اعداد انتخاب و علایمی برای ۱، b، b^2، b^3، و الی آخر اختیار می‌شود. سپس هرعدد با استفاده ازاین علایم به‌طور جمعی بیان می‌گردد، وهرعلامتی به دفعات مورد لزوم تکرار می‌شود. مثال‌زیر اصل مندرج درآن را روشن می‌کند.

یکی از قدیمیترین مثالهای دستگاه گروه‌بندی ساده، دستگاه هیروگلیفی مصری است که ازحدود ۳۴۰۰ ق.م. به‌کار می‌رفته و عمدتاً مصریان آن را درکتیبه‌هایی که روی سنگ می‌نوشته‌اند مورداستفاده قرارمی‌دادند. گرچه گاهی برای نوشتن‌روی‌چیزهایی غیراز سنگ نیز از خط هیروگلیفی استفاده می‌شد، مصریان به زودی دو شیوهٔ نوشتن نسبتاً

سریعتر را برای کار روی پاپیروس، چوب، و سفال ابداع کردند. قدیمیترین این‌دو، خطی بود با حروف پیوسته، موسوم به‌خط هیراتی[1] [خط کاهنان] که ازخط هیروگلیفی مشتق شده ومورد استفادهٔ روحانیت بود. بعد از هیراتی خط دموتی[2] [خط عوام] پدید آمد، که کاربرد همگانی یافت. دستگاههای شمار هیراتی و دموتی از نوع گروه‌بندی ساده نیستند.

دستگاه‌شمار هیروگلیفی مصری مبتنی بر پایهٔ ۱۰ است. علایم اختیارشده برای ۱ و چند توان اول ۱۰ چنین‌اند.

۱ یك خط قائم

10^2  طومار، یا کلاف طناب

۱۰  استخوان پاشنه، یا حلقهٔ بخو، یا یوغ

10^3  نیلوفر آبی مصری

10^4  انگشتی در حال اشاره

10^5  ماهی ریشدار، یا بچه قورباغه

10^6  مردی در حال تعجب، یا یکی از خدایان که جهان را روی دست گرفته است.

حال هرعدد را می‌توان با استفاده از این علایم به طورجمعی بیان کرد، که در آن هرعلامتی به تعداد دفعات مورد لزوم تکرار می‌شود. مثلا

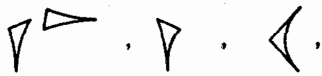
$$۱۳۰۱۵=۱(۱۰^۴)+۳(۱۰^۳)+۱(۱۰)+۵=$$ 

ما این عدد را از چپ به راست نوشته‌ایم اگـر چه مصریـان بیشتر عادت داشتند که از راست به چپ بنویسند.

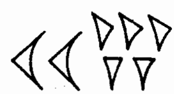
بابلیان قدیم که پاپیروس نداشتند و به سنگهای مناسب دسترسی کمی داشتند، برای نوشتن عمدتاً از گل رس استفاده می‌کردند. آنان کتیبه را به‌وسیلهٔ فشردن قلمی، که نوك آن به‌شکل مثلث متساوی‌الساقین تیزی بود، بریك لوح گل رس مرطوب نقش می‌کردند. با کمی کج کـردن قلم از حالت قائم، ایـن امکان وجود داشت کـه زاویهٔ رأس یا زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین بر گل رس نقش شود که بدین‌ترتیب دو نوع نشانهٔ گوه‌ـشکل(میخی)به‌وجود می‌آمد. سپس لوح آماده درکوره‌ای پخته می‌شد تا به‌درجه‌ای

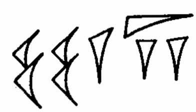
1. hieratic 2. demotic

از سختی برسد که در مقابل گذشت زمان مقاوم و به یك سند دایمی بدل شود. بر روی لوحهای میخی که به فاصلهٔ زمانی ۲۰۰۰ ق.م. تا ۲۰۰ ق.م. تعلق دارند، اعداد کوچکتر از ۶۰ به کمك دستگاه گـروه‌بندی ساده‌ای به پایهٔ ۱۰ بیان شده‌اند، و جالب اینکه عمل نوشتن اغلب با استفاده ازعلامت تفریق ساده شده است. علامت تفریق و علایم به کار رفته برای ۱و۱۰ ازچپ به راست عبارت‌اند از:



که درآن علامت به‌کار رفته برای ۱ و دو قسمتی که علامت تفریق را می‌سازندبا استفاده از زاویهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین به دست آمده‌اند، و علامت به‌کار رفته برای ۱۰ بـا استفاده ازیکی از زوایای مجاور به قاعده حاصل شده است. به عنوان مثالهایی از اعداد نوشتاری که ازاین علایم درآنها استفاده شده، داریم:

۲۵=۲(۱۰)+۵= 

۳۸=۴۰−۲= 

روشی که بابلیها برای نوشتن اعدادبزرگتربه‌کارمی‌بردند، دربخش۱ــ۷ بررسی‌خواهدشد.

شمارهای یونانی آتیکی[1]، یا هرودینی[2] زمانی پیش از قـرن سوم قبـل از میلاد ظهور یافتند و دستگاه گروه‌بندی ساده‌ای برمبنای ۱۰ تشکیل می‌دهند که از حروف اول نامهای عددی ساخته شده‌اند. علاوه برعلایم I،Δ،H،X،M برای ۱،۱۰،$۱۰^{۲}$،$۱۰^{۳}$،$۱۰^{۴}$، علامت خاصی برای۵ وجود دارد. این علامت خاص، شکلی قدیمی از Π است،که حرف اول کلمهٔ یونانی پنته[3] («پنج») است، و Δ حرف‌اول دکا[4]ی («ده») یونانی‌است.سایرعلایم را نیز می‌توان به همین نحو توضیح داد. ازعلامت به‌کاررفته برای ۵، اغلب هم به طور منفرد و هم درترکیب با سایرعلایم استفاده می‌شد تا نمایش عددی کوتاهتر شود. به‌عنوان مثال، دراین دستگاه شمار داریم

1. Attic

۲. منسوب به هرودین (Herodian)، صرف و نحودان یونانی که درحوالی سال ۱۷۰ پیش از میلاد در رم دستورزبان درس‌می‌داد و یکی ازآثار معروفش «قاموس زبان یونانی‌آتن» است.ــم.

3. pente 4. deka

$$۲۸۵۷ = ΧΧ𐅅ΗΗΗ𐅄ΓΙΙ$$

که در آن می‌توان علامت خاص برای ۵ را که یك‌بار تنها و دوبار در ترکیب با سایر علایم ظاهرشده، تشخیص داد.

به عنوان آخرین مثال دستگاه گروه‌بندی ساده، بازهم درپایهٔ ۱۰، شمارهای آشنای رومی‌را داریم. دراینجا به علایم اصلی I،X،C،M برای ۱، ۱۰، $۱۰^۲$، $۱۰^۳$، علایم V،L وD برای ۵، ۵۰، و ۵۰۰ افزوده می‌شوند. اصل تفریق، که مطابق آن، وقتی علامتی برای واحدکوچکتر قبل ازعلامت به کار رفته برای واحد بزرگتـر قرار گیرد، معنی تفاضل این دو واحـد را دارد، فقط به ندرت در دوره‌های باستان و میانـه به کار می‌رفت. استفادهٔ کاملتر این اصل در اعصار جدید معمول گردید. به عنوان مثال، در این دستگاه داریم

$$۱۹۴۴ = \mathrm{MDCCCCXXXXIIII}.$$

یا دراعصار جدیدتر، با متداول شدن اصل تفریق،

$$۱۹۴۴ = \mathrm{MCMXLIV}.$$

درکوششهایی که برای توضیح ریشه‌های دستگاه اعـداد رومی می‌شود، حدس و گمان نیز بی‌دخالت نبوده است. یکی از توضیحات موجه‌تر، که مورد قبول عدهٔ زیادی از صاحب‌نظـران در تاریخ لاتین و علـم کتیبه‌خوانی است، این است کـه I، II، III، IIII از شکل انگشتان بلند شده گرفته شده‌اند. علامت X هم ممکن است ترکیبی از دوV باشد یا شاید از شکل دستها یا انگشتان صلیب شده به ذهن راه‌یافته باشد، یا شایـد هم ناشی ازاین عادت رایج بوده باشدکه موقع شمارش باپاره‌خطها، خطی برروی گروههای ده‌تایی می‌کشیده‌اند. شواهدی در دست است که علایم اصلی برای ۵۰، ۱۰۰، و ۱۰۰۰ احتمالا آواهای دمیدهٔ یونـانی Ψ (پسی)، θ (تتا)، و Φ (فی) بـوده‌اند. اشکال قدیمی برای پسی

$$\downarrow,\ \perp,\ \perp,\ \mathsf{L},$$

بوده‌اند که همهٔ آنها درکتیبه‌های اولیه به جای ۵۰ به‌کار رفته‌اند. علامت θ برای ۱۰۰ احتمالا بعدهـا به علامت C که تا حدودی مشابه آن است تحول یافت؛ و این حقیقت که حرف اول کلمهٔ لاتین سنتوم[1] («صد») است دراین امر تأثیر داشته است. یك‌علامت متداول درقدیم برای ۱۰۰۰، ⊂|⊃ است، که شاید صورت دیگری ازΦ باشد. تحت تأثیراین امرکه M حرف اول کلمهٔ لاتین میله[2] («هزار») است، علامت مورد استفاده برای ۱۰۰۰ به صورت M درآمد. پانصد، به‌خاطراینکه نصف ۱۰۰۰ است، با |⊃ نمایش داده شد، که بعدها به D بدل گردید. کاربرد علایم ⊂|⊃ و |⊃ برای ۱۰۰۰ و ۵۰۰ تا سال ۱۷۱۵، مشاهده شده است.

---

1. centum 2. mille

۱ـ۵ دستگاههای گروه‌بندی ضربی

مواردی وجود دارند که در آنها یك دستگاه گروه‌بندی ساده به آنچه شاید بتوان آن را **دستگاه گروه‌بندی ضربی** نامید، تحول یافته است. در چنین دستگاهی، بعد از انتخاب پایهٔ b، علایمی برای ۱، ۲، ...، b − ۱ و مجموعهٔ علایمی برای b، $b^{۲}$، $b^{۳}$، ...، اختیار می‌شوند. ازعلایم این‌دو مجموعه به طور ضربی برای نشان دادن اینکه چند واحد از گروههای بالاتر مورد نیازند، استفاده می‌شود. مثلا اگر نه عدد اول را با علایم معمولی نشان دهیم ولی ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ را مثلا با a و b و c نشان دهیم، دراین‌صورت در دستگاه‌شمار ضربی می‌نویسیم:

۵۶۲۵ = ۵c۶b۲a۵.

دستگاه‌شمار سنتی چینی ـ ژاپنی، یك دستگاه گروه‌بندی ضربی درپایهٔ ۱۰ است. علایم دو گروه اساسی و عدد ۵۶۲۵ که عمودی نوشته می‌شوند، به صورت زیرند:

۱ 一	۱۰ 十	五
۲ 二	$۱۰^{۲}$ 百	千
۳ 三	$۱۰^{۳}$ 千	六
۴ 四		百
۵ 五		二
۶ 六		十
۷ 七		五
۸ 八		
۹ 九		

مثال: ۵۶۲۵

۱-۶ دستگاههای شمار رمزی

دریك دستگاه شمار رمزی، بعد از اینکه یك پایهٔ b انتخاب گردید، علایمی برای ۱، ۲، ...، $b-۱$؛ b، $۲b$، ...، $(b-۱)b$؛ $b^۲$، $۲b^۲$، ...، $(b-۱)b^۲$؛ وغیره اختیار می‌شود. اگرچه در چنین دستگاهی علایم زیادی باید به حافظه سپرده شود، نمایش اعداد در آن فشرده است.

دستگاه شمار یونانی به اصطلاح یونیایی[1]، یا الفبایی، ازنوع رمزی است ومی‌توان رد آن را تا ۴۵۰ ق.م. پیگیری کرد. این دستگاه در پایه ۱۰ است ودرآن از۲۷ نشانه ـ۲۴حرف الفبای یونانی همراه باعلایم‌حروف منسوخ دیگاما[2]،کوپا[3]، وسامپی[4]ـ استفاده می‌شود. گرچه در این دستگاه از حروف بزرگ استفاده می‌شد و حروف کوچك خیلی دیرتر جانشین آنها گردیدند، در اینجا دستگاه را با حروف کوچك شرح خواهیم داد. معادلهای زیر باید به حافظه سپرده می‌شدند:

۱	α	آلفا	۱۰	ι	یوتا	۱۰۰	ρ	رو
۲	β	بتا	۲۰	κ	کاپا	۲۰۰	σ	سیگما
۳	γ	گاما	۳۰	λ	لامبدا[لاندا]	۳۰۰	τ	تاو
۴	δ	دلتا	۴۰	μ	مو	۴۰۰	υ	اوپسیلون
۵	ε	اپسیلون	۵۰	ν	نو	۵۰۰	ϕ	فی
۶	منسوخ	دیگاما	۶۰	ξ	کسی	۶۰۰	χ	خی
۷	ζ	زتا	۷۰	o	اومیکرون	۷۰۰	ψ	پسی
۸	η	اتا	۸۰	π	پی	۸۰۰	ω	اومگا
۹	θ	تتا	۹۰	منسوخ	کوپا	۹۰۰	منسوخ	سامپی

به عنوان مثالهایی از موارد کاربرد این علایم، داریم

$$۱۲=\iota\beta,\qquad ۲۱=\kappa\alpha,\qquad ۲۴۷=\sigma\mu\zeta.$$

برای مشخص کردن اعداد بزرگ، از تیره‌ها و آکسانهایی که همراه حروف به‌کارمی‌رفت استفاده می‌شد.

علامتهای حروف منسوخ دیگاما، کوپا، و سامپی، به ترتیب زیرند.

$$ϛ,\ ϙ,\ ϡ.$$

سایر دستگاهها با شمار رمزی عبارت‌اند از هیراتی و دموتی مصری، قبطی، هندی برهمایی، عبری، سوری، و عربی بدوی. سه‌تای آخر، مانند یونانی یونیایی، دستگاههای شمار رمزی الفبایی هستند.

---

1. Ionic 2. digamma 3. koppa 4. sampi

۱ـ۷ دستگاههای شمار موضعی

دستگاه شمار کنونی، نمونه‌ای از یك **دستگاه شمار موضعی** با پایهٔ ۱۰ است. برای چنین دستگاهی، بعد از انتخاب پایهٔ b، علایم اصلی برای ۰، ۱، ۲، ...، $b-1$ اختیار می‌شوند. بنابراین b علامت اصلی وجود دارند که غالباً در دستگاه معمولی امروزی ارقام نامیده می‌شوند. حال هرعدد (طبیعی) N را می‌توان به طور یکتا به صورت:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

نوشت که در آن $0 \leqq a_i < b$ و $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. سپس عدد N را در پایهٔ b با رشته‌ای از علامتهای اصلی به صورت

$$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$$

نشان می‌دهیم. از این‌رو هرعلامت اصلی در هرعدد مفروض، نمایش مضرب توانی از پایه است و این توان به‌موضعی بستگی دارد که علامت اصلی در آن ظاهرمی‌شود. مثلا در دستگاه شمار هندی ـ عربی خودما، ۲ در۲۰۶ نشانهٔ (۲(۱۰^۲، یا ۲۰۰ است، در حالی که در ۲۷، ۲ نشانهٔ (۲(۱۰، یا ۲۰ است. باید توجه داشت که برای وضوح کامل، علامتی برای صفرموردنیاز است تا توانهایی از پایه راکه ممکن است وجود نداشته باشند، نشان دهد. هردستگاه شمار موضعی، محصول منطقی ولی نه لزوماً تاریخی یك دستگاه گروه‌بندی ضربی است.

بابلیهای قدیم، در زمانی بین سالهای ۳۰۰۰ و ۲۰۰۰ ق.م. یك دستگاه شصتگانی پدیدآوردند که از اصل ارزش موضعی استفاده می‌کرد. مع‌هذا این دستگاه شمار درواقع مختلط است، زیرا گرچه اعداد بزرگتر از ۶۰ برطبق اصل ارزش‌موضعی نوشته می‌شوند، اعداد درون گروه ۶۰ تایی اصلی، مطابق آنچه در بخش ۱ـ۴ تشریح شد، به‌کمك یك دستگاه گروه‌بندی ساده در مبنای ۱۰ نوشته می‌شوند. به‌عنوان مثال، داریم:

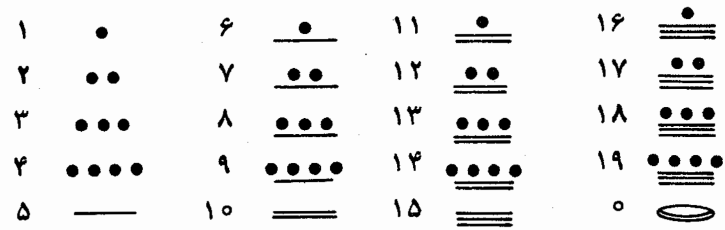
$$۵۲۴,۵۵۱ = ۲(۶۰^۳) + ۲۵(۶۰^۲) + ۴۲(۶۰) + ۳۱ =$$ 

این دستگاه شمار موضعی، تا بعد از سال ۳۰۰ ق.م. علامتی برای صفر نداشت. ابهامی راکه ازاین امر در لوحهای گلی پدید می‌آید، غالباً می‌توان تنها با‌مطالعهٔ دقیق‌متن برطرف کرد.

آنچه بسیار جالب توجه است دستگاه شمار مایایی، با مبدئی دور و نامعلوم، است که توسط هیئتهای اعزامی اسپانیایی به‌یوکاتان[1] در اوایل قرن شانزدهم کشف شد. این دستگاه اساساً بیست بیستی است، بجز اینکه گروه عددی دوم به‌جای اینکه $۴۰۰ = ۲۰^۲$ باشد، $۳۶۰ = ۱۸(۲۰)$ است. گروههای بالاتر به‌صورت $۱۸(۲۰^n)$ هستند. توضیح این اختلاف احتمالا در این حقیقت نهفته است که سال رسمی مایایی از ۳۶۰ روز تشکیل

1. Yucatán

می‌شد. علامت صفر که در جدول زیرداده شده، یا صورت دیگری از این علامت، پیوسته مورد استفاده قرار می‌گیرد. اعداد درون گروه ۲۰ تایی اصلی به‌صورتی بسیارساده با استفاده از نقطه و خط تیره (سنگریزه و تکه‌چوب) برطبق طرح گروه‌بندی سادهٔ زیر نوشته می‌شوند که در آن نقطه نمایش ۱ و خط تیره نمایش ۵ است.



مثالی از یك عدد بزرگ که به‌روش عمودی مایایی نوشته شده، در زیرنشان داده‌می‌شود:

$$۴۳۴۸۷ = ۶(۱۸)(۲۰^{۲}) + ۰(۱۸)(۲۰) + ۱۴(۲۰) + ۷ =$$

دستگاه مختلط‌ـپایه‌ای که شرحش را دادیم، مورد استفادهٔ طبقهٔ روحانیون بود. گزارشهایی از یك دستگاه بیست بیستی خالص دردست است که مورد استفادهٔ مردم عادی بود، ولی به‌صورت نوشته باقی نمانده است.

۱ـ۸ محاسبات نخستین

بسیاری از الگوهای محاسبه که امروزه درحساب مقدماتی به‌کار می‌روند، نظیر آنها که برای انجام ضرب و تقسیمهای طولانی مورد استفاده‌اند، درحوالی قرن پانزدهم ابداع شدند. معمولا دو دلیل برای توضیح این پیدایش دیررس اقامه می‌شود که عبارت از مشکلات ذهنی و مشکلات مادیی هستند که در چنین‌کاری موجود بود.

به‌مورد اول، یعنی مشکلات ذهنی، زیاد نباید توجه‌کرد. این گمان که حتی‌ساده‌ترین محاسبات دردستگاههای شمارقدیم‌عملی نیست، عمدتاً ناشی‌ازنا آشنایی با این‌دستگاهها‌ست. روشن است که جمع و تفریق در یك دستگاه گروه‌بندی ساده تنها نیازمند توانایی شمردن انواع مختلف علایم وسپس تبدیل آنها به‌واحدهای بالاتر است. دراینجاضرورتی به از حفظ داشتن ترکیبهای عددی وجود ندارد.* در دستگاه شماررمزی، اگرجداول‌جمع

* برای ملاحظهٔ‌چگونگی‌انجام ضرب‌وتقسیمهای طولانی‌باشمارهای یونانی، نگاه‌کنید، مثلاً، به
James G. Kennedy, "Arithmetic with Roman numerals," *The American Mathematical Monthly* 88(1981): 29–33.

و ضرب به‌میزان کافی به‌حافظه سپرده شوند، کار را مـی توان بسیار شبیه به آنچه که امروزه انجام می‌شود، پیش برد. پل تانری[1]، ریاضیدان فرانسوی، مهارت زیادی در ضرب با دستگاه شمار یونیایی یونانی کسب کرد و حتی نتیجه گـرفت که این دستگاه مزیتهایی بر دستگاه امروزی ما دارد.

با این حال مشکلات مادی موجود، واقعیت کامل داشتند. نبودن ذخیره‌ای فراوان و مناسب از مادهٔ مطلوبی که بتوان بر آن نوشت، مانع از هـر گونـه پیشرفت روند حساب می‌شد. باید به‌خاطر داشت که کاغذ امروزی ساخته‌شده از خمیر کـه تـوسط ماشین ساخته می‌شود، کمی بیش از یك صدسال عمردارد. کاغذ قدیمیتر ساخته‌شده از پارچهٔ کهنه با دست ساخته می‌شد و درنتیجه گران و کمیاب بود، وحتی این‌نوع کاغذ هم تاقرن دوازدهم به‌اروپا آورده نشد، گرچه محتمل است که چینیها هزار سال قبل طرز ساختن آن را می‌دانسته‌اند.

یك‌مادهٔ قدیمی‌کاغذ مانند برای نوشتن، که **پاپیروس** خوانده می‌شد، به‌وسیلهٔ‌مصریان قدیم اختراع و قبل ازسال ۶۵۰ق.م. در یونان معمول شده بود. پاپیروس ازنوعی‌نی آبی به‌نام پاپو[2] ساخته می‌شد. ساقه‌های نی به‌صورت نوارهای بلند و نازکی بریده و کنار هم گذاشته می‌شدند تا به‌شکل ورقه‌ای درآیند. لایهٔ دیگری از ایـن نوارها را بـه‌روی آن گذاشته وهمه‌را درآب خیس می‌کردند، سپس ورقه را فشرده و درآفتاب خشك‌می‌کردند. احتمالا به‌علت وجـود صمغ طبیعی درگیاه، لایه‌ها به‌هم می‌چسبیدند. بعـد از خشك شدن ورقه‌ها، آنها را بازحمت بسیار به‌کمك جسم سخت و گردی هموار مـی کردند تا آمادهٔ نوشتن شود. پاپیروس ارزشمندتر از آن بود که هرمقداری از آن صرفاً به‌عنوان کاغذمسوده به‌کار رود.

وسیلهٔ قدیمی دیگری که برآن می‌نوشتند، کاغذ پوستی بود، که ازپوست‌حیوانات و معمولا از پوست گوسفند یا بره ساخته می‌شد. این وسیله طبیعتاً کمیاب و به‌دست‌آوردن‌آن مشکل بود. وسیلـهٔ با ارزشتر از آن، رق، کاغذپوستی ساخته‌شده از پوست گوسالـه بـود. درواقع، کاغذ پوستی آن‌چنان گران بود که شستن مرکب دستخطهای کاغذهای پوستی‌قدیم و استفادهٔ مجدد از آنها در قـرون وسطی مرسوم گردیـد. چنان دستنویسهایـی **پالیمپسست**[3] (پالین، دوباره؛ پسائو، باسابیدن هموار گردان) نامیده مـی‌شد. دربعضی موارد، بعد از گذشت سالیان، نوشتهٔ اصلی یك‌پالیمپسست به‌طور کمرنگی زیر نوشتهٔ بعدی ظاهر می‌شد. آثارجالبی بدین‌طریق بازسازی شده‌اند.

تخته‌های کوچکی باپوشش نازکی ازموم، همراه بایك قلـم، وسیله‌ای بودکه‌رومیان تقریباً دوهزار سال‌پیش برای نوشتن به‌کار می‌بردند. قبل ازدوران امپراطوری روم وطی آن سینیهای شن اغلب برای شمارشهای ساده ورسم اشکال هندسی به‌کار می‌رفتند. و البته سنگ و لوح گلی ازخیلی قبل برای تهیهٔ‌مدارك کتبی مورد استفاده بود.

راه خـروج از این مشکلات ذهنی و مـادی اختراع **چرتکه** (آباکس[4]، دریونانی به‌معنی «سینی‌شن») بود که می‌توان آن‌را قدیمیترین ابزار مکانیکی برای محاسبه خواند که

---

1. Paul Tannery 2. papu 3. palimpsest 4. abax

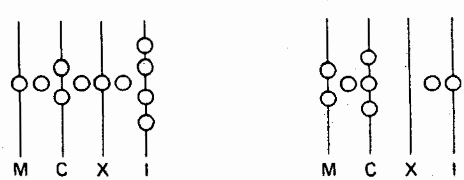
به‌دست نوع بشر به‌کار رفته‌است. چرتکه در اشکال مختلف در قسمتهایی از دنیای قدیم و وسطی ظاهر گردید. در اینجا یکی از اشکال ابتدایی آن را توصیف می‌کنیم و استفاده از آن را درجمع و تفریق چند عدد رومی نشان می‌دهیم. چهار خط موازی عمودی رسم کنید و آنها را از چپ به‌راست M، C، X، و I بنامید و مقداری وسیلهٔ شمارش مناسب، مانند مهره یا سکه، تهیه کنید. هرمهره معرف ۱، ۱۰، ۱۰۰، یا ۱۰۰۰ واحد خواهد بود، بسته به‌اینکه روی خط I، X، C، یا M قرار داشته باشد. برای تقلیل تعداد مهره‌هایی که ممکن است بعداً روی هرخط ظاهرشوند، قرار می‌گذاریم که به جای هر پنج مهره روی یک خط، درمحلی درست در طرف چپ آن خط، در فضای بین آن خط و خط سمت چپ آن، مهره‌ای بگذاریم. دراین‌صورت هرعددکوچکتر از ۱۰۰۰۰ را می‌توان دراین دستگاه خطوط باقراردادن مهره‌هایی نمایش داد که تعدادشان درهرخط ازچهار بیشتر و درموضع طرف چپ هر خط از یکی بیشتر نیست.

حال دوعدد رومی

MDCCLXIX و MXXXVII

را با هم‌جمع می‌کنیم. از دوعدد بالا، عدد سمت چپ را به‌کمک مهره‌ها، چنان‌که درسمت چپ شکل ۱ نشان داده شده، در دستگاه نمایش می‌دهیم. اکنون با اقدام از راست به‌چپ به‌افزودن عدد دوم می‌پردازیم. برای جمع VII، مهرهٔ دیگری را بین خطوط X وI و دو مهرهٔ دیگررا روی‌خط I می‌گذاریم. برروی‌خط I اکنون شش مهره قرار دارد. پنج‌تای آنها را برمی‌داریم و به‌جایشان مهرهٔ دیگری بین خطوط Xو I قرار می‌دهیم. از سه مهره‌ای که حالا بین خطوط X و I قرار دارند، دوتایشان را به صورت یک‌مهرهٔ واحد به‌خط X نقل می‌کنیم. حال XXX را با گذاشتن سه مهرهٔ دیگر روی خط X اضافه می‌کنیم. چون اکنون جمعاً پنج مهره در خط X داریم، به جای آنها یک مهره بین خطوط C و X می‌گذاریم و دو مهره‌ای‌راکه حالادرآنجا هستند، به‌صورت مهرهٔ واحدی به‌خط C نقل‌می‌کنیم. بالاخره M را با گذاشتن مهرهٔ دیگری برروی خط M، اضافه می‌کنیم. صورت نهایی دستگاه‌در طرف راست شکل ۱ نشان داده شده، و مجموع MMDCCCVI را می‌توان از روی‌آن اعلام کرد. مجموع این دو عدد را با اعمال مکانیکی ساده و بی‌نیاز از کاغذ مسوده یا به‌کمک از حفظ داشتن هرگونه جدول جمع به‌دست آورده‌ایم.

تفریق به‌طور مشابه انجام می‌شود، بجز اینکه دراین حالت به‌جای «نقل کردن» به چپ ممکن است لازم شود که ازچپ «قرض» کنیم.



شکل ۱

دستگاه شمار موضعی هندی ـ عربی هرعدد را صرفاً باضبط تعداد مهره‌های متعلق به خطوط مختلف چرتکه بارعایت ترتیب نشان می‌دهد. علامت ۰ نشانهٔ خطی است که‌مهره‌ای بـرروی آن وجود ندارد. الگوهای جمع و تفریق امروزی، همراه با مفاهیم «نقل کردن» و «قرض کردن» ممکن است در جریـان انجام این اعمال روی چرتکه پدید آمده باشند. چون، در دستگاه شمار هندی ـ عربی به‌جای مهره‌های واقعـی با علایم کار می‌کنیم، لازم می‌آید کـه جمعهای سادهٔ عددی را به ذهن سپاریم یـا به جداول ابتدایی جمع توسل جوییم.

۱ـ۹ دستگاه شمار هندی‌ـ‌عربی

دستگاه شمارهندی‌ـ‌عربی به‌هندیان، که احتمالاً مخترع آن هستند، وبه‌اعراب، کـه آن‌رابه اروپای غربی انتقال دادند، منسوب است. قدیمیترین نمونه‌های محفوظ مـانده از علایم عددی امروزی، برروی چند ستون سنگی که در حدود ۲۵۰ ق.م. به‌وسیلهٔ شاه‌آشوکا[1] در هند برپا شدند، یافت می‌شود. نمونه‌های قدیمی دیگری، اگر به‌درستی تعبیر شده باشند در هند، در آثاری که حدود سال ۱۰۰ق.م. بردیوارهای غاری در تپه‌ای نـزدیك پونه[2] کنده شده‌اند و دربعضی کتیبه‌های حفاری شده متعلق‌ـ‌به‌حدود سال ۲۰۰ ب.م. در غارهایی واقع در نـاسیك[3] پیدا شده‌اند. درایـن نمونه‌های قـدیمی صفر وجـود ندارد و درآنهـا از نمادگذاری موضعی استفاده نشده است. با این‌حال ارزش موضعی، و نیز صفر، می‌بایستی در زمانی قبل‌از ۸۰۰ب.م. درهند معمول شده‌باشد، زیرا خوارزمی ریاضیدان ایرانی‌چنین صورت‌کاملی از دستگاه هندی را درکتابی متعلق به‌سال ۸۲۵ب.م. شرح می‌دهد.

اینکه علایم شمار جدید چگونه و درچه زمانی برای اولین‌بار وارد اروپا شده‌اند، معین نیست. به‌احتمال قوی انتقال‌آنها توسط بازرگانان و سیاحان‌سواحل مدیترانه‌صورت گرفته است. این علایم در یك دستنوشتهٔ اسپانیایی‌متعلق به‌قرن دهم دیده می‌شوند و ممکن است به‌وسیلهٔ اعراب که درسال ۷۱۱ب.م. به‌این شبه جزیره حمله کردند و صدها سال‌در آنجاماندند، در اسپانیا معمول شده‌باشند. دستگاه‌کامل شده باترجمهٔ لاتین رسالهٔ‌خوارزمی در قرن دوازدهم وکارهای بعدی اروپاییان در این‌باره به‌طور وسیعتری رواج یافت.

طی ۴۰۰سال پس‌ازآن، نزاعهایی بین طرفداران چرتکه و الگوریستها[4]، نامی که به‌هواخواهان دستگاه جدید اطلاق می‌شد، درگرفت و پیش از سال ۱۵۰۰ ب. م. قواعد کنونی ما در محاسبات چیرگی یافتند. با گذشت صد سال دیگر، طرفداران چرتکه تقریباً از یاد رفته بودند و باآغاز قرن هجدهم هیچ اثـری ازچرتکه در اروپـای غربی دیده نمی‌شد. پیدایش مجدد آن، به‌عنوان یك تحفه، مدیون پونسله[5] مهندس فـرانسوی بودکه بعداز آزاد شدن اززندان روسها، که به‌دنبال لشکرکشی ناپلئون به‌روسیه بدان گرفتارشده بود، نمونه‌ای ازآن را به‌فرانسه آورد.

---

1. Aśoka 2. Poona 3. Nasik 4. algorist 5. Poncelet

علایم عددی، قبل از آنکه با پیدایش صنعت چاپ تثبیت شوند، صورتهای مختلفی به خود گرفتند. کلمهٔ زیرو[1] انگلیسی احتمالاً از زفیروم[2] که صورت لاتینی شدهٔ صفر عربی است گرفته شده است، و این کلمه به‌نوبهٔ خود ترجمهٔ سونیا[3]ی هندی، به‌معنی «پــوچ» یا

طرفدار چرتکه درمقابل الگوریست. (از گریگور رایش[4]، مارگاریتا فیلوسوفیکا[5]، استراسبورگ، سال ۱۵۰۴.)

---

1. zero 2. zephirum 3. sunya 4. Gregor Reisch
5. Margarita Philosophica

«تهی» است. صفرعربی درقرن سیزدهم به‌صورت صیفرا[1] توسط نموراریوس[2] واردآلمان شدکه واژهٔ کنونی *cipher* انگلیسی به‌معنای صفر، مأخوذ ازآن است.

۱ـ۱۰ پایه‌های دلخواه

یادآوری می‌کنیم‌که برای نمایش عددی دریك دستگاه شمار موضعی با پایهٔ b به‌علایمی اصلی برای اعداد صحیح صفر تا $b-1$ نیاز داریم. باآنکه پایهٔ $b=10$ بخش مهمی از فرهنگ‌کنونی را تشکیل می‌دهد، انتخاب ۱۰ درواقع کاملا اختیاری است و پایه‌های‌دیگر هم اهمیت عملی و نظری زیادی دارند. اگر $b\leqq 10$، می‌توانیم از علایم ارقام‌معمولی استفاده کنیم. مثلا، مـی‌توانیم ۳۰۱۲ را به عنوان عـددی‌که درپـایهٔ ۴ باعلایـم اصلی ۰، ۱، ۲، ۳ بیان شده تلقی‌کنیم. برای روشن ساختن اینکه نمایش عـدد درپایهٔ ۴ درنظر گرفته شده است، آن‌را به‌صورت$(۳۰۱۲)_۴$ می‌نویسیم. وقتی هیچ‌زیرنویسی نوشته نشود، استنباط ما چنین خواهدبودکه عدد در پایهٔ معمولی ۱۰ بیان شده است. اگر $b>10$، باید علایم اصلی جدیدی به‌علایم رقمی خود بیفزاییم زیرا همواره b علامت اصلی لازم داریم. بنابراین، اگر$b=12$، می‌توانیم ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، t، e را به عنوان علایم اصلی اختیارکنیم که در آن t و e علایمی برای ده و یازده هستند. به‌عنوان مثال می‌توانیم داشته باشیم $(۳t۱e)_{۱۲}$.

تبدیل عددی در پایهٔ دلخواه به‌پایهٔ معمولی ۱۰ آسان است. مثلا داریم:

$$(۳۰۱۲)_۴=۳(۴^۳)+۰(۴^۲)+۱(۴)+۲=۱۹۸$$

و

$$(۳t۱e)_{۱۲}=۳(۱۲^۳)+۱۰(۱۲^۲)+۱(۱۲)+۱۱=۶۶۴۷$$

اگر عددی در مقیاس‌معمولی داشته باشیم می‌توانیم آن را به‌ترتیب زیر درپایهٔ b بیان‌کنیم. بافرض‌اینکه N چنین عددی باشد، لازم است که‌اعداد صحیحa_n، a_{n-1}، ...، a_0 را درعبارت

$$N=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\dots+a_2b^2+a_1b+a_0$$

که درآن $0\leqq a_i<b$، معین‌کنیم. ازتقسیم معادلهٔ بالا بر b داریم:

$$\frac{N}{b}=a_nb^{n-1}+a_{n-1}b^{n-2}+\dots+a_2b+a_1+\frac{a_0}{b}=N'+\frac{a_0}{b}$$

یعنی، باقیماندهٔ این تقسیم، a_0، آخرین رقم در نمایش مطلوب است. باتقسیم N' بر b

$$\frac{N'}{b}=a_nb^{n-2}+a_{n-1}b^{n-3}+\dots+a_2+\frac{a_1}{b}$$

---

1. cifra 2. Nemorarius

را به‌دست می‌آوریم و باقیماندهٔ ایــن تقسیم، رقم ماقبل آخردر نمایش مطلوب است. با ادامهٔ‌کار بدین‌روال همهٔ ارقام a_0، a_1، ...، a_n به‌دست می‌آیند. این شیوهٔ کار را می‌توان به‌طور کاملا ساده‌ای، همچنان‌که درزیر نشان داده شده به‌صورت منظم درآورد. برای‌مثال، فرض‌کنیدکه بخواهیم ۱۹۸ را درپایهٔ ۴ نشان دهیم. داریم

	۱۹۸	۴
باقیمانده ۲	۴۹	۴
باقیمانده ۱	۱۲	۴
باقیمانده ۰	۳	۴
باقیمانده ۳	۰	

نمایش مورد نظر (۳۰۱۲)$_{۴}$ است. باز فرض‌کنید بخواهیم ۶۶۴۷ را در پـایهٔ ۱۲ بیان کنیم‌که در آن، دوباره t و e به‌ترتیب برای نمایش ده و یازده به‌کاررفته‌اند. داریم

	۶۶۴۷	۱۲
باقیمانده e	۵۵۳	۱۲
باقیمانده ۱	۴۶	۱۲
باقیمانده t	۳	۱۲
باقیمانده ۳	۰	

نمایش موردنظر (۳t۱e)$_{۱۲}$ است.

در هنگام جمع و ضرب در دستگاه معمولی، ممکن است فراموش‌کنیم‌که‌کار واقعی به‌طور ذهنی انجام می‌شود و علایم عددی صرفاً برای ثبت نتایج ذهنی بــه‌کار می‌روند. توفیق و کارآیی ما در انجام چنین عملیات حسابی بستگی‌به‌این دارندکه تاچه حد جداول جمع و ضرب را،که وقت زیادی برای آموختنشان درکلاسهای ابتدایی صرف‌کرده‌ایم، به‌خاطر داریم. با جداول متناظر برای پایهٔ‌مفروض b، می‌توانیم به‌طور مشابه جمع‌وضرب را در این دستگاه جدید، بدون مراجعه به‌دستگاه معمولی، انجام دهیم.

مطلب را با مثالی در پایهٔ ۴ روشن می‌کنیم. ابتداجداول جمع و ضرب‌را، مطابق جداول صفحهٔ بعد، برای پایهٔ ۴ تشکیل می‌دهیم. از این‌قرار، مجموع ۳و۲، با مراجعه به جدول، ۱۱، و حاصلضرب ۳و۲ برابر با ۱۲ است. اکنون با استفاده از ایــن جدولها، درست همان طورکه به استفاده از جدولهــای مربوط به پایهٔ ۱۰ عادت داریم، می‌توانیم بــه جمع و ضــرب بپردازیــم. به عنوان مثال، بــرای ضــرب (۳۰۱۲)$_{۴}$ در (۲۳۳)$_{۴}$،

جدول ضرب

	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳
۲	۰	۲	۱۰	۱۲
۳	۰	۳	۱۲	۲۱

جدول جمع

	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۳	۱۰
۲	۲	۳	۱۰	۱۱
۳	۳	۱۰	۱۱	۱۲

باحذف زیرنویس ۴، داریم:

```
  ۳۰۱۲
   ۲۳۳
 ------
 ۲۱۱۰۲
۲۱۱۰۲
۱۲۰۳۰
-------
۲۱۰۱۱۲۲
```

برای انجام اعمال معکوس تفریق و تقسیم، آشنایی زیادی باجداول موردنیاز خواهدبود. البته این امربرای پایهٔ ۱۰ نیزصادق است و موجب‌اغلب مشکلاتی است‌که درآموزش اعمال معکوس درمدارس ابتدایی پیش می‌آید.

مطالعهٔ مسئله‌ای

۱۰۱ نامهای عددی

نامهای عددی زیررا توضیح دهید.

(الف) برای یکی از قبایل پاپوآ[1] در جنوب شرقی گینهٔ جدید لازم دیدندکه آیهٔ زیر ازکتاب مقدس (یوحنا ۵:۵): «ومردی آنجابودکه ۸و۳۰ سال زمینگیر بود» رابه صورت «مردی یك‌مرد، دودست، ۵و۳ سال بیمار بود» ترجمه‌کنند.

(ب)در گینهٔ‌جدید (بریتانیایی)، عدد ۹۹ به‌صورت «چهارمرد در می گذرند، دودست به‌پایان می‌آیند یك‌پا به‌پایان می‌آید، وچهار» درمی‌آید.

(ج) قبیلهٔ کامایورا[2] در آمریکای جنوبی ازکلمهٔ «انگشت‌قله» برای‌کلمهٔ ۳ استفاده می‌کنند و «۳روز» به‌صورت «روزهای انگشت قله» درمی‌آید.

1. Papua 2. Kamayura

(د) زولو[1]های آفریقـای جنوبی از معادلهای زیر استفاده می‌کنند: ۶(«بلند کردن شست»)، ۷ («او اشاره کرد»).
(ه) مالینکه[2]های غرب سودان از کلمهٔ دیبی[3] برای ۴۰ استفاده می‌کنند. ایـن کلمه به‌طور تحت‌اللفظی به‌معنی «تشك» است.
(و) قبیلهٔ ماندینگو[4] در غرب آفریقا از کلمهٔ کونونتو[5] برای ۹ استفاده می‌کنند. این کلمه به‌طور تحت‌اللفظی معنی می‌دهد: «برای کسی که در شکم است».

۲۰۱ اعداد نوشتاری

۵۷۴ و۴۷۵ رادر (الف) هیروگلیفـی مصری، (ب) شمارهـای رومی، (ج) شمارهای یونانی آتیکی، (د) خط میخی بابلی، (ه) دستگاه سنتی چینی-ژاپنی، (و) یونانی‌الفبایی، (ز) شمارهای مایایی بنویسید.

۳۰۱ دستگاه شماریونانی الفبایی

(الف) برای نوشتن اعدادکوچکتراز ۱۰۰۰ در یونانی‌الفبایی چندعلامت مختلف باید به‌خاطرسپرده شوند؟ درهیروگلیفی مصری چطور؟ درمیخی بابلی چطور؟
(ب) در دستگاه‌شماریونانی‌الفبایی اعداد ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ...، ۹۰۰۰ اغلب باگذاشتن نشانهٔ پریم‌روی علامتهای ۱، ۲، ...، ۹ نشان‌داده می‌شوند. بدین‌تـرتیب ۱۰۰۰ را مـی‌شد به‌صورت α' نشان‌داد عدد ۱۰۰۰۰ یا میریاد[6]، با M نشان داده می‌شد. اصل ضرب برای مضارب ۱۰۰۰۰ به‌کار می‌رفت. ازاین‌رو ۲۰۰۰۰، ۳۰۰۰۰۰، و ۴۰۰۰۰۰۰ به‌صورت βM، λM، و νM نوشته می‌شدند. اعداد ۵۷۸۰، ۷۲۸۰۳، ۴۵۰۰۸۲، ۳۲۵۷۸۸۸ را دریونانی الفبایی بنویسید.
(ج) یك‌جدول جمع تابا ۱۰+۱۰ ویك‌جدول ضرب‌تابا ۱۰×۱۰ برای دستگاه شمار یونانی‌الفبایی بنویسید.

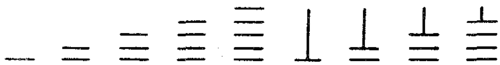
۴۰۱ دستگاههای شمار قدیمی و فرضی

(الف) به‌عنوان شق‌دیگری دربرابرعلایم شمار میخی، یاگوه شکل، بابلیهای قدیم گاهی از علایم شمار مدور استفاده می‌کردند. این‌وجه تسمیه ازآن‌روست‌که ایـن علایم از نقوش دایره شکلی تشکیل می‌شدندکه به‌جای قلمهایی بانوك مثلثی، باقلمهایی ته‌گرد، برلوحهای گلی ایجادمی‌شدند. دراینجا علایم ۱و۱۰ به‌صورت ◗ و ○ هستند. اعداد ۵۷۸۰، ۷۲۸۰۳، ۴۵۰۰۸۲، ۳۲۵۷۸۸۸ را بانمادهای مدور بنویسید.

---

1. Zulu 2. Malinké 3. dibi 4. Mandingo
5. kononto 6. myriad

شکل ۲



شکل ۳

(ب) قاعدهٔ ساده‌ای برای ضرب ۱۰ درعددی که دردستگاه هیروگلیفی مصری نوشته شده، بیان کنید.

(ج) یك دستگاه‌شمار جالب **دستگاه‌شمار علمی** (یا میله‌ای) چینی است که، احتمالا ۲۰۰۰سال یا بیشترقدمت دارد. این‌دستگاه اساساً موضعی، باپایهٔ ۱۰ است. شکل ۲ طرز نمایش ارقام ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ را وقتی دریك موضع فرد (یکان، صدگان والی آخر) ظاهر می‌شوند، نشان می‌دهد. اما وقتی این ارقام درموضع زوج (دهگان، هزارگان و الی آخر) ظاهر می‌شوند، نمایش آنها به‌صورتی است که درشکل ۳ نشان داده شده است. در دوران سلسلهٔ سونگ[1] (۱۱۲۶–۹۶۰) و بعد ازآن، دراین دستگاه یك دایرهٔ ○، به‌نشانهٔ صفر به کار می‌رفت. بااستفاده از شمارهای میله‌ای، اعداد ۵۷۸۰، ۷۲۸۰۳، ۴۵۰۰۸۲، ۳۲۵۷۸۸۸ رابنویسید.

(د) در یك دستگاه‌گروه‌بندی ساده درپایهٔ۵، فرض کنید که ۱، ۵، 5^2، 5^3 با /، *،)، (نمایش داده می‌شوند. اعداد ۳۶۰، ۲۵۲، ۷۸، ۳۳ را دراین دستگاه نشان‌دهید.

(ه) در یك‌دستگاه‌شمار موضعی درپایهٔ۵،فرض کنیدکه۰،۱،۲،۳،۴ به‌ترتیب با #، /، *،)، (نمایش داده می‌شوند. اعداد ۳۶۰، ۲۵۲، ۷۸، ۳۳ را دراین‌دستگاه‌بیان کنید.

۵۰۱ اعداد انگشتی

(الف) اعداد انگشتی قرنهای متمادی وسیعاً مورداستفاده بودند و ازاین‌راه‌روشهای انگشتی برای بعضی محاسبات ساده به وجود آمدند. یکی از این روشها کـه حاصلضرب دوعدد بین ۵ و ۱۰ را می‌دهد، برای تقلیل کارحافظه درارتباط باجداول‌ضرب به‌کارمی‌رفت. مثلاً، برای ضرب ۷در۹، ۲ = ۵ − ۷ انگشت یك‌دست و ۴ = ۵ − ۹ انگشت دست دیگر را بلندکنید. حال انگشتان بلند شده راجمع کنید، ۶ = ۴ + ۲، که رقم دهگان حاصلضرب است، و انگشتان بسته را درهم ضرب کنید، ۳ = ۱ × ۳، که رقم یکان حاصلضرب است، و نتیجهٔ ۶۳ به‌دست می‌آید. این‌عمل هنوز توسط برخی از روستاییان اروپا به کار می‌رود. ثابت کنیدکه این‌روش به‌نتایج درست می‌انجامد.

(ب) این معمای متعلق به‌قرن نهم‌راکه‌گاهی به‌آلکوین[2] (حوالی ۷۷۵) نسبت داده می‌شود، توضیح دهید: «مردی رادیدم که هشت در دست داشت، و ازهشت، هفت برداشت

1. Sung 2. Alcuin

و شش باقی ماند.»

(ج) آنچه را که در زیر می‌آید، ودر دهمین شعر هجایی یوونال[1] دیده می‌شود، شرح دهید: «خوشبخت در واقع کسی است که ساعت مــرگش را آنقدر به تعویق افکند که سالهای عمرش را بر دست راست خود شماره کند.»

۶.۱ کسرهای مبنایی

اعدادکسری را درپایهٔ معمولی می‌توان باارقام بعد ازممیز نشان داد. از همان‌نمادگذاری درمورد سایر پایه‌ها نیز استفاده می‌شود. از این‌رو درست همچنان‌که عبارت ۰ر۳۰۱۲ به معنی

$$\frac{۳}{۱۰}+\frac{۰}{۱۰^{۲}}+\frac{۱}{۱۰^{۳}}+\frac{۲}{۱۰^{۴}}$$

است، عبارت $(۰ر۳۰۱۲)_b$ نیز نشانهٔ

$$\frac{۳}{b}+\frac{۰}{b_{۲}}+\frac{۱}{b^{۳}}+\frac{۲}{b^{۴}}$$

است، عبارتی مثل $(۰ر۳۰۱۲)_b$، **کسرمبنایی** در پایهٔ b نامیده می‌شود. کسرمبنایی در پایهٔ ۱۰ را معمولا **کسر اعشاری** می‌نامند.

(الف) نشان دهید که چگونــه می‌توان کسر مبنایی در پایهٔ b را به کسر اعشاری تبدیل کرد.

(ب) نشان دهید که چگونــه می‌توان کسر اعشاری را به کسر مبنایی در پایــهٔ b تبدیل کرد.

(ج) $(۰ر۳۰۱۲)_{۴}$ و $(۰ر۳t۱e)_{۱۲}$ را به صورت کسرهای اعشاری بیان‌کنید.

(د) ۰ر۴۴۰۲ را ابتدا به صورت کسرمبنایی درپایهٔ ۷، وسپس درپایهٔ۱۲ بیان‌کنید.

۷.۱ عملیات حساب در سایر پایه‌ها

(الف) جداول جمع وضرب برای پایه‌های ۷و۱۲ را تشکیل دهید.

(ب) $(۳۴۰۶)_{۷}$ و $(۲۵۱)_{۷}$ را ابتدا با استفاده از جداول قسمت (الف) و سپس با تبدیل به پایهٔ ۱۰، اول باهم جمع وآنگاه درهم ضرب‌کنید. به همین‌نحو، $(۳t۰۴e)_{۱۲}$ و $(۵۱tt)_{۱۲}$ را اول جمع و سپس ضرب‌کنید.

(ج) جداول پایهٔ ۱۲ را می‌توانیم برای مسائل مساحی ساده‌که متضمن فوت و اینچ هستند، به کاربریم. برای مثال، اگریك فوت را به عنوان واحد اختیار کنیم، آنگاه ۳ فوت

---

1. Juvenal

و ۷ اینچ می‌شود $(۳٫۷)_{۱۲}$. برای پیدا کردن مساحت مستطیلی به طول ۳ فوت و ۷ اینچ و عرض ۲ فوت و ۴ اینچ، با تقریب به‌نزدیکترین اینچ مربع، می‌توانیم $(۳٫۷)_{۱۲}$ را در $(۲٫۴)_{۱۲}$ ضرب و سپس نتیجه را به فوت و اینچ مربع تبدیل کنیم. این مثال را کامل کنید.

۸۰۱ مسائلی دربارهٔ پایه‌های نمایش اعداد

(الف) $(۳۰۱۲)_{۵}$ را در پایهٔ ۸ بیان کنید.

(ب) در چه مبنایی ۱۰ = ۳ × ۳؟ در چه مبنایی ۱۱ = ۳ × ۳؟ در چه مبنایی ۱۲ = ۳ × ۳؟

(ج) آیا ۲۷ می‌تواند در هیچ مبنایی معرف یك عدد زوج باشد؟ ۳۷ چطور؟ آیا ۷۲ می‌تواند در هیچ مبنایی عدد فردی را نشان دهد؟ ۸۲ چطور؟

(د) b را چنان بیابید که $(۱۴۲)_{b} = ۷۹$. b را چنان بیابید که $(۲۲۰۰)_{b} = ۷۲$.

(ه) یك عدد سه رقمی در مبنای ۷ وقتی در پایهٔ ۹ بیان می‌شود، ارقامش معکوس می‌شوند. این سه رقم را پیدا کنید.

(و) کوچکترین پایه‌ای را که در آن ۳۰۱ نمایش یك مجذور کامل باشد، بیابید.

(ز) اگر $b > ۲$، نشان دهید که $(۱۲۱)_{b}$ یك مجذور کامل است. اگر $b > ۴$، نشان دهید که $(۴۰۰۰۱)_{b}$ بر $(۲۲۱)_{b}$ قابل قسمت است.

۹۰۱ چند جنبهٔ تفریحی پایهٔ دودویی

دستگاه عددنویسی موضعی با پایهٔ ۲ درشاخه‌های مختلف ریاضیات کاربرد دارد. بازیها و معماهای زیادی نیز، مانند بازی معروف نیم[1] و معمای حلقه‌های چینی، وجود دارند که جوابهایشان به این دستگاه بستگی دارد. آنچه در زیر می‌آید دو معمای ساده از این‌گونه است.

(الف) نشان دهید که چگونه با استفاده از یك ترازوی معمولی [شاهینی] می‌توان هروزنی را که برحسب پوند عددصحیحی است، با استفاده از مجموعه‌ای از وزنه‌های ۱ پوندی، ۲ پوندی، $۲^{۲}$ پوندی، $۲^{۳}$ پوندی وغیره، وزن کرد، درصورتی‌که تنها یك وزنه از هرنوع موجود باشد.

(ب) چهار کارت زیر راکه شامل اعداد از ۱ تا ۱۵ هستند، در نظربگیرید.

۱	۹	۲	۱۰	۴	۱۲	۸	۱۲
۳	۱۱	۳	۱۱	۵	۱۳	۹	۱۳
۵	۱۳	۶	۱۴	۶	۱۴	۱۰	۱۴
۷	۱۵	۷	۱۵	۷	۱۵	۱۱	۱۵

1.Nim

در کارت اول تمام اعدادی که رقم آخرشان در دستگاه دودویی ۱ است، قرار دارند؛ دومی شامل همهٔ اعدادی است که رقم ماقبل آخرشان ۱ است؛ سومی شامل همه اعدادی است که رقم دوتا مانده به‌آخرشان ۱ است؛ چهارمی شامل همهٔ اعدادی است که رقم‌سه‌تا مانده به‌آخرشان ۱ است. حال از کسی خواسته می‌شود که عددی مانند N بین ۱ تا ۱۵ را درنظر بگیرد و بگوید که N روی چه‌کارتهایی قرار دارد. در این صورت عدد N را می‌توان به سادگی تنها با جمع کردن اعداد سمت چپ سطر اول کارتهایی که این عدد بر آنها واقع است، پیداکرد. مجموعهٔ مشابهی ازشش‌کارت برای یافتن هرعدد بین۱ تا ۶۳ بسازید. توجه کنیدکه اگراعداد برکارتهایی‌که ۱،۲،۴،... واحد وزن دارند نوشته شوند، در این صورت روش خودکاری به صورت یك ترازوی پستی می‌تواند هر عدد N را بیان کند.

۱۰۰۱ چند حیله بااعداد

بسیاری از حیله‌های ساده با اعداد، که در آنها باید عدد انتخاب شده‌ای را حدس‌زد، دارای توجیهاتی هستند که به مقیاس موضعی بستگی دارند. حیله‌هایی از این قبیل را که در زیر می‌آیند توضیح دهید.

(الف) از شخصی خواسته می‌شودکه یك عدد دو رقمی درنظر بگیرد. سپس از وی خواسته می‌شود که رقم دهگان را در۵ضرب وبا ۷ جمع کند، حاصل را دوبرابر کند و رقم یکان عدد اصلی را به آن اضافه، و نتیجهٔ نهایی را اعلام نماید. از این نتیجه، شخص درخواست‌کننده درنهان ۱۴ راکم می‌کند و عدد اصلی را به دست می‌آورد.

(ب) از شخصی خواسته می‌شودکه یك عدد سه رقمی در نظر بگیرد. سپس ازوی خواسته می‌شود رقم صدگان را در۲ ضرب و با ۳ جمع‌کند، حاصل را در۵ ضرب و سپس با۷ جمع کند، رقم دهگان را به‌آن بیفزاید، حاصل را در ۲ ضرب و با ۳ جمع کند، این حاصل جمع را در ۵ ضرب کند و رقم یکان را به‌آن بیفزاید، و نتیجه را اعلام کند. ازاین نتیجه، شخص درخواست‌کننده درنهان ۲۳۵ را کم می‌کند و عدد اصلی را به دست می‌آورد.

(ج) از شخصی خواسته می‌شود که عددی سه رقمی که ارقام اول و سوم آن متفاوت‌اند، درنظربگیرد. سپس از وی خواسته می‌شود که تفاضل بین این عدد وعددی را که با عکس ترتیب سه رقم مزبور به دست می‌آید، بیابد. تنها با معلوم شدن آخرین رقم این تفاضل، شخص تردست تمام تفاضل را اعلام می‌کند. او چگونه این کار را انجام می‌دهد؟

عنوان مقاله

۱/۱ امکان وجود حس اعداد در دنیای حیوانات.

۲/۱ شواهد زبانی استفاده از پایه‌هایی جز پایهٔ ده در زمانی درگذشته.
۳/۱ مزایا و معایب پایه‌های غیراز ده.
۴/۱ تاریخچهٔ نوشت‌افزار.
۵/۱ منازعهٔ طرفداران چرتکه با الگوریست‌ها.
۶/۱ اعداد انگشتی و حساب انگشتی.
۷/۱ حساب باچرتکه.
۸/۱ کیپوی باستان.
۹/۱ حساب مایایی.
۱۰/۱ چوبخط.
۱۱/۱ صفر بابلیها.
۱۲/۱ سه به نشانهٔ جمع.
۱۳/۱ تابوهای عددی.
۱۴/۱ راز سنگ کنزینگتون[1].
۱۵/۱ برخی مبدأهای تخیل‌آمیز علامتهای عددی امروزی.
۱۶/۱ مسابقه‌هایی بین چرتکه و ماشین‌حساب رومیزی.

کتابنامه*

ANDREWS, F. E., *New Numbers*. New York: Harcourt, Brace & World, 1935.

BALL, W. W. R., and H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*. 11th ed. New York: Macmillan, 1939.

CAJORI, FLORIAN, *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. Chicago: Open Court Publishing, 1928–29.

CONANT, L. L., *The Number Concept, Its Origin and Development*. New York: Macmillan, 1923.

CUNNINGTON, SUSAN, *The Story of Arithmetic, A Short History of Its Origin and Development*. London: Swan Sonnenschein, 1904.

DANTZIG, TOBIAS, *Number, The Language of Science*. New York: Macmillan, 1946.

FREITAG, H. T., and A. H. FREITAG, *The Number Story*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1960.

GALLENKAMP, CHARLES, *Maya*. New York: McKay, 1959.

GATES, W. E., *Yucatan Before and After the Conquest, by Friar Diego de Landa, etc*. Translated with notes. Maya Society Publication No. 20, Baltimore: The Maya Society, 1937.

GLASER, ANTON, *History of Binary and Other Nondecimal Numeration*. Published by Anton Glaser, 1237 Whitney Road, Southampton, Pennsylvania 18966, 1971.

HILL, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe*. New York: Oxford University Press, 1915.

---

1. Kensington

* به‌عنوان متممی براین کتابنامه و کتابنامه‌های فصول آتی، به‌کتابنامهٔ عمومی، صفحهٔ ۳۶۵ [جلد ۲] مراجعه کنید.

KARPINSKI, LOUIS CHARLES, *The History of Arithmetic*. New York: Russell & Russell, 1965.
KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.
LARSON, H. D., *Arithmetic for Colleges*. New York: Macmillan, 1950.
LOCKE, L. LELAND, *The Ancient Quipu or Peruvian Knot Record*. New York: American Museum of Natural History, 1923.
MENNINGER, KARL, *Number Words and Number Symbols, A Cultural History of Numbers*. Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press, 1969.
MORLEY, S. G., *An Introduction to the Study of the Maya Hieroglyphs*. Washington: Government Printing Office, 1915.
———, *The Ancient Maya*. Stanford, Calif.: Stanford University Press, 1956.
ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.
PULLAN, J. M., *The History of the Abacus*. New York: Praeger, 1968.
RINGENBERG, L. A., *A Portrait of 2*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics. 1956.
SMELTZER, DONALD, *Man and Number*. New York: Emerson Books, 1958.
SMITH, D. E., *Number Stories of Long Ago*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1958.
———, and JEKUTHIEL GINSBURG, *Numbers and Numerals*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1958.
———, and L. C. KARPINSKI, *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston: Ginn, 1911.
SWAIN, R. L., *Understanding Arithmetic*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1957.
TERRY, G. S., *The Dozen System*. London: Longmans, Green, 1941.
———, *Duodecimal Arithmetic*. London: Longmans, Green, 1938.
THOMPSON, J. E. S., "Maya arithmetic." *Contributions to American Anthropology and History*. vol. 36: 37-62. Washington: Carnegie Institution of Washington Publication No. 528, 1941.
———, *The Rise and Fall of Maya Civilization*. Norman, Okla: University of Oklahoma Press, 1954.
VON HAGEN, VICTOR M., *Maya, Land of the Turkey and the Deer*. Cleveland: World Publishing, 1960.
YOSHINO, Y., *The Japanese Abacus Explained*. New York: Dover, 1963.
ZASLAVSKY, CLAUDIA, *Africa Counts, Number and Pattern in African Culture*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1973.

۲

ریاضیات بابلی و مصری

۲-۱ شرق باستان

ریاضیات اولیه برای توسعهٔ خود به یك پایهٔ عملی نیازمند بود و چنین پایه‌ای باپیدایش اشکال پیشرفته‌تر جامعه به‌وجود آمد. در امتداد برخی از رودخانه‌های بزرگ افریقا و آسیا یعنی نیل در افریقا، دجله و فرات در آسیای غربی، سند و پس از آن گنگ در آسیای جنوبی میانه، و هوانگ‌هو[1] و پس از آن یانگ‌تسه[2] در آسیای شرقی بود که اشکال جدید جامعه ظاهر شدند. باخشك کردن باتلاقها، کنترل سیلاب، و آبیاری، این امکان وجودداشت که زمینهایی واقع در امتداد این رودخانه‌ها به‌نواحی کشاورزی ثروتمندی تبدیل شوند. طرحهای گسترده‌ای از این‌نوع، نه‌تنها این مکانهای سابقاً جدا ازهم را به‌هم متصل کردند، بلکه مهندسی، علوم مالی، و مدیریت طرحها و مقاصدی که این طرحها برای‌آنها ابداع می‌شدند، توسعهٔ دانش فنی و ریاضیات ملازم باآن را ایجاب کردند. ازاین‌رو، می‌توان گفت که ریاضیات اولیه درنواحی معینی از شرق باستان و بدواً به‌عنوان دانشی‌عملی‌برای کمك به‌کارهای‌کشاورزی و مهندسی پدید آمده است. این‌کارها به‌محاسبهٔ یك‌تقویم قابل استفاده، ایجاد دستگاههای اوزان و مقادیر برای استفاده در برداشت محصول، انبارکردن و تقسیم غذا، ایجاد روشهای نقشه‌برداری برای ساختن آبراهها وآب‌بندها وبرای‌توزیع زمین، وکسب تجربیات مالی و بازرگانی برای وضع و جمع‌آوری مالیاتها وبرای‌مقاصد

---

1. Hwang Ho 2. Yangtze

داد و ستد نیاز داشتند.*

همچنان که دیدیم، تأکید اولیهٔ ریاضیات برحساب عملی ومساحی بود. حرفهٔخاصی برای پرورش، به‌کارگیری، و آموزش این دانش عملی بـه‌وجود آمد. مع‌هذا در چنین احوالی گرایش به‌تجرید به‌ناچار می‌بایست پدید می‌آمد و از آن پس علم مزبور تاحدودی به‌خاطرخودعلم مورد مطالعه‌قرارگرفت. بدین‌طریق بودکه‌جبر مآلا ازتکامل حساب به‌وجود آمد و مقدمات هندسهٔ نظری ازبطن مساحی رشد یافت.

با این حال باید توجه داشت که درتمام ریاضیات شرق باستان، حتی یك مـورد از آنچه‌که امروزه آن‌را برهان می‌نامیم، نمی‌توان پیداکرد. به‌جای استدلال، صرفاً توصیفی از یك سلسله عملیات وجود دارد. به‌شخص دستورداده می‌شودکه «چنین کن و چنان کن». بعلاوه، بجز احتمالا در چند مورد معدود، این دستورها حتی به‌صورت قواعد کلـی داده نشده، بلکه صرفاً برای رشته‌هایی از حالات خاص به‌کار گرفته شده‌انـد. مثلا، در توضیح حل معادلات درجهٔ دوم، نه‌نحوهٔ استخراج سلسله اعمال به‌کاررفته را مشاهده می‌کنیم، ونه شاهد توصیف ایـن سلسله عملیات در قالب عبارات کلی هستیم؛ بلکه به‌جـای آن، تعداد معتنابهی از معادلات درجهٔ دوم عرضه می‌شود و در هرمرحله گفته می‌شودکه هریك ازاین موارد خاص را چگونه حل کنیم. روشهای «چنین‌کن و چنان‌کن» هرچندکه نامقبول به‌نظر آیند، نباید تعجب‌آور باشند، زیراکه اینها تاحد زیادی همان روشهایی هستندکه خود ما اغلب در تدریس قسمتهایی از ریاضیات در دبستانها و دبیرستانها به‌کار می‌بریم.

در تعیین‌قدمت اکتشافاتی‌که در شرق باستان به‌عمل‌آمده است، مشکلاتی‌وجوددارد. یکی از این مشکلات در ماهیت ایستای ساخت اجتماعی و انزوای طولانی برخی نواحی نهفته است. مشکل دیگر معلول جنس موادی است‌که‌کشفیات برآنها ثبت می‌شدند. بابلیها ازلوحهای سفالی پردوام استفاده می‌کردند ومصریها سنگ و پاپیروس را به‌کار می‌بردند، که خوشبختانه این دومی به‌علت‌آب وهوای‌فوق‌العاده خشك منطقه پردوام بود. اماچینیان و هندیان اولیه از وسایل کاملا بی‌دوام مانند پوست درخت و خیزران استفاده می‌کردند. بدین‌ترتیب درحالی‌که اکنون‌کمیت نسبتاً قابل ملاحظـه‌ای از اطلاعات قطعی راجع به

* فرضیهٔ دیگری وجود داردکه ریشهٔ ریاضیات را در شعائر مذهبی می‌دانـد و نقش‌کشاورزی، داد و ستد، و مساحی را درمراحل بعد قرار می‌دهد. رجوع‌کنیدبه

A. Seidenberg, "The ritual origin of geometry," *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1962), pp. 488 – 527, and "The ritual origin of counting," *Archive for History of Exact Sciences* 2 (1962), pp 1–40.

می‌توان‌فرضیهٔ دیگری هم اقامه‌کردکه مبدأ ریاضیات را درهنر، زبان جهانشمول انسان، بداند. یا آیا ریاضیات پیش‌از پیدایش انسان، سرچشمه در دنیای حیوانات، حشرات، و نباتات داشته است؛ یا ریشهٔ آن در سحابیهای مارپیچی، مسیرهای سیارات و ستارگان دنـباله‌دار، و تبلور اجسام کانی در دورهٔ مقدم برموادآلی بوده‌است؛ یا آیا ریاضیات همواره موجود وصرفاً منتظر اکتشاف بوده است؛

علوم و ریاضیات بابلیان و مصریان باستان موجود است، دربارهٔ این مطالعات در چین و هند باستان اطلاعات کمی، ولو بامیزان قطعیت اندك، وجود دارد. از این‌رو فصل حاضر، که عمدتاً به‌ریاضیات در قرنهای پیش از دورهٔ ریاضیات یونانی اختصاص دارد، محدود به‌بابل و مصرخواهد بود.

بـابـل

۲-۲ منابع

باستان‌شناسانی که در بین‌النهرین کار می‌کنند، از قبل از اواسط قرن نوزدهم تاکنون حدود نیم میلیون لوح سفالی منقوش را به طور منظم از زیر خاك درآورده‌اند. بالغ بر ۵۰۰۰۰ لوح تنها در محل شهرباستانی نیپور[1] درحفاریها به‌دست آمده است.مجموعه‌های نفیس‌کثیری ازاین لوحها، نظیرمجموعه‌های موزه‌های بزرگ پاریس،برلین، ولندن، ودر نمایشگاههای باستان‌شناسی دانشگاههای ییل،کلمبیا و پنسیلوانیا، موجودند. اندازهٔ لوحها متفاوت است و بین آنها از لوحهایی به‌مساحت چند اینچ مربع گرفته تالوحهایی تقریباً به‌ابعادکتاب حاضروجود داردکه ضخامت این‌لوحهای بزرگ دروسط، درحدود یك اینچ و نیم است. گاهی نوشته تنها در یك طرف،گاهی در دو طرف، و اغلب برلبه‌های پخ‌لوح ظاهرمی‌شود.

از نیم میلیون لوح، تقریباً ۳۰۰ تا به‌عنوان لوحهای صرفاً ریاضی شناسایی شده‌اند که شامل جداول وسیاهه‌هایی از مسائل ریاضی‌اند. ما دانش خود را از ریاضیات بابلی* باستان مدیون کشف رمز و تفسیر فاضلانهٔ عدهٔ بسیاری ازاین لوحهای ریاضی هستیم.

تا پیش از سال ۱۸۰۰ کوششی برای کشف رمز خط میخی به‌عمل نیامد، و دراین سال عده‌ای مسافر اروپایی متوجه کتیبه‌هایی شدندکه درکنارنقوش برجسته درحدود ۳۰۰ پایی از سطح زمین برصخره‌های آهکی عظیمی نزدیك دهکدهٔ بیستون، در شمال غرب ایران‌کنونی، کنده شده بودند. معمای کتیبه‌ها سرانجام توسط‌سرهنری کرسویك رالینسون[2] (۱۸۹۵-۱۸۱۰)، دیپلمات و آشورشناس کشف شدکه او کلیدی را که باستان‌شناس و زبان‌شناس آلمانی گئورگ فریدریش گروتفند[3] (۱۸۵۳ - ۱۷۷۵) پیشنهاد کرده بود، تکمیل کرد.

با به‌وجودآمدن توانایی لازم برای خواندن متون میخی لوحهای بابلی‌حفاری‌شده،

---

1. Nippur

* باید توجه‌شودکه واژهٔ توصیفی بابلی صرفاً برای سهولت امربه‌کار می‌رود، و اقوام دیگری علاوه بربابلیها ــ مانند سومریها، اکدیها (Akkadians)،کلدانیها،آسوریها، و سایر اقوام عهد باستان‌که ساکن‌آن منطقه بودند ــ نیز مشمول این اصطلاح می‌شوند.

2. Sir Henry Creswicke Rawlinson

3. Georg Friedrich Grotefend

معلوم شد که این لوحها ظاهراً به‌کلیهٔ مراحل و علایق زندگی آن اعصار مربوط بوده و ادوار مختلف تاریخ بابل را شامل می‌شوند. برخی‌متون ریاضی وجود داردکه سابقهٔ آنها به‌دورهٔ نهایی سومری، احتمالا در ۲۱۰۰ق.م. می‌رسد؛ دومین گروه‌که گروه بسیار بزرگی است به‌سلسلهٔ بابلی اول‌که جانشین آنها شدند، یعنی به‌دوره‌ای ازشاه حمورابی[1] تاحدود ۱۶۰۰ ق.م. برمی‌گردد؛ وگروه پرشمار سومی که به‌سالهای ۶۰۰ ق.م. تا ۳۰۰ ب.م. مربوط می‌شود و امپراطوری بابلـی جدید نبوکدنصر[2] [بخت‌النصر] و دوره‌های بعدی پارسی و سلوکـی را دربرمی گیرد. خلاً بین دومین و سومین گروه با یك دورهٔ به‌ویژه بحرانی از تاریخ بابل انطباق می‌یابد. قسمت عمدهٔ دانش مـا از محتویات این لوحهای ریاضی به‌بعد از سال ۱۹۳۵ مربـوط می‌شود و عمدتاً مرهـون اکتشافات قابـل تحسین اوتونوگه‌باوئر[3] و ف. تورو-دانژن[4] است. ازآنجاکه‌کارتفسیر این‌لوحها هنوز در دست اقدام است، کشفیات جدید، و شاید چشمگیری درآیندهٔ نزدیك بسیار محتمل است.

۲-۳ ریاضیات بازرگانی و ارضی

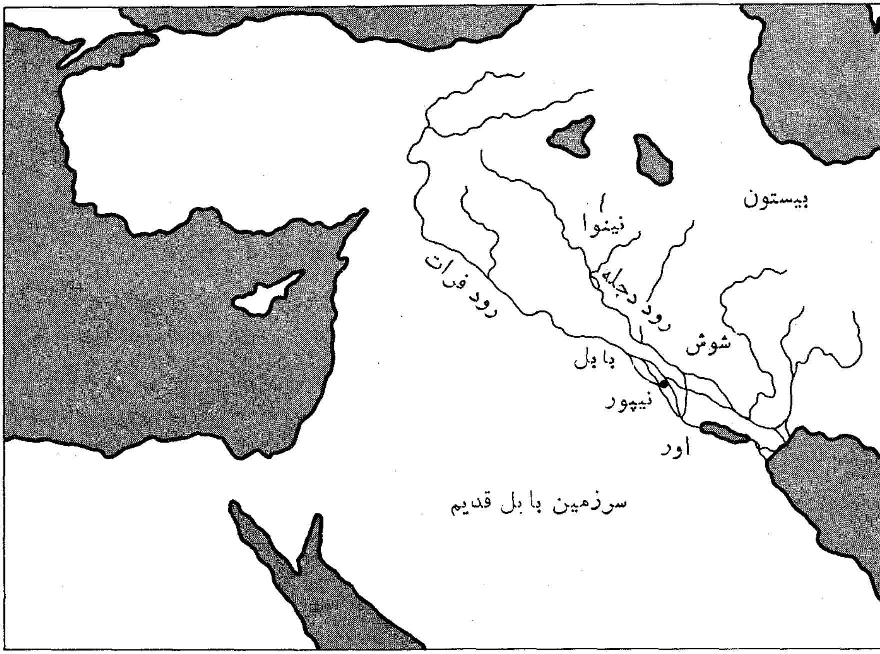
حتی‌قدیمیترین‌لوحها‌نشانی‌ازمهارت درمحاسبه درسطحی‌عالی‌داشته و وجود دستگاه‌موضعی شصتگانی [ستینی] را طی مدت زمانی طولانی آشکار می‌کنند. متون متعددی ازاین‌دورهٔ اولیه‌که به‌واگذاری مزارع و محاسبات حسابی برپایهٔ این معاملات می‌پردازند، در دست است. این لوحها نشان می‌دهندکه سومریهای باستان با کلیهٔ انواع قراردادهای رسمی و غیررسمی، مانند صورتحساب، رسید، سفته، حساب، مرابحهٔ ساده و مرکب، رهن، قباله،و ضمانت آشنا بوده‌اند. لوحهایی وجود دارندکه اسناد شرکتهای بازرگانی‌اند، ولوحهای دیگری‌که با دستگاههای اوزان و مقادیر سروکار دارند.

بسیاری از عملیات حسابـی به‌کمك جداول مختلف انجام مـی‌شد. از ۳۰۰ لوح ریاضی در حدود ۲۰۰ تایشان لوحهای جدولی‌اند. این لوحهای جدولی، جداول ضرب، جداول عکسها، جداول مربعات و مکعبات، و حتی جداول توان را نشان می‌دهند. جداول اخیر احتمالاً، همراه بادرونیابی، در مسائل راجع به ربح مرکب به کارمی‌رفتند. جداول عکسها برای تحویل تقسیم به‌ضرب مورد استفاده بودند.

گواه این امرکه تقویم مورد استفادهٔ بابلیها در اعصار قدیمتر ایجاد گردیده بود، این‌حقایق‌اندکه سال‌آنها بااعتدال ربیعی شروع می‌شد و براولین ماه نام‌ثور[5] نهاده شده بود. از آنجاکه در این اعتدال در حدود سال ۴۷۰۰ ق.م. خورشید در برج ثور بود، به‌جرأت می‌توان‌گفت‌که بابلیها از همان هزاره‌های چهارم یا پنجم قبل از میـلاد، نوعی حساب داشته‌اند.

---

1. Hammurabi 2. Nebuchadnezzar 3. Otto Neugebauer
4. F. Thureau-Dangin 5. Taurus



۲ـ۴ هندسه

هندسهٔ بابلی پیوند نزدیکی بامساحی عملی دارد. از مثالهای عینـی متعدد چنین برمی‌آید که بابلیهای ۲۰۰۰ تا ۱۶۰۰ ق.م. بایستی باقواعدکلی محاسبهٔ مساحت مستطیل، مساحت مثلثهای قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین (و شایـد مثلث کلی)، مساحت ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، حجم‌مکعب‌مستطیل، و کلیتر از آن، حجم منشورقائمی که قاعدهٔ آن ذوزنقهٔ خاصی است، آشنا بوده باشند. محیط دایره سه‌برابرقطر و مساحت آن یك دوازدهم مجذور محیط گرفته می‌شد (که هردوبه‌ازای $\pi = ۳$ درست‌اند)، وحجم استوانهٔ مستدیر قائم باپیداکردن حاصلضرب قاعده در ارتفاع به دست می‌آمد. حجم مخروط ناقص یا هرم ناقص مربع‌القاعده به غلط به‌صورت حـاصلضرب ارتفاع در نصف مجموع قاعـده‌ها داده مـی‌شد. بابلیها همچنین می‌دانستندکه اضلاع متناظر در دومثلث قائم‌الزاویه متشابه متناسب‌اند و اینکه عمود رسم شده از رأس مثلث متساوی‌الساقین قاعده را نصف می‌کند، همچنین می‌دانستند کـه زاویهٔ محاط دریك نیمدایره قائمه است. قضیهٔ فیثاغورس نیز برآنها معلوم بود. (دراین‌خصوص به‌بخش ۲ـ۶ رجوع کنید.) لوح نویافته‌ای وجود داردکه در آن از $۳\frac{۱}{۸}$ به‌عنوان تقریب π استفاده شده است (نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۵.۲ (ج)).

جنبهٔ عمدهٔ هندسهٔ بابلی در ماهیت جبری آن است. مسائل بغرنجتـری که در قالب اصطلاحات هندسی آمده‌اند، اساساً مسائل نابدیهی جبری‌اند. نمونه‌ای ازاین گونه‌مسائل را می‌توانید در مطالعهٔ مسئله‌ای۳.۲ بیابید. مسائل متعددی راجع به‌خط قاطع‌موازی‌بایك

ضلع مثلث قائم‌الزاویه وجود دارند که منجر به‌معادلات درجهٔ دوم می‌شوند؛ مسائل‌دیگری وجود دارند که منتهی به دستگاه معادلات می‌شوند، و در یك مورد ده معادله باده مجهول به‌دست می‌آید. لوحی در دانشگاه ییل وجود دارد که احتمالا مربوط به ۱۶۰۰ق.م. است و در آن یك معادلهٔ درجهٔ سوم کلی در بحث هرمهای ناقص پیش می‌آید که نتیجهٔ حذف z از دستگاه معادلات ازنوع زیر می‌باشد

$$z(x^2+y^2)=A, \qquad z=ay+b, \qquad x=c.$$

تقسیم‌محیط دایره به‌۳۶۰جزء مساوی را بدون‌تردید به‌بابلیهای عهدباستان‌مدیونیم. توضیحات عدیده‌ای در توجیه انتخاب این عدد ارائه شده است، اما هیچیك موجه‌تراز آنچه در زیر می‌آید، و اوتونوگه باوئر نیز ازآن هواداری کرده، نیست. در دوره‌های آغازین سومری، واحد بزرگی برای اندازه‌گیری فاصله، که نوعی میل‌بابلی بود، تقریباً معادل هفت مایل امروزی، وجود داشت. چون میل بابلی برای اندازه‌گیری فاصله‌های طولانی به‌کار می‌رفت، بالطبع می‌بایست به‌صورت واحد زمان، یعنی، زمانی‌که برای پیمودن یك میل بابلی لازم است، نیز درمی‌آمد. بعدها، در حوالی هزارهٔ اول قبل از میلاد، وقتی‌که نجوم‌بابلی به‌مقامی رسید که سوابق‌پدیده‌های سماوی به‌طور منظم‌نگهداری می‌شدند، میل‌زمانی بابلی برای اندازه‌گیری‌فواصل زمان مورد پذیرش قرارگرفت. چون مشاهده گردید که یك شبانه‌روز مساوی ۱۲ میل زمانی است و یك شبانه‌روز معادل یك چرخش‌کامل آسمان است، هردورهٔ‌کامل به‌۱۲ جزء مساوی تقسیم گردید. اما، برای‌سهولت، میل‌بابلی به‌۳۰ جزء مساوی تقسیم‌گردیده بود. بدین ترتیب به‌۳۶۰=(۳۰)(۱۲) جزء مساوی برای یك دورکامل می‌رسیم.

۲-۵ جبر

تا سال‌۲۰۰۰ ق.م. حساب بابلی به جبری بیانی، یا منثور متکامل گشته بود. نه‌تنهامعادلات درجهٔ دوم، هم‌باروشی که معادل‌جایگزینی‌دریك فرمول کلی‌است وهم ازراه‌مربع‌کامل‌کردن حل شده بودند، بلکه برخی معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم نیز مورد بحث‌قرار گرفته بودند. لوحی پیدا شده‌که نه‌تنها جدولی‌از مربعات و مکعبات اعداد درست از ۱ تا ۳۰، بلکه همچنین جدولی از ترکیب n^3+n^2 را برای این فاصله به دست می‌دهد. تعدادی مسئله داده‌شده‌اندکه به‌معادلات درجهٔ سومی از نوع $x^3+x^2=b$ منجرمی‌شوند. این معادلات را می‌توان‌بااستفاده از جدول n^3+n^2 حل‌کرد. مطالعهٔ مسئله‌ای ۴.۲راجع به موارد استفادهٔ‌ممکن این جدول خاص است.

برخی لوحهای مربوط به‌۱۶۰۰ ق.م. در دانشگاه ییل وجود دارندکه صدهامسئلهٔ حل‌نشده را ذکرکرده‌اند. این مسائل متضمن دستگاه معادلاتی هستندکه حل‌آنها منجر به معادلات دو مجذوری می‌شود. به‌عنوان مثال داریم

$$xy=600, \qquad 150(x-y)-(x+y)^2=-1000.$$

به‌عنوان مثال دیگری از همان لوحها، یك جفت معادله به‌صورت زیر را داریم

$$xy=a, \qquad bx^{۲}/y+cy^{۲}/x+d=۰$$

که به‌معادله‌ای درجهٔ ششم برحسب x، اما درجهٔ دوم نسبت به $x^{۳}$، منجر می‌شود.

نوگه‌باوئر دو مسئلهٔ جالب راجع به سریها را برلوحی مربوط به‌حدود ۳۰۰ ق.م. در موزهٔ لوور پیداکرده است. یکی از آنها بیان می‌کند که

$$۱+۲+۲^{۲}+ \dots +۲^{۹}=۲^{۹}+۲^{۹}-۱$$

و در لوح دیگر آمده است که

$$۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+ \dots +۱۰^{۲}=\left[۱\left(\frac{۱}{۳}\right)+۱۰\left(\frac{۲}{۳}\right)\right]۵۵=۳۸۵\ .$$

برما روشن نیست که آیا بابلیها بافرمولهای

$$\sum_{i=۰}^{n} r^{i} = \frac{r^{n+۱}-۱}{r-۱}$$

و

$$\sum_{i=۱}^{n} i^{۲}=\frac{۲n+۱}{۳}\sum_{i=۱}^{n} i=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

آشنا بوده‌اند یا نه. اولین این دو برای یونانیان آن عصر معلـوم بود، و ارشمیدس عملا معادلی برای دومی پیداکرد.

بابلیها تقریبهای جالب توجهی برای‌جذر اعداد غیرمربع، مانند ۱۷/۱۲ برای $\sqrt{۲}$ و ۱۷/۲۴ برای $۱/\sqrt{۲}$ ارائه‌کردند. شاید بابلیها از فرمول تقریب

$$(a^{۲}+h)^{۱/۲}\approx a+h/۲a$$

استفاده‌می‌کرده‌اند. تقریب بسیار قابل توجهی برای $\sqrt{۲}$، به‌صورت

$$۱+۲۴/۶۰+۵۱/۶۰^{۲}+۱۰/۶۰^{۳}=۱٫۴۱۴۲۲۱۵۵$$

است که برلوح شمارهٔ ۷۲۸۹ دانشگاه ییل، مربوط به‌حدود ۱۶۰۰ق.م. دیده می‌شود.

جداول نجومیی مربوط به‌قرن سوم قبل‌از میلادموجودند که در آنها به‌طور آشکاری از قاعدهٔ علامتها در ضرب استفاده شده است.

به‌طور خلاصه، نتیجه می‌گیریم که بابلیهای باستان جـدول‌سازهای خستگی‌ناپذیر، محاسبین چیره‌دست، و به‌طور قطع در جبر قویتر از هندسه بوده‌اند. عمق وتنوع مسائلی که مورد مطالعهٔ آنها قرارگرفته، بی‌شك مایهٔ اعجاب است.

۲-۶ پلیمپتن ۳۲۲

شاید مهمترین لوح ریاضی که تاکنون تجزیه و تحلیل‌شده، لوحی باشد که به پلیمپتن ۳۲۲ معروف است، بدین معنی که این لوح فقره‌ای است به‌شمارهٔ کاتالوگ ۳۲۲ در مجموعهٔ ج. ا. پلیمپتن[۱] در دانشگاه کلمبیا. این لوح به خط بابلی قدیم نوشته شده، که قدمتی بین ۱۹۰۰ تا ۱۶۰۰ق.م. دارد، و برای اولین‌بار توسط نوگه‌باوئر و زاکس[۲] درسال ۱۹۴۵ توصیف شده است.*

شکل۴ تصویری از این لوح را به‌دست می‌دهد. متأسفانه قسمتی از سرتاسر لبهٔ چپ شکسته و گم‌شده، و یك لب‌پریدگی عمیق نزدیــك قسمت میانی لبهٔ راست و ناحیهٔ پوسته

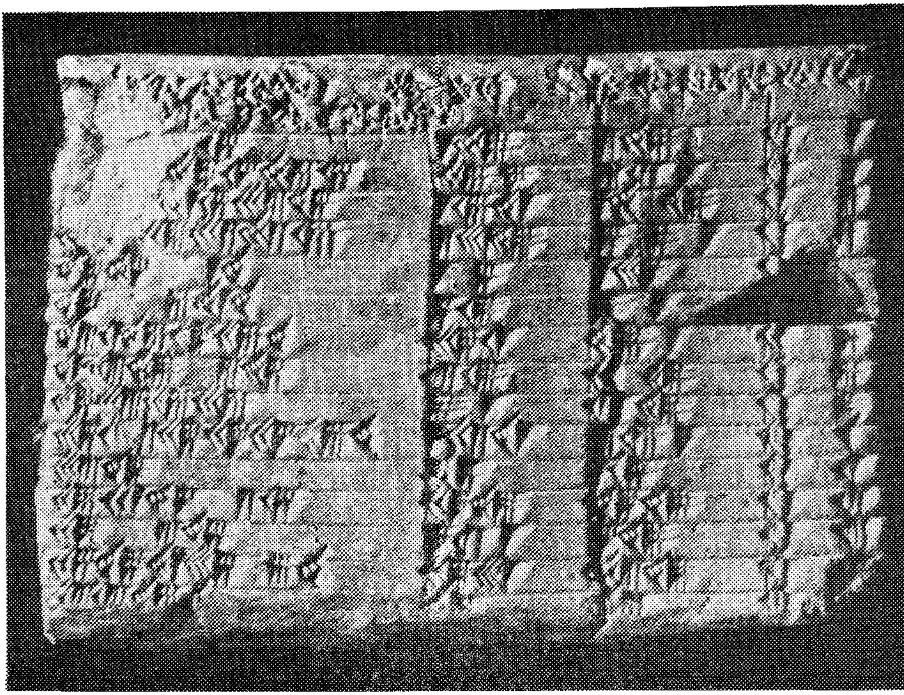
۱		۱۶۹		۱۱۹
۲	(۱۱۵۲۱)	۴۸۲۵		۳۳۶۷
۳		۶۶۴۹		۴۶۰۱
۴		۱۸۵۴۱		۱۲۷۰۹
۵		۹۷		۶۵
۶		۴۸۱		۳۱۹
۷		۳۵۴۱		۲۲۹۱
۸		۱۲۴۹		۷۹۹
۹		۷۶۹	(۵۴۱)	۴۸۱
۱۰		۸۱۶۱		۴۹۶۱
۱۱		۷۵		۴۵
۱۲		۲۹۲۹		۱۶۷۹
۱۳		۲۸۹	(۲۵۹۲۱)	۱۶۱
۱۴		۳۲۲۹		۱۷۷۱
۱۵	(۵۳)	۱۰۶		۵۶

شکل ۴

1. G. A. Plimpton   2. Sachs

* مطالعهٔ مبسوطی از این لوح اخیراً توسط یوران فریبرگ (Jöran Friberg) انجام شده است. نگاه کنید به

"Methods and traditions of Babylonian mathematics," *Historia Mathematica* 8, no. 3, (August 1981): 277–318.



پلیمپتن۳۲۲. (دانشگاه کلمبیا)

پوسته شده‌ای درگوشهٔ بالای سمت چپ صدمهٔ بیشتری به‌آن زده‌اند. در موقع معاینه، بلورهایی از انواع چسب امروزی در امتداد لبهٔ شکستهٔ سمت چپ لوح مشاهده‌شد. این، می‌رساندکه لوح احتمالا در موقع حفاری‌کامل بوده وبعداً شکسته وکوشش شده تاقطعات دوباره به‌هم چسبانده شوند، و قطعات مزبور بعدها از نو ازهم جدا شده‌اند. بنابراین، ممکن است قطعهٔ گمشدهٔ لوح هنوز موجود باشد، اما چون سوزنی در انبارکاه، درجایی‌بین این مجموعه‌های لوحهای باستانی گم شده است. خواهیم دیدکه اگر این قطعهٔ مفقود شده پیدا می‌شد، چقدر جالب می‌بود.

این لوح شامل سه ستون اساساً کامل اعداد است که، برای سهولت، در شکل ۴ با نمادگذاری دهدهی معمولی بازنویسی شده‌اند. ستون چهارمی درامتداد لبهٔ شکسته وجود داردکه بخشی ازآن ناقص است. این ستون را بعداً بازسازی خواهیم‌کرد.

روشن است که ستون واقع در منتهی‌الیه سمت راست صرفاً برای شمارش سطرها به‌کار می‌آید. درنگاه اول به‌نظر می‌رسدکه دو ستون بعدی چندان ترتیب ومعنای مشخصی نداشته باشند. اما، ضمن مطالعه معلوم می‌شودکه اعداد متناظر در این ستونها بجز در چهار مورد استثنایی نامقبول، تشکیل‌وتر و ساق مثلث قائم‌الزاویه‌ای را می‌دهندکه‌اضلاع آن مقادیر صحیح دارند. چهار مورد استثنایی شکل ۴ با قراردادن مقادیر اولیه درداخل پرانتزی در سمت راست مقادیر تصحیح شده، ذکر شده‌اند. برای مورد استثنایی واقع در

سطر دوم توضیح پیچیده‌ای داده‌شده‌است*، ولی علت‌سه استثنای دیگر را به‌سادگی‌می‌توان بیان کرد. مثلاً، درسطر نهم، ۴۸۱ و ۵۴۱ در دستگاه شصتگانی به‌صورت (۸،۱) و(۹،۱) ظاهر می‌شوند. ظهور۹ به‌جای ۸ بـه‌روشنی می‌تواند تنها نـاشی از لغزش قلم در موقع نوشتن این اعداد به‌خط میخی باشد. عدد واقع در سطر ۱۳ مجـذور مقدار تصحیح شده است، و عدد واقع در سطر آخر نصف مقدار تصحیح شده است.

مجموعه‌ای از سه عدد صحیح مثبت، مـانند (۵، ۴، ۳)، که مـی‌تواند اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه باشد، به **سه‌تایی فیثاغورسی** معروف‌است. همچنین، درصورتی که‌سه‌تایی مزبور شامل هیچ عامل مشترك صحیحی بجز واحد نباشد، **سه‌تایی فیثاغورسی‌اولیه** نامیده می‌شود. مثلاً (۵، ۴، ۳) یك سه‌تایی اولیه است، در حالی کـه (۱۰، ۸، ۶) چنین نیست. یکی از دستاوردهای ریاضی متجاوز بریك هزاره بعد از زمان لوح پلیمپتن نشان دادن این مطلب بود که کلیهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی اولیهٔ (a, b, c) بـه صورت پارامتری به وسیلهٔ روابط

$$a=2uv, \quad b=u^2-v^2, \quad c=u^2+v^2$$

داده می‌شوند که در آنها u و v نسبت بـه‌هم اول‌اند، دارای زوجیت متفـاوت هستند، و $u>v$. مثلاً، اگر $u=2$ و $v=1$، سه‌تایـی اولیهٔ $a=4$، $b=3$، $c=5$ را بـه‌دست می‌آوریم.

فرض کنید که بخواهیم a، ساق دیگر مثلثهای قائم‌الزاویهٔ به‌اضلاع صحیح‌رامحاسبه کنیم که با وتر c و ساق b مفروض در لوح پلیمپتن معین می‌شوند. سه‌تاییهای فیثاغورسی جدول صفحهٔ بعد را پیدا خواهیم کرد. ملاحظه می‌شود که همهٔ این سه‌تاییها، بجز آنها که در سطرهای ۱۱ و ۱۵ واقـع‌اند، سه تاییهای اولیه‌اند. بـرای سهولت بحث، مقادیـر پارامترهای u و v را نیز کـه به‌این سه‌تاییـهای فیثاغورسی منجر می‌شوند، در جدول آورده‌ایم. شواهد به‌خوبی گویای آن‌اند که بابلیهای آن‌دورهٔ دیرین با نمایش کلی‌پارامتری سه‌تاییهای فیثاغورسی اولیه، به گونه‌ای که در بالا نشان‌داده‌شده، آشنا بوده‌اند. این شواهد زمانی تقویت‌می‌شوند که توجه‌کنیم u و v، و لذا a نیز (چون $a=2uv$)، اعدادشصتگانی منظمی هستند (به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱.۴ رجوع کنید) به‌نظر می‌رسد که جدول‌روی لوح با انتخاب سنجیدهٔ اعداد منظم کوچك برای پارامترهای u و v تشکیل شده باشد.

قاعدتاً انگیزهٔ انتخاب u و v به‌صورت فوق، بایستی عمل بعدی کـه متضمن تقسیم است بـوده باشد. زیرا اعداد منظم در جداول معکوسها ظاهـر می‌شوند و برای تحویل تقسیم به‌ضرب به‌کار مـی‌روند. بررسی ستون چهـارم که نیمی از آن از بین رفته است،

* رجوع کنید به

R.J. Gillings, *The Australian Journal of Science*, 16(1953), pp. 34–36.

یـا

Otto Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2nd ed., 1962.

a	b	c	u	v
۱۲۰	۱۱۹	۱۶۹	۱۲	۵
۳۴۵۶	۳۳۶۷	۴۸۲۵	۶۴	۲۷
۴۸۰۰	۴۶۰۱	۶۶۴۹	۷۵	۳۲
۱۳۵۰۰	۱۲۷۰۹	۱۸۵۴۱	۱۲۵	۵۴
۷۲	۶۵	۹۷	۹	۴
۳۶۰	۳۱۹	۴۸۱	۲۰	۹
۲۷۰۰	۲۲۹۱	۳۵۴۱	۵۴	۲۵
۹۶۰	۷۹۹	۱۲۴۹	۳۲	۱۵
۶۰۰	۴۸۱	۷۶۹	۲۵	۱۲
۶۴۸۰	۴۹۶۱	۸۱۶۱	۸۱	۴۰
۶۰	۴۵	۷۵	۲	۱
۲۴۰۰	۱۶۷۹	۲۹۲۹	۴۸	۲۵
۲۴۰	۱۶۱	۲۸۹	۱۵	۸
۲۷۰۰	۱۷۷۱	۳۲۲۹	۵۰	۲۷
۹۰	۵۶	۱۰۶	۹	۵

پاسخ را می‌دهد. زیرا دیده می‌شود که این ستون شامل مقادیر $(c/a)^۲$ برای مثلثهای مختلف است. برای انجام این تقسیم، ضلع a، ودر نتیجه اعداد u و v، باید منظم می‌بودند.

جا دارد که ستون مقادیر $(c/a)^۲$ را قدری دقیقتر بررسی کنیم. البته، این ستون جدولی است که مجذور سکانت زاویهٔ B مقابل به‌ضلع b از مثلث قائم‌الزاویه را به‌دست می‌دهد. چون ضلع a منظم است، $\sec B$ دارای بسط شصتگانی متناهی است. بعلاوه، با انتخاب خاص مثلثها به‌صورتی که داده شده، چنین نتیجه می‌شود که مقادیر $\sec B$ دنباله‌ای با نظم شگفت‌انگیز تشکیل می‌دهند که وقتی از سطری به‌سطر دیگر جدول می‌رویم، تقریباً درست به‌اندازهٔ ۱/۶۰ کاهش می‌یابند، و زاویهٔ متناظر از ۴۵° به ۳۱° تنزل می‌یابد. بدین ترتیب یک‌جدول سکانت برای زوایای از ۴۵° تا ۳۱° دردست داریم که به‌کمک مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع صحیح ساخته شده‌است و در آن به‌جای زاویهٔ متناظر، تابع‌دارای جهش منظمی است. همهٔ اینها در واقع درخور توجه‌اند. بسیار محتمل به‌نظر می‌رسد که جداول دیگری همراه آنها با اطلاعات مشابهی برای زوایای بین ۳۰° تا ۱۶° و از ۱۵° تا ۱° موجود بوده‌اند.

این تجزیه و تحلیل لوح پلیمپتن به‌شمارهٔ ۳۲۲ لزوم توجه دقیقی را که باید به‌برخی از لوحهای ریاضی بابلی معطوف شود، نشان می‌دهد. سابقاً، ممکن بود که چنین لوحی را به‌تصور اینکه صرفاً یک فهرست یا سند بازرگانی است با بی‌توجهی کنار گذارند.

مصر

۲-۷ منابع و تاریخها

ریاضیات مصر باستان، برخلاف اعتقاد عموم، هرگز به‌سطحی که ریاضیات بابلی به‌آن نایل شد، نرسید. شاید این امر معلول توسعهٔ پیشرفته‌تر اقتصادی بابل بوده باشد. بابل بر سرراه تعدادی جاده‌های کاروان‌رو بزرگ قرار داشت، در حالی که مصر نیمه‌منزوی بود. نیل نسبتاً آرام هم نیازمند مهندسی و امور اداری چندان گسترده‌ای درحدرودخانه‌های باجریان متغیر دجله و فرات نبود.

بااین‌حال، تاکشف رمزتعداد زیادی لوح ریاضی بابلی دراین اواخر، مصر برای مدت مدیدی غنیترین منبع پژوهشهای تاریخی عهد باستان بود. دلایل این امر دراحترامی که مصریان برای مردگان خود قایل بودند و درآب و هوای آن ناحیه‌که به‌طورنامعمول خشك بود، نهفته است. اولی منجر به‌بنای قبور و معابد دیرپا با دیوارهایی پراز نقش و نگار گردید و دومی در حفظ بسیاری از پاپیروسها و اشیایی‌که در غیراین‌صورت ازبین می‌رفتند، نقش برجسته‌ای داشت.

در زیر، فهرستی گاهشناختی، از برخی نمونه‌های برجسته‌که مطالبی از ریاضیات مصرباستان را در خود دارند، می‌آید.

۱. ۳۱۰۰ ق. م. در موزه‌ای واقع در آکسفورد یك گرز سلطنتی مصری به‌همین قدمت وجود دارد. در روی‌گرز اعدادی از مرتبهٔ میلیون و صد هزار، نوشته شده به‌هیروگلیفی مصری، موجودندکه نتایج یك لشکرکشی موفقیت‌آمیز نظامی بر آنها ثبت شده است.

۲. ۲۹۰۰ق.م. هرم بزرگ جیزه[1] در حدودسال ۲۹۰۰ ق.م. برپاگردید وبدون شك ساختن آن متضمن برخی مسائل ریاضی ومهندسی بود. این بنا ۱۳ جریب را می‌پوشاند و مشتمل بر ۲۰۰۰۰۰۰ قطعه سنگ است‌که وزن متوسطی برابر ۲٫۵ تن دارند و بادقت بسیار باهم جفت شده‌اند. این قطعه سنگها از معادن سنگ سیاه واقع در آن سوی نیل آورده شده بودند. سقف بعضی از اتاقها از قطعات سنگ خارای ۵۴ تنی، به طول ۲۷ فوت و ضخامت ۴ فوت ساخته شده‌اندکه از معدن سنگی واقع در فاصلهٔ ۶۰۰ مایلی به‌آنجاکشیده و در ارتفاع ۲۰۰ فوتی از سطح زمین نصب شده‌اند. گزارش‌شده است‌که خطای نسبی در قاعدهٔ مربع شکل،کمتر از ۱۴۰۰۰/۱ و خطای نسبی در زوایای قائمهٔ گوشه‌ها از ۲۷۰۰۰/۱ تجاوز نمی‌کند. درجهٔ مهارت مهندسیی که این آمار تکان‌دهنده مستلزم آن است به‌طور قابل ملاحظه‌ای‌کاهش می‌یابد وقتی که پی بریم این مهم توسط‌یك سپاه ۱۰۰۰۰۰ نفری ازکارگران که به‌مدت ۲۰ سال‌کارکرده‌اند، انجام شده است.

۳. ۱۸۵۰ق.م. این تاریخ تقریبی پاپیروس مسکو است، متنی ریاضی مشتمل بر ۲۵ مسئله که درهمان موقع تدوین نوشتهٔ مزبور قدیمی بوده‌اند. پاپیروس مسکو در ۱۸۹۳ در مصر خریداری و در ۱۹۳۰ باتوضیحات ویراستاری منتشر گردید. این پاپیروس ۱۸ فوت

1. Gizeh

درازا و درحدود ۳ اینچ پهنا دارد.

۰.۴ ۱۸۵۰ ق.م. سابقهٔ قدیمیترین وسیلهٔ نجومی موجود که ترکیبی از یك شاقول و میلهٔ دیدگری است، به‌همین تاریخ برمی‌گردد و در موزهٔ برلین نگهداری می‌شود.

۰.۵ ۱۶۵۰ق.م. این تاریخ تقریبی پاپیروس‌ریند(یا احمس)[1] است، یك متن ریاضی که تاحدی ماهیت یك کتاب راهنما را دارد و شامل ۸۵ مسئله است که به‌خط هیراتی به‌وسیلهٔ احمس کاتب از روی یك اثر قدیمیتر نسخه‌برداری شده است. این پاپیروس در ۱۸۵۸ به‌وسیلهٔ مصرشناس اسکاتلندی، ا. هنری‌ریند[2]، درمصر خریداری‌شده و سپس به‌موزهٔ بریتانیا رسیده است. پاپیروسهای ریند ومسکو از منابع اصلی اطلاعات ما دربارهٔ ریاضیات‌مصر باستان هستند. پاپیروس‌ریند درسال ۱۹۲۷ منتشرشد. این‌پاپیروس ۱۸فوت درازا و ۱ فوت پهنا دارد.

۰.۶ ۱۵۰۰ ق.م. بزرگترین مسلهٔ [ستون هرمی شکل سنگی] موجود، که در مقابل معبد خورشید در تبس[3] برپا شده، در حدود این تاریخ از معدن سنگ استخراج شد. این ستون ۱۰۵ فوت درازا دارد با پایه‌ای مربع‌شکل به‌ضلع ۱۰ فوت و وزن‌آن تقریباً ۴۳۰ تن است.

۰.۷ ۱۵۰۰ق.م. موزهٔ برلین یك‌ساعت آفتابی مصری دارد که قدمت آن به‌این‌دوره برمی‌گردد و قدیمیترین ساعت آفتابی موجود است.

۰.۸ ۱۳۵۰ق. م. پاپیروس رولن[4] مربوط به‌حدود ۱۳۵۰ ق.م.، که اکنون درموزهٔ لوور نگهداری می‌شود، شامل تعدادی صورتحساب دقیق نان است که استفادهٔ عملی از اعداد بزرگ را درآن زمان نشان می‌دهد.

۰.۹ ۱۱۶۷ق .م. این تاریخ پاپیروس هریس[5] است. سندی که رامسس[6] چهارم در موقع جلوس به‌تخت شاهی تهیه‌کرده است. این پاپیروس شرح کارهای برجستهٔ پدر وی، رامسس سوم است. سیاههٔ دارایی معبد آن‌عهد بهترین نمونه ازحساب عملی راکه ازمصر باستان به‌ما رسیده، عرضه می کند.

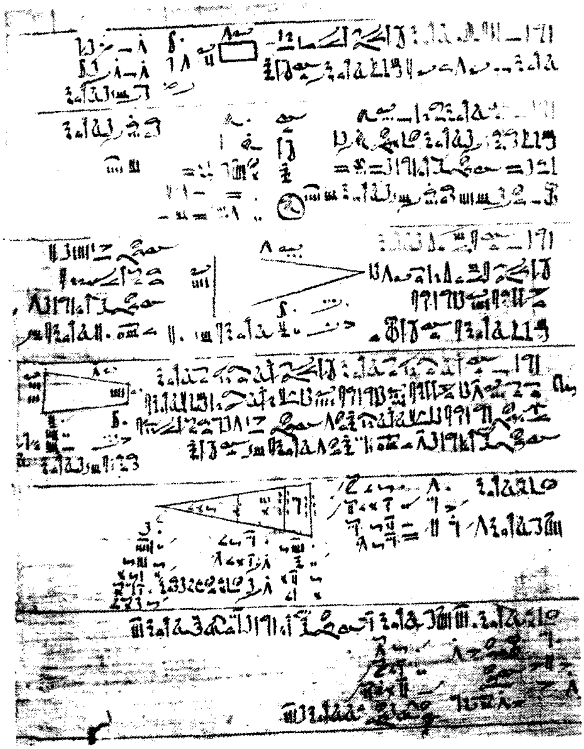
منابعی از مصر باستان که مربوط به‌سالهای بعدتر از زمانهای فوق‌الذکر است دستاورد شایان‌توجهی را چه دردانش ریاضی وچه درفن ریاضی‌نشان نمی‌دهد. در واقع مواردی وجود دارند که مشخصاً نشان از سیرقهقرایی دارند.

۲ـ۸ حساب و جبر

کلیهٔ ۱۱۰ مسئله‌ای که در پاپیروسهای مسکو و ریند دیده می‌شوند، عددی‌اند و عدهٔ زیادی ازآنها بسیار ساده‌اند. اگرچه اغلب این‌مسائل ریشهٔ عملی دارند، برخی ازآنها نیزدارای ماهیت نظری‌اند.

---

1. Ahmes 2. A. Henry Rhind 3. Thebes 4. Rollin
5. Harris 6. Rameses



بخشی از پاپیروس ریند. (موزهٔ بریتانیا)

یك پیامد دستگاه شمار مصری خصلت‌جمعی حساب وابسته به‌آن است. مثلاً، ضرب و تقسیم معمولاً با یك سلسله اعمال دو برابرسازی انجام می‌شد و مبتنی براین حقیقت بود که هرعدد را می‌توان به‌صورت مجموعی از توانهای ۲ نمایش داد. به‌عنوان مثالی ازاین شیوهٔ ضرب، حاصلضرب ۲۶ و ۳۳ را پیدا می‌کنیم. چون ۲+۸+۱۶=۲۶ تنها لازم است که این مضارب ۳۳ را باهم جمع کنیم. این‌کار را می‌توان به‌طریق زیر ترتیب داد:

۱	۳۳
۲*	۶۶
۴	۱۳۲
۸*	۲۶۴
۱۶*	۵۲۸
	۸۵۸

جمع مضارب مناسب ۳۳، یعنی آنهاکه باستاره مشخص شده‌اند، جواب ۸۵۸ را می‌دهد.

همچنین، مثلا، برای تقسیم ۷۵۳ بر ۲۶، مقسوم‌علیه یعنی ۲۶ را به‌طور پیاپی تا مرحله‌ای دو برابر می‌کنیم که دوبرابرسازی بعدی از مقسوم، یعنی از ۷۵۳ متجاوز شود. نحوهٔ کار در زیر نشان داده شده است.

۱	۲۶
۲	۵۲
*۴	۱۰۴
*۸	۲۰۸
*۱۶	۴۱۶
۲۸	

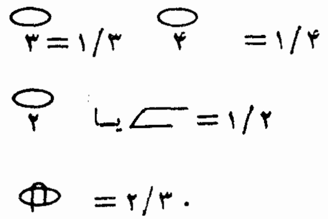
حال، چون

$$
\begin{aligned}
۷۵۳ &= ۴۱۶ + ۳۳۷ \\
&= ۴۱۶ + ۲۰۸ + ۱۲۹ \\
&= ۴۱۶ + ۲۰۸ + ۱۰۴ + ۲۵
\end{aligned}
$$

با توجه به اقلام ستاره‌دار در ستون فوق، ملاحظه می‌کنیم که خارج قسمت ۲۸ = ۴ + ۸ + ۱۶ و باقیمانده ۲۵ است. این روش مصری ضرب و تقسیم نه تنها لزوم یادگیری یك جدول ضرب را منتفی می‌کند، بلکه انجام آن روی چرتکه چنان آسان است که روش مزبور تا زمانی که این وسیله مورد استفاده بود، و حتی مدتی بعد از آن، دوام آورد.

مصریان سعی کردند با نمایش دادن همهٔ کسرها، بجز ۲/۳، به‌صورت مجموعی از به‌اصطلاح **کسرهای واحد**، یا کسرهایی با صورت واحد، از برخی مشکلات محاسبه‌ای که در مواجهه با کسرها پیش می‌آیند، احتراز کنند. این تبدیل به‌کمك جداولی مقدور می‌گردید که کسرهای به‌شکل n/۲ را، که به‌علت ماهیت ثنایی ضرب مصری تنها موارد ضروری بودند، به‌این صورت نمایش می‌دادند. پیشاپیش مسائل پاپیروس ریند چنین جدولی برای کلیهٔ اعداد فرد از ۵ تا ۱۰۱ آمده است. مثلا دیده می‌شود که ۲/۷ به‌صورت ۱/۲۸ + ۱/۴، ۲/۹۷ به‌صورت ۱/۷۷۶ + ۱/۶۷۹ + ۱/۵۶، و ۲/۹۹ به صورت ۱/۱۹۸ + ۱/۶۶ بیان شده، و برای هرحالت خاص فقط یك تجزیه عرضه‌شده‌است. این جدول در بعضی مسائل پاپیروس مزبور مورد بهره‌برداری قرار گرفته است.

کسرهای واحد در خط هیروگلیفی مصری با قرار دادن یك نماد بیضی‌شکل روی عدد مخرج نشان داده می‌شد. نماد خاصی نیز برای مورد استثنایی ۲/۳ به‌کار می‌رفت. گاهی نماد دیگری برای نشان‌دادن ۱/۲ ظاهر می‌گردید. این نمادها همراه با چند شماد امروزی در شکل بعد نشان داده‌شده‌اند.



نظریه‌های جالبی در توضیح اینکه مصریان چگونه تجزیه به‌کسرهای واحد را به‌دست آوردند، وجود دارد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۹.۲).

اغلب ۱۱۰ مسئلهٔ پاپیروسهای ریند و مسکو از آنجا که بامسائلی راجع به قوت[1] نان و آبجو، ترکیب خوراك برای دام و طیور خانگی، و انبارکردن غله سروکاردارند، مبدأ عملی آنها را نشان می‌دهند. اکثر آنها به‌چیزی بیش از یك معادلهٔ خطی ساده نیاز ندارند و عموماً با روشی حل می‌شوند که بعدها در اروپا به **قاعدهٔ امتحان و تصحیح**[2] معروف گردید. به‌عنوان مثال، برای‌حل

$$x+x/۷=۲۴$$

مقدار مناسبی برای x در نظر بگیرید، مثلا $x=۷$. آنگاه مقدار طرف دوم به جای ۲۴ برابر ۸ به‌دست می‌آید. چون ۸ باید در ۳ ضرب شود تا مقدار مورد نظر۲۴ را عاید کند، مقدار صحیح x باید (۷)۳، یا ۲۱ باشد.

برخی مسائل نظری وجود دارند که متضمن تصاعدهای حسابی و هندسی‌اند. (برای مثال، نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای۱۲.۲ (ج)وبخش۲ـ۱۰). پاپیروسی به‌تاریخ۱۹۵۰ق.م. که در کاهون[3] پیدا شده، حاوی مسئلهٔ زیر است: «سطح مفروضی با۱۰۰ واحد مساحت باید به‌صورت مجموع دو مربع که نسبت اضلاع آنها به‌هم مثل ۱:۳/۴ است، نشان‌داده شود». دراینجاداریم $x^۲+y^۲=۱۰۰$ و $x=۳y/۴$. حذف x، معادلهٔ درجهٔدوم‌یکدستی برحسب y به‌دست می‌دهد. مع‌هذا، می‌توانیم مسئله را به‌روش امتحان و تصحیح حل کنیم. مثلا، فرض کنید $y=۴$. آنگاه $x=۳$، وبه‌جای ۱۰۰ داریم، $x^۲+y^۲=۲۵$. بنابراین، باید مقادیر x و y را بادوبرابر ساختن مقادیر اولیه تصحیح کنیم که $x=۶$ و $y=۸$ را به‌دست می‌آوریم.

در جبر مصری تاحدی نمادگرایی وجود دارد. در پاپیروس ریند نمادهایی را برای باضافه و منها مشاهده می‌کنیم. اولین این نمادها یك جفت پا راکه درحال‌راه‌رفتن از راست به‌چپ، که جهت معمولی نوشتن خط مصری است و نماد دیگر یك جفت پاراکه در حال راه‌رفتن از چپ به‌راست، یعنی درجهت مخالف نگارش خط مصری است، نشان می‌دهد. برای تساوی و مجهول نیز نمادها یا ایدئوگرامهایی وجود داشته‌اند.

---

1. strength 2. rule of false position 3. Kahun

۲ـ۹ هندسه

بیست و شش مورد از ۱۱۰ مسئلهٔ موجــود در پاپیروسهای مسکــو و ریند هندسی هستند. اغلب این مسائل از فرمولهای مساحی لازم برای محاسبهٔ مساحت زمینها و حجم انبارهای غله ناشی می‌شوند. مساحت دایره مساوی مساحت مربعی که روی ۸/۹ قطر ساخته شود، و حجم استوانهٔ قائم به‌صورت حاصلضرب مساحت قاعده در طول ارتفاع آن گرفته می‌شود. از تحقیقات جدید به‌نظر می‌رسدکه مصریان‌قدیم می‌دانسته‌اندکه مساحت هر مثلث با نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع داده می‌شود. برخی از مسائل به‌کتانژانت فرجهٔ بین قاعده و وجهی از یك هرم می‌پردازند (به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱۰۲ رجــوع کنید)، مسائل دیگــری آشنایی مصریان را با نظریهٔ مقدماتی تناسب نشان می‌دهند. برخلاف داستانهای مکرر و مسلماً بی‌اساس، هیچ‌دلیل مستندی حاکی از اینکه مصریان حتی از حالت خاصی از قضیهٔ فیثاغورس بااطلاع بوده‌اند، یافته نشده است. در منابع جدیدتر مصری، فــرمول‌نادرست $K=(a+c)(b+d)/۴$ برای پیداکردن‌مساحت‌یك‌چهار ضلعی دلخواه بااضلاع‌متوالی به‌طولهای a،b،c،d به‌کار رفته است.

در پاپیروس مسکو، وجود یك مثال عددی از فرمول درست حجم هرم ناقص مربع‌القاعده خیلی شایان توجه است (به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۴۰۲ (الف) رجوع کنید). هیچ‌مثال دیگری ازاین فرمول که در وثوق‌آن جای تردید نباشد، در ریاضیات شرق باستان دیــده نشده و جوابهای متعددی برای شرح چگونگی پیدایش‌آن ابراز شده است. ا.ت. بل[۱] از این نخستین مثال مصری بحق به‌عنوان «بزرگترین هرم مصری» یاد می‌کند.

۲ـ۱۰ یك مسئلهٔ عجیب در پاپیروس ریند

گرچه درکشف رمز و بعداً درتفسیر اغلب مسائل پاپیروس ریند مشکل کمــی پیش‌آمــد، مسئله‌ای (مسئلهٔ شمارهٔ ۷۹) وجوددارد کــه تفسیرآن چندان قطعــی نیست. دراین مسئله، مجموعهٔ عجیبی از داده‌ها ظاهر می‌شوندکه برگردان آن به‌صورت زیراست:

ملك	
خانه	۷
گربه	۴۹
موش	۳۴۳
دانهٔ گندم	۲۴۰۱
میزان هکات[۲]	۱۶۸۰۷
	۱۹۶۰۷

1. E. T. Bell

۲. hekat پیمانهٔ غله و میوه بوده است. ـــم.

به‌سادگی می‌توان تشخیص داد که این اعداد پنج توان اول ۷، همراه با مجموع آنها، هستند. بدین‌خاطر، در وهلهٔ اول تصور شد که نویسنده در اینجا قصد ارائهٔ نامهای نمادی خانه، گربه، و غیره را، برای توان اول، توان دوم، و غیره دارد.

با این حال، توضیح موجه‌تر وجالبی به‌وسیلهٔ موریتس کانتور[1] مورخ، در ۱۹۰۷ داده شده‌است. وی در این مسئله، پیشاهنگ باستانی مسئله‌ای را دید که درقرون‌وسطی رایج بود، و لئوناردو فیبوناتچی[2] آن را در لیبر آباکی[3] [کتاب حساب] خود آورده است. یکی از مسائل زیادی که در این اثر دیده می‌شود، بدین‌صورت است: «هفت‌پیرزن در راه رم هستند؛ هرزن هفت‌قاطر دارد؛ هرقاطر هفت توبره حمل می کند؛ هرتوبره محتوی هفت‌قرص نان است، با هر قرص نان هفت چاقو همراه است، و هرچاقو در هفت غلاف نهاده شده است. زنان، قاطرها، توبره‌ها، قرصهای نان، چاقوها، وغلافها، مجموعاً چندتا در راه رم هستند؟» به‌عنوان روایت دیگری‌ازهمین‌مسئله که جدیدتر و برای انگلیسی زبانان آشناتر است، شعری است برای کودکان و به‌زبان انگلیسی قدیم بدین‌مضمون:

وقتی در راه سنت آیوز بودم؛
مردی را باهفت زن ملاقات نمودم؛
هر زن هفت‌تا توبره داشت؛
هرتوبره هفت تاگربه داشت؛
هر گربه هفت‌تا بچه داشت.
بچه گربه‌ها، گربه‌ها، توبره‌ها، و زنها،
چندتا راهی سنت آیوز بودند؟[4]

بنابر تفسیرکانتور، مسئلهٔ اصلی در پاپیروس ریند را شاید بتوان تاحدی به‌صورت زیر فرمولبندی کرد: «ملکی متشکل از ۷ خانه بود؛ هر خانه هفت‌گربه داشت؛ هرگربه هفت موش خورد؛ هرموش هفت‌دانه گندم خورد؛ هردانهٔ گندم قادر به تولید محصولی برابر هفت واحد هکات غله است. خانه‌ها، گربه‌ها، موشها، دانه‌های گندم، میزان غله به‌هکات، چندتا ازاینها در مجموع در این ملك وجود داشتند؟»

پس احتمالا دراینجا مسئله‌ای داریم که به‌عنوان قسمتی از فرهنگ معمایی‌دنیامحفوظ مانده است. مسلماً این مسئله در همان زمانی‌که احمس آن را استنساخ کرده قدیمی بوده

---

1. Moritz Cantor 2. Leonardo Fibonacci 3. *Liber abaci*

4. As I was going to St. Ives
I met a man with seven wives;
Every wife had seven sacks;
Every sack had seven cats;
Every cat had seven kits.
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?

است، و آنگاه که فیبوناتچی صورتی از آن را در کتاب لیبر آباکی خود نقل می‌کرده قدمت بیشتری نزدیك به‌سه‌هزار سال داشته است. متجاوز برهفتصد و پنجاه سال بعد از آن، غربیان صورت دیگری از آن را برای بچه‌های خود می‌خوانند. نمی‌توان در شگفت نشد که آن تغییر حیرت‌آوری که در این شعر انگلیسی قدیم پیش آمده در مسئلهٔ مصر باستان نیز روی نداده باشد.

مسائل معمایی زیادی هر از چندگاه بی‌مقدمه در مجلات امروزی ظاهر می‌شوند که همتاهایی قرون وسطایی دارند. تعیین قدمت بعضی از آنها اکنون تقریباً از محالات است.*

مطالعهٔ مسئله‌ای

۱.۲ اعداد منظم

عددی را (شصتگانی) **منظم** گویند اگر معکوس آن دارای بسط شصتگانی متناهی باشد. (یعنی، یك بسط متناهی وقتی که به‌صورت کسری مبنایی در پایهٔ ۶۰ بیان شود.) به‌استثنای تنها یك لوح درمجموعهٔ ییل، همهٔ جداول عکس بابلی فقط شامل معکوسهای اعدادمنظم‌اند. یك لوح در موزهٔ لوور متعلق به‌حدود ۳۰۰ق.م. شامل عدد منظمی با ۷ رقم شصتگانی است و معکوس آن ۱۷ رقم شصتگانی دارد.

(الف) نشان دهید یك شرط لازم وکافی برای منظم بودن n آن است که $n=2^a3^b5^c$، که درآن a، b، c اعداد صحیح نامنفی‌اند.

(ب) اعداد ۱/۲، ۱/۳، ۱/۵، ۱/۱۵، ۱/۳۶۰، ۱/۳۶۰۰ را با بسط‌شصتگانی متناهی نشان دهید.

(ج) حالت (الف) رابه‌اعدادی تعمیم دهیدکه پایهٔ کلی b دارند.

(د) همهٔ اعداد منظم شصتگانی کوچکتر از ۱۰۰ را فهرست کرده، سپس همهٔ اعداد منظم دهدهی کوچکتر از ۱۰۰ را فهرست کنید.

(ه) نشان دهیدکه نمایش دهدهی ۱/۷ دارای دورهٔ تناوب شش‌رقمی است. در دورهٔ تناوب نمایش شصتگانی ۱/۷ چندرقم وجود دارد؟

۲.۲ ربح مرکب

لوحهایی درمجموعه‌های برلین، ییل، ولوور محتوی مسائلی در ربح مرکب وجوددارند، و چند لوح هم در استانبول موجودندکه ظاهراً در اصل جداولی از a^n برای $n=1$ تا

---

* نگاه کنید به

D. E. Smith, "On the origin of certain typical problems," *American Mathematical Monthly*, 24 (February, 1917): pp. 64–71.

$n = ۱۰$ و $a = ۹،۱۶،۱۰۰،۲۲۵$ داشته‌اند. باچنین جداولی می‌توان معادلات نمایی از نوع $a^x = b$ را حل کرد.

(الف) بر یك لوح لوور متعلق به‌حدود ۱۷۰۰ق.م. این مسئله دیده می‌شود: مدتی‌را پیدا کنید که مبلغ معینی پول با ربح مرکب سالانهٔ ۲۰ درصد دو برابر شود. این مسئله را به روشهای امروزی حل کنید.

(ب) مسئلهٔ (الف) را اول با پیداکردن $(۱٫۲)^۳$ و $(۱٫۲)^۴$ و سپس بسا یافتن x از طریق درونیابی خطی، به‌طوری‌که $۲ = (۱٫۲)^x$، حل کنید. نشان دهید نتیجه‌ای‌که بدین ترتیب به‌دست می‌آید باجواب بابلی ۳;۴۷،۱۳،۲۰ این مسئله (که به‌صورت شصتگانی بیان شده) تطبیق می‌کند.*

۳.۲ معادلات درجهٔ دوم

(الف) در یك‌مسئلهٔ بابلی، ضلع مربعی خواسته می‌شود هر گاه مساحت مربع‌منهای اندازهٔ ضلع آن (در دستگاه شصتگانی) عدد ۱۴،۳۰ باشد. حل مسئله چنین توصیف شده است: «نصف۱ را اختیار کنید، که ۰;۳۰ است؛ ۰;۳۰ را در ۰;۳۰ ضرب‌کنید که ۰;۱۵ است؛ ۰;۱۵ را به‌۱۴،۳۰ اضافه کنید تا ۱۴،۳۰;۱۵ را به‌دست آورید. عدد اخیرمربع ۲۹;۳۰ است. حال ۰;۳۰ را با ۲۹;۳۰ جمع کنید، نتیجه ۳۰ است، که ضلع‌مربع‌است». نشان دهیدکه این‌راه‌حل بابلی دقیقاً معادل حل‌معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^۲ - px = q$$

باگذاشتن

$$x = \sqrt{(p/۲)^۲ + q} + p/۲$$

در فرمول فوق است.

(ب) متن بابلی دیگری برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم

$$۱۱x^۲ + ۷x = ۶;۱۵$$

اول آن را در ۱۱ ضرب می‌کند و معادلهٔ

$$(۱۱x)^۲ + ۷(۱۱)x = ۱،۸;۴۵$$

را به‌دست می‌آورد، که باقراردادن $y = ۱۱x$، «صورت نرمال»

---

* به‌عنوان‌مثال، عبارت
۹,۲۰,۸;۳۰,۱۰,۲۳ به‌معنی $۹(۶۰)^۲ + ۲۰(۶۰) + ۸ + ۳۰/۶۰ + ۱۰/(۶۰)^۲ + ۲۳/(۶۰)^۳$
است.

$$y^{2}+py=q$$

را دارد. این معادله را می‌توان با گذاشتن

$$y=\sqrt{(p/2)^{2}+q}-p/2$$

در فرمول حل کرد و بالاخره، $x=y/11$.

نشان دهید که هرمعادلهٔ درجهٔدوم $ax^{2}+bx+c=0$ را می‌توان، با تبدیل مشابهی، به یکی از صورتهای نرمال

$$y^{2}+py=q,\ \ y^{2}=py+q,\ \ y^{2}+q=py,$$

که در آن p و q هردو نامنفی‌اند، تبدیل کرد. حل چنان معادلهٔ سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم ظاهراً خارج از قابلیتهای مصریان باستان بوده است.

۴.۳ هندسهٔ جبری

(الف) خصلت جبری مسائل هندسهٔ بابلی با آنچه درزیر می‌آید، ودریك لوح موجود در استراسبورگ مربوط به‌حدود ۱۸۰۰ ق.م. درج شده، روشن مـی‌شود. «مساحت A، متشکل از مجموع دو مربع، ۱۰۰۰ است. ضلع یك مربع ۱۰ واحد کـمتر از ۲/۳ ضلع مربع دیگراست. اضلاع مربعها چقدر هستند؟» این مسئله را حل کنید.

(ب) دریك لوح موجود در موزهٔ لوور[1] متعلق به‌حوالی ۳۰۰ق.م. چهارمسئله دربارهٔ مستطیلهایی با مساحت واحد و نصف محیط معلوم، وجود دارند. اضلاع و نصف محیط را x، y، و a بگیرید. دراین‌صورت

$$xy=1, \qquad x+y=a.$$

این دستگاه را باحذف y و به‌دست آوردن یك معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب x، حل کنید.

(ج) دستگاه (ب) را بااستفاده از اتحاد

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^{2}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2}-xy$$

حل کنید. این روش، اساساً همان روش به‌کاررفته درلوح موزهٔ لوور است. جالب است که این اتحاد در همان زمان به‌عنوان قضیهٔ ۵ در مقالهٔ دوم اصول اقلیدس آمده است.

(د) یك مسئلهٔ بابلی قدیم بدین‌صورت است: «طول یك ساق مثلث قـائم‌الزاویه‌ای ۵۰ است. خطی به موازات ساق دیگـر و به‌فاصلهٔ ۲۰ واحد از آن ساق، ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای به‌مساحت ۵,۲۰ ازآن جدا می‌کند. طول قاعده‌های ذوزنقه چقدر است؟» این مسئله را حل کنید.

---

1. Louvre

(ه) مسئلهٔ بابلی‌قدیم دیگری براین ادعاست که ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی باقاعده‌های ۱۴ و ۵۰ و ساقهای ۳۰ دارای مساحت ۱۲،۴۸ است. صحت و سقم آن را تعیین کنید.

(و) باز مسئلهٔ بابلی قدیم دیگری راجع به‌نردبانی به‌طول ۰;۳۰ است که به‌طور عمودی کنار دیواری گذاشته شده است. مسئله عبارت است از تعیین مسافتی که انتهای پایینی از دیوار دور می‌شود، هرگاه انتهای بالایی به‌اندازهٔ ۰;۶ واحد به‌طرف پایین بلغزد. این مسئله را حل کنید.

(ز) یك لوح سلوکی مربوط به‌۱۵۰۰ سال‌بعد، مسئله‌ای مشابه باقسمت (و) را مطرح می‌کند. در اینجا یك‌ساقهٔ نی داریم که به‌طور قائم در مقابل دیوار نهاده شده است. مسئله طول نی را می‌خواهد درصورتی که وقتی انتهای پایینی نی ۹ واحد از دیوار دور شود، انتهای بالایی آن ۳ واحد از دیوار به پایین بلغزد. ۱۵ به‌عنوان جواب داده شده است. آیا این جواب درست است؟

۵.۲ لوحهای شوش

(الف) در سال ۱۹۳۶ تعدادی از لوحهای بابلی قدیم درشوش[1]، که درحدود ۲۰۰ مایل از بابل فاصله داشت، از خاك درآورده شدند. در یکی از این لوحها مساحات و مربعات اضلاع چند ضلعیهای منتظم ۳، ۴، ۵، ۶، و ۷ ضلعی باهم مقایسه شده است. در مورد پنج ضلعی، شش‌ضلعی، و هفت ضلعی این نسبتها به صورت ۱;۴۰، ۲;۳۷،۳۰، و ۳;۴۱ داده شده‌اند. درصحت این‌مقادیر تحقیق کنید.

(ب) در همان لوح قسمت (الف) نسبت محیط یك شش ضلعی منتظم به محیط دایرهٔ محیطی به‌صورت ۰;۵۷،۳۶ داده شده است. نشان دهید که این مقدار به‌۳;۷،۳۰ یا $۳\frac{۱}{۸}$ به‌عنوان تقریبی برای π منتهی می‌شود.

(ج) دریکی ازلوحهای شوش این‌مسئله دیده می‌شود: «شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی را بیابید که اضلاع آن ۵۰، ۵۰، و۶۰ هستند.» این مسئله را حل کنید.

(د) در یکی دیگر از الواح شوش، اضلاع x و y مستطیلی با روابط زیر خواسته شده است

$$xy = ۲۰،۰ \quad و \quad x^۳d = ۱۴،۴۸،۵۳،۲۰$$

که در آن d یکی از اقطار مستطیل است. این مسئله را حل کنید.

۶.۲ معادلات درجهٔ سوم

(الف) یك‌لوح بابلی کشف شده است که مقادیر $n^۳+n^۲$ را برای $n=۱$ تا $n=۳۰$ می‌دهد. چنین جدولی را برای $n=۱$ تا $n=۱۰$ تشکیل دهید.

---

1. Susa

(ب) یك ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳+۲x^۲-۳۱۳۶=۰$ را، به‌کمك جدول بالا، بیابید.

(ج) یك مسئلهٔ بابلی مربوط به‌حدود ۱۸۰۰ق.م. ظاهراً مستلزم حل دستگاه $xyz+xy=۷/۶$، $y=۲x/۳$، $z=۱۲x$ است. این دستگاه را بااستفاده از جدول قسمت (الف) حل کنید.

(د) اوتو نوگه‌باوئر براین باور است که بابلیها کاملا قادر به‌تبدیل معادلهٔ درجهٔ سوم کلی به «صورت نرمال» $n^۳+n^۲=c$ بوده‌اند، گرچه هنوز هیچ مدرکی حاکی از اینکه آنها چنین‌کاری راکرده باشند، دردست نیست. نشان دهید انجام چنین تحویلی چگونه ممکن است.

(ه) در رابطه باجدول قسمت (الف)، نوگه‌باوئر متذکر شده‌است‌که بابلیها احتمالا به‌وجود رابطهٔ $\sum_{i=۱}^{n} i^۳=(\sum_{i=۱}^{n} i)^۲$ برای مقادیر مختلف n پی برده بودند. این رابطه را با استقرای ریاضی ثابت کنید.

۷.۲ تقریبات جذر

می‌دانیم که سری نامتناهی به‌دست‌آمده از بسط $(a^۲+h)^{۱/۲}$ به‌روش قضیهٔ دوجمله‌ای، به شرطی که $-a^۲<h<a^۲$، به $(a^۲+h)^{۱/۲}$ میل می‌کند.

(الف) فرمول تقریب زیررا ثابت‌کنید.

$$(a^۲+h)^{۱/۲}\approx a+\frac{h}{۲a}, \qquad ۰<|h|<a^۲.$$

(ب) در فرمول تقریب قسمت (الف)، $a=۴/۳$ و $h=۲/۹$ اختیار کنید و بدین ترتیب یك‌تقریب گویای بابلی برای $\sqrt{۲}$ بیابید. تقریب‌گویایی برای $\sqrt{۵}$ بااختیار $a=۲$، $h=۱$ بیابید.

(ج) فرمول تقریب بهترزیر را ثابت‌کنید.

$$(a^۲+h)^{۱/۲}\approx a+\frac{h}{۲a}-\frac{h^۲}{۸a^۳}, \qquad ۰<|h|<a^۲$$

و $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$ را بااستفاده ازهمان مقادیر قسمت (ب) برای a و h، تقریب کنید.

(د) درفرمول‌قسمت (الف)، $a=۳/۲$ و $h=-۱/۴$ اختیارکرده و تقریب بابلی باستان $۱۷/۱۲$ را برای $\sqrt{۲}$ پیدا کنید.

(ه) در فرمول قسمت (الف)، $a=۱۷/۱۲$ و $h=-۱/۱۴۴$ گرفته و مقدار

۱;۲۴،۵۱،۱۰ را، که درجدول شمارهٔ ۷۲۸۹ لوح دانشگاه ییل برای $\sqrt{۲}$ داده شده است، پیدا کنید.

۸.۲ تضعیف و تنصیف

روش ضرب مصری بعدها به‌صورت روش نسبتاً اصلاح شده‌ای معروف به **تضعیف و تنصیف** [دو برابـر کردن و نصف کردن] درآمد که هدف آن انتخاب مضارب مورد نظر یکی از عوامل ضرب به‌طور مکانیکی بود تا باافزودن آنها حاصلضرب مطلوب بـه‌دست آید. حال، باانتخاب مثال‌متن کتاب، فرض کنید می‌خواهیم ۲۶ را در ۳۳ ضرب کنیم. می‌توانیم ۲۶ را به‌طور متوالی نصف و ۳۳ را دوبرابر کنیم، لذا

۲۶	۳۳
۱۳	۶۶*
۶	۱۳۲
۳	۲۶۴*
۱	۵۲۸*
	۸۵۸

اکنون در ستون دوبرابرها، آن مضاربی از ۳۳ را که متناظر با اعداد فرد در ستون نصفها هستند، باهم جمع می‌کنیم. بنابراین، ۶۶، ۲۶۴، و۵۲۸ را جمع می‌کنیم تا حاصلضرب مورد نظـر یعنی ۸۵۸ را به‌دست آوریم. فرایند تضعیف و تنصیف در مـاشینهای محاسب الکترونیکی پرسرعت مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد.

(الف) ۴۲۴ را بااستفاده از تضعیف و تنصیف در ۱۳۷ ضرب کنید.

(ب) ثابت کنید که روش تضعیف و تنصیف ضرب به‌نتایج درست می‌انجامد.

(ج) خارج قسمت و باقیماندهٔ تقسیم ۱۰۴۳ بر۲۸ را، به‌روش مصری، پیدا کنید.

۹.۲ کسرهای واحد

(الف) نشان دهید $z/pq=۱/pr+۱/qr$ که در آن $r=(p+q)z$. این روش برای پیداکردن تجزیه‌های ممکن یك کسر به کسرهای واحد در پاپیروسی بـه زبان یونانی که احتمالاً در زمانی بیـن ۵۰۰ و ۸۰۰ق.م. نـوشته شده و در اخمیم[1]، شهری درکنار رودخانهٔ نیل، پیدا شده، آمده است.

---

1. Akhmim

(ب) مقادیر $z=۲$، $p=۱$، و $q=۷$ را اختیار کنید و بدین ترتیب تجزیه به کسرهای واحد را برای ۲/۷ به‌صورتی که در پاپیروس ریند داده شده، به‌دست آورید.
(ج) ۲/۹۹ را به سه روش مختلف به‌صورت مجموع دو کسر واحد متفاوت نمایش دهید.
(د) با اختیار $z=۱$، $p=۱$، و $q=n$ در رابطهٔ قسمت (الف) رابطهٔ خاصتر

$$۱/n=۱/(n+۱)+۱/n(n+۱)$$

را به‌دست آورید و نشان دهید که وقتی n فرد است، این رابطه به‌نمایشی برای $۲/n$ به‌صورت مجموع دو کسر واحد منجر می‌شود. بسیاری از موارد موجود در پاپیروس ریند را می‌توان بدین‌طریق به‌دست آورد.
(ه) نشان دهید که اگر n مضربی از ۳ باشد، دراین‌صورت $۲/n$ را می‌توان به مجموع دو کسر واحد که یکی از آنها $۱/(۲n)$ است، تجزیه کرد.
(و) نشان دهید که اگر n مضربی از ۵ باشد، دراین صورت $۲/n$ را می‌توان به مجموع دو کسر واحد که یکی از آنها $۱/(۳n)$ است، تجزیه کرد.
(ز) نشان دهید که به‌ازای هرعدد صحیح مثبت مانند n، $۲/n$ را می‌توان بامجموع $۱/n+۱/(۲n)+۱/(۳n)+۱/(۶n)$ بیان کرد. (درجدول $۲/n$ پاپیروس ریند، تنها ۲/۱۰۱ بااستفاده از این‌تجزیه، بیان شده است.)
(ح) نشان دهید که اگر عددگویایی را بتوان به یك طریق به صورت مجموعی از کسرهای واحد نمایش داد، در این صورت می‌توان آن را به‌بینهایت طریق به صورت مجموعی ازکسرهای واحد نمایش داد.

۱۰.۲ فرایند سیلوستر

ریاضیدان بریتانیایی ج.ج. سیلوستر[1] (۱۸۱۴-۱۸۹۷) روش زیر را برای بیان منحصر به‌فرد هر کسر گویای بین ۰ و ۱ به صورت مجموعی ازکسرهای واحد، ارائه داد: (۱) بزرگترین کسرواحد (یعنی کسری که کوچکترین‌مخرج را داشته باشد) کوچکتر ازکسر مفروض را پیدا کنید، (۲) این‌کسر را ازکسر مفروض تفریق کنید، (۳) بزرگترین کسر واحدکوچکتر از تفاضل حاصل را پیدا کنید، (۴) دوباره تفریق کنید و فرایند را ادامه دهید، (۵) برای پیدا کردن بزرگترین‌کسر واحد کوچکتر ازکسر مفروض، مخرج کسر مفروض‌را برصورت کسر تقسیم کنید و تالی‌خارج‌قسمت را به‌عنوان مخرج کسر واحد مورد نظر اختیار کنید.
(الف) ۲/۷ را بااستفاده از فرایند سیلوستر به‌صورت مجموعی ازکسرهای واحد بیان کنید. توجه کنید که این تجزیه همان است که در جدول $۲/n$ پاپیروس ریند داده شده است.

1. J. J. Sylvester

(ب) ۲/۹۷ را با استفاده از فرایند سیلوستر به‌صورت مجموعی از کسرهای واحد بیان کنید. توجه کنید که این تجزیه با تجزیهٔ داده شده درجدول $2/n$ پاپیروس ریند تفاوت دارد.

(ج) قاعده‌ای را که درمرحلهٔ (۵) فرایند سیلوستر داده شده، ثابت کنید.

۱۱.۲ سکت هرم

(الف) مصریان شیب یك وجه هرم را با نسبت «خفت»[1] به «خیز»[2]، یعنی، با دادن فاصلهٔ افقی وجه اریب از وضعیت قائم، به‌ازای هرواحد ارتفاع، اندازه می گرفتند. واحد قائم ذراع و واحد افقی دست گرفته می‌شد، به طوری که هر ذراع هفت‌دست می‌شد. با بهره گیری از این واحدهای اندازه‌گیری، اندازهٔ شیب فوق «سکت»[3] هرم نامیده می‌شد. نشان دهید که سکت هرم هفت برابر کتانژانت زاویهٔ مسطحهٔ فرجه‌ای است که بین قاعده و یك وجه هرم تشکیل می‌شود.

(ب) در مسئلهٔ ۵۶ پاپیروس ریند، یافتن سکت هرمی به‌ارتفاع ۲۵۰ ذراع دارای قاعدهٔ مربع شکلی به ضلع ۳۶۰ ذراع خواسته می‌شود. جواب به صورت $5\frac{1}{25}$ دست در هر ذراع داده شده است. ایا این جواب درست است؟

(ج) هرم عظیم خوفو[4] دارای قاعدهٔ مربع‌شکلی به‌ضلع ۴۴۰ ذراع و ارتفاع ۲۸۰ ذراع است. سکت این هرم چقدر است؟

(د) مسئلهٔ ۵۷ پاپیروس ریند خواستار تعیین ارتفاع هرم مربع‌القاعده‌ای باسکتی برابر پنج‌دست و یك انگشت در هر ذراع و با قاعده‌ای به ضلع ۱۴۰ ذراع است. این مسئله را حل کنید، باتوجه به‌اینکه هردست شامل پنج انگشت است.

۱۲.۲ جبر مصری

مسائل زیر در پاپیروس ریند دیده می‌شوند.

(الف) «اگر ازشما سؤال‌شود که ۲/۳ عدد ۱/۵ چیست، دوبرابر آن وشش‌برابر آن‌را بردارید، می‌شود ۲/۳ آن. برای هر کسر دیگری می‌توان به همین ترتیب عمل کرد». این را تعبیر و حکم کلی را ثابت کنید.

(ب) «کمیتی، ۲/۳ آن، ۱/۲ آن، و۱/۷ آن، وقتی به‌هم اضافه شوند، ۳۳ حاصل می‌شود. این کمیت چقدر است؟» این مسئله را باقاعدهٔ امتحان و تصحیح حل کنید.

(ج) «۱۰۰ قرص نان را بین پنج مرد چنان تقسیم کنید که سهمهای دریافت شده تصاعد حسابی تشکیل دهند و یك هفتم مجموع سه‌سهم بزرگتر، مساوی مجموع دو سهم کوچکتر باشد.» این مسئله را بااستفاده ازروشهای نوین حل کنید.

---

1. run 2. rise 3. seqt 4. Cheops

۱۳۰۲ هندسهٔ مصری

(الف) در پاپیروس ریند مساحت دایره کراراً مساوی مساحت مربعی به ضلع ۸/۹ قطر دایرهٔ گرفته شده است. این کار به‌چه‌مقداری برای π منجر می‌شود؟

(ب) یك هشت ضلعی از مربعی به ضلع نه واحد با ثلث کردن اضلاع مربع و سپس بریدن مثلثهای چهارگوشهٔ آن، تشکیل دهید. به‌چشم چنین می‌نماید که مساحت هشت ضلعی خیلی کم بامساحت دایره‌ای که در مربع محاط شده، متفاوت باشد. نشان دهید که مساحت هشت ضلعی ۶۳ واحد است، درحالی که مساحت دایره نمی‌تواند از مساحت مربعی به ضلع هشت واحد چندان دور باشد. شواهدی در مسئلهٔ ۴۸ پاپیروس ریند وجود دارد مبنی براینکه فرمول مساحت دایره که درقسمت (الف) داده شد، ممکن است از این طریق حاصل شده باشد.

(ج) ثابت کنید که از همهٔ مثلثهایی که دو ضلع معلوم دارند، مثلثی که درآن این دو ضلع تشکیل زاویهٔ قائمه می‌دهند، [دارای مساحت] ماکسیمم است.

(د) طول اضلاع AB، BC، CD، DA یك چهارضلعی $ABCD$ را با a، b، c، d نشان دهید، وفرض کنید K مساحت چهارضلعی باشد. نشان دهید $K \leqq (ad+bc)/۲$، تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که زوایای A و C قائمه باشند.

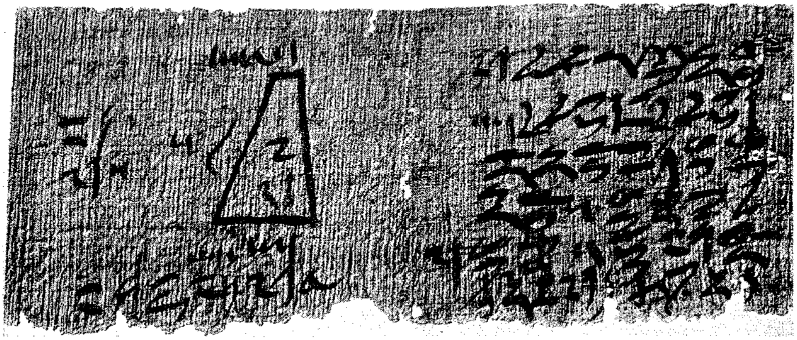
(ه) برای فرض مذکور در (د)، اکنون نشان دهید $K \leqq (a+c)(b+d)/۴$، تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که $ABCD$ مستطیل باشد. بنابراین، فرمول مصری مساحت چهارضلعی، مذکور در بخش ۲-۹، جواب بسیار بزرگتری برای همهٔ چهار-ضلعیهایی که مستطیل نیستند، می‌دهد.

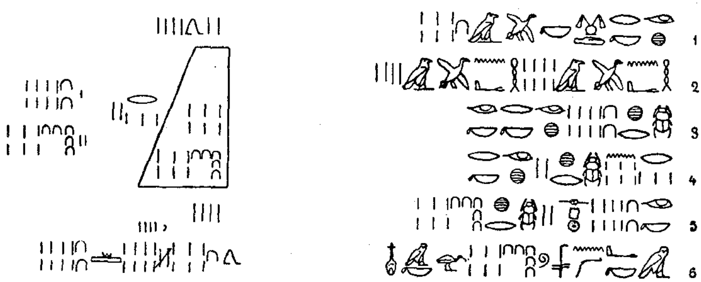
(و) سندی ازادفو[1]، که باقی است، و به تاریخ حدود ۱۵۰۰ سال بعد از پاپیروس ریند تعلق دارد، فرمول نادقیق مصری برای مساحت چهار ضلعی را به‌کار می‌گیرد. مصنف سند مزبور ازاین فرمول، به‌عنوان یك نتیجه، استنتاج می‌کند که مساحت مثلث برابر نصف مجموع دو ضلع ضربدر نصف ضلع سوم است. نشان دهید چگونه این نتیجه را می‌توان به‌این صورت استنتاج کرد. آیا نتیجه درست است؟

۱۴۰۲ عظیمترین هرم مصری

(الف) در مسئلهٔ ۱۴ پاپیروس مسکو مثال عددی زیررا می‌یابیم: «اگر به شما گفته شود: هرم ناقصی به‌ارتفاع ۶، به‌ضلع قاعدهٔ تحتانی ۴ و ضلع قاعدهٔ فوقانی ۲ داریم، باید این ۴ را مجذور کنید، نتیجه ۱۶ می‌شود. باید ۴ را دو برابر کنید، نتیجه ۸ می‌شود. باید ۲ را مجذور کنید، نتیجه ۴ می‌شود. باید ۱۶، ۸، ۴ را جمع کنید، نتیجه ۲۸ می‌شود. باید یك سوم ۶ را اختیار کنید، نتیجه ۲ می‌شود. باید ۲۸ را دوبار اختیار کنید، نتیجه ۵۶

1. Edfu





مسئلهٔ ۱۴ پاپیروس مسکو، با رونوشت هیروگلیفی از متن هیراتی

می‌شود. ببینید، جواب همین ۵۶ است و این را صحیح خواهید یافت.» نشان دهید که این مثالی از فرمول کلی

$$V=\frac{۱}{۳}h(a^{۲}+ab+b^{۲})$$

است، که حجم هرم ناقص مربع‌القاعده را برحسب ارتفاع h و اضلاع قاعدهٔ a و b به دست می‌دهد.

(ب) اگر m و n دو عدد مثبت باشند، $m\geqq n$، آنگاه **میانگین حسابی**، **میانگین هرونی**[۱]، و **میانگین هندسی** m و n، $A=(m+n)/۲$، $R=(m+\sqrt{mn}+n)/۳$، $G=\sqrt{mn}$ هستند. نشان دهید که $A\geqq R\geqq G$، تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که $m=n$.

(ج) باقبول فرمول آشنای حجم هرم (حجم برابر است با یک‌سوم حاصلضرب قاعده در ارتفاع)، نشان دهید که حجم هرم ناقص با حاصلضرب ارتفاع آن در میانگین هرونی دو قاعدهٔ آن داده می‌شود.

۱. Heron، در مآخذ اسلامی با نام ایرون اسکندرانی از وی یاد می‌شود. ــ م.

(د) فرض کنید که a، b، و h طول یك ضلع قاعدهٔ پایینی، یك ضلع قاعدهٔ بالایی، و ارتفاع هرم ناقص منتظم مربع‌القاعده‌ای مانند T باشد. هرم ناقص‌را به‌صورتهای زیر چند قطعه کنید (۱) مکعب مستطیل P با قاعدهٔ بالایی b^2 و ارتفاع h؛ (۲) چهار منشور قائم مثلث‌القاعده A، B، C، و D هریك با حجم $b(a-b)h/۴$؛ (۳) چهار هرم مربع‌القاعدهٔ E،F،G، و H هریك به‌حجم $(a-b)^2h/۱۲$. اکنون فرمول قسمت (الف) را برای حجم T به‌دست آورید.

(ه) هرم ناقص چند قطعه شدهٔ قسمت (د) را درنظربگیرید. P را به‌طور افقی به‌سه قسمت مساوی هریك به ارتفاع $h/۳$ برش دهید و یکی از قطعات را با J نشان دهید. A،B،C، و D را باهم به‌صورت مکعب مستطیل Q به‌قاعدهٔ $b(a-b)$ و ارتفاع h ترکیب کنید و Q را به‌طور افقی به سه‌بخش مساوی هریك به ارتفاع $h/۳$ برش دهید. E،F،G، و H را با یك مکعب مستطیل R به‌قاعدهٔ $(a-b)^2$ و ارتفاع $h/۳$ جانشین کنید. یك‌قاچ از P را با قاچی از Q ترکیب نمایید تا مکعب مستطیل K به‌قاعدهٔ ab و ارتفاع $h/۳$ تشکیل شود. یك قاچ ازP، دو قاچ Q، و R را برای تشکیل مکعب مستطیل L به‌قاعدهٔ a^2 و ارتفاع $h/۳$ ترکیب کنید. در این صورت حجم T برابر است با مجموع حجمهای سه مستطیل J،K،L. با استفاده از این نتیجه، فرمول قسمت (الف) را برای حجمT پیدا کنید. گفته شده است که فرمول مصری قسمت (الف) ممکن است به‌این روال به‌دست آمده‌باشد. دراین روش، بافرمول حجم هرم (منظم مربع‌القاعده)، دانسته فرض می‌شود.

۱۵۰۲ چندمسئله از پاپیروس مسکو

دو مسئلهٔ زیر راکه در پاپیروس مسکو دیده می‌شوند، حل کنید:

(الف) مساحت یك مستطیل ۱۲ و پهنای آن ۳/۴ درازاست. ابعادآن چقدر هستند؟

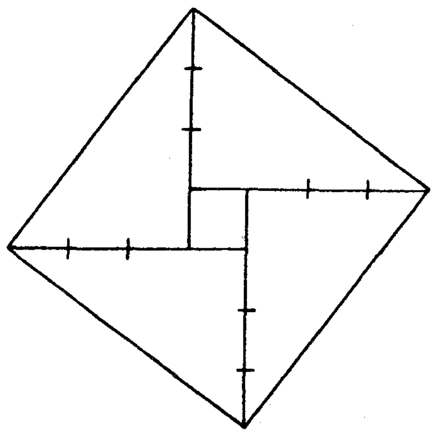
(ب) یك ساق مثلث قائم‌الزاویه‌ای $۲\frac{۱}{۲}$ برابر ساق دیگر و مساحت آن ۲۰ است. ابعاد آن چقدر هستند؟

۱۶۰۲ مثلث ۳، ۴، ۵

اطلاعاتی در دست است مبنی براینکه نقشه‌برداران مصری زوایای قائمه را باساختن‌مثلثهای ۳، ۴، ۵ باطنابی که به‌کمك یازده گره به‌۱۲ قسمت مساوی‌تقسیم شده بود، طرح‌می‌کردند. چون هیچگونه شواهد مستندی دال براینکه‌مصریان حتی ازحالت‌خاصی ازقضیهٔ‌فیثاغورس آگاه بوده‌اند وجود ندارد، مسئلهٔ صرفاً آکادمیك زیر پیش می‌آید*: بدون استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، عکس آن، یا هرپیامدی از آن، نشان دهیدکه مثلث ۳، ۴، ۵، مثلث‌قائم‌الزاویه

* نگاه کنید به

Victor Thébault, "A note on the Pythogorean theorem," *The Mathematics Teacher*, 43 (October 1950): p. 278.



شکل ۵

است. ایـن مسئله را به‌کمك شکل ۵ حل‌کنید. این شکل در چوئوپی[1]، قـدیمی‌ترین اثر شناخته شدهٔ ریاضیات چینی، ظاهر می‌شود و ممکن است سابقهٔ آن بـه هزارهٔ دوم قبل از میلاد برگردد.

عنوان مقاله

۱/۲ روشهای «چنین‌کن و چنان‌کن» درآموزش بخشهایی‌از ریاضیات مقدماتی امروزی.

۲/۲ مواردی بر له وجود ریاضیات در جهان پیش ازظهور حیات.

۳/۲ امکان تشخیص اشکال هندسی ساده توسط حیوانات، پرندگان، حشرات.

۴/۲ انواع شواهدی‌که می‌توان برمبنای‌آنها شرحی از ریاضیات پیش ازتاریخ ارائه داد.

۵/۲ هندسهٔ ناخودآگاه‌در تقدم برهندسهٔ علمی (تجربی).

۶/۲ تأثیر نسبی علاقه به‌ستاره‌شناسی وضرورت مساحی درپیدایش هندسهٔ آغازین.

۷/۲ نقش شعائر مذاهب اولیه در پیدایش هندسه.

۸/۲ اشکال هندسی درتزیینات کهن.

۹/۲ منشأ برخی مسائل نوعی.

۱۰/۲ نمایش به‌کمك کسرهای واحد.

کتابنامه

AABOE, ASGER, Episodes from the Early History of Mathematics. New Mathematical Library

1. Chou-pei

no. 13. New York: Random House and L. W. Singer, 1964.
BALL, W. W. R., and H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*. 11th ed. New York: Macmillan, 1939.
BUNT, L. N. H.; P. S. JONES; and J. D. BEDIENT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
CHACE, A. B.; L. S. BULL; H. P. MANNING; and R. C. ARCHIBALD, eds., *The Rhind Mathematical Papyrus*. 2 vols. Buffalo, N.Y.: Mathematical Association of America, 1927–29.
CHIERA, EDWARD, *They Wrote on Clay*. Chicago: University of Chicago Press, 1938.
COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
DATTA, B., and A. N. SINGH, *History of Hindu Mathematics*. Bombay: Asia Publishing House, 1962.
GILLINGS, R. J., *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press, 1972.
KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.
MIKAMI, YOSHIO, *The Development of Mathematics in China and Japan*. New York: Hafner, 1913. Reprinted by Chelsea, New York, 1961.
NEEDHAM, J., with the collaboration of WANG LING, *Science and Civilization in China*. Vol. 3. New York: Cambridge University Press, 1959.
NEUGEBAUER, OTTO, *The Exact Sciences in Antiquity*. 2d ed. New York: Harper and Row, 1962. Dover reprint available.
———, and A. J. SACHS, eds., *Mathematical Cuneiform Texts*. American Oriental Series, vol. 29. New Haven: American Oriental Society, 1946.
ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.
PARKER, R. A., *The Calendars of Ancient Egypt*. Chicago: University of Chicago Press, 1950.
SANFORD, VERA, *The History and Significance of Certain Standard Problems in Algebra*. New York: Teachers College, Columbia University, 1927.
SMITH, D. E., and YOSHIO MIKAMI, *A History of Japanese Mathematics*. Chicago: Open Court, 1914.
VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening*. Translated by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961. Paperback ed. New York: John Wiley, 1963.

۳

ریاضیات فیثاغورسی

۳-۱ پیدایش ریاضیات برهانی

قرنهای آخر هزارهٔ دوم قبل ازمیلاد شاهد دگرگونیهای اقتصادی و سیاسی بسیاری بود. برخی تمدنها از بین رفتند، قدرت مصر و بابل فروغ باخت، و مردمان جدیدی، به ویژه عبریان، آسوریان، فنیقیان و یونانیان پا به‌عرصه نهادند. عصر آهن بشارت داده شد و تغییرات همه‌جانبه‌ای را درامور جنگی و درکلیهٔ زمینه‌هایی که نیازبه ابزار داشت، با خود به همراه آورد. داد وستد به نحو روزافزونی رونق یافت و اکتشافات جغرافیایی انجام گرفت. دنیا برای نوع جدیدی از تمدن آماده بود.

تمدن جدید در شهرهای تجاری که درکناره‌های ساحلی آسیای صغیرسر برآوردند و بعد در سرزمین اصلی یونان، سیسیل، و درکرانه‌های ساحلی ایتالیا چهرهٔ خود را نشان داد. دیدگاه ایستای شرق باستان ناممکن گردید و در جو رو به گسترشی از عقلگرایی، انسانها به چون و چرا پرداختند.

برای نخستین‌بار، در ریاضیات، همچون در دیگر زمینه‌ها، انسانها شروع به‌پرسش سؤالهایی اساسی نظیر «چرا زوایای مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین مساوی‌اند؟ و چرا قطر دایره آن را نصف می‌کند؟» کردند. روشهای تجربی شرق‌باستان که برای پاسخگویی به سؤال چگونگی کاملا کافی بود، دیگر برای پاسخ دادن به این پرسشهای علمیتر راجع به چرایی کفایت نداشتند. کوششهایی در روشهای برهانی باید ابرازوجود می‌کردند، و جنبهٔ قیاسی، که دانشمندان کنونی آن را مشخصهٔ بنیادی ریاضیات می‌شمارند،

اهمیت یافت. بنابراین، چنین شدکه ریاضیات به معنی امروزی کلمه در این جوعقلگرایی، ودریکی از شهرهای جدید تجاری واقع برساحل غربی آسیای صغیر آغازشد. زیرا بنابه روایات، هندسهٔ برهانی با تالس[1] میلتوسی[2] [ملطی]، یکی از «حکمای سبعه» عهد عتیق، در نیمهٔ اول قرن ششم قبل از میلاد آغاز شده است.*

ظاهراً تالس بخش اول زندگانی خود را به عنوان بازرگان گذرانده و به آن اندازه ثروتمندگشته که بتواند بخش دوم زندگی خود را وقف مطالعه وکمی سفر نماید. گفته شده است که وی مدتی در مصر اقامت کرد و در آنجا با محاسبهٔ ارتفاع یکی از هرمها به وسیلهٔ سایه‌ها (به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱.۳ رجوع کنید) تحسین همگان را برانگیخت. در بازگشت به میلتوس نبوغ چند جانبهٔ وی شهرتی به عنوان سیاستمدار، رایزن، مهندس، تاجر، فیلسوف، ریاضیدان، و منجم برای او به‌ارمغان آورد. تالس اولین فرد شناخته‌شده‌ای است که کشفیات ریاضی به او نسبت داده شده است. نتایج مقدماتی زیر در هندسه منسوب به‌اوست:

۱ــ یك دایره با هر قطرش به دونیم می‌شود.

۲ــ زوایای مجاور به قاعده در هرمثلث متساوی‌الساقین، مساوی‌اند.

۳ــ زوایای متقابل به رأس‌که از تقاطع دو خط به وجود می‌آیند، مساوی‌اند.

۴ــ دو مثلث مساوی‌اند درصورتی که دو زاویه و یك ضلع نظیر مساوی داشته‌باشند.

تالس شاید از این نتیجه در تعیین فاصلهٔ کشتی از ساحل استفاده‌کرده باشد (به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱.۳ رجوع کنید).

۵ــ زاویهٔ محاط در نیم‌دایره، قائمه است. (این نکته در حدود ۱۴۰۰ سال پیشتر بر بابلیان مکشوف بوده‌است.)

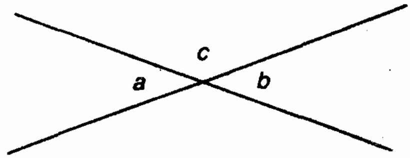
ارزش این نتایج نباید با خود قضایا وبلکه با این باور سنجیده شوندکه تالس آنها را به جای استفاده از شهود و تجربه، با نوعی استدلال منطقی اثبات کرده است.

مثلاً، موضوع تساوی زوجی از زوایای متقابل به رأس را که از تقاطع دو خط به وجود می‌آیند، درنظر گیرید. درشکل ۶ می‌خواهیم نشان دهیم‌که زاویهٔ a مساوی زاویهٔ b است. در دوره‌های پیش از دورهٔ یونان، تساوی این دو زاویه را احتمالا کاملا واضح تلقی می‌کردند، و اگرکسی دچار تردید می‌شد، اورا با انجام این تجربهٔ ساده که درآن زاویه‌ها را می‌بریدند و یکی را برروی دیگری قرار می‌دادند، متقاعد می‌کردند. اما تالس ترجیح دادکه تساوی زاویه‌های aوb را به کمك استدلال منطقی، شاید بسیار

---

1. Thales 2. Miletus

* بعضی از مورخین تاریخ ریاضیات قدیم، به ویژه اوتونوگه‌باوئر و ب. ل. واندرواردن، B. L. Van der Waerden با توضیح تکاملی سنتی درمورد مبدأ ریاضیات برهانی موافق نیستند و بلکه از توضیح انقلابیتری حمایت می‌کنند که در آن، تحول احتمالا با کشف گنگ بودن $\sqrt{2}$ به میان آمده است.



شکل ۶

شبیه به روشی که امروزه در کتابهای هندسهٔ مقدماتی خود به‌کار می‌بریم، ثابت کند. در شکل ۶، زاویهٔ a به اضافهٔ زاویهٔ c برابر زاویهٔ نیمصفحه است، همچنین زاویهٔ b به اضافهٔ زاویهٔ c برابر زاویهٔ نیمصفحه است. بنابراین، چون کلیهٔ زوایای نیمصفحه مساوی‌اند، زاویهٔ a مساوی زاویهٔ b است. (اگر چیزهای مساوی از چیزهای مساوی کاسته شوند، باقیمانده‌ها مساوی‌اند.) تساوی زاویه‌های a و b با استفاده از سلسله‌ای کوتاه از استدلال قیاسی و با شروع از اصول اساسیتر ثابت شده است.

درمورد تالس نیز مانند سایر مردان بزرگ، حکایات جذاب بسیاری گفته شده است که اگردرست هم نباشند، دست‌کم در فراخور حال‌اند. زمانی وی نشان داد کسب ثروت چقدر آسان است؛ بااین پیشبینی که محصول زیتون فراوانی درپیش است، وی انحصارکلیهٔ دستگاههای روغن‌کشی ناحیه را به دست آورد و بعداً با اجاره دادن آنها ثروت هنگفتی تحصیل کرد. مورد دیگر، داستان قاطرچموشی است که به وقت حمل نمك، پی‌می‌برد که با غلطیدن درجوی آب می‌تواند محتویات بارخود را حل کند وبدین‌ترتیب بارخودرا سبکتر نماید ـ تالس وی را ازاین عادت مزاحم از راه بارکردنش با اسفنج رهانید. عکس‌العمل او به این ایراد سولون[1] که چرا هرگز زن نگرفته این بودکه روزبعد چاپاری را باپیامی ساختگی پیش سولون فرستادکه فرزند دلبندش به ناگهان درحادثه‌ای به قتل رسیده‌است. تالس آنگاه پدر محنت‌زده را با توضیح همه چیز آرام نمود و گفت، «من تنها خواستم به تو بگویم که چرا تاکنون ازدواج نکرده‌ام.» مورد دیگر وقتی است که به‌هنگام مشاهدهٔ ستارگان در گودالی افتاده بوده است و پیرزنی وی را مورد سؤال قرار می‌دهد که چگونه امید به دیدن چیزی در آسمانها دارد در حالی که حتی نمی‌تواند آنچه را که زیرپای خودش است، ببیند. وقتی ازاو پرسیدند که چگونه می‌توان زندگی شرافتمندانه‌تری داشت، چنین اندرز داد، «باخودداری ازانجام آنچه دیگران را به خاطر آن سرزنش می‌کنیم.» یك‌بار وقتی از اوپرسیدند که در مقابل یکی از کشفیاتش چه دریافت خواهد کرد وی پاسخ داد، «من به اندازهٔ کافی پاداش خواهم گرفت اگر موقعی که آن را به دیگران می‌گویید، ادعا نکنید که این کشف از آن خود شماست، بلکه بگویید که مال من بوده است.» و وقتی از او پرسیدند که عجیبترین چیزی که در عمرش دیده چیست پاسخ داد، «یك مستبد سالخورده.»

1. Solon

تحقیقات اخیر نشان می‌دهند که هیچ مدرکی در تأیید داستان کراراً گفته شده‌ای که تالس یك آفتاب‌گرفتگی را که در ۵۸۵ق.م. به وقوع پیوسته بود پیشگویی کرده است، وجود ندارد.

۲-۳ فیثاغورس و فیثاغورسیان

تاریخ ۳۰۰ سال اول ریاضیات یونانی در محاق عظمت اصول اقلیدس، که حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده، فرورفته است؛ زیرا این اثر به اندازه‌ای نوشته‌های پیشین در ریاضیات را تحت‌الشعاع قرارداده که این آثار پیشین از آن‌پس دورافکنده شده و از دسترس ما خارج شده‌اند. آن‌گونه که ریاضیدان برجستهٔ قرن بیستم، داوید هیلبرت[1] خاطرنشان کرده، می‌توان اهمیت یك اثر علمی را باتوجه به تعداد نشریاتی سنجید که با وجود آن از حیز انتفاع افتاده‌اند.

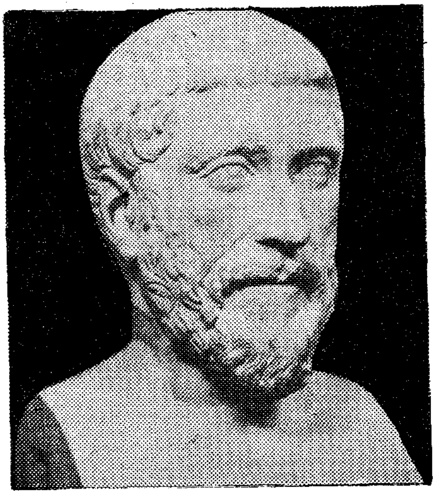
در نتیجه، برخلاف ریاضیات مصر و بابل باستان، درواقع هیچ منبع دست اولی که اندك پرتوی برریاضیات اولیهٔ یونان بیفکند، وجود ندارد. ماجبوریم که بردستنوشته‌ها و شرحهایی تکیه کنیم که تاریخی چند صد سال بعد از آنکه مطالعات اصلی به نگارش درآمده‌اند، دارند. مع‌هذا، به رغم این مشکل، علمایی که دورهٔ کلاسیك را بررسی می‌کنند، توانسته‌اند شرحی نسبتاً منسجم ولی تاحدی فرضی از تاریخ ریاضیات اولیهٔ یونانی ارائه کنند و حتی به نحو به ظاهر موجهی بسیاری از متون یونانی اصلی را احیاکرده‌اند. این کار نبوغ و شکیبایی حیرت‌آوری طلب می‌کرد وازطریق مقایسه‌های طاقت‌فرسای متون استخراج شده و با معاینهٔ قطعات ادبی بی‌شمار و تذکارهای پراکندهٔ مؤلفین، فیلسوفان، و مفسرین بعدی انجام پذیرفته است.*

ارزیابی دین ریاضیات اولیهٔ یونانی به ریاضیات شرق باستان کاردشواری است و مسیر انتقال از سویی به سوی دیگر نیز هنوز به نحو رضایتبخشی معلوم نشده است. این حقیقت که دین مزبور بسیار بیشتر از آن است که قبلا تصور می‌شد با پژوهشهای انجام شده روی اسناد بابل و مصر آشکار گردید. خود نویسندگان یونانی، حکمت شرق را ستوده‌اند و این حکمت در دسترس هر کس که می‌توانست به شرق سفرکند، قرار داشته است. شواهد باطنی نیز از وجود ارتباطی با شرق خبر می‌دهد. رازگرایی اولیهٔ یونانی در ریاضیات، نشانی محکم از نفوذ شرق دارد، و برخی از نوشته‌های یونانی بیشتر سنت حسابی شرق است که جاودانگی یونانی یافته است. همچنین، حلقه‌های ارتباط محکمی نجوم یونانی و بین‌النهرینی را پیوند می‌دهد.

---

1. David Hilbert

* در این راه مدیون تحقیقات ژرف و فاضلانهٔ مردانی چون پل‌تانری (Paul Tannery)، ت. ل. هیث (T.L. Heath)، ه. ج. تسوتین (H. G. Zeuthen)، ا. رم (A. Rome)، ج.ل. هایبرگ (J. L. Heiberg) و ا. فرانك (E. Frank)، هستیم.



فیثاغورس
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

منبع اصلی اطلاعات ما راجع به ریاضیات یونانی خیلی قدیم اثری موسوم به خلاصهٔ ائودموسی[1] پروکلوس[2] است. این خلاصه متشکل از صفحات افتتاحیهٔ شرح مقالهٔ اول اقلیدس اثر پروکلوس بوده، و شرح بسیار کوتاهی از رشد هندسهٔ یونانی از قدیمترین ازمنه تا زمان اقلیدس است. اگرچه پروکلوس درقرن پنجم بعدازمیلاد، حدود هزارسال بعد ازآغاز ریاضیات یونانی، می‌زیسته، بااین حال به تعدادی از آثار تاریخی و انتقادی دسترسی داشته‌که اینك، بجز بخشها و اشاراتی که توسط وی و دیگـران حفظ گردیده، از دست رفته‌انـد. دربین این آثار ازدست رفته، خلاصه‌ای بوده از تاریخ ظاهـراً کامل هندسهٔ یونانی، مفقود در همان زمان پروکلوس، و دربردارندهٔ دورهٔ قبل از ۳۳۵ق.م. نوشتهٔ ائودموس[3]، یکی ازشاگردان ارسطو. خلاصهٔ ائودموسی از آن مناسبت چنین نام یافته‌که برمبنای این اثر قدیمتر قرار دارد. شرح دستاوردهای ریاضی تالس، که به طور خلاصه در بخش قبل آمد، به کمك خلاصهٔ ائودموسی تهیه شده بود.

ریاضیدان برجستهٔ دیگر یونانی که درخلاصهٔ ائودموسی از وی یادشده، فیثاغورس[4] است که پیروانش اورادرچنان‌هاله‌ای ازاساطیر پوشاندند که‌دربارهٔوی، باهرمیزان قطعیت، اطلاع بسیارکمی‌وجود دارد. وی‌ظاهراًدرحدود۵۷۲ق.م.درجزیرهٔساموس واقع دردریای اژه تولد یافته‌است.شایدفیثاغورس که حدود۵۰سال‌ازتالس جوانتر بوده‌و تا این‌حدنزدیك به زادگاه وی، میلتوس، می‌زیسته است، نزد وی تحصیل کرده باشد. به نظر می آیدکه بعداً به طور موقت درمصر رحل اقامت افکنده و حتی شاید سفرهای گسترده‌تری در پیش گرفته

1. *Eudemian Summary* 2. Proclus 3. Eudemus
4. Pythagoras

است. در مراجعت به وطن، وی ساموس را تحت حکومت ظالمانهٔ پولی‌کراتس[1] و یونیا را تحت سلطهٔ ایرانیان یافت، و ازاین‌رو به دریابندر کروتونا[2]ی یونان واقع در ایتالیای جنوبی، مهاجرت کرد. در آنجا وی مدرسهٔ مشهور فیثاغورسی را تأسیس کرد که علاوه براینکه فرهنگستانی بود برای مطالعهٔ فلسفه، ریاضیات، و علوم طبیعی، به یك انجمن اخوت شدیداً متحدی باشعائر و مناسك‌سری تحول یافت. زمانی رسیدکه تأثیر انجمن و تمایلات اشرافی آن‌چنان شدت یافت که نیروهای آزادیخواه ایتالیای جنوبی ساختمانهای مدرسه را ویران کردند و سبب پراکنده شدن انجمن گردیدند. بنابر روایتی، فیثاغورس به بین‌النهرین گریخت و در همانجا در سنین ۷۵ تا ۸۰ درگذشت، یاشاید به قتل رسید. انجمن برادری، گرچه به صورت پراکنده، حداقل تا دو قرن بعد به موجودیت خود ادامه داد.

فلسفهٔ فیثاغورسی براین فرض متکی بودکه عدد صحیح سبب کیفیات مختلف انسان و ماده است. این امر منجربه تعالی و مطالعهٔ خواص اعداد گردید و حساب (به عنوان نظریهٔ‌اعداد)، همراه با هندسه، موسیقی، و علم افلاك (نجوم) علوم انسانی اساسی برنامهٔ تحصیلی فیثاغورسی را تشکیل می‌داد. این گروه موضوعات در قرون وسطی به **علوم چهارگانه**[3] شهرت یافت، که به آن **علوم سه‌گانه**[4] دستورزبان، منطق و معانی بیان افزوده شد. این علوم انسانی سبعه، تجهیزات مورد نیاز یك فرد تحصیلکرده محسوب می‌شد.

چون تعلیمات فیثاغورس همه شفاهی بود و از آنجا که رسم انجمن اخوت برآن بودکه همهٔ کشفیات را به مؤسس عالیقدر منسوب کنند، اکنون به دشواری می‌توان دانست که دقیقاً کدام‌یك از مکشوفات ریاضی باید به خود فیثاغورس اسناد شود و کدام یك به سایر اعضای انجمن برادری.

۳ــ۳ حساب فیثاغورسی

یونانیان باستان بین مطالعهٔ روابط مجردی که اعداد را به هم پیوند می‌دهند و فن عملی محاسبهٔ بااعداد تمایزقایل بودند. اولی به **آریثمتیك**[5] معروف بود و دومی به **لوژیستیك**[6]. این رده‌بندی تا حدود اواخر قرن پانزدهم درقرون وسطی دوام آورد و در این زمان متونی ظاهر شدند که در آنها جنبه‌های نظری و عملی کاربااعداد تحت نام واحد حساب مورد بررسی قرار می‌گرفت. جالب‌آنکه امروزه حساب مدلول اصلی خود را در اروپای قاره‌ای دارد، در حالی‌که در انگلستان و آمریکا معنی عامیانهٔ حساب مترادف بالوژیستیك باستان‌است، ودراین دو کشوراصطلاح توصیفی **نظریهٔ اعداد** برای نشان‌دادن وجه مجرد مطالعهٔ اعداد به‌کار می‌رود.

عقیدهٔ عمومی براین است که‌فیثاغورس وپیروانش، همراه با فلسفهٔ انجمن اخوت،

---

1. Polycrates 2. Crotona 3. quadrivium 4. trivium
۵. arithmetic [اریثماطیقی، در مآخذ اسلامی، که می‌توان آن‌را علم حساب نامید].
6. logistic

اولیـن قدمها را در رشد نظریهٔ اعـداد برداشته‌اند و درعین حال قسمت اعظم شالـودهٔ رازگـرایی عددی آینده را ایجاد کـرده‌اند. لذا یامبلیخوس[1]، فیلسوف صاحب نفـوذ نوافلاطونی حدود ۳۲۰ ب.م. کشف **اعداد متحابه** را به فیثاغورس نسبت داده است. دو عدد متحابه‌اند اگر هریك از آنها مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی* دیگـری باشد. برای مثال، ۲۸۴ و ۲۲۰، که زوج منسوب به فیثاغورس را تشکیل می‌دهند، متحابه‌انـد، زیرا مقسوم‌علیه‌های حقیقی ۲۲۰ عبارت‌اند از ۱،۲،۴،۵،۱۰،۱۱،۲۰،۲۲،۴۴،۵۵،۱۱۰، و مجموع اینها ۲۸۴ است، درحالی‌که مقسوم‌علیه‌های حقیقی ۲۸۴ عبارت‌اند از ۱،۲،۴، ۷۱،۱۴۲ و مجموع اینها ۲۲۰ است. این زوج اعداد در هاله‌ای عرفانی پوشیده شدند و بعدها این عقیدهٔ خرافی پدیدآمد که دوطلسم حاوی این اعداد، دوستی تمام‌عیاری بیـن حاملین آنها ایجاد خواهندکرد. این اعداد نقش مهمی در سحـر، جادو، احکام نجوم، و طالع بینی پیداکردند. به‌نظر می‌رسید هیچ زوج عدد متحابه جدیدی تا زمان اعلام اعداد ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ به‌عنوان زوج دیگری ازطرف پییر دو فرما[2] نظریهٔ اعدادان بزرگ فرانسوی در۱۶۳۶، کشف نگردیده‌بود. مع‌هذا، درهمین‌اواخر ثابت‌شده‌است که این کشف مجددی بوده، و این‌زوج‌عدد را قبلا ابن البنای مراکشی (۱۲۵۶-۱۳۲۱) در اواخر قرن سیزدهم یا اوایل قرن چهاردهم، شاید بااستفاده ازفرمول ثابت بن‌قره (برای ملاحظهٔ این فرمول، به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱.۷ رجوع‌کنید) کشف‌کرده بوده‌است. دوسال‌بعد ریاضیدان و فیلسوف‌فرانسوی، رنه‌دکارت[3] زوج سومی‌ارائه داد. ریاضیدان سویسی، لئونهارت‌اویلر[4] جستجوی سازمان‌یافته‌ای بـرای یافتن اعداد متحابه به عمل آورد و، در ۱۷۴۷، سیاهه‌ای از ۳۰ زوج را عرضه کرد که بعداً به بیش از ۶۰ زوج گسترش یافت. امرعجیب دیگر درتاریخ این اعداد، کشف اعداد متحابه دورازنظر مانده و نسبتاً کوچك ۱۱۸۴و۱۲۱۰، به وسیلهٔ پسرك شانزده‌سالهٔ ایتالیایی، نیکولو پاگانینی[5]، درسال ۱۸۶۶ بود. امروزه بیش از ۱۰۰۰ زوج عدد متحابه معلوم شده‌اند.

اعداد دیگری با روابط جادویی که در تحقیقات نظری عـددشناسی اساسی‌اند، و گاهـی به‌فیثاغورسیان نسبت داده می‌شوند. **اعداد تام، ناقص و زاید** هستند. یك عدد تام است هر گاه مساوی مجموع مقسوم علیه‌های حقیقی خود باشد، ناقص است اگرازمجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی‌اش تجاوزنماید، و زاید است اگرکوچکتر ازمجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی‌اش باشد. بنابراین، خداوند دنیا را در شش روزآفرید که یك عدد تام است، زیرا ۶=۱+۲+۳، از دیگرسو، بنابه اظهار آلکوین (۷۳۵-۸۰۴)، نوع بشر از اخلاف هشت انسان‌کشتی نوح هستند و این آفرینش ثانی ناکامل بود، زیرا۸، که از۴+۲+۱

1. Iamblichus

* **مقسوم‌علیه‌هـای حقیقی** هر عدد صحیح مثبت N، تمام مقسوم علیه‌های صحیح و مثبت N بجز خـود N هستند. توجه کنیدکه ۱، یك مقسوم‌علیه حقیقی N است. مترادف نسبتاً منسوخ مقسوم‌علیه حقیقی **جزء صحیح** می‌باشد.

2. Pierre de Fermat   3. René Descartes   4. Leonhard Euler
5. Nicolo Paganini

بزرگتر است، ناقص است. تاسال ۱۹۵۲، تنهــا ۱۲ عدد تام شناخته شده موجود بود که همهٔ آنها اعداد زوج بودند وازبین آنها سه‌تای اول ۶، ۲۸، و۴۹۶ هستند. آخرین قضیهٔ مقالهٔ نهم اصول اقلیدس (حدود ۳۰۰ ق. م.) ثابت می‌کند که اگر $۱ - ۲^n$ یك عدد اول* باشد، آنگاه $(۱ - ۲^n)۲^{n-۱}$ یك عــدد تام است. اعداد تامی کــه به وسیلهٔ اقلیدس داده شده‌اند، اعداد زوج هستند، و اویلرنشان داده است که هرعدد زوج تام باید بدین‌صورت باشد. وجود یاعدم وجود اعداد تام فرد یکی از مسائل حل‌نشدهٔ معروف در نظریهٔ اعــداد است. مطمئناً هیچ عددی ازاین نوع که کمتر از صد رقم داشته باشد، وجود ندارد.

درسال ۱۹۵۲، به کمك کامپیوتر رقمی SWAC، پنج عدد تام دیگر، متناظر بــا $n =$ ۵۲۱، ۶۰۷، ۱۲۷۹، ۲۲۰۳، و ۲۲۸۱ در فرمول اقلیدس کشف گردید. درسال ۱۹۵۷ بااستفاده ازماشین محاسبهٔ سوئدیBESKعدد تام دیگری پیدا شدکه متناظر با$n =$ ۳۲۱۷ بود، و در سال ۱۹۶۱ بایك کامپیوتر IBM ۷۰۹۰ دو عدد دیگر، به‌ازای $n =$ ۴۲۵۳ و $n =$ ۴۴۲۳، پیدا شدند. هیچ عدد تام زوج دیگری برای ۵۰۰۰ $> n$ وجود نــدارد. از مقادیر $n =$ ۹۶۸۹، ۹۹۴۱، ۱۱۲۱۳، ۱۹۹۳۷، ۲۱۷۰۱، ۲۳۲۰۹، و ۴۴۴۹۷ نیز اعداد تام حاصل می‌شوند که سیاههٔ اعداد تام معلوم را به ۲۷ می‌رسانند.

برخی از ریاضیدانان جدید با الهام از مفهوم اعداد تام به تعمیم آن پرداخته‌اند. اگر $\sigma(n)$ را معــرف مجموع کلیهٔ مقسوم‌علیه‌های حقیقی n (از جملــه خود n) بگیریم، آنگــاه n تام است اگــر و فقط اگر $\sigma(n) = ۲n$. در حالت کلــی اگــر داشته باشیم $\sigma(n) = kn$، کــه در آن k یك عدد طبیعی است، n را **تام k-تایی‌یی** نامند. مثلا می‌توان نشان دادکه ۱۲۰ و ۶۷۲ تام سه‌تایی‌یی‌اند. معلوم نیست که بینهایت عدد تام چندتایی‌یی وجود دارد یانه، بنابراین درمورد اعداد تام کمتر ازآن می‌دانیم. این هم معلوم نیست که عدد تام چندتایی‌یی فردی موجود است یانه. درسال ۱۹۴۴، مفهوم **اعداد فوق زاید** خلق شد. عدد طبیعیnرا فوق زاید نامند اگروفقط اگر به‌ازای هر$k < n$، $\sigma(n)/n > \sigma(k)/k$. معلوم شده است که بینهایت عدد فوق زاید وجود دارد. اعداد دیگری که جدیداً در ارتباط بااعدادتام، ناقص، و زاید معرفی‌شده‌اند عبارت‌اند از اعداد عملی، اعداد شبه تام، اعداد نیم‌تام، و اعداد غریب. ما صرفاً این مفاهیم را ذکرکردیم تا روشن‌کرده باشیم که چطورکار قدیمیان با اعداد، الهامبخش پژوهشهای جدید مرتبط باآن شده است.

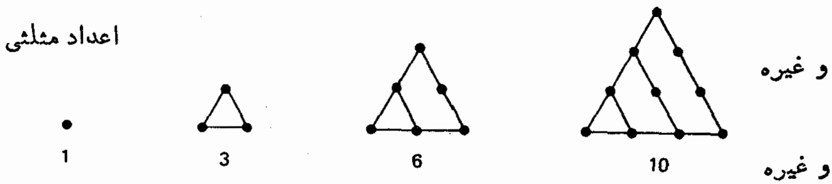
اگرچه همهٔ مورخین ریاضیات براین عقیده نیستندکه کشف اعداد متحابه و تام را می‌توان به‌فیثاغورسیان نسبت داد، به‌نظر می‌رسدکه توافق عمومی وجود داشته باشد مبنی براینکه **اعــداد مصور** از قدیمیترین اعضای انجمن نشأت گرفته‌اند. این اعدادکه به عنوان عدهٔ نقاط صورتهای هندسی خاصی درنظر گرفته می‌شوند، نمایشگر پیوندی بین هندسه و حساب هستند. اشکال ۷، ۸، و ۹ وجه تسمیهٔ **اعــداد مثلثی**، **اعداد مربعی**، **اعداد مخمسی**، و

---

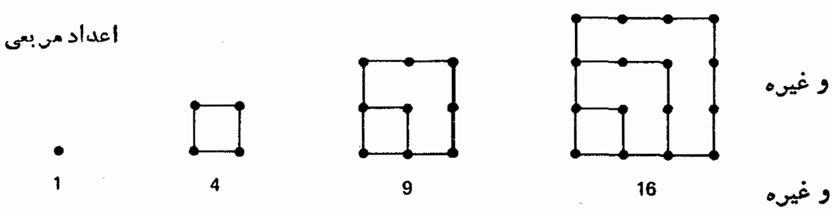
* هر **عدد اول**، یك عدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ است کــه دارای هیــچ مقسوم‌علیه صحیح مثبتی بجز خــودش و واحد نیست. هر عــدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ که اول نیست، **عــدد مرکب** نامیده می‌شود. مثلا، ۷ یك عدد اول است، در حالی‌که ۱۲ عددی مرکب است.

غیره را نشان می‌دهند.

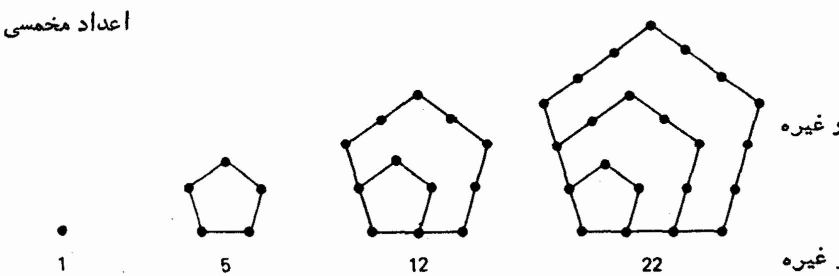
قضایـای جالب بسیاری دربارهٔ اعداد مصور را می‌تـوان به سبك هندسی محض ثابت کرد. مثلا، برای نشان دادن قضیهٔ ۱ ــ که هر عدد مربعی برابر مجموع دو عددمثلثی متوالی است ــ ملاحظه می‌کنیم که هرعدد مربعی را، درشکل هندسیش، می‌توان مثل شکل ۱۰ تقسیم کرد.



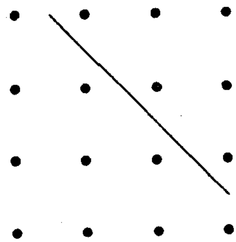
شکل ۷



شکل ۸



شکل ۹



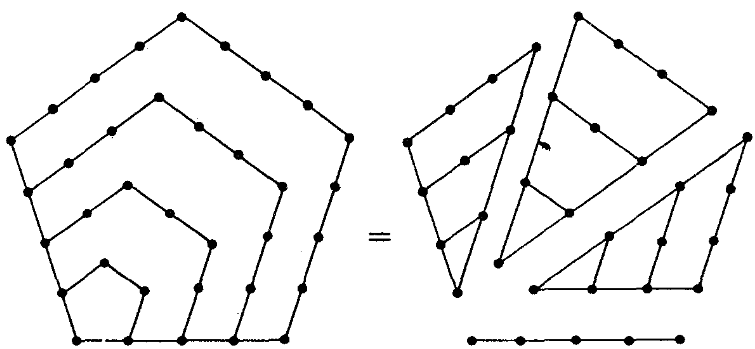
شکل ۱۰

همچنین شکل ۱۱ قضیهٔ ۲ را نشان می‌دهد ــ که n امین عدد مخمسی مساوی است با n به‌اضافهٔ سه برابر $(n-1)$ امین عدد مثلثی. قضیهٔ ۳ ــ که مجموع هر تعداد عدد صحیح فرد متوالی، با شروع از ۱، مربع کامل است ــ به طور هندسی به وسیلهٔ شکل ۱۲ نمایش داده شده است.

البته، این قضایا را می‌توان به طور جبری، با یافتن نمایش جبری اعداد مثلثی، مربعی، و مخمسی کلی، ثابت کرد. روشن است که n امین عدد مثلثی، T_n، به وسیلهٔ مجموع یك سری حسابی*

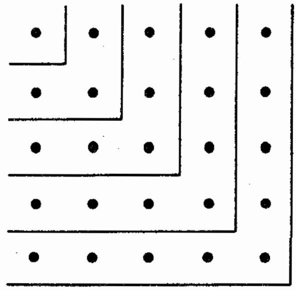
$$T_n = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲},$$

داده می‌شود و البته nامین عدد مربعی، S_n، $n^۲$ است. قضیهٔ اول ما را می‌توان به طور



شکل ۱۱

* مجموع سری حسابی مساوی است با حاصلضرب تعداد جملات در نصف مجموع جملهٔ اول و آخر.



شکل ۱۲

جبری به‌کمك اتحادی به صورت زیر، از نو ثابت کرد:

$$S_n = n^۲ = \frac{n(n+۱)}{۲} + \frac{(n-۱)n}{۲} = T_n + T_{n-۱}.$$

nامین عدد مخمسی، P_n، نیز به وسیلهٔ مجموع یك سری حسابی داده می‌شود

$$P_n = ۱+۴+۷+\cdots+(۳n-۲)$$

$$= \frac{n(۳n-۱)}{۲} = n + \frac{۳n(n-۱)}{۲}$$

$$= n + ۳T_{n-۱}.$$

این مطلب ، قضیهٔ دوم را ثابت می‌کند. قضیهٔ سوم به‌طور جبری با جمع کردن سری حسابی

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱) = \frac{n(۲n)}{۲} = n^۲$$

به دست می‌آید.

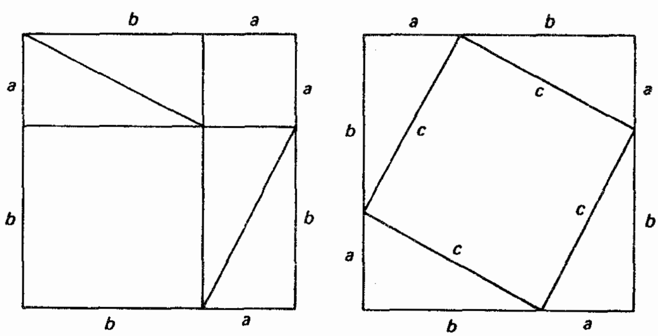
به عنوان آخرین کشف بسیار قابل توجه دربارهٔ اعداد، که به وسیلهٔ فیثاغورسیان صورت گرفته، می‌توانیم از بستگی فواصل موسیقی به‌نسبتهای عددی یاد کنیم. فیثاغورسیان تشخیص دادند که بـرای تارهای تحت کشش یکسان، طولها باید به نسبت ۲ به ۱ بـرای اوکتاو، ۳ به ۲ برای فاصلهٔ پنجم، و ۴ به ۳ برای فاصلهٔ چهارم باشند. این نتایج که اولین واقعیتهای مضبوط در فیزیك ریاضی بودند، فیثاغورسیان را به آغاز مطالعهٔ علمی گامهای موسیقی هدایت کردند.

۴ـ۳ قضیهٔ فیثاغورس و سه‌تاییهای فیثاغورسی

روایات در اسناد کشف مستقل قضیهٔ مربوط به مثلث قائم‌الزاویه به فیثاغورس، که اکنون در همه‌جا نام وی را برخود دارد، اتفاق‌نظر دارند ـ که مجذور وتر مثلث قائم‌الزاویه مساوی مجموع مجذورات دو ساق آن است. دیدیم که این قضیه بر بابلیان عصر حمورابی، متجاوز از هزار سال پیشتر، معلوم بوده است، ولی اولین برهان کلی می‌تواند توسط فیثاغورس ارائه شده باشد.

مدلهای زیادی دربارهٔ برهانی که فیثاغورس ممکن است عرضه کرده باشد، وجود دارد وعموماً چنین تصور می‌شود که برهان مزبور احتمالا برهانی از نوع تقطیع* مثل اثبات زیر بوده که درشکل ۱۳ تصویر شده است. فرض کنید a،b،c معرف طولهای ساقها و وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض باشند و دو مربع شکل زیر را در نظر بگیرید که هریك دارای ضلع $a+b$ هستند. اولین مربع به شش قطعه، یعنی به دو مربع روی ساقها و چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی با مثلث مفروض تقطیع شده است. دومین مربع به پنج قطعه، یعنی مربع روی وتر و دوباره چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی بامثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض تقطیع شده است. با تفریق مقادیر مساوی، حال نتیجه می‌شود که مربع روی وتر برابر مجموع مربعهای روی ساقهاست.

برای اثبات اینکه قطعهٔ مرکزی تقطیع دوم واقعاً مربعی به ضلع c است، لازم است این حقیقت را به کار بریم که مجموع زوایای هرمثلث قائم‌الزاویه، مساوی دو قائمه است. اما خلاصهٔ ائودموسی این قضیه را برای مثلث کلی به فیثاغورسیان نسبت می‌دهد. چون برهانی از این قضیه، به نوبهٔ خود، نیازمند اطلاعی ازبعضی خواص خطوط موازی است،



شکل ۱۳

* با این حال، نگاه کنید به
Daniel Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, vol. 1, pp. 124–125.

بسط این نظریه نیز به فیثاغورسیان اولیه نسبت داده می‌شود.

از زمان فیثاغورس، برهانهای متعددی از قضیهٔ فیثاغورس تهیه شده است. ا. س. لومیس[1]، در ویرایش دوم کتابش به‌نام قضیهٔ فیثاغورس، ۳۷۰ برهان این قضیهٔ مشهور را گردآوری و رده‌بندی کرده است.

یك مسئلهٔ کاملا مرتبط بـا قضیهٔ فیثاغورس پیداکردن اعـداد صحیح a، b، c است به طوری که ساقها و وتر مثلث قائمه‌ای را نمایش دهند. سه‌تاییهای اعداد از این نوع، به سه‌تاییهای فیثاغورسی معـروف‌اند و، همچنانکه در بخش ۲ــ۶ دیده‌ایم، تحلیل لوح پلیمپتـن ۳۲۲، شواهـد نسبتاً متقاعدکننده‌ای عـرضه می‌دارد مبنی بر اینکه بابلیـان قدیم چگونگی محاسبهٔ چنین سه‌تاییهایی را می‌دانسته‌اند. فرمول

$$m^۲+\left(\frac{m^۲-۱}{۲}\right)^۲=\left(\frac{m^۲+۱}{۲}\right)^۲,$$

که سه جملهٔ آن، به ازای هـرعدد فرد m، یك سه‌تایی فیثاغورسی را نتیجه می‌دهد، بـه فیثاغورسیان منسوب شده است. فرمول مشابه

$$(۲m)^۲+(m^۲-۱)^۲=(m^۲+۱)^۲,$$

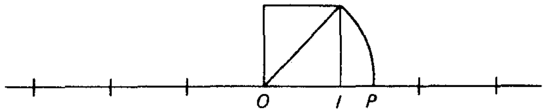
که درآن m می‌تواند فرد یا زوج باشد، به همین منظور ساخته شده است و به افلاطـون (حدود ۳۸۰ق.م.) نسبت داده می‌شود. هیچ‌یك ازاین فرمولها همهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی را نمی‌دهد.

۳ــ۵ کشف کمیتهای گنگ

اعداد صحیح تجریدهایی هستندکه ازروند شمارش دسته‌های متناهـی اشیا ناشی می‌شوند. نیازهای زندگی روزمره ما را ملزم می‌سازند که علاوه‌بر شمارش اشیای منفرد، کمیتهای مختلفی ازقبیل طول، وزن، و زمان را اندازه بگیریم. برای برآوردن این احتیاجات سادهٔ اندازه‌گیـری، کسرها را لازم داریم؛ زیـرا، به عنوان مثال، به ندرت پیش می‌آیـد که طولـی شامل عدهٔ دقیقاً صحیحی از واحدهای خطی باشد. بنابراین، اگـر **عددگویا** را به‌صورت خارج‌قسمت دو عدد صحیح تعریف کنیم، p/q، که درآن $q\neq ۰$، این دستگاه اعدادگویا، ازآنجاکه شامل همهٔ اعداد صحیح وکسرهاست، برای مقاصد عملی اندازه‌گیری کفایت می‌کند.

اعدادگویا تعمیم هندسی ساده‌ای دارند. دو نقطهٔ متمایز O و I را بر یك خط مستقیم افقی مشخص کنید به طوری که I در طرف راست O باشد و قطعه خط OI را به عنوان واحد طول انتخاب کنید. اگر فرض کنیم که O و I به ترتیب معرف اعداد ۰ و ۱ باشند

1. E. S. Loomis



شکل ۱۴

آنگاه اعـداد صحیح مثبت و منفی را می‌توان با مجموعهٔ نقاطی بر خط که به اندازهٔ یك واحـد از هم فاصله داشته باشند، نمایش داد؛ اعداد صحیح مثبت در طـرف راست O و اعداد صحیح منفی درطرف چپ O نمایش داده می‌شوند. دراین‌صورت کسرهای به‌مخرج q را می‌توان با نقاطی که هـر فاصلهٔ به طول واحد را به q قسمت مساوی تقسیم می کنند، نمایش‌داد. لذا به‌ازای‌هرعددگویانقطه‌ای در روی این خط وجود دارد. برای ریاضیدانان اولیه بدیهی به نظر می‌رسیدکه بدین طریق همهٔ نقاط خط به‌کارگرفته خواهند شد. اطلاع ازاین که نقاطی برخط وجود دارندکه متناظر باهیچ عدد گویایی نیستند، قاعدتاً می باید تکان‌دهنده بـوده باشد. ایـن کشف یکی از بزرگتـرین دستاوردهـای فیثاغورسیان بود. فیثاغورسیان به ویژه نشان دادند که هیچ عدد گویایی نظیر نقطهٔ P برروی خط به‌طوری که فاصلهٔ OP درآن مساوی قطـر مربعی به ضلع واحد باشد، وجود ندارد (نگاه کنید به شکل۱۴). اکنون لازم بود اعداد جدیدی ابداع شوندکه متناظر باچنان نقاطی باشند، و چون این اعداد نمی‌توانند گویا باشند «اعداد گنگ» نام یافتند. کشف آنها یکی‌ازحوادث برجسته را درتاریخ ریاضیات مشخص می کند.

برای اثبات اینکه طول قطرمربعی به ضلع واحد را نمی‌توان بایك عددگویانمایش داد، کافی است نشان دهیم که $\sqrt{۲}$ گنگ است. برای این منظور، اول ملاحظه می کنیم که برای عدد صحیح مثبت s، $s^۲$ وقتی و فقط وقتی زوج است که s زوج باشد. حال، فرض کنیدکه $\sqrt{۲}$ گـویاست، یعنی $\sqrt{۲}=a/b$، که درآن a و b اعداد صحیح متباین هستند.* دراین‌صورت

$$a=b\sqrt{۲}$$

یا

$$a^۲=۲b^۲.$$

چون $a^۲$ دوبرابر یك عدد صحیح است، می‌بینیم که $a^۲$، و بنابراین a، بایـد زوج باشد. قرار دهید $a=۲c$. آنگاه معادلهٔ اخیر به صورت

$$۴c^۲=۲b^۲$$

---

* دو عدد صحیح **متباین** هستند هرگاه هیچ عامل صحیح مشترکـی بجز واحد نداشته باشند. مثلا ۵و۱۸ متباین هستند، درحالی که ۱۲ و ۱۸ متباین نیستند.

یا

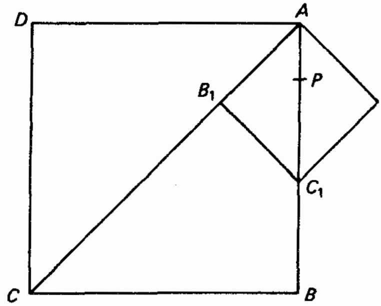
$$2c^2 = b^2$$

درمی‌آید، که از آن نتیجه می گیریم b^2، و از این‌رو b، باید زوج باشد. اما این‌غیرممکن است، زیرا a و b متباین فرض شده بودند. لذا فرض گویابودن $\sqrt{2}$ به این وضعیت محال منجرشده و باید کنار گذاشته شود.

کشف وجود اعداد گنگ، برای فیثاغورسیان حیرت‌آور و نگران‌کننده بود. قبل از همه، این کشف ضربهٔ مهلکی برفلسفهٔ فیثاغورسی، که همه چیز را به اعداد صحیح وابسته می‌دانست، تلقی شد. دیگر آنکه، این مطلب مغایر با عقل سلیم به‌نظرمی آمد، زیرا به طور شهودی حس می‌شد که هر کمیتی با یك عدد گویا قابل بیان است. همتای هندسی آن نیزهمان‌قدر تکان‌دهنده بود، زیرا چه‌کسی می‌توانست دراین تردیدکند که به‌ازای هر دو قطعه خط مفروض می‌توان قطعه خط سومی، هرچند بسیار بسیار کوچك، پیدا کرد به طوری‌که به تعداد دفعات صحیح درهریك از دو خط مفروض بگنجد؟ اما به‌عنوان این‌دو قطعه خط، یك ضلع s و یك قطر d از مربعی را اختیار کنید. حال اگر قطعه خط سومی مانند t وجود داشته باشدکه به تعداد دفعات صحیح در s و d بگنجد، خواهیم داشت $s = bt$ و $d = at$، که در آن a و b اعداد صحیح مثبت هستند، اما $d = s\sqrt{2}$، که از آن نتیجه‌می‌شود $at = bt\sqrt{2}$. یعنی، $a = b\sqrt{2}$، یا $\sqrt{2} = a/b$، پس $\sqrt{2}$ یك‌عددگویاست. بدین ترتیب، بر خلاف برداشت شهودی ما، قطعه‌خطهایی **نامتوافق** وجود دارند، یعنی قطعه‌خطهایی که دارای مقیاس اندازه‌گیری مشترکی نیستند.

برهان دیگری از گنگ بودن $\sqrt{2}$ را به شیوهٔ هندسی و بانشان دادن اینکه ضلع و قطر هرمربع نامتوافق‌اند، به طور خلاصه بیان می‌کنیم. فرض کنید خلاف این مطلب درست باشد. در این صورت، مطابق این فرض، قطعه خطی مانند AP وجود دارد (نگاه کنید به شکل ۱۵) به طوری‌که هم‌قطر AC و هم ضلع AB از مربع $ABCD$ مضارب صحیحی‌از AP اند؛ یعنی AC و AB نسبت به AP متوافق‌اند. روی AC، $CB_1 = AB$ را جدا کرده‌و B_1C_1 را عمود بر CA رسم کنید. می‌توان به‌آسانی ثابت کرد که $C_1B = C_1B_1 = AB_1$. در این صورت $AC_1 = AB - AB_1$ و AB_1 نسبت به AP متوافق‌اند. اما AC_1 و AB_1 قطر وضلع مربعی با ابعادی کوچکتر ازنصف ابعاد مربع اصلی‌اند. نتیجه می‌شود که با تکرار این عمل می‌توانیم مربعی به‌دست‌آوریم که قطر آن، AC_n، وضلع آن AB_n نسبت به AP متوافق‌اند، $AC_n < AP$. این امرمحال، قضیه را ثابت می کند.

برهان اول اساساً همان برهان سنتی است که برارسطو (۳۸۴-۳۲۲ق.م.) معلوم بود. این کشف گنگ بودن $\sqrt{2}$ بهتی را درصفوف فیثاغورسیان باعث شد. این امر نه‌تنها فرض اساسی وابسته بودن همه چیز را به اعداد درست ظاهراً برهم می‌زد، بلکه چون تعریف فیثاغورسی تناسب، هردو کمیت همجنس را متوافق فرض می کرد همهٔ قضایای نظریهٔ فیثاغورسی تناسب باید به کمیتهای متوافق محدود می گردید و لذا نظریهٔ عمومی



شکل ۱۵

اشکال متشابه آنها از اعتبار افتاد. این «رسوایی منطقی» آن‌چنان عظیم بود که برای مدتی سعی می‌شد موضوع مخفی نگهداشته شود، و افسانه‌ای با این مضمون وجود دارد که هیپاسوس[1] فیثاغورسی (یا شاید شخص دیگری) به خاطرعدم تقوایش در افشای این راز نزد اجانب، در دریا به هلاکت رسید یا (مطابق روایت دیگری) از جامعهٔ فیثاغورسیان طرد شد و قبری برای وی برپا گردید آن چنان که گویی مرده است.

تامدتها، $\sqrt{۲}$ تنها عدد گنگ شناخته شده‌بود.* بعدها، به گفتهٔ افلاطون، تئودوروس[2] کورنه‌یی[3] (حدود ۴۲۵ق.م.) نشان داد که $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$، $\sqrt{۷}$، $\sqrt{۸}$، $\sqrt{۱۰}$، $\sqrt{۱۱}$، $\sqrt{۱۲}$، $\sqrt{۱۳}$، $\sqrt{۱۴}$، $\sqrt{۱۵}$، $\sqrt{۱۷}$ نیز گنگ هستند. سپس، در حدود ۳۷۰ ق. م. این «رسوایی» توسط ائودوکسوس[4] زیرک، شاگرد افلاطون و آرخوتاس[5]، که از فیثاغورسیان بود، باارائهٔ تعریف جدیدی از تناسب مرتفع گردید. بررسی ماهرانهٔ ائودوکسوس در مورد کمیتهای نامتوافق در مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس ظاهر می‌شود، و اساساً با توصیف نوین اعداد گنگ که به‌وسیلهٔ ریشارد ددکیند[6] درسال ۱۸۷۲ داده شد، منطبق است.

مطالعهٔ مثلثهای متشابه درکتب هندسهٔ دبیرستانی امروزی هنوز برخی از مشکلات و ظرافتهایی را که به واسطهٔ کمیتهای نامتوافق به میان آمده‌اند، نشان می‌دهد.

۳ـ۶ اتحادهای جبری

یونانیان اولیه با الهام از نمایش عدد به وسیلهٔ طول، و بدون دراختیار داشتن هرگونه نمادگذاری جبری مناسب، روشهای هندسی هوشمندانه‌ای را برای انجام اعمال جبری ابداع کردند. قسمت عمدهٔ این جبرهندسی به‌فیثاغورسیان منسوب ودرچندین مقالهٔ آغازین

---

1. Hippasus

* امکان داردکه $(\sqrt{۵}-۱)/۲$، که نسبت ضلع پنج ضلعی منتظم به قطر آن است، اولین عدد گنگ شناخته شده باشد.

2. Theodorus 3. Cyrene 4. Eudoxus 5. Archytas
6. Richard Dedekind

اصول اقلیدس پراکنده شده است. مثلاً، مقالهٔ دوم اصول شامل تعدادی قضایاست که در حقیقت اتحادهایی جبری‌اند که در قالب اصطلاحات هندسی بیان شده‌اند. کاملاً قطعی به نظر می‌رسد که این قضایا توسط فیثاغورسیان اولیه، از طریق روش تقطیع، بسط یافته‌اند. این روش را می‌توانیم با در نظر گرفتن چند قضیهٔ مقالهٔ دوم توضیح دهیم.

قضیهٔ ۴ مقالهٔ دوم به‌طور هندسی اتحاد

$$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$$

را با تقطیع مربعی به‌ضلع $a+b$ به‌دو مربع و دو مستطیل که دارای مساحتهای $a^۲$، $b^۲$، ab و ab هستند، آن چنان‌که درشکل ۱۶ نشان داده شده، ثابت می‌کند. بیان اقلیدس از این قضیه چنین است: اگر خط راستی به دو قسمت دلخواه تقسیم شود، مربع ساخته شده روی تمام خط برابر است با مجموع مربعات ساخته شده روی دو قسمت، به علاوهٔ دو برابر مستطیلی که اضلاع آن از این دو قسمت تشکیل می‌شود.

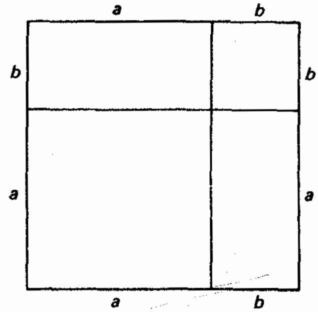
بیان قضیهٔ ۵ مقالهٔ دوم چنین است: اگر خط راستی به طور مساوی، و نیز به‌طور نامساوی تقسیم شود، مستطیل تشکیل شده از قسمتهای نامساوی به علاوهٔ مربع روی خط واقع بین نقاط تقسیم، برابر است با مربع روی نیمهٔ خط. فرض کنید AB پاره‌خط راست مفروض باشد، و فرض کنید که این پاره‌خط در P به‌طور مساوی و در Q به‌طور نامساوی به دو قسمت تقسیم شود. در این صورت قضیهٔ فوق می‌گوید که

$$(AQ)(QB)+(PQ)^۲=(PB)^۲.$$

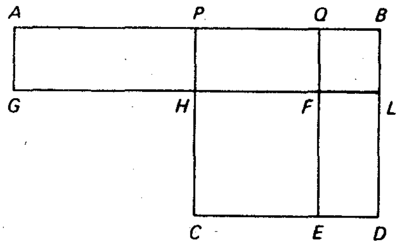
اگر قراردهیم $AQ=۲a$ و $QB=۲b$، اتحاد جبری زیر را خواهیم داشت:

$$۴ab+(a-b)^۲=(a+b)^۲,$$

یا، اگر قرار دهیم $AB=۲a$ و $PQ=b$ به اتحاد زیر می‌رسیم



شکل ۱۶



شکل ۱۷

$$(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$$

تقطیع ارائه شده در اصول برای اثبات این قضیه، پیچیده‌تر از تقطیع داده شده برای قضیهٔ ۴ است و در شکل ۱۷ نشان داده شده است. در این شکل، $PCDB$ و $QFLB$ مربعهایی هستندکه برروی اضلاع PB و QB رسم شده‌اند. دراین صورت

$$(AQ)(QB)+(PQ)^{۲}=AGFQ+HCEF=AGHP+PHFQ+HCEF$$
$$=PHLB+PHFQ+HCEF$$
$$=PHLB+FEDL+HCEF=(PB)^{۲}.$$

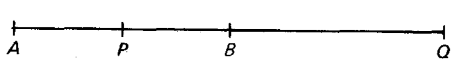
بیان قضیهٔ ۶ درمقالهٔ دوم این است: اگر خط راستی به دو نیم شود و تا نقطهٔ دلخواهی امتداد یابد، مستطیلی‌که ازتمام خط امتداد داده شده وبخشی ازآن که امتداد یافته است، تشکیل شود به علاوهٔ مربع روی نصف خط دو نیم شده، برابراست با مربع روی خط راستی‌که از نصف پاره‌خط اولیه و قسمت امتداد داده شده ساخته شود. در اینجا (نگاه کنید به شکل ۱۸) اگر پاره‌خط راست AB بانقطهٔ وسط P تا نقطهٔ Q امتداد داده شود، باید نشان دهیم که

$$(AQ)(BQ)+(PB)^{۲}=(PQ)^{۲}.$$

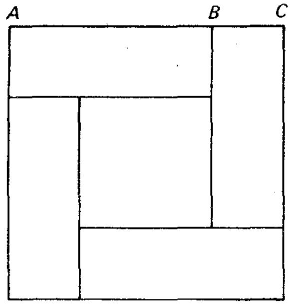
اگر قرار دهیم $AQ=۲a$ و $QB=۲b$، دوباره به اتحاد

$$۴ab+(a-b)^{۲}=(a+b)^{۲}$$

می‌رسیم، و تقطیعی مشابه با آنچه برای قضیهٔ ۵ بدکار رفت، دراینجا نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۱۸



شکل ۱۹

شکل ۱۹، با $AB=a$ و $BC=b$، برهان کم‌زحمت‌تری را برای اتحاد

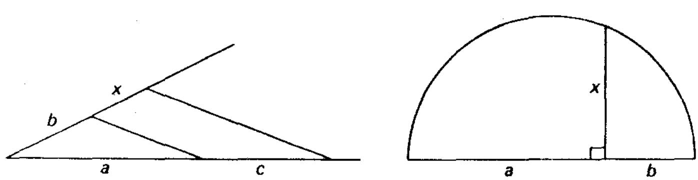
$$۴ab+(a-b)^۲=(a+b)^۲.$$

مطرح می‌کند.

۷-۳ حل هندسی معادلات درجهٔ دوم

یونانیان در جبر هندسی خود، دو روش اصلی را بـرای حل برخی معادلات ساده به کار بردند ـ روش تناسبها و روش اضافه‌کردن مساحتها.[۱] شواهدی در دست است که هردوی این روشها از ابداعات فیثاغورسیان بوده است.

روش تناسبها ترسیم [ساختن] پاره‌خط Xی را (دقیقاً به همان صورت کـه امروزه در دروس هندسهٔ دبیرستانـی عمل می‌کنیـم؛ نگاه کنید به‌شکل ۲۰)، که یا با $a:b=c:x$ و یا با $a:x=x:b$ داده می‌شود، که در آن a،b،c پاره‌خطهایی معلوم‌انـد، امکان‌پذیـر می‌سازد. یعنی، روش تناسبها راه حلهای هندسی برای معادلات



شکل ۲۰

۱. موضوع این‌روش، «قـرار دادن متوازی‌الاضلاعی برکنار خطی است»، کـه ریاضیون دورهٔ اسلامی از آن به «اضافه کردن» متوازی‌الاضلاعی برقطعه خط مفروض تعبیر کـرده‌اند. ما نیز بعد از این همین اصطلاح را به‌کار خواهیم برد.ـــم.

$$ax=bc \quad \text{و} \quad x^2=ab.$$

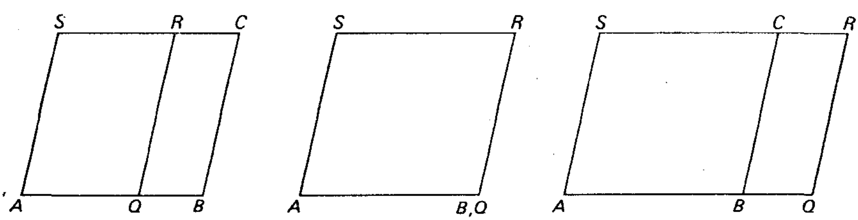
را فراهم می‌آورد.

برای تشریح روش اضافه‌کردن مساحتها، پاره‌خط AB و متوازی‌الاضلاع $AQRS$ را که ضلع AQ آن در امتداد خط AB است، درنظر بگیرید (نگاه‌کنید به شکل ۲۱). اگر Q در B نباشد، C را چنان اختیار کنید که $QBCR$ یك متوازی‌الاضلاع باشد. وقتی Q بین A و B است، متوازی‌الاضلاع $AQRS$، مضاف برقطعه خط AB، بانقصانی به‌مقدار متوازی‌الاضلاع $QBCR$ خوانده می‌شود، وقتی Q بر B منطبق شود، متوازی‌الاضلاع $AQRS$ مضاف برقطعه خط AB خوانده می‌شود. وقتی Q بر امتداد AB از طرف B واقع شود، متوازی‌الاضلاع $AQRS$ مضاف برقطعه خط AB، با زیادتی به‌مقدار متوازی‌الاضلاع $QBCR$ خوانده می‌شود.

قضیهٔ ۴۴ مقالهٔ اول اصول اقلیدس مسئلهٔ ترسیمی زیر را حل می‌کند: اضافه کردن متوازی‌الاضلاعی با مساحت مفروض و زوایای مجاور به قاعدهٔ مفروض بر قطعه خط مفروض AB. حالت خاصی را درنظر بگیرید که در آن زوایای مجاور به قاعده قائمه هستند، به طوری که متوازی‌الاضلاع مضاف مستطیل باشد. طول AB را با a، ارتفاع مستطیل مضاف را با x، و ابعاد مستطیلی را که مساحتی برابر با مساحت مستطیل مضاف دارد با b و c نشان دهید. در این صورت

$$ax=bc, \quad \text{یا} \quad x=\frac{bc}{a}.$$

قضیهٔ ۲۸ مقالهٔ ششم اصول حل مسئلهٔ ترسیمی زیر است: اضافه کردن متوازی‌الاضلاعی مانند $AQRS$ برقطعه خط مفروض AB که مساحت‌آن برابرباشدباشکل مستقیم‌الخط F، بانقصانی به اندازهٔ متوازی‌الاضلاع $QBCR$ متشابه بـا متوازی‌الاضلاع مفروض؛ مساحت F نباید از مساحت متوازی‌الاضلاع رسم شده روی نیمهٔ خط AB و متشابه با نقصان $QBCR$ تجاوز نماید. حالت خاصی را در نظر بگیرید که در آن متوازی‌الاضلاع مفروض، یك مربع‌است. طول AB را با a، قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع مضاف



شکل ۲۱

AQ را (که اکنون مستطیل است) با x و ضلع مربع F را که مساحت آن با مساحت مستطیل مضاف برابر است، با b نشان دهید. دراین صورت

$$x(a-x)=b^{۲}, \qquad \text{یا} \qquad x^{۲}-ax+b^{۲}=۰. \tag{۱}$$

قضیهٔ ۲۹ مقالهٔ ششم مسئلهٔ ترسیمی زیر را حل می‌کند: اضافه نمودن متوازی‌الاضلاعی مانند $AQRS$ بر پاره‌خط مفروض AB با مساحتی مساوی مساحت شکل مستقیم‌الخط F و با زیادتی به اندازهٔ متوازی‌الاضلاع $QBCR$ متشابه با متوازی‌الاضلاع مفروض. حالت خاصی را درنظر بگیرید که در آن، متوازی‌الاضلاع مفروض یك مربع باشد. طول AB را با a، قاعدهٔ AQ از متوازی‌الاضلاع مضاف را (که اکنون یك مستطیل است) با x و ضلع مربعی مانند F با مساحتی مساوی مساحت مستطیل مضاف را با b نشان دهید. در این صورت

$$x(x-a)=b^{۲}, \qquad \text{یا} \qquad x^{۲}-ax-b^{۲}=۰. \tag{۲}$$

نتیجه می‌شود که قضیهٔ ۴۴ مقالهٔ اول اصول راه حلی هندسی برای معادلهٔ خطی $ax=bc$ ارائه می‌کند، و قضایای ۲۸ و ۲۹ مقالهٔ ششم اصول راه‌حلهایی هندسی به ترتیب برای معادلات درجهٔ دوم $x^{۲}-ax-b^{۲}=۰$ و $x^{۲}-ax+b^{۲}=۰$، به‌دست می‌دهند.

به آسانی می‌توان روشهای ترسیمی برای حالتهای خاص قضایای ۲۸ و ۲۹ مقالهٔ ششم ابداع کرد که به طور قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر از ترسیمهای عمومیتر داده شده در اصول باشند.

برای‌مثال، حالت خاص قضیهٔ ۲۸ مقالهٔ ششم را درنظر بگیرید. دراینجا می‌خواهیم بر پاره‌خط مفروضی، مستطیلی اضافه کنیم که به اندازهٔ یك مربع نقصان داشته باشد. با توجه به معادلهٔ اول (۱) ملاحظه می‌کنیم که قضیه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: تقسیم پاره‌خط مفروضی بدان گونه که مستطیل تشکیل شده از قطعات آن برابر مربع مفروضی باشد، در حالتی که این مربع از مربع بنا شده روی نیمهٔ پاره‌خط مفروض بزرگتر نباشد. برای روشنترشدن مسئله، فرض کنید AB و b دو پاره‌خط باشند، به طوری که b از نصف AB بزرگتر نیست. باید AB را به‌وسیلهٔ نقطه‌ای مانند Q چنان تقسیم کنیم که $(AQ)(QB)=b^{۲}$. برای انجام این امر $PE=b$ را روی عمود رسم شده بر AB در نقطهٔ وسط آن، P، جدا می‌کنیم و به مرکز E و به شعاع PB قوسی رسم می‌کنیم که AB را، مثل شکل ۲۲، در نقطهٔ مطلوب Q قطع کند. اثبات درستی این روش درقضیهٔ ۵ مقالهٔ دوم (که احتمالا توسط فیثاغورسیان برای استفاده درهمین مورد ابداع شده) آمده است، زیرا بنا برآن قضیه

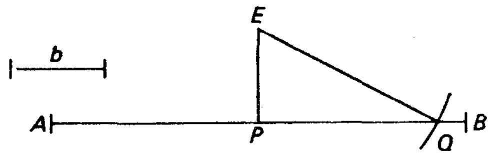
$$(AQ)(QB)=(PB)^{۲}-(PQ)^{۲}=(EQ)^{۲}-(PQ)^{۲}=(EP)^{۲}=b^{۲}.$$

با نشان‌دادن طول AB با a وطول AQ با x، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{۲}-ax+b^{۲}=۰$ را حل

کرده‌ایم، ریشه‌ها با AQ و QB* نمایش داده می‌شوند. ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^2+ax+b^2=0$$

با طولهای AQ و QB با علامت منفی نمایش داده می‌شوند.

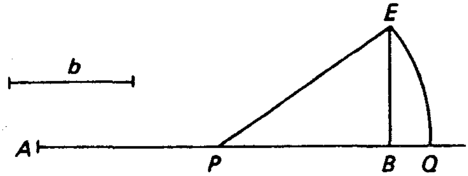


شکل ۲۲

برای حالت خاص قضیهٔ ۲۹ مقالهٔ ششم، می‌خواهیم بر پاره‌خط مفروضی، مستطیلی اضافه کنیم که به اندازهٔ یك مربع زیادتی داشته باشد. با توجه به معادلهٔ اول (۲)، می‌بینیم که مسئله را می‌توان به صورت زیر دوباره بیان کرد: امتداد دادن پاره‌خط مفروضی بدان گونه که مستطیل تشکیل شده از پاره‌خط امتداد داده شده و قسمت امتداد داده شده برابر با مربع مفروضی باشد. دوباره، فرض کنید AB و b دو پاره‌خط باشند. باید AB را تا نقطهٔ Q چنان امتداد دهیم که $(AQ)(QB)=b^2$. برای این منظور $BE=b$ را روی عمود مرسوم بر AB در B جدا می‌کنیم، و به مرکز P، نقطهٔ وسط AB، و به شعاع PE قوسی رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ مطلوب Q قطع کند، مثل شکل ۲۳. این دفعه، برهان به وسیلهٔ قضیهٔ ۶ مقالهٔ دوم عرضه شده، زیرا بنا بر آن قضیه

$$(AQ)(QB)=(PQ)^2-(PB)^2=(PE)^2-(PB)^2=(BE)^2=b^2$$

مانند قبل، ملاحظه می‌کنیم که AQ و QB، که اولی را مثبت و دومی را منفی می‌گیریم، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم



شکل ۲۳

* اگر r و s ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-ax+b^2=0$ باشند، با توجه به جبر مقدماتی می‌دانیم که $r+s=a$ و $rs=b^2$. اما AQ و QB اند که مجموعشان AB؛ یا a، وحاصلضربشان b^2 است.

$$x^2-ax-b^2=0$$

هستند، که در آن a طول AB است. ریشه‌های

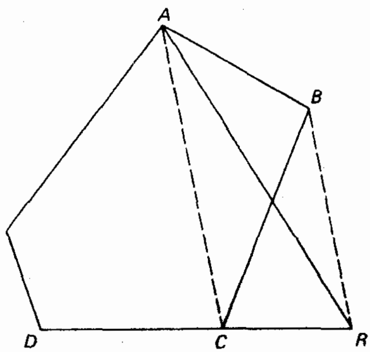
$$x^2+ax-b^2=0$$

همان ریشه‌های معادلهٔ $x^2-ax-b^2=0$ هستند، بجز اینکه علامت آنها عوض شده است.

جبر هندسی فیثاغورسیان، هرچند که حکایت از نبوغ می‌کند، ارزش سادگی و سهولت نهفته در نمادگذاری جبری امروزی را بیشتر نشان می‌دهد.

۸-۳ تبدیل مساحتها

فیثاغورسیان علاقه‌مند بودند که مساحت یك شکل مستقیم‌الخط را به شکل مستقیم‌الخط دیگر تبدیل کنند. حل مسئلهٔ اساسی ساختن مربعی، هم‌مساحت با چند ضلعی مفروض، توسط آنها را می‌توان در قضایای ۴۲، ۴۴، ۴۵، از مقالهٔ اول و قضیهٔ ۱۴ از مقالهٔ دوم اصول اقلیدس پیدا کرد. راه حل ساده‌ای، که احتمالا بر فیثاغورسیان نیز معلوم بود، به قرار زیر است. چند ضلعی دلخواه $ABCD...$ را در نظر بگیرید (نگاه کنید به شکل ۲۴). BR را موازی AC رسم کنید تا DC را در R قطع کند. آنگاه، چون مثلثهای ABC و ARC دارای قاعدهٔ مشترك AC و ارتفاعهای برابر وارد براین قاعدهٔ مشترك‌اند، این‌مثلثها دارای مساحتهای برابرمی‌باشند. درنتیجه چندضلعیهای $ABCD...$ و $ARD...$ مساحتهای مساوی دارند. اما چند ضلعی به دست‌آمده یك ضلع کمتر از چند ضلعی مفروض دارد. با تکرار این عمل، سرانجام به مثلثی دست می‌یابیم که دارای مساحتی برابر مساحت چند ضلعی مفروض است. حال اگر b ضلعی از این مثلث و h ارتفاع وارد بر b باشد، ضلع یك مربع معادل، با $\sqrt{(bh)/2}$، یعنی، باواسطهٔ هندسی بین b و $h/2$، داده می‌شود. چون



شکل ۲۴

این واسطهٔ هندسی باستاره [خط‌کش غیرمدرج] وپرگار به‌آسانی قابل ساختن است، تمام مسئله را می‌توان به‌مدد این وسایل حل کرد.

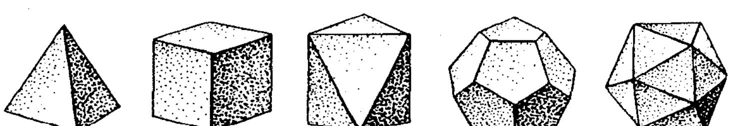
مسائل جالب زیادی دربارهٔ مساحتها را با این روش رسم خطوط موازی می‌توان حل کرد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱.۳).

۳ـ۹ اجسام منتظم

یک چندوجهی را منتظم نامند هرگاه وجوه آن چندضلعیهای منتظم مساوی و کنجهای آن همه مساوی باشند. گرچه چندضلعیهای منتظم از هر مرتبه‌ای موجودند، معلوم می‌شود که تنها پنج چندوجهی منتظم متفاوت وجود دارند (نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲.۳). چندوجهیهای منتظم از روی تعداد وجوه آنها نامگذاری می‌شوند. مثلا چهاروجهی با ۴ وجه مثلثی، شش وجهی، یا مکعب، با ۶ وجه مربعی، هشت وجهی با ۸ وجه مثلثی، دوازده وجهی با ۱۲ وجه پنج ضلعی، و بیست وجهی با ۲۰ وجه مثلثی را داریم (نگاه کنید به شکل ۲۵).

تاریخ اولیهٔ این چندوجهیهای منتظم در تاریکی ایام گذشته محو شده است. بررسی ریاضی آنها در مقالهٔ هشتم اصول اقلیدس آغاز شد. اولین حاشیه براین مقاله خاطرنشان می‌سازدکه این مقاله «اجسام موسوم به افلاطونی را بررسی می‌کند، که به غلط چنین نام یافته‌اند،زیرا سه تا از آنها، یعنی‌چهاروجهی، مکعب، ودوازده‌وجهی‌منسوب به‌فیثاغورسیان است، در حالی‌که هشت وجهی و بیست وجهی به تئایتتوس[1] منسوب می‌باشد.» این مطلب می‌تواند حقیقت داشته باشد.

به هرحال، توصیفی از هرپنج چند وجهی منتظم به وسیلهٔ افلاطون داده شده است؛ وی در کتاب تیمایوس[2] خود نشان می‌دهد که چگونه می‌توان مدلهایی از اجسام صلب را با ترکیب مثلثها، مربعها، و پنج ضلعیهایی که وجوه آنها را تشکیل می‌دهند، ساخت. تیمایوس افلاطون همان تیمایوس لوکریسی[3] پیرو فیثاغورس است که‌از قرار معلوم افلاطون وی را در موقع دیدار از ایتالیا ملاقات کرد. در این اثر افلاطون، تیمایوس چهار جسم صلبی راکه به‌آسانی قابل ساختن است ـ چهار وجهی، هشت وجهی، بیست



شکل ۲۵

---

1. Theaetetus   2. *Timaeus*   3. Timaeus of Locri

وجهی، ومکعب ــ به صورت رمزگونه‌ای با چهار «عنصر» اولیهٔ امپدوکلسی[1] کلیهٔ اجسام مادی ــ آتش، باد، آب، و خاك ــ مربوط می‌سازد. اشکال مربوط به توجیه جسم صلب پنجم، دوازده وجهی، باانتساب آن به جهان پیرامون حل می‌شود.

یوهان کپلر[2] (۱۶۳۰–۱۵۷۱)، سرمنجم، ریاضیدان، و عالم معانی باطنی اعداد[3] توضیح استادانه‌ای برای انتسابهای تیمایوس ارائه کرد. وی به طور شهودی پذیرفت که از بین اجسام صلب منتظم، چهار وجهی کوچکترین حجم را نسبت به سطح خود محصور می‌کند، درحالی‌که بیست وجهی بیشترین حجم را دربرمی‌گیرد. حال این نسبتهای حجم به‌سطح به ترتیب کیفیتهای خشکی و رطوبت هستند، و چون آتش خشکترین این چهار «عنصر» و آب مرطوبترین آنهاست، چهاروجهی باید مظهر آتش و بیست وجهی مظهر آب باشد. مکعب باخاك مربوط است زیرا مکعب، که استوار بریکی ازوجوه مربع شکل خود تکیه می‌کند، بیشترین پایداری را دارد. از سوی دیگر، هشت وجهی وقتی‌که دو رأس متقابل آن به‌آرامی بین دوانگشت سبابه وشست نگهداشته شود، به آسانی می‌چرخد وناپایداری باد را دارد. بالاخره، دوازده‌وجهی باجهان مربوط می‌شود، زیرا دوازده‌وجهی دارای ۱۲ وجه است و منطقةالبروج نیز ۱۲ علامت دارد.

چهاروجهی، مکعب، و هشت‌وجهی را درطبیعت به صورت بلور، مثلاً، به‌ترتیب در سدیم سولفانتیمونات[4]، نمك معمولی، و زاج کروم[5] می‌توان‌یافت. دوتای دیگر نمی‌توانند به شکل بلور پدید آیند، ولی به صورت اسکلت حیوانات دریایی ذره‌بینی‌که رادیولاریا[6] نامیده می‌شوند، مشاهده شده‌اند. در سال ۱۸۸۵ یك چهار وجهی منتظم اسباب‌بازی از ریشهٔ اتروسکی[7]، که تصور می‌شود به‌۵۰۰ق.م. برگردد، در مونته‌لوفا[8] نزدیك پادوا[9] از زیر خاك درآمد.

۳ــ۱۰ تفکر اصل موضوعی

درزمانی بین تالس در ۶۰۰ق.م. واقلیدس در ۳۰۰ق.م. مفهوم یك بحث منطقی به‌صورت سلسله استنتاجهایی دقیق ازچند فرض‌آغازین و صریحاً بیان شده، کمال یافت. این روند، موسوم به روش اصل موضوعی، به صورت هستهٔ اصلی ریاضیات جدید درآمده و بدون تردید قسمت عمدهٔ رشد هندسه بااین الگو، مدیون فیثاغورسیان است. به طور قطع یکی ازعمده‌ترین کارهای یونانیان اولیه بسط این روش موضوعی تفکر بوده است. دربخشهای ۵ــ۷ و ۱۵ــ۲ [جلد ۲] به‌بحث جامعتری ازاین موضوع بازخواهیم گشت.

---

1. Empedoclus 2. Johann Kepler 3. numerologist
4. sodium sulphantimoniate 5. chrome alum 6. radiolaria
7. Etruscan 8. Monte Loffa 9. Padua

مطالعهٔ مسئله‌ای

۱.۳ مسائل عملی تالس

(الف) دو روایت ازچگونگی محاسبهٔ بلندی یك هرم مصری به کمك سایه‌ها توسط تالس در دست است. شرح قدیمیتر، که به وسیلهٔ هیرونوموس[1]، یکی ازشاگردان ارسطو داده شده، می گوید که تالس طول سایهٔ هرم را در لحظه‌ای که سایهٔ وی به درازای خود او بود، یادداشت کرد. روایت جدیدتر، که به وسیلهٔ پلوتارك[2] داده شده، حاکـی از آن است که وی چوبی را برزمین نصب کرد و سپس از مثلثهای متشابه استفاده نمود. هیچیك از دو روایت ذکری از مشکل به دست آوردن طول سایهٔ هرم، یعنی، فاصله از رأس سایـه تا مرکز قاعدهٔ هرم به میان نمی آورند.

روشی، برپایهٔ مثلثهای متشابه و مستقل ازعرض جغرافیایی وموقع سال، برای تعیین بلندی هرم از روی دو اندازهٔ مشاهده شدهٔ سایه، طرح کنید.

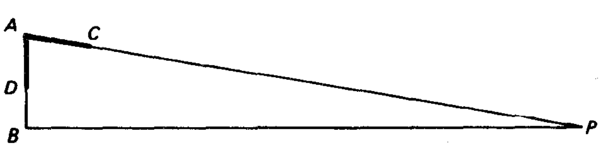
(ب) گفته شده است کـه تالس فاصلهٔ یك کشتی را از ساحـل با استفاده از این واقعیت اندازه گرفت که هرگاه دو زاویه و ضلع بین آنها ازمثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث مساوی‌اند. هیث حدس زده است که این کار احتمالا با دستگاهی متشکل از دو میلهٔ ADوAC، که با لولایی در A بههم متصل‌اند، آن گونه کـه درشکل ۲۶ نشان داده شده، صورت گـرفته است. میلهٔ AD بـه طور عمودی برفراز نقطهٔ B در ساحل گرفته شده، درحالی که میلهٔ AC به طرف کشتی P، نشانه رفته است. آنگاه، بدون تغییرزاویهٔ DAC، دستگاه حول AD چرخانده شده و نقطهٔ Q درروی زمین در امتداد بازوی AC مشخص شده است. برای پیداکردن فاصلهٔ B تا نقطهٔ غیرقابل دسترس P، کدام فاصله باید اندازه گرفته شود؟

۲.۳ اعداد تام و متحابه

(الف) نشان دهید که در فرمول اقلیدس برای اعداد تام، n باید اول باشد.

(ب) چهارمین عدد تامی که از فرمول اقلیدس به دست می آید، کدام است؟

(ج) ثابت کنید کـه مجموع معکوسهای کلیهٔ مقسوم‌علیه‌های هـر عدد تام مساوی ۲ است.



شکل ۲۶

---

1. Hieronymus
2. Plutarch

(د) نشان دهید که اگر p اول باشد، آنگاه p^n ناقص است.
(ه) نشان دهید که اعداد نیکولو پاگانینی، ۱۱۸۴ و ۱۲۱۰، متحابه‌اند.
(و) نشان دهید که هرمضرب یك عدد زاید یا تام، یك عدد زاید است.
(ز) ۲۱ عدد زاید کوچکتر از ۱۰۰ را پیدا کنید. متوجه خواهید شد که همهٔ آنها اعداد زوج‌اند. برای نشان دادن اینکه همهٔ اعداد زاید زوج نیستند، نشان دهید که $945 = 3^3 \times 5 \times 7$ زاید است. این کوچکترین عدد زاید فرد است.
(ح) دنباله‌ای دوری از ۳ عدد یا بیشتر، به طوری که مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی هریك برابر عدد بعدی در دنباله باشد به عنوان یك **زنجیر اجتماعی** اعداد مشهور است. تنها دو زنجیر اجتماعی شناخته شده‌است، یکی با ۵ «حلقه» (که به‌وسیلهٔ پ. پوله[1] فرانسوی پیدا شده) و با ۱۲۴۹۶ شروع می‌شود، و یکی با ۲۸ حلقه که با ۱۴۳۱۶ شروع می‌شود. این زنجیرهای اجتماعی را پیدا کنید. زنجیراجتماعی را که دقیقاً ۳ حلقه داشته باشد، یك **جمعیت** می‌نامند؛ تاکنون هیچ جمعیتی به دست نیامده است.

۳.۳ اعداد مصور

(الف) اولین چهارعدد مسدسی را بنویسید.
(ب) یك **عدد مستطیلی** عبارت از عدهٔ نقطه‌های یك آرایهٔ مستطیلی است که تعداد ستونهایش یکی بیش ازتعداد سطرهاست. به طریق هندسی وجبری نشان دهید که مجموع نخستین n عددصحیح زوج مثبت، یك عدد مستطیلی است.
(ج) به طریق هندسی و جبری نشان دهید که هر عدد مستطیلی، مجموع دو عدد مثلثی مساوی است.
(د) هم به طور هندسی و هم به طور جبری نشان دهید، که ۸ برابر هرعدد مثلثی به اضافهٔ ۱، یك عدد مربعی است.
(ه) ثابت کنید که هرعدد زوج تام، یك عدد مثلثی نیز هست.
(و) ثابت کنید که دنبالهٔ اعداد m ضلعی، به ازای زوجی از اعداد گویای ثابت a و b، با

$$an^2+bn, \quad n=1, 2, \ldots$$

داده می‌شود.
(ز) a و b را در (و) وقتی $m=7$، پیدا کنید.

---

1. P. Poulet

۴.۳ میانگینها

خلاصهٔ[1] اودموسی می‌گوید که در عهد فیثاغورس سه میانگین وجود داشته، **حسابی**، **هندسی** و **مخالف**، که نام اخیر بعدها به وسیلهٔ آرخوتاس و هیپاسوس به **توافقی** تغییر یافت. این سه میانگین را برای دو عدد مثبت می‌توانیم به‌ترتیب به‌صورت

$$A=\frac{a+b}{۲},\qquad G=\sqrt{ab},\qquad H=\frac{۲ab}{a+b},$$

تعریف کنیم.

(الف) نشان دهید که $A\geqq G\geqq H$، تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که $a=b$.

(ب) نشان دهید که $a:A=H:b$. این نسبت به تناسب «موسیقی» معروف بود.

(ج) نشان دهید که H میانگین توافقی بین a و b است درصورتی که عددی مانند n موجود باشد به طوری که $a=H+a/n$ و $H=b+b/n$. این، تعریف فیثاغورس از میانگین توافقی a و b بود.

(د) نشان دهید که $۱/(H-a)+۱/(H-b)=۱/a+۱/b$.

(ه) چون ۸ میانگین توافقی ۱۲ و ۶ است، فیلولائوس[1]، یکی‌ازپیروان فیثاغورس در حدود سال ۴۲۵ق.م.، مکعب را «توافق هندسی» نامید. دراین مورد توضیح دهید.

(و) نشان دهید که اگر a، b، c اجزای یک‌تصاعد توافقی باشند، اعداد $a/(b+c)$، $b/(c+a)$، $c/(a+b)$ نیز چنین‌اند.

(ز) اگر a و c، $a<c$، دو عدد مثبت باشند، در این صورت هرعدد b بین a و c، به‌یک‌معنی، یک‌میانگین (یامعدل) a و c است. فیثاغورسیان بعدی ده میانگین b از a و c را، که به‌ترتیب زیر تعریف می‌شوند، در نظر گرفتند:

$$(۱)\quad (b-a)/(c-b)=a/a \qquad (۶)\quad (b-a)/(c-b)=c/b$$

$$(۲)\quad (b-a)/(c-b)=a/b \qquad (۷)\quad (c-a)/(b-a)=c/a$$

$$(۳)\quad (b-a)/(c-b)=a/c \qquad (۸)\quad (c-a)/(c-b)=c/a$$

$$(۴)\quad (b-a)/(c-b)=c/a \qquad (۹)\quad (c-a)/(b-a)=b/a,\ a<b$$

$$(۵)\quad (b-a)/(c-b)=b/a \qquad (۱۰)\quad (c-a)/(c-b)=b/a,\ a<b$$

با فرض اینکه $c>a>۰$، نشان دهید که در هر ده حالت $a<b<c$.

(ح) نشان دهید که (۱)، (۲)، و (۳) در (ز) به ترتیب میانگین حسابی، هندسی و توافقی a و c را به دست می‌دهند.

---

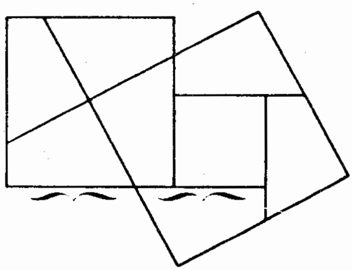
1. Philolaus

۵.۳ اثباتهای تقطیعی قضیهٔ فیثاغورس

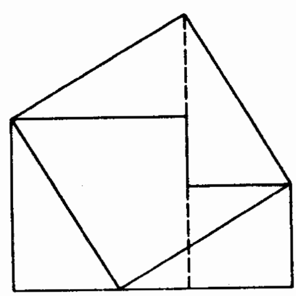
(الف،ب) دومساحت، یا دوحجم، PوQ **مساوی جمعی** خوانده می‌شوند، درصورتی که بتوان آنهارا به‌زوج قطعه‌های مساوی‌متناظر تقطیع کرد. آنها را **مساوی‌تفریقی** گویند اگر بتوان زوج قطعه‌های مساوی متناظر به PوQ افزود تا اشکال جدیدی که مساوی جمعی‌اند، به دست آیند. برهانهای متعددی از قضیهٔ فیثاغورس وجود دارند که با نشان دادن اینکه مربع روی وتر مثلث قائم‌الزاویه با مجموع مربعهای روی ساقها یا مساوی جمعی و یا مساوی تفریقی هستند، به مقصود خود نایل می‌شوند. برهان داده شده در بخش ۳-۴ یك برهان براساس مساوی تفریقی است. دو برهان مساوی جمعی برای قضیهٔ فیثاغورس ارائه دهید که با شکلهای ۲۷ و ۲۸ به ذهن القا می‌شوند، اولی به وسیلهٔ ه. پریگال[1] در سال ۱۸۷۳* و دومی به وسیلهٔ ه. ا. دودنی[2] در سال ۱۹۱۷ داده شده است.

جالب اینکه هر دو مساحت چند ضلعی برابر، مساوی جمعی می‌باشند، و تقطیع را همواره می‌توان با ستاره و پرگار صورت داد. از دیگرسو، در سال ۱۹۰۱، ماکس دهن[3] نشان داد که دوحجم چند وجهی برابر، لزوماً، چه با جمع وچه با تفریق مساوی نیستند. به ویژه، امکان تقطیع یك چهاروجهی منتظم به چند قطعهٔ چندوجهی به‌طوری که بتوان با روی هم گذاشتن آنها یك مکعب تشکیل داد، وجود ندارد.

(ج) یك برهان براساس مساوی تفریقی از قضیهٔ فیثاغورس ارائه دهید که با شکل ۲۹، که گفته می‌شود توسط لئوناردو داوینچی[4] (۱۴۵۲-۱۵۱۹) داده شد، القا می‌شود.



شکل ۲۸



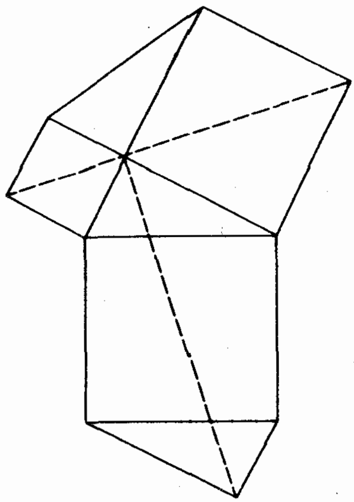
شکل ۲۷

---

1. H. Perigal

* این یك کشف مجدد بود، چرا که این تقطیع بر ثابت بن قوه (۸۲۶-۹۰۱) معلوم بوده است.

2. H. E. Dudeney 3. Max Dehn 4. Leonardo da Vinci



شکل ۲۹

۶.۳ سه تاییهای فیثاغورسی

(الف) نسبت بین وتر و ساق طویلتر مثلث قائم‌الزاویهٔ صحیح‌الاضلاعی که به‌وسیلهٔ فرمول فیثاغورس بخش ۳ـ۴ داده می‌شود، چیست؟

(ب) سه‌تاییهای فیثاغورسی داده‌شده با فرمول فیثاغورس بخش ۳ـ۴ را که برای آنها وتر از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند، پیدا کنید.

(ج) ثابت کنید که هیچ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی وجود ندارد که اضلاع آن اعداد صحیح باشند.

(د) ثابت کنید که هیچ سه‌تایی فیثاغورسی موجود نیست که در آن، یکی از اعداد صحیح واسطهٔ هندسی بین دو تای دیگر باشد.

(ه) ۱۶ سه‌تایی فیثاغورسی اولیه $(a، b، c)$ را که برای آنها b زوج است و $c<۱۰۰$، پیدا کنید. اکنون نشان دهید که دقیقاً ۱۰۰ سه‌تایی فیثاغورسی $(a،b،c)$ متمایز با شرط $c<۱۰۰$ وجود دارند.

(و) نشان دهید که اگر $(a, a+۱, c)$ یك سه‌تایی فیثاغورسی باشد،

$$(۳a+۲c+۱، ۳a+۲c+۲، ۴a+۳c+۲).$$

نیز چنین است. نتیجه می‌شود که از یك سه‌تایی فیثاغورسی مفروض که ساقهای آن اعداد طبیعی متوالی باشند، می‌توانیم سه‌تایی فیثاغورسی دیگری به صورت فوق، با اضلاع بزرگتر به دست آوریم.

(ز) با شروع از سه‌تایی فیثاغورسی (۳،۴،۵)، پنج سه‌تایی فیثاغورسی دیگر را که ساقهای آنها اعداد طبیعی متوالی هستند و اضلاع آنها باهم تصاعد عددی تشکیل می‌دهند، پیدا کنید.

(ح) ثابت کنید که درهرسه‌تایی فیثاغورسی: (۱) حداقل یك ساق مضرب ۴ است، (۲) حداقل یك ساق مضرب ۳ است، (۳) حداقل یك ضلع مضرب ۵ است.

(ط) ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی $n>2$ یك سه‌تایی فیثاغورسی با ساقی مساوی n وجود دارد.

(ی) ثابت کنید که تنها یك عدهٔ متناهی ازسه‌تاییهای فیثاغورسی با یك‌ساق مفروض a وجود دارند.

(ك) نشان دهید که به‌ازای هر عدد طبیعی n و به ازای $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$[2^{n+1}, \quad 2^k(2^{2n-2k}-1), \quad 2^k(2^{2n-2k}+1)]$$

سه‌تاییهای فیثاغورسی هستند. نتیجه می‌شود که به‌ازای هرعدد طبیعی n ، حداقل n سه‌تایی فیثاغورسی مختلف با ساق مشترك $a=2^{n+1}$ وجود دارند. بسا دشواری بیشتری می‌توان نشان داد که به ازای هرعدد طبیعی n ، حداقل n سه‌تایی فیثاغورسی اولیهٔ مختلف با یك ساق مشترك وجود دارند.

(ل) فرض کنید (a_k, b_k, c_k)، $k=1, 2, \ldots, n$ ، n سه‌تایی‌فیثاغورسی اولیهٔ متمایز باشند، بنویسید

$$s_k=a_k+b_k+c_k \quad و \quad s=s_1 s_2 \cdots s_n.$$

اکنون برای $k=1, 2, \ldots, n$ قرار دهید

$$c'_k=c_k s/s_k, \quad b'_k=b_k s/s_k, \quad a'_k=a_k s/s_k.$$

نشان دهید کـه (a'_k, b'_k, c'_k) یك سه‌تایی فیثاغورسی با $a'_k+b'_k+c'_k=s$ است. حال نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد طبیعی n ، حداقل n سه‌تایی فیثاغورسی نامساوی با محیطهای یکسان وجود دارند.

۷.۳ اعداد گنگ

(الف) ثابت کنید خــط مستقیمی که از نقاط (۰ و ۰) و $(1, \sqrt{2})$ می‌گذرد از هیچ نقطهٔ دیگری بجز (۰،۰)، درشبکهٔ مختصات [مجموعهٔ نقاط دارای مختصات صحیح] نمی‌گذرد.

(ب) نشان دهید که چگونه شبکهٔ مختصات را می‌توان برای یافتن تقریبات گویای $\sqrt{2}$ مورد استفاده قرار داد.

(ج) اگر p یك‌عدد اول باشد. نشان دهید که $\sqrt{p}$ گنگ است.
(د) نشان دهید که $\log_{10} 2$ گنگ است.
(ه) (د) را بانشان دادن اینکه اگر a و b اعداد صحیح مثبت بوده و یکی از آنها دارای عامل اولی باشد که در دیگری نمی‌گنجد، آنگاه $\log_a b$ گنگ است، تعمیم دهید.
(و) یك مثلث قائمهٔ ۳۰–۶۰ رسم کنید، به‌اندازهٔ ساق بزرگتر، ازرأس زاویه $30°$، روی وتر جدا کنید؛ وعمودی از نقطهٔ تقسیم بر وتر رسم نمایید. بااستفاده از این شکل، یك اثبات هندسی از گنگ بودن $\sqrt{3}$ را بیان کنید.

۸.۳ اتحادهای جبری

نشان دهید که چگونه هریك از اتحادهای جبری زیر را می‌توان به طور هندسی اثبات کرد.

(الف) $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

(ب) $$a(b+c)=ab+ac$$

(ج) $$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

(د) $$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

(ه) صورت قضیهٔ ۹ مقالهٔ دوم اصول اقلیدس این است: اگر خط مستقیمی به طور برابر و نیز به طور نابرابر تقسیم شود، مجموع مربعات روی دوقسمت نابرابر، دوبرابر مجموع مربعات روی نصف خط و روی خط واصل نقاط تقسیم است. از این قضیه، اتحاد جبری زیر را به دست آورید.

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

۹.۳ جبر هندسی

سه پاره‌خط نابرابر رسم کنید. طویلترین آنها را با a، و پاره‌خط متوسط را با b مشخص کنید، وکوچکترین آنها را ۱ واحد اختیار کنید. با ستاره و پرگار پاره‌خطهایی باطولهای زیر بسازید.

(الف) $a+b$ و $a-b$،

(ب) ab،

(ج) a/b،

(د) $\sqrt{a}$

(هـ) a/n، n یك عدد صحیح مثبت،

(و) $\sqrt{ab}$،

(ز) $a\sqrt{n}$، n یك عدد صحیح مثبت،

(ح) $(a^۳+b^۳)/(a^۲+b^۲)$،

(ط) $a[۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}]^{۱/۲}$،

(ی) $(abcd)^{۱/۴}$، که در آن c و d دو پاره‌خط مفروض دیگرند،

(ك) $x=(a^۲+b^۲-ab)^{۱/۲}$. اگـر مثلثی بـا اضلاع a، b، x تشکیل دهیم، اندازهٔ زاویهٔ بین اضلاع a و b چیست؟

(ل) نشان دهید که $x=ab/(a^۲+b^۲)^{۱/۲}$ برابر با ارتفاع مثلث قائم‌الـزاویه‌ای باساقهای a و b است.

۱۰.۳ راه حلهای هندسی معادلات درجهٔ دوم

(الف) باداشتن پاره‌خطی به طول واحد، معادلهٔ درجـهٔ دوم $x^۲-۷x+۱۲=۰$ را به روش فیثاغورسی حل کنید.

(ب) با داشتن پاره‌خطی به‌طول واحـد، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+۴x-۲۱=۰$ را به‌روش فیثاغورسی حل کنید.

(ج) با ستاره و پرگار پاره‌خط a را به دو بخش تقسیم کنید به طوری که تفاضل مربعات آنها مساوی حاصلضرب‌شان باشد.

(د) در (ج) ، نشان دهید که بخش بزرگتر، واسطهٔ هندسی بین بخش کوچکتـر و تمام پاره‌خط است. گفته می‌شود که پاره‌خط به نسبت ذات وسط و طرفین یا بخش طلایی، تقسیم شده است.

(هـ) معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-gx+h=۰$ داده شده است. دریك دستگاه مختصات قائم دکارتی، نقاط $B:(۰,۱)$ و $Q:(g,h)$ را مشخص کنید. دایـره‌ای به قطر BQ رسم و فرض کنید که این دایره محور xها را در M و N قطع کند. نشان دهید که طولهای علامت‌دار OM و ON نمایش ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض هستند. این حل هندسی معادلات درجهٔ دوم درمقدمات هندسهٔ لزلی[1] با این تذکر آمده است: «راه حل این مسئلهٔ مهم که اکنون در این کتاب مندرج است، به وسیلهٔ آقای تامس کارلایل[2]، ریاضیدان مستعد جوان، ازشاگردان سابقم، به من پیشنهاد شده است.»

(و) معادلات درجهٔ دوم $x^۲-x۷+۱۲=۰$ و $x^۲+۴x-۲۱=۰$ را به روش کارلایل حل کنید.

(ز) دوباره معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-gx+h=۰$ داده‌شده‌است. دریك دستگاه‌مختصات قائم دکارتی نقاط $(۰,h/g)$ و $(۲,۴/g)$ را مشخص و فرض کنید که خط واصل این دو

1. Leslie 2. Thomas Carlyle

نقطه دایرهٔ واحد به مرکز $(0,1)$ را در نقاط R و S قطع کند. نقاط R و S را از نقطهٔ $(2,0)$ برنقاط $(r,0)$ و $(s,0)$ روی محور xها تصویر کنید. نشان دهید که r و s ریشه‌های معادلهٔ مفروض هستند. این راه حل هندسی معادلهٔ درجهٔ دوم به وسیلهٔ هندسه‌دان آلمانی کارل گئورگ کریستیان فون‌اشتات[1] (۱۷۹۸–۱۸۶۷) ارائه شده است.

(ح) معادلات درجهٔ دوم $x^2-7x+12=0$ و $x^2+4x-21=0$ را باروش اشتات حل کنید.

(ط) صحت وسقم راه‌حل هندسی زیر را برای معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-gx+h=0$، $h>0$، تحقیق کنید. اول $\sqrt{b}$ را به عنوان واسطهٔ هندسی بین ۱ و h بسازید. سپس نیمدایره‌ای به قطر $AB=|g|$ ساخته و نیم ـ وتر $CD=\sqrt{b}$ را، که در آن D بر AB واقع است، بر AB عمود کنید. آنگاه AD و DB، که هر دو هم‌علامت با g اختیار می‌شوند، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم هستند. با این روش، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-7x+12=0$ را حل کنید.

(ی) صحت و سقم راه حل هندسی زیر را برای معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-gx+h=0$، $h<0$، تحقیق کنید. دایره‌ای به‌قطر $AB=|g|$ ومماس $AC=\sqrt{-b}$ بر آن را رسم کنید. قاطع قطری CDE را از C رسم کنیدتا دایره را در D و E قطع کند. آنگاه CD و CE، که با علامات مخالف اختیار شوند و CE هم‌علامت با g باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را نمایش می‌دهند. با این روش، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+4x-21=0$ را حل کنید.

۱۱۰۳ تبدیل مساحات

(الف) یك شش ضلعی نامنتظم رسم کنید و سپس، باستاره و پرگار، مربعی با همان مساحت بسازید.

(ب) با ستاره و پرگار، یك چهارضلعی $ABCD$ را با رسم خطوط مستقیمی گذرنده بر رأس A به سه قسمت مساوی تقسیم کنید.

(ج) ذوزنقه‌ای را به وسیلهٔ خطی که از نقطه‌ای مانند P واقع برقاعدهٔ کوچك رسم می‌شود، به دو نیم کنید.

(د) مثلث ABC را چنان تبدیل کنید که زاویهٔ A تغییر نکند، ولی ضلع مقابل به زاویهٔ A با یك خط مفروض MN موازی گردد.

(ه) مثلث مفروضی را به مثلث متساوی‌الساقینی که زاویهٔ رأس آن معلوم باشد، تبدیل کنید.

---

1. Karl Georg Christian von Staudt

۱۲.۳ اجسام منتظم

(الف) نشان دهید که نمی‌توان بیش از پنج چندوجهی منتظم داشت.

(ب) حجم و سطح یك هشت‌وجهی منتظم به ضلع e را پیداکنید.

(ج) برای هریك از پنج چند وجهی منتظم، تعداد رأسها v، اضلاع e، و وجوه f را شمرده سپس کمیت $v-e+f$ را محاسبه کنید. یکی ازجالبترین قضایای مربوط به هر چندوجهی محدب (یا به‌طور کلیتر هرچند وجهی هو تبط ساده)، آن است که $v-e+f=2$. این، شاید برارشمیدس (حوالی ۲۲۵ق.م.) معلوم بوده، ولـی آن را نخستین بار دکارت به طور صریح درحدود سال ۱۶۳۵ بیان کرد. چون اویلر بعداً درسال ۱۷۵۲ آن را به طور مستقل اعلام کرد، اغلب به این نتیجه فرمول اویلر-دکارت گفته می‌شود.

(د) **هشت وجهی مکعبی**، جسم صلبی است که اضـلاع آن از به‌هم وصل کـردن اوساط اضلاع مجاور یك مکعب به دست می‌آیـد. v، e، و f را بـرای یـك هشت‌وجهی مکعبی بشمارید.

(ه) مکعب توپری را درنظـر بگیرید که دو هـرم منتظم بر دو وجه متقابل آن، که قاعدۀ هرمها را تشکیل می‌دهند، ساخته شده‌اند. حال فرض کنید سوراخی که مقطع‌عرضی آن مربع و محورآن روی خطی است که رأس هرمها را به هم وصل می‌کند، در این جسم ایجاد شود. مقدار $v-e+f$ را برای این جسم حلقوی‌شکل محاسبه کنید.

الگوهای ساختن ۱۰۰ جسم مختلف را می‌توان درکتاب میلز س. هارتلی، به نـام الگوهای چند وجهیها[1]، پیدا کرد.

۱۳.۳ چند مسئله درباب اجسام منتظم

(الف) دربخش ۳-۹، تعریف‌منتظم بـودن یك چندوجهی متضمن سه خاصیت‌است: منتظم بودن وجوه، مساوی بـودن وجوه، مساوی بودن کنجها. اغلب کتابهـای درسی در هندسۀ فضایی هـرسه خاصیت تعریف‌کننده را نمی‌دهند. بامثالهای نقضی، نشان دهید که همۀ خاصیتها مورد نیازند.

(ب) از سه خاصیت تعریف‌کننده‌ای که در (الف) ذکرشدند، می‌توان منتظم بودن کنجها را نتیجه‌گـرفت. این کار را انجام دهید و سپس نشان دهید که به‌جای سه خاصیت تعریف‌کننده می‌توان‌تنهادوخاصیت‌زیر راقرار داد: منتظم‌بودن وجوه و منتظم بودن کنجها.

(ج) شخص ناوارد اغلب بـه طورشهودی چنین تصور می‌کنـد که ازبین دوازده وجهی و بیست وجهی‌منتظم محاط دریك کره، بیست‌وجهی‌حجم بیشتررا دارد. نشان‌دهید که در واقع عکس آن صحت دارد، و نیز نشان دهید که از بین یـك مکعب و یك هشت‌وجهی منتظم محاط در یك‌کره، مکعب حجم بیشتر را دارد.

---

1. Miles C. Hartley, *Patterns of Polyhedrons*, revised edition, Ann-Arbor, Mich. private printing, Edwards Brothers, 1957.

(د) نشان دهید که یك دوازده‌وجهی منتظم و یك بیست‌وجهی منتظم محاط در یك کره دارای کرهٔ محاطی واحدی هستند.

(ه) در بخش ۳-۹، توجه کردیم که کپلر به طور شهودی پذیرفت که از پنج جسم منتظم، با سطح جانبی مفروض، بیست‌وجهی دارای بیشترین حجم است. آیا چنین است؟

(و) یك دوازده‌وجهی منتظم، یك بیست‌وجهی منتظم، و یك مکعب در کره‌ای محاط شده‌اند. ثابت کنید که نسبت حجم دوازده وجهی به حجم بیست وجهی برابر است با نسبت طول یك ضلع مکعب به طول یك ضلع بیست وجهی.

۱۴.۳ بخش طلایی

گفته می‌شود که نقطه‌ای خطی را به **نسبت ذات وسط و طرفین** یا **بخش طلایی** تقسیم می کند، هرگاه از دو پاره‌خط تشکیل شده آنکه طویلتر است واسطهٔ هندسی بین پاره‌خط کوتاهتر و تمام خط باشد. نسبت پاره‌خط کوتاهتر به پاره‌خط طویلتر، **نسبت طلایی** نامیده می‌شود. فیثاغورسیان علاقهٔ زایدالوصفی به بخش طلایی و نسبت طلایی نشان می‌دادند.

(الف) نشان دهید که نسبت طلایی $(\sqrt{5}-1)/2$ است.

(ب) آرم انجمن برادری فیثاغورسی، **پنتاگرام**[1]، یا ستارهٔ پنج‌پره تشکیل شده از پنج قطر یك پنج ضلعی منتظم بود. ثابت کنید که هریك از پنج ضلع یك پنتاگرام در برخورد با دو ضلع دیگر از پنتاگرام، آنها را به بخش طلایی تقسیم می کند.

(ج) فرض کنید که نقطهٔ G پاره‌خط AB را به بخش طلایی تقسیم کند که در آن AG پاره‌خط بزرگتر است. بر AB، $AH=GB$ را جدا کنید. نشان دهید که H، AG را به بخش طلایی تقسیم می کند.

(د) با ستاره و پرگار، یك پنج ضلعی منتظم را درصورتی که یك ضلع آن داده شده باشد، رسم کنید.

(ه) با ستاره و پرگار، یك پنج ضلعی منتظم را با معلوم بودن یك قطر پنج ضلعی رسم کنید.

(و) یك پنج ضلعی منتظم را در دایرهٔ مفروضی، تنها با استفاده از ستاره و پرگار، محاط کنید.

۱۵.۳ یك رابطهٔ جالب

به روش هندسی ثابت کنید که

$$1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2.$$

---

1. pentagram

عنوان مقاله

۱/۳ هندسهٔ علمی (تجربی) درمقابل هندسهٔ برهانی.
۲/۳ دلایل احتمالی معمول‌شدن قیاس در ریاضیات از طرف یونانیان.
۳/۳ داستانهایی ازاستعداد خارق‌العادهٔ تالس در مهندسی و نجوم، ومیزان اعتبار آنها.
۴/۳ رازگرایی عددی فیثاغورسی.
۵/۳ دلایلی له فیثاغورسگرایی، به استناد فرمولهای فیزیك جدید.
۶/۳ توجیه فیثاغورس، تا آنجاکه به ریاضیات مربوط می‌شود.
۷/۳ چگونه کشف کمیتهای نامتوافق بحرانی درتوسعهٔ ریاضیات پدیدآورد.
۸/۳ نسبت طلایی در هنر و معماری.
۹/۳ مثالهای ساده‌ای از هندسهٔ عملی برای درس هندسهٔ ابتدایی.
۱۰/۳ تاریخ اولیهٔ اجسام صلب، باالگوهایی برای ساختن آنها.
۱۱/۳ دین‌ریاضیات یونانی به بین‌النهرین و مصر.
۱۲/۳ دلایل تلقی لوژیستیك وآریثمتیك به عنوان موضوعاتی بدون ارتباط باهم.
۱۳/۳ مزایا و معایب روش یونانی نگرش هندسی به حساب.

کتابنامه

AABOE, ASGER, *Episodes from the Early History of Mathematics.* New Mathematical Library no. 13. New York: Random House and L. W. Singer, 1964.
ALLMAN, G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid.* Dublin: University Press, 1889. Reprint available from Bell & Howell, Cleveland, Ohio.
BELL, E. T., *The Magic of Numbers.* New York: McGraw-Hill, 1946.
BUNT, L. N. H.; P. S. JONES; and J. D. BEDIENT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods.* New York: Oxford University Press, 1940.
COURANT, RICHARD, and H. E. ROBBINS, *What is Mathematics?* New York: Oxford University Press, 1941.
DANTZIG, T., *Number, The Language of Science.* 3rd ed. New York: Macmillan, 1939.
———, *The Bequest of the Greeks.* New York: Charles Scribner's, 1955.
GOW, JAMES, *A Short History of Greek Mathematics.* New York: Hafner, 1923. Reprint available from Bell & Howell, Cleveland, Ohio.
HEATH, T. L., *History of Greek Mathematics.* Vol. 1. New York: Oxford University Press, 1921. Reprinted by Dover, 1981.
———, *A Manual of Greek Mathematics.* New York: Oxford University Press, 1931.
———, *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* 2d ed., 3 vols. New York: Cambridge University Press, 1926. Reprinted by Dover, New York.
LESLIE, SIR JOHN, *Elements of Geometry, Geometrical Analysis, and Plane Trigonometry.* Edinburgh: Oliphant, 1809. Reprint available from Bell & Howell, Cleveland, Ohio.
LOOMIS, E. S., *The Pythagorean Proposition.* 2d ed. Ann Arbor, Mich.: private printing, Edwards Brothers, 1940. Reprinted by the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1968.
MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians.* Translated by John Dyer-Bennet. San Francisco: Holden-Day, 1964.
MUIR, JANE, *Of Men and Numbers.* New York: Dodd, Mead, 1961.
PROCLUS, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Translated by G. R. Morrow. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970.

SHANKS, DANIEL, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, vol. 1. Washington, D.C.: Spartan Books, 1962.

SIERPINSKI, WACLAW, *Pythagorean Triangles.* Scripta Mathematica Studies Number Nine. Translated by Ambikeshwar Sharma. New York: Yeshiva University, 1962.

THOMAS, IVOR, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics.* 2 vols. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939–1941.

TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians.* New York: New York University Press, 1961.

VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening.* Translated by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961; (paperback ed.) New York: John Wiley, 1963.

WENNINGER, M. J., *Polyhedron Models for the Classroom.* Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1966.

——— *Polyhedron Models.* New York: Cambridge University Press, 1970.

۴

تضعیف، تثلیث و تربیع

۴-۱ دورهٔ از تالس تا اقلیدس

سه قرن اول ریاضیات یونانی، که با تلاشهای اولیه در هندسهٔ برهانی به وسیلهٔ تالس در حدود ۶۰۰ ق.م. شروع شده و با کتاب برجستهٔ *اصول* اقلیدس در حدود ۳۰۰ ق.م. به‌اوج رسید، دوره‌ای از دستاوردهای خارق‌العاده را تشکیل می‌دهد. درفصل پیشین برخی از سهمهای فیثاغورسیان در این دستاوردها را ملاحظه کردیم. علاوه برمدرسهٔ یونیایی که به‌دست تالس در میلتوس تأسیس گردید و مدرسهٔ اولیهٔ فیثاغورسی درکروتونا، شماری از مراکز ریاضی در جاهایی و در طی ادواری که به‌طورعمده تحت تأثیرزمینه‌ای از تاریخ سیاسی یونانی بودند، به‌وجود آمدند و رونق یافتند.

درحدود ۱۲۰۰ ق.م. بودکه قبایل بدوی دوریایی[1] با ترک دژهای کوهستانی‌شمال برای دستیابی به‌قلمروهای مساعدتر درامتداد جنوب راهی شبه‌جزیرهٔ‌یونان شدند ومتعاقب آن قبیلهٔ عمدهٔ آنها، یعنی اسپارتها، شهر اسپارت را بنا کردند. بخش مهمی از سکنهٔ قبلی ناحیهٔ مورد تهاجم، برای حفظ جان، به‌آسیای صغیر و جزایر یونیایی دریای اژه گریختند و بعدها در آنجا مهاجرنشینهای تجاری یونانی را برپا کردند. دراین مهاجرنشینها بودکه، در قرن ششم ق.م. اساس مکتب یونیایی نهاده شد و فلسفهٔ یونانی شکوفا گردید و هندسهٔ برهانی تولد یافت.

---

1. Doris

دراین ضمن، ایران بدل به‌یك امپراطوری بزرگ نظامی شده بود، و، به‌پیروی از یك برنامهٔاجتناب‌ناپذیر توسعه‌طلبانهٔ ناشی از اقتصاد مبتنی بر برده‌داری، درسال ۵۴۶ق.م. شهرهای یونیا و مهاجرنشینهای یونانی آسیای صغیر را تسخیر نمود. در نتیجه، عده‌ای از فیلسوفان یونانی، مانند فیثاغورس وکسنوفانس[1]، موطن خود را ترك و به مهاجرنشینهای درحال رونق جنوب ایتالیا کوچ کردند. مدارس فلسفه و ریاضیات درکروتونا، زیر نظر فیثاغورس، و در الیا[2]، زیر نظرکسنوفانس، زنون، و پارمنیدس[3] پدید آمدند.

شهرهای مسخر شدهٔ یونیا بشدت تحت یوغ ستم بودند، و در ۴۹۹ق.م. شورشی برپا شد. آتن، که بدل به‌مرکزی برای تمدن غرب با پیشرفت سیاسی به‌سوی دموکراسی می‌گردید، با اعزام قشون به‌انقلاب کمك کرد. اگرچه شورش سرکوب شد، داریوش شاه ایران که از این ماجرا به‌خشم آمده بود، عزم به‌تنبیه آتن کرد. در ۴۹۲ ق.م. وی قوای زمینی و دریایی عظیمی را برای حمله به‌سرزمین اصلی یونان سازمان داد، ولی ناوگان وی دریك طوفان نابود شد وقوای زمینی‌اش متحمل مشکلات ناشی ازلشکرکشی گردیدند. دو سال بعد، لشکریان ایران به‌آتیك[4] نفوذکردندکه درآنجا در ماراتون به‌دست آتنیها شکستی قطعی یافتند. بدین‌ترتیب آتن رهبری یونان را به‌دست آورد.

در ۴۸۰ق.م. خشایار، پسر داریوش، به‌تهاجم زمینی و دریایی دیگری علیه یونان دست زد. آتنیها با ناوگان ایران در جنگ بزرگ دریایی سالامیس[5] مصاف داده وپیروز شدند، و باآنکه نیروهای زمینی یونان به‌رهبری اسپارتها در ترموپیل[6] شکست خوردندو تار ومار شدند، یونانیها درسال بعد در پلاته[7] بر ایرانیان فایق آمدند و مهاجمین را از یونان بیرون راندند. چیرگی آتنیها مستحکم گردید وآرامش پنجاه سالهٔ بعد از آن، دورهٔ درخشانی در تاریخ آتن بود. این شهرپریکلس[8] و سقراط مرکز رشد دموکراسی و شکوفایی اندیشه‌ها گردید. ریاضیدانان از هر گوشهٔ جهان یونان به‌این شهرجذب شدند. آناکساگوراس[9]، آخرین عضو برجستهٔ مدرسهٔ یونیا، در آنجا سکونت‌گزید. بسیاری از فیثاغورسیان پراکنده به‌آتن راه یافتند، و زنون و پارمنیدس که وابسته به مدرسهٔ الیایی [نحلهٔ الیایی] بودند، برای تدریس به‌آتن رفتند. بقراط[10]*، از مردم جزیرهٔ یونیایی خیوس[11] ازآتن دیدار کرد و نویسندگان باستان شهرت‌داده‌اندکه وی اولین‌کتاب منسجم هندسه را در آنجا انتشارداده است.

در سال ۴۳۱ق.م.، باآغاز جنگ پلوپونزی بین آتنیها واسپارتها، صلح به‌پایان رسید. این ستیز، طولانی و بی‌فرجام ازکار درآمد. آتن‌که در ابتدا پیروزمند بود، بعداً متحمل طاعون نابودکننده‌ای گردیدکه یك‌چهارم جمعیت آن‌را هلاك کرد، و سرانجام در

---

1. Xenophanes   2. Elea   3. Parmenides   4. Attica
5. Salamis   6. Thermopylae   7. Plataea   8. Pericles
9. Anaxagoras   10. Hippocrates

* نباید با بقراط اهل‌کوس (Cos)، طبیب مشهور یونان‌کهن اشتباه شود.

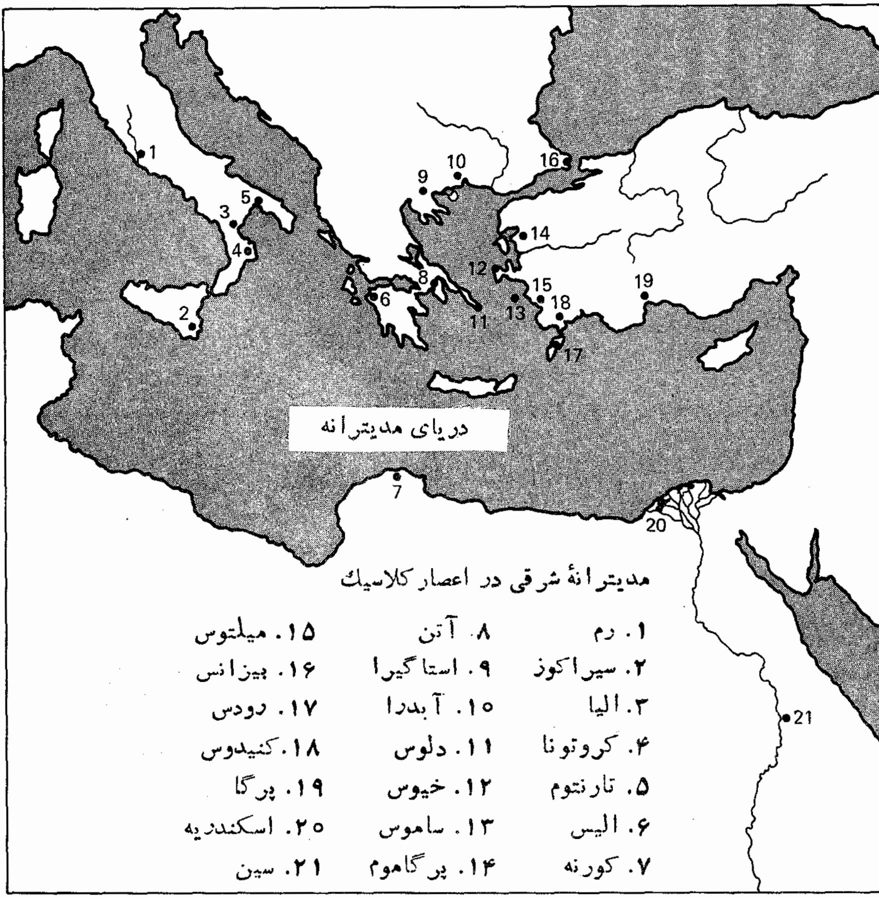
11. Chios

سال ۴۰۴ق.م. مجبور به پذیرش شکست تحقیرآمیزی شد. اسپارتها رهبری سیاسی‌را در اختیار گرفتند، اما در سال ۳۷۱ ق.م. دراثر شکست به‌دست گروهی متفق از شهرهای خودمختار شورشی آن‌را ازکف دادند. در جریان این مبارزات، پیشرفت‌کمی در هندسه در آتن حاصل شد، و یك‌بار دیگر پیشرفت در نواحی‌آرامتر ماگنا گرکیا[1] [یونان‌بزرگ] پدید آمد. به فیثاغورسیان ایتالیای جنوبی، که از وابستگی سیاسی تطهیر شده بودند، اجازهٔ بازگشت داده شد و مدرسهٔ فیثاغورسی جدیدی درتارنتوم[2]، تحت نفوذ آرخوتاس بااستعداد و پرآوازه، برپا شد.

اگرچه آتن با پایان‌یافتن جنگ پلوپونزی بدل به قدرت سیاسی کم اهمیت‌تری شد، ولی رهبری فرهنگی خود را دوباره به‌دست آورد. افلاطون درآتن یا حوالی آن درسال ۴۲۷ق.م.،که همان سال طاعون بزرگ بود، به‌دنیا آمد. وی فلسفه را در آنجا زیرنظر سقراط خواند وسپس در پی‌کسب حکمت عازم سیرو سفرهای طولانی شد،که بدین‌ترتیب ریاضیات را زیر نظر تئودوروس‌کورنه‌ای در ساحل افریقا تحصیل‌کرد و دوست صمیمی آرخوتاس نام‌آور شد. در بازگشت به‌آتن در حدود سال ۳۸۷ ق.م.، وی آکادمی مشهور خود را درآنجا تأسیس کرد که مؤسسه‌ای برای پیگیری منظم و اصولی تتبعات فلسفی و علمی بود. در باقی عمرآکادمی خود را سرپرستی نمود و در سال ۳۴۷ ق.م. در سن ۸۰ سالگی درآتن درگذشت. تقریباً تمام‌کارهای مهم ریاضی قرن چهارم ق.م. به‌وسیلهٔدوستان یا شاگردان افلاطون انجام شده بود؛ که آکادمی وی را به عنوان حلقهٔ ارتباط ریاضیات فیثاغورسیان اولیه و ریاضیات مدرسهٔ ریاضی دیرپاتر بعدی در اسکندریه درآورد. تأثیر افلاطون برریاضیات، معلول هیچیك ازکشفیات ریاضی وی نبوده، بلکه به‌خاطر این‌اعتقاد شورآمیز وی بودکه مطالعهٔ ریاضیات عالیترین زمینه را برای تعلیم ذهن فراهم می‌آورد، وازاین‌رو درپرورش فیلسوفان وکسانی‌که می‌بایست دولت‌آرمانی‌وی‌را اداره می‌کردند، نقش اساسی داشت. این اعتقاد، شعار معروف او را بر سردر آکادمی وی توجیه می‌کند: کسی‌که هندسه نمی‌داند داخل نشود. بنابراین، به‌دلیل رکن منطقی و نحوهٔ برخورد ذهنی نابی‌که تصور می‌کرد مطالعهٔ ریاضیات در شخص ایجاد می‌کند، ریاضیات به‌نظرافلاطون از بیشترین اهمیت برخوردار بود، و به‌همین جهت بودکه جای پرارزشی را در برنامهٔ درسی آکادمی اشغال‌کرد. برخی در پاره‌ای ازگفتارهای افلاطون آنچه راکه ممکن است اولین تلاش جدی در فلسفهٔ ریاضیات تلقی شود، مشاهده می‌کنند.

ائودوکسوس، که هم پیش آرخوتاس وهم نزدافلاطون درس‌خوانده بود، مدرسه‌ای در سیزیکوس[3] در آسیای صغیر شمالی تأسیس‌کرد. منایخموس[4]، از معاشرین افلاطون و یکی از شاگردان ائودوکسوس، مقاطع مخروطی را ابداع‌کرد. دینوستراتوس[5]، برادر منایخموس، هندسه‌دانی ماهر و از شاگردان افلاطون بود. تئایتتوس، مردی بااستعدادهای جبلی غیرعادی، که احتمالا قسمت اعظم مطالب مقاله‌های دهم و سیزدهم اقلیدس را نیزبه

1. Magna Graecia 2. Tarentum 3. Cyzicus
4. Menaechmus 5. Dinostratus



مدیترانهٔ شرقی در اعصار کلاسیک

او مدیونیم، یکی دیگراز شاگردان آتنی تئودوروس بود. باید از ارسطو نیزذکری به میان آید، که گرچه ادعای ریاضیدان بودن نداشت، سازمان‌دهندهٔ منطق قیاسی و نویسندهٔ آثاری درباب موضوعات فیزیکی بود؛ بعضی ازقسمتهای آنالوتیکا پوستریورا[1]ی [آنالوطیقای ثانی] وی تسلط خارق‌العاده‌ای را بر روشهای ریاضی نشان‌می‌دهند.

۴-۲ مسیرهای تکامل ریاضیات

در تکامل ریاضیات طی ۳۰۰ سال اول ریاضیات یونانی، سه‌خط سیرمهم و متمایز را می‌توان تشخیص‌داد. ابتدا، بسط مطالبی است که مآلا در اصول مدون شد، که باتوانایی توسط فیثاغورسیان شروع شد وبعداً بقراط، ائودوکسوس، تئودوروس، تئایتتوس، و

1. *Analytica posteriora*

دیگران مطالبی به‌آن اضافه کردند. قبلا گوشه‌هایی از این پیشرفتها را بررسی کرده‌ایم، و در فصل بعد به‌آن باز خواهیم گشت.

خط سیر دوم شامل بسط مفاهیمی است در رابطه با بینهایت کوچکها و روندهای حدی و مجموعیابی که تا بعد از اختراع حساب دیفرانسیل و انتگرال در دوران معاصر به‌وضوح نهایی دست نیافتند. پارادوکسهای زنون، روش افنای آنتیفون[1] و ائودوکسوس و نظریهٔ اتمی بودن جهان که با نام دموکریتوس مربوط است، به‌مسیر رشددوم تعلق‌دارند، و در یکی از فصول آتی که به مبدأ حساب دیفرانسیل و انتگرال اختصاص داده شده، مورد بحث قرار خواهند گرفت. سومین مسیر تکامل مربوط به هندسهٔ عالی یا هندسهٔ منحنیهایی بجز دایره و خط مستقیم و سطوحی غیر از کره و صفحه است. شگفت آنکه، قسمت عمدهٔ این هندسهٔ عالی در تلاشهای مستمر برای حل سه مسئلهٔ ترسیم، که امروزه مشهورند، به‌وجود آمد. دراین فصل این سه مسئلهٔ مشهور مورد بحث قرار می‌گیرند.

۴-۳ سه مسئلهٔ مشهور

سه مسئلهٔ مشهور عبارت‌اند از:

۱ــ تضعیف مکعب، یا مسئلهٔ ترسیم ضلعی از یك مکعب که حجم آن دو برابر حجم یك مکعب مفروض است.

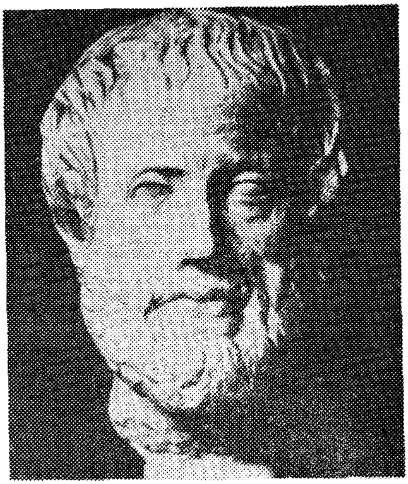
۲ــ تثلیث زاویه، یا مسئلهٔ تقسیم‌یك زاویهٔ مفروض دلخواه به سه قسمت مساوی.

۳ــ تربیع دایره، یا مسئلهٔ ساختن مربعی که دارای مساحتی برابر بامساحت دایرهٔ مفروضی است.

افلاطون
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

---

1. Antiphon



ارسطو
(برادران براون)

اهمیت این مسائل دراین حقیقت نهفته است که آنها را نمی‌توان، جز به‌تقریب، با ستاره و پرگار حل کرد، اگرچه این ادوات برای حل آن همه مسائل ترسیمی دیگر به‌کار می‌آیند. جستجوی پرتلاش برای یافتن جوابهای این سه مسئله برهندسهٔ یونانی عمیقاً اثر گذاشت و منجر به کشفیات پرثمر بسیاری، از قبیل مقاطع مخروطی، بسیاری از منحنیهای درجهٔ سوم و چهارم، و منحنیهای متعالی متعدد گردید. نتیجه‌ای که مدتها بعد، از آن ناشی شد، پیدایش بخشهایی از نظریهٔ معادلات دربارهٔ حوزه‌های گویایی، اعداد جبری، ونظریهٔ گروهها بود. ناممکن بودن این سه ترسیم تحت محدودیتهای پذیرفته شده مبنی براینکه تنها از ستاره و پرگار می‌توان استفاده کرد، تاقرن نوزدهم، یعنی تا متجاوز از ۲۰۰۰ سال بعد ازآنکه این مسائل متصور شده بودند، ثابت نشده بود.

حرکت عظیمی که براثرکوششهای مداوم برای حل این سه مسئلهٔ مشهورعهد عتیق، در بسط ریاضیات جدید داده شد، نشان‌دهندهٔ ارزش رهگشایانهٔ مسائل جالب و حل‌نشده در ریاضیات است.

۴ـ۴ ابزارهای اقلیدسی

تصریح براینکه مجاز به‌انجام چه اعمالی باستاره و پرگار هستیم، اهمیت دارد. باستاره مجازیم‌که خط مستقیمی باطولی نامعین از هردو نقطهٔ متمایز مفروض رسم‌کنیم؛ با پرگار می‌توانیم دایره‌ای، با هرنقطهٔ مفروضی به‌عنوان مرکز آن‌و ماد بر هرنقطهٔ مفروض دیگر رسم کنیم. انجام ترسیمها با ستاره و پرگار به‌عنوان یك بازی بااین دو قاعده، یکی از دل‌انگیزترین و جذابترین بازیهایی‌ازکار درآمده‌که تاکنون وضع شده‌اند. ترسیمهای واقعاً بغرنجی‌که بدین منوال می‌توان به‌آنها دست یافت، مایهٔ تعجب می‌شوند و ازاین رو به سختی می‌توان باورکردکه مسائل ظاهراً ساده‌ای نیزکه در بخش ۴ـ۳ ارائه شده‌اند، بدین‌ترتیب قابل حل نیستند.

چون اصول موضوعهٔ ۱صول اقلیدس استفاده ازستاره و پرگار را طبق قواعد بالا محدود می‌کند، این وسایل بااین نحوهٔ استفاده، به **ابزارهای اقلیدسی** شهرت یافته‌اند. باید توجه داشت که ستاره خط‌کشی است که مدرج نیست. خواهیم دید که بایك خط‌کش مدرج، تثلیث یك زاویهٔ مفروض میسر است. همچنین، توجه داریم که پرگار اقلیدسی با پرگارهای امروزی متفاوت است، زیرا با پرگارهای امروزی قادر به‌رسم دایره‌ای به‌مرکز C و به‌شعاعی برابربا هر پاره‌خط AB هستیم. به‌عبارت دیگر، مجازیم که فاصلهٔ AB را به مرکز C، بااستفاده از پرگار به‌عنوان پرگار دوسر، انتقال دهیم. پرگارهای اقلیدسی، از سوی دیگر، فرضاً با برداشتن یك ساق‌آن از روی‌کاغذ فرو می‌ریزند. ممکن است به‌نظر آید که پرگارهای مدرن قدری قویتر از پرگار اقلیدسی، یا فروریزنده، باشند. عجیب آنکه، این دو، ابزارهایی معادل‌اند (نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱.۴).

۴-۵ تضعیف مکعب

شواهدی وجود داردمبنی براینکه مسئلهٔ تضعیف مکعب ممکن است نخستین‌بار درگفته‌های شاعری گمنام و ریاضی‌نخوانده از یونان باستان عنوان شده باشد که نارضایی شاه‌مینوس[1] افسانه‌ای را از آرامگاه بناشده برای پسرش، گلائوکوس[2] شرح می‌دهد. مینوس فرمان داده بود که قبر از نظر اندازه دوبرابر شود. آنگاه شاعر اززبان مینوس، به‌غلط، اضافه می‌کندکه این‌کار را می‌توان با مضاعف‌نمودن هریك از ابعاد قبرصورت داد. این‌تدبیر ریاضی نادرست ازسوی شاعر، هندسه‌دانان را برآن داشت که مسئلهٔ یافتن نحوهٔ دو برابر کردن جسم مفروضی را باحفظ شکل اولیهٔ آن در پیش‌رو گذارند. به‌نظر نمی‌رسدکه تا مدتها بعد، یعنی هنوز تا وقتی که بقراط تحویل مشهور خود راکه در زیر ارائه می‌کنیم کشف نکرده بود، هیچ پیشرفتی‌دراین مسئله صورت گرفته باشد. همچنین بعدها گفته‌شده که دلوسی[3]ها ازکاهنان خود دستور گرفتندکه برای رهایی از بیماری طاعون شیوع یافته‌ای، اندازهٔ مذبح مکعب‌شکل آپولون[4] را دوبرابر کنند. مشهور است که مسئله را پیش‌افلاطون بردند ووی آن‌را به‌هندسه‌دانها تسلیم کرد. داستان اخیر است که سبب شده به‌مسئلهٔ تضعیف، اغلب عنوان مسئلهٔ دلوسی داده شود. خواه داستان درست باشد یانه، این مسئله‌درآکادمی افلاطون مورد مطالعه قرارگرفت وجوابهایی درسطح هندسهٔ عالی منسوب به‌ائودوکسوس، منایخموس، وحتی (گرچه احتمالا به‌خطا) به‌خود افلاطون موجودند.

اولین پیشرفت واقعی در مسئلهٔ تضعیف، بدون شك تحویل مسئله به‌وسیلهٔ بقراط (حوالی ۴۴۰ ق.م.) به‌ترسیم دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض به‌طولهای s و $2s$ بود. اگردو واسطهٔ هندسی را با x و y نشان دهیم، آنگاه

$$s:x=x:y=y:2s$$

1. Minos 2. Glaucus 3. Delians 4. Apollo

ازاین تناسبها داریم $sy = x^2$ و $2sx = y^2$. با حذف y داریم $x^3 = 2s^3$. بنابراین x ضلع مکعبی است که حجمی دو برابر حجم مکعب به‌ضلع s دارد.

بعد از ابداع این تحویل توسط بقراط، تلاشهای بعدی در تضعیف مکعب، به‌صورت ترسیم دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض در آمد. یکی از قدیمیترین و یقیناً یکی از مهمترین جوابهای مسئله به‌صورت اخیر و مبتنی برهندسهٔ عالی به‌وسیلهٔ آرخوتاس (حدود ۴۰۰ ق.م.) داده شده است. این جواب متکی است بریافتن یکی از نقاط تلاقی یك استوانهٔ مستدیر قائم، یك چنبره به‌قطر داخلی صفر، و یك مخروط مستدیر قائم! این جواب تا حدی میزان نامعمول پیشرفتی راکه هندسه باید در آن زمان دور بدان رسیده باشد، نشان می‌دهد. حل ائودوکسوس (حوالی ۳۷۰ ق.م.) در دست نیست. منایخموس (حدود ۳۵۰ق.م.) دو راه حل برای این مسئله ارائه داد و تا آنجاکه معلوم شده، مقاطع مخروطی را به‌همین منظور ابداع کرد. راه حل بعدتری که از شیوه‌ای مکانیکی استفاده می‌کند به‌اراتستن[1] (حدود۲۳۰ ق.م.) و دیگری که تقریباً مربوط به‌همان زمان است، به نیکومدس[2] نسبت داده شده است. راه حل دیگری بعداً به‌وسیلهٔ آپولونیوس[3] (حدود۲۲۵ ق.م.) عرضه شده است. دیوکلس[4] (حدود ۱۸۰ ق.م.) منحنی سیسوئید را برای به‌دست آوردن نتیجهٔ مطلوب ابداع کرد. البته، راه حلهای بسیاری با استفاده ازمنحنیهای مسطحهٔ درجات بالاتر از دو در دوره‌های معاصر ابداع شده‌اند.

تعدادی از راه حلهای مورد اشاره در بالا را در پایان این فصل می‌توان یافت. برای اینکه روح این‌تلاشها را تشریح کنیم، راه حلی راکه ائوتوکیوس[5] به‌افلاطون نسبت داده، در اینجا دوباره مطرح می‌کنیم. چون این راه حل از طریق وسایل مکانیکی است و چون می‌دانیم که افلاطون باچنین روشهایی مخالف بوده، احساس می‌شود که اسناد آن به افلاطون اشتباه‌آمیز باشد.

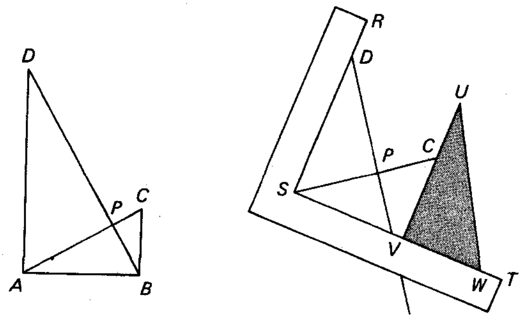
دو مثلث CBA و DAB، راکه به‌ترتیب در B و A قائمه‌اند و هردو در یك طرف ساق مشترك AB قرار دارند، در نظر بگیرید (به اولین قسمت شکل ۳۰ نگاه کنید). فرض کنید که وترهای AC و BD از دو مثلث یکدیگر را به زاویهٔ قائم در P قطع کنند. با توجه به‌مثلثهای متشابه CPB، BPA، APD نتیجه می‌شود که

$$PC:PB = PB:PA = PA:PD.$$

بنابراین PB و PA دو واسطهٔ هندسی بین PC و PD هستند. نتیجه می‌شود که مسئله در صورتی که بتوان شکلی ساخت که در آن $PD = 2(PC)$، حل شده است. قسمت دوم شکل ۳۰ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان چنین شکلی را با استفاده از وسایل مکانیکی ترسیم کرد. دو خط عمود متقاطع در P را رسم و PC و PD را با $PD = 2(PC)$ روی آن جدا کنید. حال، یك گونیای نجاری با لبهٔ داخلی RST را روی شکل چنان قرار دهید که SR

---

1. Eratosthenes 2. Nicomedes 3. Apollonius
4. Diocles 5. Eutocius



شکل ۳۰

از D گذشته و رأس S زاویهٔ قائمه، روی امتداد CP قرار گیرد. بر ST یک مثلث قائم‌الزاویهٔ UVW را، با ساق VW واقع بر ST، بلغزانید تا ساق VU از نقطهٔ C بگذرد. حال دستگاه* را بادست حرکت دهید تا V برامتداد DP قرار گیرد.

۴ـ۶ تثلیث زاویه

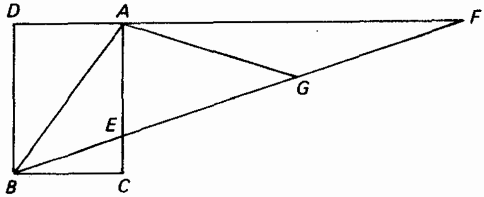
از سه مسئلهٔ مشهور یونان قدیم، تثلیث زاویه به نحو بارزی در بین افراد ناوارد از نظر ریاضی در آمریکای امروز از همه بیشتر مورد توجه است. همه‌ساله مجلات ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش ریاضی این کشور مراسلات متعددی از «تثلیث‌کنندگان زاویه» دریافت می‌دارند و استبعادی ندارد اگر در روزنامه‌ها بخوانیم که شخصی سرانجام این مسئلهٔ فریبنده را «حل» کرده است. این مسئله به طور قطع در بین سه مسئلهٔ مشهور از نظر فهم ساده‌تر از همه است، چون‌دو نیم کردن یك زاویه بسیار ساده است، طبیعی است اگر تعجب کنیم که چرا تثلیث آن همین‌قدر آسان نیست.

تقسیم یك پاره‌خط به‌چند قسمت مساوی باابزارهای اقلیدسی کار ساده‌ای است و ممکن است چنین باشد که یونانیان باستان در تلاش برای حل مسئلهٔ مشابه تقسیم زاویه به چند قسمت، به‌مسئلهٔ تثلیث رسیده باشند. یا شاید به‌طور محتملتر، مسئله در تلاشهایی برای ساختن یك نه ضلعی منتظم، که درآن تثلیث یك زاویهٔ ۶۰° لزوم پیدا می‌کرد، مطرح شده باشد.

در مطالعهٔ مسئلهٔ تثلیث به‌نظر می‌رسد که یونانیان ابتدا آن را به‌آنچه مسئلهٔ گرایش

---

* برای شکل اصلاح شده‌ای ازاین دستگاه، به‌عنوان نمونه، نگاه کنید به
Richard Courant and H. E. Robbins, *What Is Mathematics* p.147.
[این کتاب توسط آقای حسن صفاری به‌فارسی ترجمه شده است. شمارهٔ صفحهٔ فوق‌الذکر اشاره به‌متن انگلیسی دارد. ـــ م.]



شکل ۳۱

نامیدند، تحویل کردند. هرزاویهٔ حادهٔ ABC (نگاه کنید به‌شکل ۳۱) را می‌توان به‌صورت زاویهٔ بین یك قطر BA و یك ضلع BC از یك مستطیل $BCAD$ اختیار نمود. خطی‌مار بر B که CA را در E و امتداد DA را در F قطع می‌کند، به‌طوری که $EF = ۲(BA)$، در نظر بگیرید. فرض کنید G وسط EF باشد. در این صورت

$$EG = GF = GA = BA$$

که در نتیجه

$$\measuredangle ABG = \measuredangle AGB = \measuredangle GAF + \measuredangle GFA = ۲\measuredangle GFA = ۲\measuredangle GBC$$

و BEF زاویهٔ ABC را ثلث می کند. بنابراین، مسئله به ترسیم پاره‌خط مستقیمی مانند EF به‌طول معلوم $۲(BA)$ بین AC و امتداد DA باز می گردد به‌طوری که FE به نقطهٔ B بگراید.

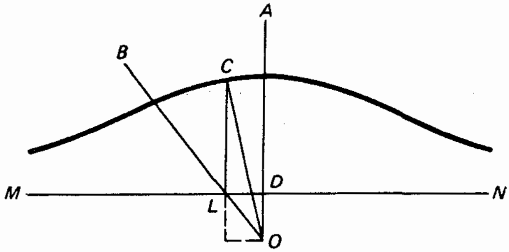
اگر برخلاف فرضهای اقلیدسی خود را مجاز بدانیم که بر روی ستارهٔ خود، قطعه خط $E'F' = ۲(BA)$ را جدا کنیم و سپس ستاره را چنان میزان کنیم که از نقطهٔ B بگذرد و نقاط مشخص شدهٔ E' و F' بر AC و امتداد DA قرار گیرند، زاویهٔ ABC تثلیث خواهد شد. می‌توانیم از این استفادهٔ غیرمجاز از ستاره به‌عنوان کاربردی از اصل درج نام ببریم. برای سایر کاربردهای این اصل به مطالعهٔ مسئله‌ای ۶.۴ رجوع کنید.

منحنیهای مسطحهٔ مختلفی کشف شده‌اند که مسئلهٔ گرایش را، که مسئلهٔ تثلیث قابل تحویل به‌آن است، حل می کنند. یکی از قدیمیترین آنها کونکوئید است که توسط نیکومدس (حوالی ۲۴۰ ق.م.) ابداع شد. فرض کنید که c خطی مستقیم و O نقطهٔ دلخواهی باشد که بر c واقع نیست. بر امتداد OP، که P نقطهٔ دلخواهی روی c است، PQ را برابر طول ثابت مفروض k جدا کنید. دراین‌صورت مکان هندسی Q، وقتی P روی c حرکت‌می کند، (یکی ازشاخه‌های) **کونکوئید** c به‌قطب O و ثابت k است. طرح دستگاهی که کونکوئیدها را رسم کند، دشوار نیست*، و باچنان دستگاهی به‌آسانی می‌توان زوایا را تثلیث کرد. مثلا فرض کنید که AOB زاویهٔ حادهٔ مفروضی باشد. خطی مانند MN عمودبر OA رسم کنید تا OA و OB را، همچنان که در شکل ۳۲ نشان داده شده، در D و L قطع کند.

---

* به‌عنوان مثال نگاه کنید به

T. L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, p. 150.



شکل ۳۲

حال، کونکوئید MN را به‌قطب O و ثابت (OL)۲ رسم کنید. در L خطی به‌موازات OA رسم کنید تا کونکوئید را در C قطع کند. دراین صورت OC زاویهٔ AOB را ثلث می‌کند.

هرزاویهٔ کلی را می‌توان به کمك یك مقطع مخروطی تثلیث نمود. یونانیان قدیم برای انجام این کار به‌اندازهٔ کافی با مقاطع مخروطی آشنا نبودند و اولین برهان ازاین نوع به‌وسیلهٔ پاپوس[1] (حدود ۳۰۰ب.م.) داده شده است که از خواص کانون و هادی مقاطع مخروطی استفاده می‌کند. دو تثلیث بااستفاده از مقاطع مخروطی را می‌توان در مطالعهٔ مسئله‌ای ۸.۴ دید.

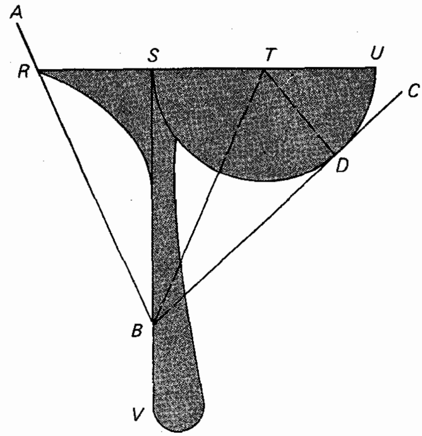
برخی منحنیهای متعالی (غیرجبری) وجود دارند که نه‌تنها زاویهٔ مفروضی را تثلیث می‌کنند بلکه، به‌طور کلیتر، آن‌را به‌هرچند قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دربین این‌منحنیها مربع‌ساز[کوادراتریکس] که به‌وسیلهٔ هیپیاس[2] (حدود ۴۲۵ ب.م.) ابداع شد، و حلزونی ارشمیدس را می‌توان نام برد. این دو منحنی همچنین مسئلهٔ تربیع دایره را حل می‌کنند. کاربرد مربع‌ساز در تثلیث و تربیع، در مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰.۴ ظاهر می‌شود.

طی سالها، وسایل مکانیکی، دستگاههای مفصلی، و پرگارهای مرکب متعددی برای حل مسئلهٔ تثلیث ابداع شده‌اند.* یك‌وسیلهٔ جالب و ابتدایی ازاین قبیل، به‌اصطلاح تبرزین است. مخترع تبرزین معلوم نیست، اما این وسیله درکتابی متعلق به سال ۱۸۳۵ توصیف شده است. برای ساختن یك تبرزین، از پاره‌خطی مانند RU که در S و T تثلیث شده (نگاه کنید به‌شکل ۳۳)، شروع کنید. نیمدایره‌ای به‌قطر SU رسم و SV را بر RU عمود نمایید. وسیله را همچنان که در شکل مزبور نشان داده شده، کامل کنید. برای تثلیث زاویه‌ای مانند ABC به‌وسیلهٔ تبرزین، ابزار را روی زاویه طوری قراردهید که R روی BA قرار گیرد، SV از نقطهٔ B بگذرد، و نیمدایره بر BC، مثلا در D، مماس باشد. آنگاه چون می‌توان نشان داد که مثلثهای RSB، TSB، TDB همه مساوی‌اند، BS و BT زاویهٔ مفروض را تثلیث می‌کنند. تبرزین را می‌توان بر کاغذ کالك با ستاره و پرگار ساخته و سپس

1. Pappus 2. Hippias

* نگاه کنید به

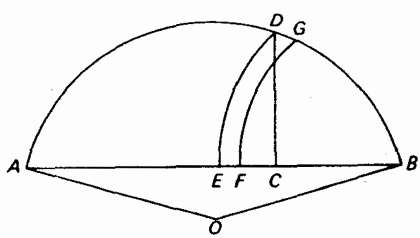
R.C. Yates, *The Trisection Problem.*



شکل ۳۳

برروی زاویهٔ مفروض تنظیم کرد. با این تدبیر می‌توانیم یك زاویـه را با ستاره و پرگار ثلث کنیم. (بادو تبرزین می‌توان یك زاویه را به‌پنج قسمت مساوی تقسیم کرد.)

اگرچه زاویهٔ دلخواه را نمی‌توان باابزارهای اقلیدسی‌دقیقاً تثلیث‌نمود، ترسیمهایی بااستفاده از این ابزارها وجود دارندکه تثلیثهای‌تقریبی بسیار خوبی را به‌دست می‌دهند. یك مثال عالی، ترسیمی است‌که درسال ۱۵۲۵ به‌وسیلهٔ حکاك و نقاش معروف، آلبرشت دورر[1] داده شده است. زاویهٔ مفروض AOB رابه‌عنوان زاویهٔ مرکزی یك دایره اختیارکنید (نگاه‌کنید به‌شکل۳۴). فرض‌کنیدکه C آن نقطهٔ تثلیث وتر AB باشدکـه به B نزدیکتر است. در C عمود بر AB را خارج‌کنید تا دایره را در D قطع‌کند. بـه‌مرکز B وشعاع BD قوسی رسم‌کنید تا AB را در E قطع‌کند. فرض کنید که F آن نقطـهٔ تثلیث EC باشدکه به‌E نزدیکتر است. دوباره به‌مرکز B و به شعاع BF، قوسی رسم‌کنیدکه دایره را در G قطع‌کند. آنگاه OG یك‌خط تثلیث‌کنندهٔ تقریبی AOB است. می‌توان‌نشان دادکـه اشتباه در تثلیث بااندازهٔ زاویهٔ AOB افزایش می‌یابد، ولی بـرای زاویهٔ $AOB = ۶۰^\circ$



شکل ۳۴

1. Albrecht Dürer

تنها حدود $1''$ و برای زاویهٔ $AOB = 90^\circ$ حدود $18''$ است.

مطالعهٔ مسئله‌ای ۹.۴ یك تثلیث تقریبی را، بااستفاده ازابزارهای اقلیدسی، توصیف می کندکه می توان آن‌را تاهرمقدار موردنظر به‌تثلیث واقعی نزدیك کرد.

۴-۷ تربیع دایره

احتمالا هیچ مسئلهٔ دیگری به‌اندازهٔ ترسیم مربعی هم مساحت بادایره‌ای مفروض، توجه بیشتر و طولانیتری را به‌خود مشغول نکرده است. در حوالی سالهای ۱۸۰۰ ق.م. مصریان باستان مسئله را با برابر گرفتن یك ضلع مربع با ۸/۹ قطر دایرهٔ مفروض، حل کردند. از آن زمان به‌بعد بی‌اغراق هزاران نفر روی این مسئله کارکرده‌اند، و علی‌رغم آنکه امروزه ثابت می‌شود که این ترسیم را نمی‌توان با ابزارهای اقلیدسی انجام داد*، هرساله تعداد زیادی «مربع کنندهٔ دایره» پیدا می‌شوند.

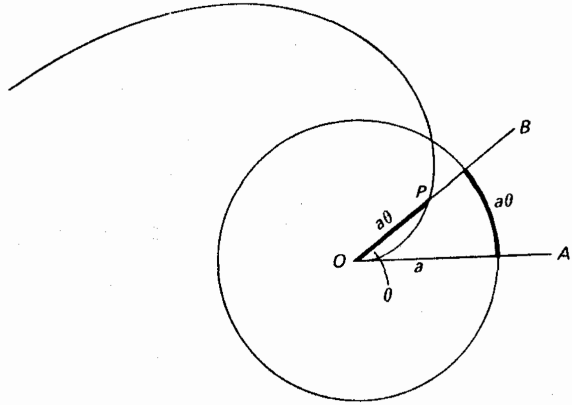
اولین‌فرد یونانی که ارتباطش با مسئله معلوم است، آناکساگوراس (حدود ۴۹۹- حدود ۴۲۷ق.م.) می‌باشد، ولی از میزان سهم اودرحل این مسئله چیزی نمی‌دانیم. بقراط خیوسی، که معاصر آناکساگوراس بود، در تربیع نوع خاصی ازهلالها یا اشکال ماه‌شکلی که به‌وسیلهٔ دو قوس دایره‌ای محدود می‌شوند، احتمالا به این امیدکه تحقیقات وی ممکن است به راه‌حلی برای مسئلهٔ تربیع منجر شود، توفیق حاصل کرد. چند سالی بعد هیپیاس الیسی[1] (حدود ۴۲۵ق.م.) منحنیی‌راکه به مربع‌ساز شهرت یافت، ابداع کرد. این‌منحنی، هم مسئلهٔ تثلیث و هم مسئلهٔ تربیع را حل می کند، اما روایات در مورد اینکه اولین‌بار چه‌کسی آن‌را در نقش تربیع به‌کاربرد، متفاوت است. شاید چنین باشدکه هیپیاس آن‌را برای تثلیث زوایا به‌کاربرده، و اینکه دینوستراتوس (حدود ۳۵۰ق.م.)، یا هندسه‌دان متأخر دیگری به‌کاربرد آن در مسئلهٔ تربیع پی‌برده است. بعضی از هلالهای بقراط در مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲.۴ بررسی شده‌اند؛ مربع‌ساز، در نقش دوگانه‌اش، در مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰.۴ بررسی شده؛ و چند تربیع تقریبی در مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱.۴ توصیف شده‌اند.

با منحنی **حلزونی ارشمیدس** می‌توان به‌راه حل زیبایی از مسئلهٔ تربیع دست یافت، و گفته‌اندکه ارشمیدس (حدود ۲۲۵ق.م.) عملا حلزونی خود را بدین منظور به کاربرد. حلزونی را، در قالب اصطلاحات دینامیك، می‌توان به‌عنوان مکان هندسی نقطه‌ای مانند P تعریف کردکه به‌طور یکنواخت در امتداد نیمخطی که به‌نوبهٔ خود درصفحه‌ای حول مبدأ خود دوران می کند، درحرکت است. اگر وضعیت OA از نیمخط دوار را وقتی‌که P بر O، مبدأ آن، منطبق است به‌عنوان دستگاه مختصات قطبی اختیارکنیم، دراین‌صورت OP با زاویهٔ AOP متناسب است، ومعادلهٔ قطبی‌حلزونی $r = a\theta$ است که a ثابت تناسب می‌باشد.

* به‌عنوان نمونه، نگاه کنیدبه

Howard Eves, *A Survey of Geometry*, vol. 2, pp. 30 – 38.

1. Elis



شکل ۳۵

دایره‌ای به‌مرکز O و شعاع a رسم می‌کنیم. آنگاه OP و قوسی ازاین دایره بین خطوط OA و OP برابرند، زیرا هریك بـا $a\theta$ داده می‌شوند (نگـاه‌کنید به شکل۳۵). نتیجه می‌شود کـه اگر OP را عمود بر OA اختیارکنیم، آنگاه OP طـولـی برابر با یك‌چهارم محیط دایره خواهد داشت. چون K، مساحت دایره، برابربـا نصف شعاع آن ضربدر محیط آن است، داریم

$$K=\left(\frac{a}{۲}\right)(۴OP)=(۲a)\,(OP).$$

بدین ترتیب ضلع مربع مطلوب واسطهٔ هندسی بین $۲a$ و OP، یا بین قطردایره وطول‌آن بردار شعاعی حلزونی است که برOA عمود می‌باشد.

می‌توانیم زاویه‌ای مانند AOB را با حلزونـی ارشمیدس تثلیث (یـاکلیتر ازآن به‌چند قسمت) کنیم. فرض کنیدکه OB حلزونی را در P تلاقـی‌کند و قطـعه خط OP را به‌وسیلهٔ‌نقاط $P_۱$ و $P_۲$ به‌سه‌قسمت‌کند. اگر دوایر به‌مرکز O و به‌شعاعهای $OP_۱$ و $OP_۲$ حلزونی را در $T_۱$ و $T_۲$ قطع‌کنند، آنگاه $OT_۱$ و $OT_۲$ زاویهٔ AOB را تثلیث می‌کنند.

۴-۸ گاهشمار π*

مسئلهٔ تربیع، پیوند نزدیکی با محاسبهٔ π، نسبت محیط یك دایره به‌قطرآن، دارد. دیده‌ایم

---

* برای گاهشمارکاملتری از π، شامل متجاوز بر۱۲۰ مدخل، نگاه‌کنیدبه H.C. Schepler, "The chronology of pi," *Mathematics Magazine* (January–February 1950): 165–70: (March – April 1950): 216 – 28; (May – June 1950): 279–83.

که درشرق باستان مقدار π اغلب ۳* گرفته می‌شد، و درمورد تربیع دایره توسط مصریان که در پاپیروس رینْد داده شده، داریم ...۳٫۱۶۰۴ = $(۴/۳)^۴$ = π. اما اولین کوشش علمی برای محاسبهٔ π ظاهراً از آن ارشمیدس است، و ما این گاهشمار را با دستاورد او آغاز می‌کنیم.

حدود ۲۴۰ ق.م. برای سهولت امر، فرض کنید که دایره‌ای به قطر واحد اختیار می‌کنیم. حال (طول) محیط یك دایره بین محیط یك چندضلعی منتظم محاطی و محیط یك چندضلعی منتظم محیطی قرار دارد. چون محاسبهٔ محیطهای شش ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی کار ساده‌ای است، به‌آسانی کرانهایی برای π به‌دست می‌آوریم. اما فرمولهایی وجود دارند (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۳.۴) که به ما می‌گویند چگونه می‌توانیم با داشتن محیطهای چند ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی، محیطهای چندضلعیهای محیطی و محاطیی را به‌دست آوریم که تعداد اضلاعشان دوبرابرند. ازکاربرد متوالی این روش، با شروع از شش ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی، می‌توانیم محیطهای چند ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی با ۱۲، ۲۴، ۴۸، ۹۶ ضلع را محاسبه کنیم و بدین‌ترتیب کرانهای نزدیکتر و نزدیکتری برای π به‌دست آوریم. این اساساً همان کاری است که ارشمیدس انجام‌داد و در نهایت به‌این حقیقت رسید که π بین ۲۲۳/۷۱ و ۲۲/۷ قراردارد، یااینکه، π، بادو رقم اعشار، ۳٫۱۴ است. این نتیجه در رسالهٔ ارشمیدس به‌نام اندازه‌گیری دایره که تنها شامل سه قضیه است، دیده می‌شود. این‌رساله آن‌گونه که به‌دست ما رسیده شکل اولیهٔ آن نیست و ممکن است تنها بخشی از یك بحث طولانیتر باشد. باتوجه به‌دستگاه شمار ضعیفی که در آن زمان مورد استفاده بود، به ناگزیر نتیجه می‌توان گرفت که ارشمیدس محاسبی بسیار توانا بوده است. دراین اثر ارشمیدس، تقریبات گویای قابل توجهی برای جذرهای گنگ یافت می‌شوند.

روش بالا برای محاسبهٔ π با استفاده از چند ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی به‌**روش کلاسیك** محاسبهٔ π معروف است.

حدود ۱۵۰ ب.م. اولین مقدار قابل توجه برای π بعد از مقدار ارشمیدس به‌وسیلهٔ کلاودیوس بطلمیوس[1] اسکندرانی دراثر معروفش سونتاکسیس ماثماتیکا[2] (که باعنوان عربی المجسطی[3] معروفیت بیشتری دارد)، بزرگترین اثریونان باستان درباب نجوم، داده

---

* نگاه کنید به‌تورات [متن انگلیسی]:

I. Kings 7: 23; II Chron. 4:2.

[آیهٔ بیست و سوم، باب هفتم، کتاب اول پادشاهان و آیهٔ دوم، باب چهارم، کتاب دوم تواریخ ایام به شرح زیر است: و دریاچهٔ ریخته‌شده را ساخت که از لب تا لبش ده ذراع بود و ازهر طرف مدور بود و بلندی‌اش پنج ذراع و ریسمانی سی ذراعی آن را گرداگرد احاطه داشت.]

1. Claudius Ptolemy 2. *Syntaxis mathematica* 3. *Almagest*

شده است. در این اثر π، در دستگاه شصتگانی، به‌صورت ″۳۸′۳۰ داده می‌شود که عبارت از ۳۷۷/۱۲۰، یا ۳٫۱۴۱۶ است. این مقدار بدون تردید از جدول وترها، که در رساله ظاهر می‌شود، استخراج شده است. این جدول طول وترهای یک دایره را که در مقابل زوایای مرکزی هردرجه و نصف درجه قراردارند، می‌دهد. اگر طول وتر زاویهٔ مرکزی °۱ در ۳۶۰ ضرب و نتیجه برطول قطر دایره تقسیم شود، مقدار فوق برای π حاصل خواهد شد.

حدود ۴۸۰ تسوچونگ‌چی[1]، از اولین چینیانی که درمکانیک کار می‌کرد، تقریب گویای جالب توجه ... ۳٫۱۴۱۵۹۲۹ = ۳۵۵/۱۱۳ را داد، که تا شش رقم اعشار صحیح است. به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱.۴ (ج) برای کاربردی از این نسبت درمسئلهٔ تربیع نگاه کنید.

حدود ۵۳۰ ریاضیدان قدیم‌هندی، آریبهطه[2]، ۳٫۱۴۱۶ = ۶۲۸۳۲/۲۰۰۰۰ را به‌عنوان مقدار تقریبی برای π داد. معلوم نیست که این نتیجه چگونه به‌دست آمده است. ممکن است که این از یک منبع قدیمیتر یونانی یا، شاید ازمحاسبهٔ محیط یک چندضلعی منتظم محاطی با ۳۸۴ ضلع حاصل شده باشد.

حدود ۱۱۵۰ ریاضیدان متأخر هندی، بهاسکره[3]، تقریبات متعددی برای π عرضه کرد. وی ۳۹۲۷/۱۲۵۰ را به‌عنوان مقدار دقیق، ۲۲/۷ را به عنوان مقدار نادقیق، و $\sqrt{۱۰}$ را برای کارهای معمولی ارائه کرد. اولین مقدار ممکن است از آریبهطه اخذ شده باشد. مقدار دیگری، ۳٫۱۴۱۶ = ۷۵۴/۲۴۰، که به وسیلهٔ بهاسکره داده شده، مبدأ نامعلومی دارد؛ این همان مقداری است که به‌وسیلهٔ بطلمیوس داده شده است.

۱۴۲۹ کاشانی، منجم دربار الغ بیگ، π را به‌روش کلاسیک تا ۱۶ رقم اعشار صحیح حساب کرد.

۱۵۷۹ ریاضیدان برجستهٔ فرانسوی، فرانسوا ویت[4] مقدار π را به‌روش کلاسیک، با استفاده از چند ضلعیهایی که ۳۹۳۲۱۶ = (۲^۱۶)۶ ضلع دارند، تا ۹ رقم اعشار پیدا کرد. وی همچنین معادل حاصلضرب نامتناهی جالب زیر را پیدا کرد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۳.۴).

$$\frac{۲}{\pi}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\;\frac{\sqrt{(۲+\sqrt{۲})}}{۲}\;\frac{\sqrt{\{۲+\sqrt{(۲+\sqrt{۲})}\}}}{۲}\cdots$$

۱۵۸۵ آدرین آنتونیزون[5] نسبت چینی باستانی ۳۵۵/۱۱۳ را مجدداً کشف کرد. این آشکارا ازحسن تصادف بود زیرا وی فقط نشان داد که $۳۳۳/۱۰۶ < \pi < ۳۷۷/۱۲۰$. وی سپس متوسط صورتها و مخرجها را پیداکرد تا مقدار دقیق π را به دست آورد.

---

1. Tsu Ch'ung-chih 2. Āryabhata 3. Bháskara
4. François Viéte 5. Adriaen Anthoniszoon

شواهدی وجود دارد مبنی براینکه والنتین‌اوتو[1]، یکـی از شاگـردان جدولساز قـدیـم، رائتیکوس[2]، ممکن است این‌نسبت را برای π اندکی پیشتر، یعنی درسال ۱۵۷۳، به‌دنیای غرب شناسانده باشد.

۱۵۹۳ آدریان وان رومن[3]، که معمولا بـه نام آدریانوس رومـانوس[4] از وی یاد می‌شود، از اهالی هلند، π را به‌طورصحیح تا ۱۵ رقم اعشار به‌روش کلاسیك، بااستفاده از چند ضلعیهایی با $۲^{۳۰}$ ضلع، پیدا کرد.

۱۶۱۰ لودولف وان‌کولن[5] از آلمان π را تا ۳۵ رقم اعشار به‌روش کلاسیك، با استفاده از چند ضلعیهایی با $۲^{۶۲}$ ضلع، محاسبه کرد. وی قسمت زیادی ازعمر خـود را در این مهم صرف کرد و دستاورد وی آن‌چنان خارق‌العاده تلقی شدکه این‌عـدد برسنگ قبر وی کنده شد، و هنوزهم گاهی درآلمان ازآن باعنوان«عدد لودولفی» یاد می‌شود.

۱۶۲۱ ویلبرورد اسنل[6]، فیزیکدان هلندی، که به‌سبب کشف قانـون انکسار شهرت دارد، یك پیرایش مثلثاتی از روش کلاسیك محاسبهٔ π را ابداع کـرد، به‌گـونه‌ای که از هرزوج کران حاصل شده ازروش کلاسیك‌برای π، وی می‌توانست کرانهایی به‌دست‌آورد که به‌طور قابل ملاحظه‌ای به π نزدیکتر باشند. وی قادر بودکه بـا روش خود ۳۵ رقم اعشار وان کولن را بااستفاده از چندضلعیهایی که تنها $۲^{۳۰}$ ضلع دارنـد، به‌دست آورد. روش کلاسیك بااین چند ضلعیها تنها ۱۵ رقم لعشار را می‌دهد. برای چند ضلعیهایی با۹۶ ضلع، روش کلاسیك ۲ رقم اعشار را عاید می‌کند درحالی‌که پیرایش اسنل ۷ رقم‌اعشار را به‌دست‌می‌دهد. برهان صحیحی برای تصحیح اسنل درسال ۱۶۵۴ به‌وسیلهٔ ریاضیدان و فیزیکدان هلندی، کریستیان هویگنس[7]، داده شد.

۱۶۳۰ گرین برگر[8]، بااستفاده از روش بهبود یافتهٔ اسنل، π را تا ۳۹ رقم اعشار محاسبه‌کرد. این آخرین تلاش عمده برای محاسبهٔ π با استفاده از روش محیطها بود.

۱۶۵۰ ریاضیدان انگلیسی جان والیس[9] بسط جالب زیررا به‌دست‌آورد

$$\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\times۲\times۴\times۴\times۶\times۶\times۸\cdots}{۱\times۳\times۳\times۵\times۵\times۷\times۷\cdots}$$

لرد برونکر[10]، اولین رئیس انجمن سلطنتی، نتیجهٔ والیس را به‌کسر مسلسل

$$\frac{۴}{\pi}=۱+\cfrac{۱^۲}{۲+\cfrac{۳^۲}{۲+\cfrac{۵^۲}{۲+\cdots}}}$$

1. Valentin Otho 2. Rhaeticus 3. Adriaen van Roomen
4. Adrianus Romanus 5. Ludolph van Ceulen
6. Willebrord Snell 7. Christiaan Huygens 8. Grienberger
9. John Wallis 10 Lord Brouncker

تبدیل کرد. مع‌هذا هیچیك از این عبارات برای محاسبهٔ گستردهٔ π مورد استفاده قرار نگرفته‌اند.

۱۶۷۱ ریاضیدان اسکاتلندی جیمز گریگوری[1] سری نامتناهی

$$\arctan x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۷}{۷} + \dots, (-۱ \leqslant x \leqslant ۱)$$

را به‌دست آورد. گریگوری به این حقیقت توجه نکرد که برای $x = ۱$ سری به‌صورت

$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \dots$$

درمی‌آید. این سری که همگرایی آن بسیار کند است، درسال ۱۶۷۴ برلایبنیتز معلوم‌بود. گریگوری تلاش کرد که ثابت کند حل اقلیدسی مسئلهٔ تربیع غیرممکن است.

۱۶۹۹ آبراهام شارپ[2] ۷۱ رقم اعشار درست را بااستفاده از سری گریگوری با $x = \sqrt{۱/۳}$ پیدا کرد.

۱۷۰۶ جان ماخین[3] ۱۰۰ رقم اعشار را با استفاده از سری گریگوری در ارتباط با رابطهٔ زیر به‌دست آورد

$$\frac{\pi}{۴} = ۴ \arctan\left(\frac{۱}{۵}\right) - \arctan\left(\frac{۱}{۲۳۹}\right)$$

۱۷۱۹ ریاضیدان فرانسوی دو لانیی[4] ۱۱۲ رقم اعشار را با استفاده از سری گریگوری با $x = \sqrt{۱/۳}$ به‌دست‌آورد.

۱۷۳۷ نماد π توسط ریاضیدانان متقدم انگلیسی ویلیام اوترد[5]، آیزك برو[6]، و دیوید گریگوری[7] برای تعیین محیط، یا پیرامون، یك‌دایره مورد استفاده واقع شد. اولین کسی که این نماد را به‌نشانهٔ نسبت محیط به‌قطر به‌کار برد نویسندهٔ انگلیسی، ویلیام جونز[8]، در اثری متعلق به‌سال ۱۷۰۶ بود. مع‌هذا این نماد تازمان پذیرش آن ازطرف اویلردرسال ۱۷۳۷، از طرف عموم بااین معنی، مورد استفاده قرار نگرفت.

۱۷۵۴ ژان اتین مونتوکلا[9]، از تاریخ ریاضی‌نویسان متقدم فرانسوی، تاریخی در باب مسئلهٔ تربیع دایره نگاشت.

۱۷۵۵ آکادمی علوم فرانسه از بررسی هرراه حل دیگری برای مسئلهٔ تربیع دایره امتناع ورزید.

---

1. James Gregory 2. Abraham Sharp 3. John Machin
4. De Lagny 5. William Oughtred 6. Isaac Barrow
7. David Gregory 8. William Jones
9. Jean Etienne Montucla

۱۷۶۷ یوهان هاینریش‌لامبرت[1] نشان داد که π گنگ است.

۱۷۷۷ کنت دوبوفون[2] **مسئلهٔ سوزن** مشهور خود را ابداع کرد که به‌وسیلهٔ آن π را می‌توان به‌روشهای احتمالاتی تقریب نمود. فرض کنید که تعدادی خط موازی که به‌فاصلهٔ a از هم قرار دارند، بر یک‌صفحهٔ افقی رسم شده باشند، و فرض کنید که میلهٔ همگن یکنواختی به‌طول $l<a$ به‌تصادف برروی صفحه انداخته می‌شود. بوفون نشان داد که احتمال* اینکه میله یکی‌ازخطوط صفحه را قطع کند، به‌وسیلهٔ

$$p=\frac{۲l}{\pi a}$$

داده می‌شود. باانجام عملی این آزمایش به‌تعداد دفعات زیاد مفروض و ثبت تعداد حالات توأم با پیروزی، و بدین ترتیب با به‌دست آوردن یك مقدار تجربی بـرای p، می‌توانیم فرمول بالا را برای محاسبهٔ تقریبی π به‌کار بریم. بهترین نتیجه‌ای که بدین طریق به‌دست آمد به‌وسیلهٔ لازرینی[3] ایتالیایی در ۱۹۰۱ داده شد. تنها با ۳۴۰۸ بار پرتاب میله، وی مقداری برای π یافت که تا ۶ رقم اعشار درست بود! نتیجهٔ وی آن‌قدر ازنتایج به‌دست آمده به‌وسیلهٔ دیگران بهتر بود که گاهی با تردید به‌آن نگریسته مـی‌شود. روشهای دیگری هم براساس احتمال برای محاسبهٔ π وجود دارد. مثلاً، در ۱۹۰۴، ر. شارتر[4] گـزارشی از کاربرد این حقیقت معلوم ارائه‌کرد که اگردوعدد صحیح مثبت به‌طور تصادفی نوشته‌شوند، احتمال اینکه نسبت به‌هم اول‌باشند، $۶/\pi^۲$ است.

۱۷۹۴ آدرین ـ ماری‌لژاندر[5] نشان داد که $\pi^۲$ گنگ است.

۱۸۴۱ ویلیام راترفورد[6] انگلیسی π را تا ۲۰۸ رقم اعشار، که بعداً معلوم شد از آن بین فقط ۱۵۲ رقم صحیح بوده‌اند، بااستفاده از سری گریگوری در ارتباط با رابطهٔ

$$\frac{\pi}{۴}=۴\arctan\left(\frac{۱}{۵}\right)-\arctan\left(\frac{۱}{۷۰}\right)+\arctan\left(\frac{۱}{۹۹}\right)$$

حساب کرد.

۱۸۴۴ زاخاریاس‌دازه[7]، محاسب برق‌آسا، π رابه‌طور صحیح تا ۲۰۰ رقم‌اعشار بااستفاده از سری گریگوری در ارتباط بارابطهٔ

---

1. Johann Heinrich Lambert 2. Comte de Buffon

* اگر پیشامد مفروضی به h طریق امکان وقوع داشته و به f طریق امکان عـدم وقـوع داشته باشد، و اگر وقوع هریك‌از $h+f$ طریق به‌یك اندازه محتمل باشد، احتمال ریاضی p برای وقوع پیشامد عبارت‌است‌از $p=h/(h+f)$.

3. Lazzerini 4. R. Chartres 5. Adrien-Marie Legendre
6. William Rutherford 7. Zacharias Dase

$$\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\arctan\left(\frac{۱}{۲}\right)+\arctan\left(\frac{۱}{۵}\right)+\arctan\left(\frac{۱}{۸}\right)$$

پیدا کرد. دازه، که در ۱۸۲۴ در هامبورگ متولد شد، در ۳۷ سالگی درگذشت. وی شاید خارق‌العاده‌ترین محاسب ذهنی بوده که تاکنون زیسته است. از کارهای وی محاسبهٔ ذهنی حاصلضرب دوعدد ۸ رقمی در ۵۴ ثانیه، دو عدد ۲۰ رقمی در ۶ دقیقه، دوعدد ۴۰ رقمی در ۴۰ دقیقه، و دوعدد ۱۰۰ رقمی در ۸ ساعت و ۴۵ دقیقه بوده است. وی به‌طور ذهنی جذر یك عدد ۱۰۰ رقمی را در ۵۲ دقیقه محاسبه‌می‌کرد. دازه بعدها توانا ییهای خود را با تنظیم جدول لگاریتم طبیعی هفت‌رقمی وجدول سازه‌های همهٔ اعداد بین ۷٬۰۰۰٬۰۰۰ و ۱۰٬۰۰۰٬۰۰۰ به‌نحو شایسته‌تری به‌کار برد.

۱۸۵۳ راترفورد دوباره به‌این مسئله روی آورد و π را تا ۴۰۰ رقم اعشاریافت.

۱۸۷۳ ویلیام شنکس[1] از انگلستان، با استفاده ازفرمول ماخین، π را تا ۷۰۷ رقم محاسبه‌کرد. برای مدت مدیدی این‌کار، به‌صورت افسانه ایترین نمونهٔ‌کارمحاسباتی انجام شده باقی ماند.

۱۸۸۲ عددی را **جبری** نامند که ریشهٔ یك چند جمله‌ای با ضرایب گویا باشد، در غیر این‌صورت آن را **متعالی** نامند. ف. لیندمان[2] نشان دادکه π متعالی است. این حقیقت ثابت می‌کندکه (نگاه‌کنید به بخش ۱۴ــ۲ [جلددوم]) مسئلهٔ تربیع‌را نمی‌توان باابزارهای اقلیدسی حل کرد.

۱۹۰۶ در میان چیزهای جالبی که با π مربوط می‌شوند «یادآور»[3]های مختلفی هستندکه به‌منظور در یاد نگاهداشتن π تا تعداد اعشار زیــاد طرح شده‌اند. آنچه در زیر می‌آید، از اور[4] است‌که در نشریهٔ لیتری دایجست[5] منتشرشد.کافی است به‌جای هرکلمه، تعداد حروف‌آن را قرار دهیم تا π به‌طور صحیح تا ۳۰ رقم اعشار به‌دست آید.

Now I, even I, would celebrate
In rhymes unapt, the great
Immortal Syracusan, rivaled nevermore,
Who in his wondrous Lore,
Passed on before,
Left men his guidance
How to circles mensurate.

چندسال بعد، درسال ۱۹۱۴ یادآور مشابه زیردر مجلهٔ ساینتیفیك امریکن[6] چاپ شد:

"See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks ofttimes resisting."

---

1. William Shanks 2. F. Lindemann 3. mnemonic
4. A. C. Orr 5. *Literary Digest* 6. *Scientific American*

و یادآور[1] دیگری ازاین‌گونه چنین است:

"May I have a large container of coffee?"

۱۹۴۸ در سال ۱۹۴۶، د.ف. فرگوسن[2] از انگلستان در مقدار یافته شده توسط شنکس برای π خطاهایی راکه از رقم ۵۲۸ شروع می‌شوند، کشف کرد و درژانویهٔ سال ۱۹۴۷ مقدار تصحیح شده‌ای با ۷۱۰ رقم ارائه داد. درهمان ماه ج.و. رنـچ جونیور[3] آمریکایی مقداری برای π با ۸۰۸ رقم انتشار داد، ولی فرگوسن به‌زودی خطایی دررقم ۷۲۳ ام آن پیداکرد. در ژانویهٔ ۱۹۴۸، فرگوسن و رنچ مشترکاً مقدار تصحیح وکنترل‌شده‌ای را برای π با ۸۰۸ رقم اعشار منتشر کردند. رنچ از فرمول ماخین استفاده‌کرد، درحالی که فرگوسن فرمول

$$\frac{\pi}{۴}=۳\arctan\left(\frac{۱}{۴}\right)+\arctan\left(\frac{۱}{۲۰}\right)+\arctan\left(\frac{۱}{۱۹۸۵}\right)$$

را به‌کاربرد.

۱۹۴۹ کامپیوتر الکترونیکی، ENIAC در آزمایشگاههای تحقیقات بالیستیکی نظامی[4] در آبردین[5]، π را تا ۲۰۳۷ رقم اعشار حساب کرد.

۱۹۵۹ فرانسوا ژنـوی[6]، در پاریـس، π را با استفاده ازآی. بـی. ام. ۷۰۴ تا ۱۶٫۱۶۷ رقم اعشار، محاسبه‌کرد.

۱۹۶۱ رنچ و دانیل شنکس، از واشنگتن دی. سی. π را بااستفاده از آی.بی.ام.-۷۰۹۰، تا ۱۰۰٫۲۶۵ رقم اعشار محاسبه‌کردند.

۱۹۶۵ قطعات ENIAC را، که دیگر متروك شده بود، از هم بازکردند وبه‌عنوان یك اثرعتیقه به انستیتوی اسمیتسونی[7] انتقال دادند.

---

۱. در زبان فارسی نیز چنین یادآورهایی ابداع شده‌اند، نمونه‌ای ازآن راکه در زیـر نقل می‌شود می‌توان درکتاب هندسهٔ سال دوم رشتهٔ ریاضی فیزیك، یافت.

گرکسی از تو بپرسد ره آمختن π پاسخی ده که خردمند ترا آموزد

ه‌خرد و بینش و آگاهی دانشمندان   ره سرمنزل تـوفیق تـرا آموزده

این شعر عدد π را با ده رقم اعشار مشخص می‌کند. درهمانجا شعریادآور فرانسویی نیزآمده و ادعا شده قدیمیترین شعر دراین زمینه است.ـــ م.

2. D. F. Ferguson   3. J. W. Wrench Junior

4. Army Ballistic Research Laboratories   5. Aberdeen

6. François Genuys

۷. Smithsonian Institution، بنیاد وموزه‌ای‌که درسال ۱۸۴۶ درشهرواشنگتن دی. سی. از ماترك James Smithson (۱۷۶۵ـ۱۸۲۹) دانشمند انگلیسی تـأسیس شد. این مؤسسه شعبه‌های متعددی داردکه به‌هنر وعلوم اختصاص دارند.ـــ م.

۱۹۶۶ در ۲۲ فوریه، م. ژان گیو[1]، وهمکاران وی درهیئت انرژی اتمی درپاریس، با یك کامپیوتر STRETCH به تقریبی برای π که تعداد ارقام اعشارش تا ۲۵۰۰۰۰ می‌رسید، دست یافتند.

۱۹۶۷ دقیقاً یك سال بعد، این افراد π را با یك کامپیوتر CDC ۶۶۰۰ تا ۵۰۰,۰۰۰ رقم اعشار پیدا کردند.

۱۹۷۴ گیو و همکارانش π را با یك کامپیوتر CDC ۷۶۰۰ تا ۱,۰۰۰,۰۰۰ رقم اعشار پیدا کردند.

۱۹۸۱ دو ریاضیدان ژاپنی کازونوری میوشی[2] و کازوهیکا ناکایاما[3] از دانشگاه تسوکوبا[4] π را با یك کامپیوتر FACOMM-۲۰۰ در ۱۳۷/۳۰ دقیقه تا ۲,۰۰۰,۰۳۸ رقم حساب کردند. آنها ازفرمول

$$\pi = ۳۲ \arctan\left(\frac{۱}{۱۰}\right) - ۴ \arctan\left(\frac{۱}{۲۳۹}\right) - ۱۶ \arctan\left(\frac{۱}{۵۱۵}\right)$$

استفاده کردند و نتیجه را بافرمول ماخین امتحان کردند.

درگاهشمار بالا هیچ موردی از آثار فراوانی راکه توسط مبتلایان به‌بیماری موربوس‌کوکلومتریکوس[5]، یا بیماری تربیع دایره، فراهم آمده، نگنجانده‌ایم. این کارها، که اغلب سرگرم کننده و در مواردی تقریباً باورنکردنی‌اند، مستلزم انتشار مجموعهٔ جداگانه‌ای هستند. برای آنکه مفاد آنها روشن شود، موردی را در سال ۱۸۹۲ در نظر بگیرید که درآن نویسنده‌ای در نیویورك تریبون[6] کشف مجدد راز مدتها گم شده‌ای را اعلام کردکه به‌عدد ۳٫۲ به‌عنوان مقدار دقیق π منجر می‌گردید. بحث پرشوری که بعد ازاین اعلام به‌میان آمد، هواداران زیادی را برای این‌مقدار جدید جلب کرد. همچنین، بعداز انتشار در ۱۹۳۱، تعداد زیادی ازکتابخانه‌های دانشگاهها وکتابخانه‌های عمومی‌درسراسر ایالات متحده، نسخه‌هایی اهدایی ازکتاب قطوری را که به‌اثبات $\pi = ۳\frac{۱۳}{۸۱}$ اختصاص داده شده، ازمؤلف آن‌دریافت داشته‌اند. ضمناً لایحهٔ‌قانونی‌شمارهٔ ۲۴۶ مجلس مقننهٔ ایالت ایندیانا را داریم‌که، در ۱۸۹۷، دست به‌تعیین مقدار π از طریق قانونگذاری زد. دربخش I این لایحه می‌خوانیم: «به‌تصویب مجمع عمومی ایالت ایندیانا برسد: معلوم گردیده است که نسبت یك سطح مستدیر به مربعی که برخطی برابر با ربع محیط ساخته شود، برابراست بامساحت یك مستطیل متساوی الاضلاع به‌مساحت مربعی بریك ضلع آن...». این لایحه از تصویب مجلس گذشت ولی به‌علت برخی استهزاها در روزنامه‌ها، علی‌رغم پشتیبانی‌شدید

---

1. M. Jean Guilloud 2. Kazunori Miyoshi
3. Kazuhika Nakayama 4. Tsukuba
5. *morbus cyclometricus* 6. *New York Tribune*

ناظر ایالتی تعلیمات عمومی[1]، در سنا بایگانی شد.*

از محاسبهٔ π با تعداد زیادی ارقام اعشاری، چیزی بیش از مبارزه‌طلبی متضمن در آن، مورد نظر است. یك علت، تأمین اطلاعات آماری مربوط به «نرمال بودن» π است. یك عدد حقیقی **نرمال ساده** نامیده می‌شود درصورتی که در بسط اعشاری آن همهٔ ارقام با فراوانیهای مساوی ظاهر شوند، و آن را **نرمال** می‌نامند هر گاه که هر دسته ارقام با طولهای برابر، با فراوانیهای مساوی ظاهر شوند. معلوم نیست که π (یا از این نظر حتی $\sqrt{2}$) نرمال یا حتی نرمال ساده باشد. محاسبه‌های مقدار π، که شروع آنها محاسبه با کامپیوتر ENIAC در ۱۹۴۹ بود، برای فراهم آوردن اطلاعات آماری درباب این موضوع صورت گرفته بودند. از شمارشهای انجام‌شده بر روی این بسطهای گستردهٔ π، به‌نظر می‌رسد که این عدد احتمالا نرمال است. محاسبهٔ π با اشتباهی در رقم ۷۰۷ام آن که به وسیلهٔ شنکس در سال ۱۸۳۷ انجام شد، ظاهراً دلالت براین می‌کرد که π حتی نرمال ساده هم نیست.

مطالعهٔ مسئله‌ای

۱.۴ پرگارهای اقلیدسی و پرگارهای امروزی

دانشجویی که اصول اقلیدس را برای اولین‌بار می‌خواند، ممکن است در قضایای آغازین مقالهٔ اول دچار شگفتی شود. سه قضیهٔ اول مسائل ترسیمی زیر هستند.

۱ـ رسم مثلث متساوی‌الاضلاعی بر یك‌خط مستقیم متناهی مفروض.

۲ـ رسم خط مستقیمی، از نقطهٔ مفروض، برابر با یك‌خط مستقیم مفروض.

۳ـ باداشتن دو خط مستقیم، جدا کردن طولی برابر خط کوچکتر از خط بزرگتر.

این سه مسئلهٔ ترسیمی با ستاره و پرگارهای امروزی بدیهی‌اند، ولی باستاره و پرگار اقلیدسی به‌کمی فراست نیاز است.

(الف) قضیهٔ ۱ از مقالهٔ اول را با ابزارهای اقلیدسی حل کنید.

(ب) قضیهٔ ۲ از مقالهٔ اول را با ابزارهای اقلیدسی حل کنید.

(ج) قضیهٔ ۳ از مقالهٔ اول را با ابزارهای اقلیدسی حل کنید.

(د) نشان دهید که قضیهٔ ۲ از مقالهٔ اول ثابت می‌کند که ستاره و پرگار اقلیدسی با ستاره و پرگارهای امروزی معادل‌اند.

---

1. State Superintendent of Public Instruction

* نگاه کنید به

W.E. Edington, "House Bill No. 246, Indiana State Legislature, 1897," *Proceedings of the Indiana Academy of Science* 45 (1935): 206–210.

۲.۴ تضعیف توسط آرخوتاس و منایخموس

الف) آرخوتاس (حدود ۴۰۰ ق.م.)، فیلسوف فیثاغورسی؛ ریاضیدان، فرمانده نظامی و سیاستمدار، یکی از محترمترین و پرنفوذترین شهروندان تارنتوم (تارانتو[1] ی کنونی) در ایتالیا بود. گفته‌اند که وی هفت‌بار به‌عنوان فرمانده نیروهای تارنتوم انتخاب شده بوده، و به‌لحاظ علاقه‌ای که به رفاه و تحصیل کودکان تارنتوم نشان می‌داده، شهرت به‌هم رسانده بود. وی به‌طور غم‌انگیزی در یك کشتی‌شکستگی در نزدیکی تارنتوم غرق شد. آنچه در زیر می‌آید شرح راه حل جالب وی برای مسئلهٔ درج دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض است.

فرض کنید که a و b، $a>b$، دو پاره‌خط مفروض باشند. دریك صفحهٔ افقی دایره‌ای به‌قطر $AD=a$ رسم و وتر $AB=b$ را رسم کنید. فرض کنید که امتداد AB مماس بر دایره در D را درنقطهٔ P تلاقی کند. نیمهٔ بالایی نیم‌استوانهٔ مستدیرقائمی به‌قاعدهٔ نیمدایرهٔ ABD را برپا سازید؛ مخروط مستدیر قائمی را با دوران دادن AP در حول AD تولید کنید؛ چنبره‌ای باشعاع داخلی صفر را با دوران دادن دایره‌ای عمودی برقطر AD، حول مولدی از استوانه که از A می‌گذرد، تولید کنید. نقطهٔ مشترك نیم‌استوانه، مخروط، و چنبره را با K نشان دهید، و فرض کنید I پای مولدی از نیم استوانه، ماربر K و وارد بر نیمدایرهٔ ABD باشد. ثابت کنید که AK و AI دو واسطهٔ هندسی بین a و b هستند. یعنی نشان دهید که $AD:AK=AK:AI=AI:AB$.

(ب) منایخموس (حدود ۳۵۰ ق.م.) دو راه حل زیررا برای مسئلهٔ تضعیف عرضه کرد. دراین راه حلها از مقاطع مخروطی خاصی استفاده می‌شود که، ظاهراً، به وسیلهٔ منایخموس برای مسئلهٔ حاضر ابداع شده‌اند.

۱ــ دو سهمی راکه رأس مشترك و محورهای متعامد دارند رسم کنید، به‌طوری که پارامتر یکی دوبرابر پارامتر دیگری باشد. طول عمود وارد از نقطهٔ تلاقی دیگر دوسهمی برمحور سهمی کوچکتر را با x نشان دهید. دراین‌صورت x یال مکعبی است که حجمی دو برابر حجم مکعبی داردکه پارامتر کوچکتر یك یال آن است. با استفاده از هندسهٔ تحلیلی نوین ثابت کنید که این ترسیم درست است.

۲ــ یك سهمی با پارامتر s، و سپس یك هذلولی متساوی‌الساقین با محور قاطعی مساوی $4s$ رسم کنید که مجانبهای آن محور سهمی و مماس برسهمی در رأس آن باشند. فرض کنید x طول عمود وارد از نقطهٔ تلاقی دومنحنی برمحور سهمی باشد. دراین‌صورت $x^3=2s^3$. با استفاده از هندسهٔ تحلیلی نوین ثابت کنید که این ترسیم درست است.

۳.۴ تضعیف مکعب به‌وسیلهٔ آپولونیوس و اراتستن

آپولونیوس (حدود ۲۲۵ ق.م.) مسئلهٔ تضعیف را به ترتیب زیر حل کرد. یك مستطیل $OADB$، و سپس دایره‌ای هم‌مرکز با مستطیل رسم کنید که امتدادهای OA و OB را در

---

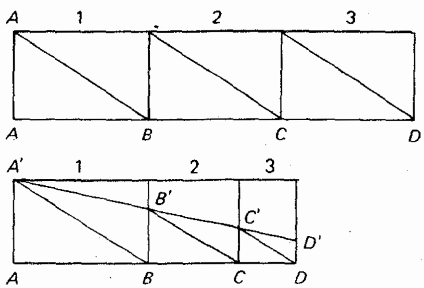
1. Taranto

A' و B' به‌طریقی قطع کند که A'، D، B' همخط باشند. در واقع ساختن این دایره با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است، اما آپولونیوس یك روش مکانیکی برای رسم آن ارائه داد.

(الف) نشان دهید که BB' و AA' دو واسطهٔ هندسی بین OA و OB هستند.

(ب) اگر $OB=۲(OA)$، نشان دهید که $(BB')^۳=۲(OA)^۳$.

(ج) اراتستن (حدود ۲۳۰ ق.م.) یك «میانگین‌یاب» مکانیکی ابداع کرد، متشکل از سه‌قاب مستطیلی مساوی، با مجموعه‌ای از قطرهای متناظر، که قابلیت لغزیدن در امتداد شیارهایی را داشتند به‌طوری که قاب دوم می‌توانست زیر اولی، و سومی می‌توانست زیر دومی بلغزد. فرض کنید که قابها، همچنانکه در شکل ۳۶ نشان‌داده شده، لغزانده شوند به‌طوری که نقاط A'، B'، C' همخط باشند. نشان دهید که BB' و CC' دو واسطهٔ هندسی بین AA' و DD' هستند. یك «میانگین‌یاب» از این نوع به‌آسانی از یك دسته مستطیلهای کاغذی ساخته می‌شود و می‌توان آن‌را چنان تعمیم داد که n میانگین بین دو پاره‌خط مفروض درج شوند.*



شکل ۳۶

۴.۴ سیسوئید دیوکلس

دیوکلس (حدود ۱۸۰ ق.م.) منحنی سیسوئید را برای حل مسئلهٔ تضعیف ابداع کرد. یك سیسوئید کلی را می‌توان به‌صورت زیر تعریف نمود: فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ دو منحنی مفروض باشند و فرض کنید O نقطهٔ ثابتی باشد. فرض کنید $P_۱$ و $P_۲$ نقاط تلاقی یك خط متغیر مار بر O با دو منحنی مفروض باشند. مکان هندسی P بر این خط به‌طوری که $OP=OP_۲-OP_۱=P_۱P_۲$، سیسوئید $C_۱$ و $C_۲$ به قطب O نامیده می‌شود. اگر $C_۱$ یك دایره، $C_۲$ مماس بر $C_۱$ در

---

* برای یك رهیافت مکانیکی جدیدتر نگاه کنید به

George E. Martin, "Duplicating the cube with a mira," *The Mathematics Teacher* (March 1979) : 204–208.

نقطهٔ A، و O نقطهٔ متقاطر A بر C_1 باشد، در این صورت سیسوئید C_1 و C_2 به‌قطب O **سیسوئید دیوکلس** است.

(الف) با اختیار O به‌عنوان مبدأ و OA به‌عنوان نیمهٔ مثبت محور xها، نشان‌دهید که معادلهٔ دکارتی سیسوئید دیوکلس به‌صورت $y^2 = x^3/(2a - x)$ است که در آن a شعاع C_1 می‌باشد. نشان دهید که معادلهٔ قطبی متناظر $r = 2a\ \sin\theta\ \tan\theta$ است.

(ب) بر نیمهٔ مثبت محور yها $OD = n(OA)$ را جدا کنید. DA را رسم کنید تا سیسوئید را در P قطع کند. فرض کنید OP خط C_2 را در Q قطع کند. نشان دهید که $(AQ)^3 = n(OA)^3$. وقتی $n = 2$، جوابی برای مسئلهٔ تضعیف داریم.

(ج) نیوتن نشان داده‌است که چگونه می‌توان سیسوئید دیوکلس را با یک گونیای نجاری تولید کرد. فرض کنید که لبهٔ بیرونی گونیا ACB باشد که در آن AC بازوی کوتاهتر است. خطی مانند MN رسم و نقطه‌ای مانند R را به‌فاصلهٔ AC از MN مشخص کنید. گونیا را طوری حرکت‌دهید که A همواره بر MN قرار گیرد و BC همواره از نقطهٔ R بگذرد. نشان‌دهید که P، وسط AC، سیسوئیددیوکلس را رسم می‌کند.

(د) سیسوئید دو دایرهٔ متحدالمرکز نسبت به‌مرکز مشترك آنان چیست؟ سیسوئید یك جفت خط موازی نسبت به‌نقطه‌ای که بر هیچ یك از دوخط واقع نباشد، چیست؟

(ه) اگر C_1 و C_2 یکدیگر را در P قطع کنند، نشان‌دهید که OP در نقطهٔ O بر سیسوئید C_1 و C_2 به‌قطب O مماس است.

۵.۴ چند تضعیف مربوط به‌قرن هفدهم

بسیاری از ریاضیدانان برجستهٔ قرن‌هفدهم، مانند هویگنس، دکارت، گرگواردوسن‌ـونسان[1]، و نیوتن، ساختمانهایی برای تضعیف مکعب ابداع کردند. در زیر دو تا از این ساختمانها می‌آید.

(الف) گرگوار دوسن‌ـونسان (۱۶۴۷) ساختمانی برای پیدا کردن دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض برمبنای قضیهٔ زیر ارائه داد. هذلولیی که از یک رأس مستطیلی رسم شود و دو ضلع مقابل به‌این رأس را به‌عنوان مجانبهای خود داشته باشد دایرهٔ‌محیطی مستطیل را در نقطه‌ای قطع می‌کندکه فواصل آن از مجانبها واسطه‌های هندسی بین اضلاع مجاور مستطیل هستند. این قضیه را ثابت کنید.

(ب) دکارت (۱۶۵۹) خاطرنشان کرد که منحنیهای

$$x^2 = ay\ ,\quad x^2 + y^2 = ay + bx$$

در نقطه‌ای مانند $(x\ ,\ y)$ متقاطع‌اند به‌طوری که x و y دو واسطهٔ هندسی بین a و b هستند. درستی این مطلب را نشان‌دهید.

---

1. Grégoire de Saint - Vincent

۶.۴ کاربردهای اصل درج

فرض کنید که دو منحنی m و n، و یك نقطه مانند O مفروض باشند. فرض کنید که خود را مجاز بدانیم که، بر یك خط کش، قطعه‌خطی مانند MN جدا کرده سپس خط کش را چنان میزان کنیم که ازنقطهٔ O گذشته ومنحنیهای mوn را در M بر m و N بر n قطع کند. در این‌صورت گفته می‌شود که خط رسم‌شده درامتداد خط کش بنا بر **اصل درج** رسم شده‌است. مسئله‌های خارج ازحیطهٔ ابزارهای اقلیدسی را اغلب می‌توان با این ابزارها حل کرد درصورتی که به‌خود اجازه‌دهیم که ازاصل درج نیزاستفاده کنیم.

(الف) فرض کنید که AB پاره‌خط مفروضی باشد. زاویهٔ $ABM = ۹۰^\circ$ و زاویهٔ $ABN = ۱۲۰^\circ$ را رسم کنید. حال ACD را رسم کنید تا BM را در C و BN را در D قطع نماید به‌طوری که $CD = AB$. دراین‌صورت $(AC)^۳ = ۲(AB)^۳$. این ترسیم در اساس درآثار انتشاریافتهٔ ویت(۱۶۴۶) و نیوتن(۱۷۲۸) داده شده بود.

(ب) فرض کنید که AOB زاویهٔ مرکزی دلخواهی در دایرهٔ مفروضی باشد. از B خطی مانند BCD رسم کنید که دایره را مجدداً در C و امتداد AO را در D قطع کند. به‌طوری که $CD = OA$، که در آن OA شعاع دایره است. در این صورت، (زاویهٔ AOB)$\frac{۱}{۳}$ = (زاویهٔ ADB). این راه حل مسئلهٔ تثلیث، از قضیه‌ای که توسط ارشمیدس (درحدود ۲۴۰ق.م.) داده شده، نتیجه می‌شود.

۷.۴ کونکوئید نیکومدس

دربارهٔ نیکومدس (حدود ۲۴۰ ق.م.) صرف نظر از ابداع **کونکوئید**، منحنیی که با آن‌هم مسئلهٔ تثلیث و هم مسئلهٔ تضعیف را می‌توان حل کرد، اطلاع کمی در دست است. یك کونکوئید کلی را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد. فرض کنید c یك منحنی مفروض و O نقطهٔ ثابتی باشد. بر بردارشعاعی OP از O تا نقطه‌ای‌مانند P برc، طول $PQ = \pm k$ را، که درآن k مقداری ثابت است. جدا کنید. در این صورت مکان هندسی Q کونکوئید c به‌قطب O و مقدار ثابت k نامیده می‌شود. منحنی‌کامل متشکل ازدوشاخه است، یکی‌متناظر با $PQ = +k$ و دیگری با $PQ = -k$. اگر c مستقیم و O نقطهٔ دلخواهی غیرواقع بر c باشد، **کونکوئید نیکومدس** به‌دست می‌آید.

(الف) بااختیار O به‌عنوان مبدأ و خط ماربر Oو موازی خط مفروض c به‌عنوان محورxها، نشان دهید که معادلهٔ دکارتی کونکوئیدنیکومدس برای ثابت k عبارت است از $(y-a)^۲(x^۲+y^۲) = k^۲y^۲$، که درآن a فاصلهٔ O از c است.

(ب) نشان دهید که چگونه می‌توان کونکوئید نیکومدس را برای حل مسئلهٔ تضعیف به‌کار برد.

(ج) کونکوئید یك دایره برای نقطهٔ ثابتی در روی دایره **لیماسون پاسکال** (به نام

کاشف آن اتین پاسکال[1] (۱۵۸۸–۱۶۴۰)، پدر بلز[2] پاسکال مشهور)، نامیده می‌شود. اگر $k=a$، که درآن a شعاع دایرهٔ مفروض است، لیماسون خاصی به‌دست می‌آوریم که به **ثلث‌ساز** مشهوراست. درستی ترسیم زیر برای تثلیث یك زاویه را با ثلث‌ساز، ثابت کنید. فرض کنید که AOB زاویهٔ مرکزی دلخواهی در دایره‌ای به‌مرکز O و شعاع OA باشد. ثلث‌ساز دایره راکه قطب آن در A است، رسم و فرض کنید که امتداد BO ثلث‌ساز رادر C قطع کند، دراین‌صورت(زاویهٔ AOB)$\frac{1}{3}=$(زاویهٔ ACB).

(د) نشان دهید که دوشاخهٔ کونکوئید منحنی c به‌قطب O و ثابت k، سیسوئید s و c به قطب O را تشکیل می‌دهد، که در آن s دایره‌ای است به مرکز O و شعاع k (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۴.۴).

۸.۴ تثلیث به‌وسیلهٔ مقاطع مخروطی

یك زاویهٔ کلی را می‌توان به‌کمك مقاطع مخروطی به‌آسانی تثلیث کرد. ساختمانهایی از این قبیل راکه در زیرمی‌آیند، ثابت کنید.

(الف) فرض کنید که زاویهٔ مفروض، AOB باشد. شاخه‌ای از هذلولی متساوی‌الساقینی راکه O مرکز و OA یك مجانب آن است، رسم کنید به‌طوری که OB را در P قطع کند. به‌مرکز P و به‌شعاع $2(PO)$ دایره‌ای رسم کنید تا هذلولی را در R قطع کند. PM را موازی OA و RM را عمود بر OA رسم کنید تا یکدیگر را در M قطع کنند. دراین‌صورت (زاویهٔ AOB)$\frac{1}{3}=$(زاویهٔ AOM).

(ب) فرض کنید که AOB زاویهٔ مرکزی یك‌دایره و OC نیمساز زاویهٔ AOB باشد. شاخه‌ای ازهذلولی باخروج از مرکز ۲ راکه A یك‌کانون و OC هادی نظیرآن باشد، رسم و فرض کنید که این شاخه قوس AB را در P قطع کند. دراین‌صورت

$$(\text{زاویهٔ } AOP)=\tfrac{1}{3}(\text{زاویهٔ } AOB).$$

این ترسیم به‌وسیلهٔ پاپوس (حدود ۳۰۰ ب.م.) ذکرشده است.

(ج) تثلیث ماهرانه‌ای از یك زاویهٔ دلخواه را می‌توان، نه بایك مقطع مخروطی، بلکه به‌وسیلهٔ خود مخروط دوار قائمی صورت داد. یك چنان مخروطی را (مثلا، ساخته شده از چوب) که مولد جانبی آن سه‌برابر شعاع قاعدهٔ آن باشد، در نظربگیرید. برمحیط مستدیر قاعدهٔ مخروط، قوس AB مربوط به‌زاویهٔ مرکزی AOB راکه برابر با زاویه‌ای است که می‌خواهیم تثلیث کنیم، جدا سازید. حال صفحهٔ کاغذی دور مخروط پیچیده و روی کاغذ محلهای نقاط A و B و رأس V مخروط را علامت بگذارید. نشان دهید که وقتی کاغذ را باز می‌کنید زاویهٔ AVB یك سوم زاویهٔ AOB است. شرح این روش بدیع

1. Etienne Pascal 2. Blaise

به‌وسیلهٔ اوبری[1] درسال ۱۸۹۶ داده شده است.*

۹.۴ ساختمانهای اقلیدسی مجانبی

ساختمانی که از ابزارهای اقلیدسی استفاده می‌کند اما نیاز به تعداد بینهایتی عمل دارد، **ساختمان اقلیدسی مجانبی** نامیده می‌شود. صحت دو ساختمان زیر ازاین‌گونه را برای حل مسائل تثلیث و تربیع ثابت کنید. (برای راه‌حل مجانبی اقلیدسی مسئلهٔ تضعیف، نگاه کنیدبه‌ت. ل.هیث، تاریخ ریاضیات یونانی، جلد۱، صفحات ۲۶۸–۲۷۰، متن‌اصلی[2]).

(الف) فرض کنیدکه OT_1 نیمساز زاویهٔ AOB، OT_2 نیمساز زاویهٔ AOT_1، OT_3 نیمساز زاویهٔ T_2OT_1، OT_4 نیمساز زاویهٔ T_3OT_2، OT_5 نیمساز زاویهٔ T_4OT_3 و به همین نحو الی آخر، باشند. در این‌صورت $\lim\limits_{i\to\infty} OT_i = OT$، یکی از خطوطی است که زاویهٔAOB را ثلث می‌کنند. (این‌ساختمان به‌وسیلهٔ فیالکوفسکی[3] در سال ۱۸۶۰داده‌شده است.)

(ب) پاره‌خطهای $B_1B_2 = AB_1$، $B_2B_3 = 2(B_1B_2)$، $B_3B_4 = 2(B_2B_3)$، و الی آخر را برامتداد پاره‌خط AB_1 جداکنید. به مراکز B_1، B_2، B_3،...، دایره‌های $B_1(A)$، $B_2(A)$، $B_3(A)$، ... را رسم و فرض کنید که M_1 وسط نیمدایرهٔ AB_2 باشد. B_2M_1 را رسم‌کنید تا دایرهٔ $B_2(A)$ را در M_2 قطع کند، B_3M_2 را رسم‌کنید تا دایرهٔ $B_3(A)$ را در M_3 قطع کند، و الی‌آخر. فرض کنید که N_i تصویر M_i بر مماس مشترك دوایر در A باشد. در این‌صورت، $\lim\limits_{i\to\infty} AN_i =$(ربع دایره $B_1(A)$).

۱۰.۴ مربع‌ساز

هیپیاس (حدود ۴۲۵ ق.م.) یك منحنی متعالی، به‌نام **مربع‌ساز**، ابداع کردکه به‌وسیلهٔ آن می‌توان زوایا را چند قسمت و دایره را تربیع کرد. مربع‌ساز را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد: فرض‌کنیدکه شعاع OX دایره‌ای به‌طور یکنواخت حول مرکز Oدوران کند و از وضع OC به‌وضع OA، که با OC زاویهٔ قائمه می‌سازد، درآید. همچنین فرض کنیدکه همزمان‌باآن خطی‌مانندMN که‌موازی با OA است به‌طور یکنواخت به موازات خود از C به‌سوی OA حرکت‌کند. مکان هندسی P، نقطهٔ تقاطع OX و MN، منحنی مربع‌ساز است.

---

1. Aubry

* برای رهیافت مکانیکی جدیدتری نگاه‌کنید به

Johnny W. Lott and Iris Mack Dayoub "What can be done with a mira?" *The Mathematics Teacher* (May 1977):394–399.

2. T.L. Heath, *History of Greek Mathematics* 3. Fialkowski

(الف) با اختیار $OA=1$ و محور xهای مثبت در امتداد OA، نشان دهید که معادلهٔ دکارتی مربع‌ساز $y=x\tan(\pi y/2)$ است.
(ب) نشان دهید که چگونه می‌توان یك زاویه را با مربع‌ساز به‌چند قسمت تقسیم کرد.
(ج) برخوردگاه مربع‌ساز را با محور xها پیدا کنید و نشان دهید که چگونه می‌توان این منحنی را برای تربیع دایره به‌کار برد.

۱۱.۴ راستش تقریبی

ساختمانهای تقریبی زیادی برای پیدا کردن پاره‌خطی، هم‌طول با محیط دایرهٔ مفروض، وجود دارند. تربیع تقریبی دایره را می‌توان بدین‌ترتیب به‌آسانی، با ساختن مربع روی واسطهٔ هندسی بین شعاع دایره و پاره‌خطی که از نظر طول برابر با نصف محیط دایره است، به‌دست آورد.
(الف) نشان دهید که محیط دایره به‌طور تقریبی، با سه برابر قطر دایره داده می‌شود که به‌آن یك پنجم ضلع مربع محاطی افزوده شده باشد. این به چه تقریبی برای π منجر می‌شود؟
(ب) فرض کنید که AOB یکی از قطرهای دایرهٔ مفروضی باشد. C را بر مماس در B چنان بیابید که $30^\circ=$(زاویهٔ COB). CBD را روی مماس، مساوی باسه برابر شعاع دایره جدا کنید. دراین‌صورت $2(AD)$ تقریباً برابر با محیط دایره است. این به چه تقریبی برای π منجر می‌شود؟ این ساختمان درسال ۱۶۸۵ به‌وسیلهٔ یسوعی لهستانی، کوخانسکی[1]، داده شد.
(ج) فرض کنید $AB=1$ یکی از قطرهای دایرهٔ مفروض باشد. $BC=7/8$ را عمود بر AB در B، رسم کنید. $AD=AC$ را بر امتداد AB جدا کنید. $DE=1/2$ را، عمود بر AD در D، رسم و فرض کنید که F پای عمود وارد از D بر AE باشد. EG را موازی FB رسم کنید تا BD را در G قطع کند. دراین‌صورت GB به‌طور تقریبی قسمت اعشاری π است. طول GB را تا ۷ رقم اعشار پیدا کنید. این ساختمان درسال ۱۸۴۹ به‌وسیلهٔ دوگلدر[2] داده شد.

۱۲.۴ هلالهای بقراط

بقراط خیوسی (حدود ۴۴۰ق.م.) هلالهای معینی را تربیع کرد، شاید به‌این امید که تحقیقات او بتواند کمی روشنایی برمسئلهٔ تربیع بیفکند. در زیر دو روش تربیع هلال بقراط می‌آید.
(الف) فرض کنید که AOB یك ربع دایره باشد. نیمدایره‌ای به‌قطر AB رسم کنید که خارج از این ربع‌دایره واقع شود. نشان دهید که هلال محدود شده به‌وسیلهٔ این ربع-

---
1. Kochanski 2. de Gelder

دایره و نیمدایره، دارای همان مساحت مثلث AOB است.

(ب) فرض کنید که $ABCD$ نصف یك ششضلعی منتظم محاط در دایـره‌ای به قطر AD باشد. هلالی را با رسم نیمدایره‌ای به قطر AB در خارج از دایـره رسم کنید. نشان دهید که مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ مساوی است باسه برابر مساحت هـلال به‌اضافهٔ مساحت نیمدایرهٔ روی AB.

۱۳.۴ محاسبهٔ π

(الف) نشان دهید که $\pi/۴ = ۴\ \tan^{-۱}(۱/۵) - \tan^{-۱}(۱/۲۳۹)$. این فرمولی است که در سال ۱۷۰۶ به‌وسیلهٔ ماخین برای محاسبهٔ π تا ۱۰۰ رقم اعشار مورد استفاده قرار گرفت.

(ب) فرمول ویت را که در بخش ۴-۸، زیر تاریخ **۱۵۷۹** داده شده، ثابت کنید.

(ج) نشان دهید که

$$\pi/۶ = \sqrt{۱/۳}\{۱ - ۱/(۳)(۳) + ۱/(۳^۲)(۵) - ۱/(۳^۳)(۷) + \cdots\}.$$

(د) تقریب متداولی برای جذر در قرون وسطی، به‌صورت

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^۲ + b} = a + b/(۲a + ۱)$$

بود. با اختیار $n = ۱۰ = ۳^۲ + ۱$، دلیل احتمالی استفادهٔ زیـاد از $\sqrt{۱۰}$ را به‌جای π، نشان دهید.

(ه) نشان دهید که قضیهٔ مندرج در لایحهٔ شمارهٔ ۲۴۶ مجلس مقننهٔ ایـالت ایندیانا در سال ۱۸۹۷ (نگاه کنید به بخش ۴-۸) به‌طور نادرست چنین فرض می‌کند که یك دایره و یك مربع درصورتی که محیطهای برابر داشته باشند، دارای مساحتهـای برابرنـد. این فرض به چه مقداری برای π منتهی می‌شود؟

(و) اگر S_k معرف ضلع یك k ضلعی منتظم محاط در دایـره‌ای به‌شعاع R باشد، نشان دهید که

$$s_{۲n} = \{۲R^۲ - R(۴R^۲ - s_n{}^۲)^{۱/۲}\}^{۱/۲}.$$

(ز) اگر S_k معرف ضلع یك k ضلعی منتظم محیط بردایره‌ای به‌شعاع r باشد، نشان دهید که

$$S_{۲n} = \frac{۲rS_n}{۲r + (۴r^۲ + S_n^۲)^{۱/۲}}$$

(ح) اگر p_k و P_k، به‌ترتیب، معرف محیطهای k ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی یك دایره باشند، نشان دهید که

$$P_{۲n} = \frac{۲p_nP_n}{p_n + P_n}, \quad p_{۲n} = (p_nP_{۲n})^{۱/۲}$$

(ط) اگر a_k و A_k، به‌ترتیب، معرف مساحتهای k ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی یك دایره باشند، نشان دهید که

$$a_{۲n}=(a_nA_n)^{۱/۲}, \qquad A_{۲n}=\frac{۲a_{۲n}A_n}{a_{۲n}+A_n}\cdot$$

۱۴.۴ تقریب اسنل

فرض کنید که زاویهٔ AOP (نگاه‌کنید به‌شکل ۳۷) یك زاویهٔ مرکزی حاده در دایره‌ای به‌شعاع واحد باشد. قطر AOB را تا نقطهٔ S امتداد دهید به‌طوری که $BS=AO$. SP را رسم کنید تا، در نقطهٔ T، مماس بر دایره در نقطهٔ A را قطع کند. اسنل متوجه شد که اگر زاویهٔ AOP به‌اندازهٔ کافی کوچك باشد، قطعه مماسی AT تقریباً برابر با طول قوس AP است.

(الف) خطای تقریب اسنل را، وقتی‌که $۹۰^\circ=$(زاویهٔ AOP) پیدا کنید.

(ب) با نشان دادن زاویهٔ AOP با θ و زاویهٔ AST با ϕ، ثابت کنید که

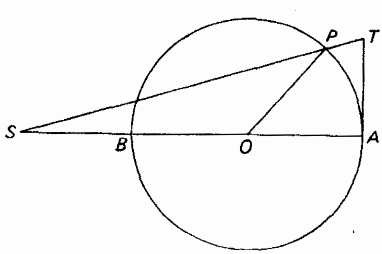
$$AT=\frac{۳\sin\theta}{۲+\cos\theta}=۳\tan\phi\,.$$

(ج) نشان دهید که $\phi<\theta/۳$، که بنابرآن

$$\frac{\sin\ \theta}{۲+\cos\ \theta}<\tan\left(\frac{\theta}{۳}\right).$$

(د) نشان دهید که چگونه می‌توان تقریب اسنل را برای چند قسمت کردن تقریبی زوایا به‌کار برد.

(ه) نشان دهید که چگونه می‌توان تقریب اسنل را برای تقسیم تقریبی محیط‌دایره به n قسمت مساوی به‌کاربرد.



شکل ۳۷

(و) نشان دهید کـه چگونه مـی‌توان تقریب اسنل را بـرای تربیع تقریبی دایره به‌کار برد.

۱۵.۴ یادآورهایی برای π

(الف) موفقترین یادآور جمله‌ای داده شده درمتن، برای به یـاد نگاهداشتن بسط اعشاری π، ۳۰ رقم اعشار صحیح به دست می‌دهد. تاکنون هیچکس قادر نبوده، یادآور جمله‌ای بسازدکه π را با بیش از ۳۱ رقم اعشار صحیح بدهد. چرا چنین است؟

(ب) یادآور زیرچند رقم اعشاری صحیح برای π حاصل می‌کند؟

Sir, I bear a rhyme excelling
In mystic force and magic spelling
Celestial sprites elucidate
All my own striving can't relate.

(ج) عدد π را می‌توان بااعدادگویا تقریب زد. برای مثال

$$۲۲/۷ = ۳٫۱۴|۲۸$$

$$۳۵۵/۱۱۳ = ۳٫۱۴۱۵۹۲|۹۲$$

$$۱۰۴۳۴۸/۳۳۲۱۵ = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳|۹۲۱۴۲$$

$$۸۳۳۷۱۹/۲۶۵۳۸۱ = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸|۱۰۸$$

که به‌نوبهٔ خود، π را به‌طور صحیح با ۲، ۶، ۹، و ۱۱ رقم اعشار می‌دهد. نشان دهید که یادآور زیررا می‌توان برای به‌خاطر داشتن دوکسر آخر به‌کار برد:

$$\frac{\text{calculator will get fair accuracy}}{\text{but not to } \pi \text{ exact}},$$

$$\frac{\text{dividing top lot through (a nightmare)}}{\text{by number below, you approach } \pi}.$$

عنوان مقاله

۱/۴ تأثیر افلاطون برریاضیات.

۲/۴ تأثیر ارسطو برریاضیات.

۳/۴ اهمیت مسائل حل‌نشده در ریاضیات.

۴/۴ گامهای نخستین در تاریخچهٔ مقاطع مخروطی.

۵/۴ ساختمانهای اقلیدسی به‌سان یك بازی هندسی.

۶/۴ پرگار مدرن درمقابل پرگار اقلیدسی.

۷/۴ مطالعهٔ منحنیهای مسطحه از درجات بالا بین یونانیان قدیم.

۸/۴ هلالهای تربیع شدنی.

۹/۴ اعداد نرمال.

۱۰/۴ یادآورها در ریاضیات مقدماتی.

۱۱/۴ مفهوم آموزشی افلاطونی «انتقال تعلیم».

۱۲/۴ شبه ریاضیات.

کتابنامه

ALLMAN, G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid*. Dublin: University Press, 1889.

BALL, W. W. R., and H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*. 11th ed. New York: Macmillan, 1939.

BECKMANN, PETR, *A History of Pi*. Boulder, Col.: Golem, 1970.

BOROFSKY, SAMUEL, *Elementary Theory of Equations*. New York: Macmillan, 1950.

BRAUMBAGH, R. S., *Plato's Mathematical Imagination; The Mathematical Passages in the Dialogues, and their Interpretation*. Bloomington, Ind.: Indiana University Press, 1954.

BUNT, L. N. H.; P. S. JONES; and J. D. BEDIENT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1976.

COOLIDGE, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.

COURANT, RICHARD, and HERBERT ROBBINS, *What Is Mathematics?* New York: Oxford University Press, 1941.

DANTZIG, TOBIAS, *The Bequest of the Greeks*. New York: Charles Scribner's, 1955.

DE MORGAN, AUGUSTUS, *A Budget of Paradoxes*. 2 vols., 2d ed., ed. D. E. Smith. Chicago: Open Court, 1915.

DICKSON, L. E., *New First Course in the Theory of Equations*. New York: John Wiley, 1939.

EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*. 2 vols. Boston: Allyn and Bacon, 1963 and 1965.

GOW, JAMES, *A Short History of Greek Mathematics*. New York: Hafner, 1923.

HEATH, T. L., *History of Greek Mathematics*. Vol. 1. New York: Oxford University Press, 1921. Reprinted by Dover, 1981.

———, *A Manual of Greek Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1931.

———, *Mathematics in Aristotle*. New York: Oxford University Press, 1949.

HOBSON, E. W., *"Squaring the Circle," A History of the Problem*. New York: Chelsea, 1953.

LEE, H. D. P., ed., *Zeno of Elea*. New York: Cambridge University Press, 1935.

LOVITT, W. V., *Elementary Theory of Equations*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1939.

PHIN, JOHN, *The Seven Follies of Science*. 3rd ed. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1911.

THOMAS, IVOR, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. 2 vols. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939 and 1941.

VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening*. Translated by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961; (paperback ed.) New York: John Wiley, 1963.

WEDBERG, ANDERS, *Plato's Philosophy of Mathematics*. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1955.

WEISNER, LOUIS, *Introduction to the Theory of Equations*. New York: Macmillan, 1938.

YATES, R. C., *The Trisection Problem*. Ann Arbor, Mich.: Edward Bros., 1947; reprinted by the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1974.

۵

اقلیدس و اصول وی

۵-۱ اسکندریه*

جنگ پلوپونزی یکی از دوره‌های تفرقهٔ سیاسی بین ایالات یونان را درپی داشت و آنها را به صورت طعمهٔ آسانی برای پادشاهی مقدونیه درشمال که قدرتی یافته بود، درآورد. شاه فیلیپ مقدونی تدریجاً قلمرو قدرت خود را درجهت جنوب گسترش می‌داد و به‌اعلام خطرهای دموستن[1] در نطقهای آتشینش اعتنایی نمی‌شد. یونانیان دیرتر از آنکه بتوانند دفاع موفقیت‌آمیزی داشته باشند، گردهم آمدند و باشکست آتن در کرنیه[2] در ۳۳۸ق.م.، یونان به قسمتی از امپراطوری مقدونی بدل گردید.

دوسال پس‌ازسقوط ایالات یونانی، اسکندرکبیر جاه‌طلب، جانشین پدر خود فیلیپ شد و پا در مسیر فتوحات بی‌مانند خود نهاد. بخشهای وسیعی از دنیای متمدن را به قلمرو در حال‌گسترش مقدونی افزود. او به هر جا که سپاه ظفرمند خود را هدایت کرد، در پشت سرخود و در نقاطی که به طور مناسب انتخاب می‌شدند، رشته‌ای از شهرهای جدید احداث کرد. بدین‌طریق بودکه وقتی اسکندر وارد مصرشد، شهر اسکندریه در ۳۳۲ق.م.

---

* نگاه کنید به،

R. E. Langer, "Alexandria-shrine of mathematics," *American Mathematical Monthly,* 48 (February 1941), pp. 109–125.

1. Demosthenes 2. Chaeronea

بنا گردید.

گفته‌اند که انتخاب محل، رسم نقشهٔ زمین، و روند مستعمره کردن اسکندریه به وسیلهٔ خود اسکندر رهبری شد، و بنای شهر عملا به معمار برجسته دینوکراتس[1] واگذار گردید. ازهمان آغاز، کلیهٔ نشانه‌های تحقق یك آیندهٔ درخشان دراسکندریه ظاهر شد. در زمانی به طور باورنکردنی کوتاه، عمدتاً به دلیل موقعیت مساعد آن در محل تلاقی طبیعی چند جادهٔ بازرگانی مهم، ثروتش افزایش یافت و به باشکوهترین وعمده‌ترین مرکز بین‌المللی دنیا بدل گردید و پیش‌ازسال ۳۰۰ ق.م. جمعیتش به ۵۰۰۰۰۰ نفر بالغ شد.

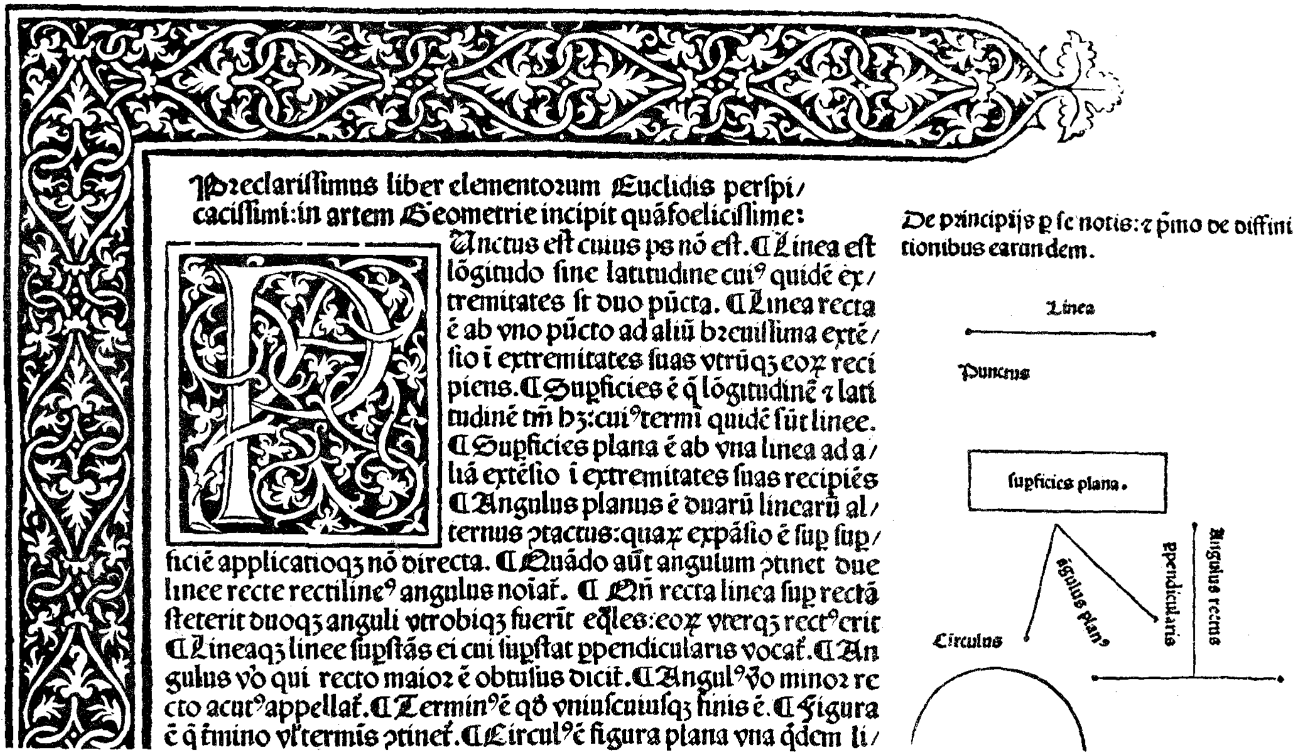
بعدازدرگذشت اسکندرکبیر درسال ۳۲۳ ق.م.، امپراطوری وی بین عده‌ای‌ازسران نظامیش تقسیم شد، که نتیجهٔ آن ظهور نهایی سه امپراطوری تحت فرمانرواییهای مختلف ولی در عین‌حال متحد، به خاطر پیوندهای تمدن هلنیستی [یونانیایی] ناشی از فتوحات اسکندر، بود. قرعهٔ مصر به‌نام‌بطلمیوس افتاد. درواقع درحدود۳۰۶ق.م. بودکه بطلمیوس حکومت خود را شروع کرد. وی‌اسکندریه را به عنوان پایتخت خود برگزید و، برای جلب علما به شهر خود، بلافاصله بنای دانشگاه مشهور اسکندریه را آغازکرد. این اولین مؤسسه ازنوع خود بود وازنظر وسعت و وضع به زودی به صورت دانشگاههای امروزی درآمد. گفته‌اند که این مؤسسه بسیار مجهز بوده و نقشهٔ جالب و استادانهٔ آن شامل سالنهای خطابه، آزمایشگاهها، باغها، موزه‌ها، امکانات کتابخانه، و خوابگاهها بوده است. مهمترین قسمت این مؤسسه کتابخانهٔ بزرگ آن بودکه برای مدت مدیدی بزرگترین مخزن آثارعلمی بودکه در دنیا می‌شد یافت، و، در عرض ۴۰ سال تأسیس خود، باداشتن متجاوز بر ۶۰۰۰۰۰ طومار پاپیروس به خود می‌بالید. درحدود ۳۰۰ ق.م. بودکه درهای دانشگاه گشوده شد و اسکندریه مرکز فرهنگی نژاد یونانی گشت، و قریب به هزار سال چنین ماند.

برای یافتن فضلای سرشناسی که کادر دانشگاه را تشکیل دهند، بطلمیوس به آتن روی آورد و از دیمتریوس فالرئوس[2] نامدار دعوت‌کرد تا مسؤولیت کتابخانهٔ بزرگ را به عهده گیرد. مردان قابل و بااستعداد برای بسط زمینه‌های مختلف تحصیل گزیده شدند. اقلیدس، که محتملا وی نیزازآتن آمده بود، به ریاست بخش ریاضی انتخاب شد.

۲ـ۵ اقلیدس

متأسفانه دربارهٔ زندگی و شخصیت اقلیدس اطلاع کمی در دست است بجز آنکه وی استاد ریاضیات در دانشگاه اسکندریه و ظاهراً مؤسس حوزهٔ معروف و دیرپای ریاضیات اسکندریه بود. حتی تاریخ وقایع عمدهٔ زندگی و محل تولد وی معلوم نیست، اما محتمل به نظر می‌رسدکه وی تعلیمات ریاضی خود را در مدرسهٔ افلاطونی آتن فرا گرفته باشد. سالها بعد، پاپوس هنگام مقایسهٔ اقلیدس و آپولونیوس و برای بی‌اعتبار

1. Dinocrates 2. Demetrius Phalereus


Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quā foelicissime:

Punctus est cuius ps nō est. ¶ Linea est lōgitudo sine latitudine cuiꝰ quidē extremitates sūt duo pūcta. ¶ Linea recta ē ab vno pūcto ad aliū breuissima extēsio i extremitates suas vtrūq3 eoꝝ recipiens. ¶ Supficies ē q̄ lōgitudinē ꝛ latitudinē tm̄ h3: cuiꝰ termī quidē sūt linee. ¶ Supficies plana ē ab vna linea ad aliā extēsio i extremitates suas recipiēs ¶ Angulus planus ē duarū linearū alternus ꝯtactus: quaꝝ expāsio ē sup supficiē applicatioq3 nō directa. ¶ Quādo aūt angulum ꝯtinet due linee recte rectilineꝰ angulus noiaṫ. ¶ Qñ recta linea sup rectā steterit duoq3 anguli vtrobiq3 fuerīt eq̄les: eoꝝ vterq3 rectꝰ erit ¶ Lineaq3 linee supstās ei cui supstat ppendicularis vocaṫ. ¶ Angulus vō qui recto maior ē obtusus dicit. ¶ Angulꝰ vō minor recto acutꝰ appellaṫ. ¶ Terminꝰ ē qd vniuscuiusq3 finis ē. ¶ Figura ē q̄ tmino vl termīs ꝯtineṫ. ¶ Circulꝰ ē figura plana vna q̄dem li/

De principijs p se notis: ꝛ pmo de diffinitionibus earundem.

قسمتی ازیک صفحه از اولین انتشار چاپی اصول که درسال ۱۴۸۲ در ونیز به‌عمل آمده است.

کردن دومی، از اقلیدس به خاطر فروتنی و توجهش به دیگران ستایش کرد. پروکلوس خلاصهٔ ائودموسی خود را با داستان مکرر گفته شدهٔ جواب اقلیدس به سؤال بطلمیوس دربارهٔ راه میان‌بر در دانش هندسه کامل می‌کند که «هیچ راه شاهانه‌ای در هندسه وجود ندارد.» اما همان داستان دربارهٔ منایخموس، وقتی به عنوان معلم درخدمت اسکندر کبیر بود، نیز نقل شده است. استوبائیوس[1] حکایت دیگری دارد ـ داستان دانش‌آموزی که پیش اقلیدس درس می‌خواند و پرسید ازآموختن این موضوع چه چیزی عاید وی خواهد شد، درنتیجه اقلیدس به غلامش امر کرد تاسکه‌ای به او دهد، «زیرا او از آنچه می‌آموزد باید سودی عایدش شود».

۳-۵ «اصول» اقلیدس

گرچه اقلیدس مؤلف حداقل ده اثر بوده، و متون نسبتاً کامل پنج‌تای آنها به دست ما رسیده است، اما شهرت وی عمدتاً به خاطر اصول اوست. به نظر می‌رسدکه این اثر مهم بلافاصله و به طور کامل جای کلیهٔ اصول قبلی را گرفته باشد؛ در واقع، هیچ اثری از تلاشهای قبلی برجا نمانده است. به محض اینکه این اثر پدید آمد، مورد نهایت توجه قرار گرفت و ازجانشینان اقلیدس گرفته تا اعصار جدید، تنها ذکر شمارهٔ مقاله و شمارهٔ قضایا برای مشخص کردن قضیه یا ساختمان خاصی کافی محسوب می‌شد. هیچ اثری، بجز کتاب مقدس، به این وسعت مورد استفاده، ویرایش، یا مطالعه نبوده، و احتمالا هیچ اثر دیگری بیشتر از آن بر تفکر علمی تأثیر ننهاده است. از زمان اولین چاپ آن در سال ۱۴۸۲، اصول اقلیدس متجاوز از هزار بار تجدید چاپ شده، و برای بیش‌از دو هزاره، این اثر تمام تعالیم هندسه را تحت سیطره داشته است.

متأسفانه هیچ نسخه‌ای از اصول اقلیدس که تاریخ آن به زمان مؤلف بازگردد، یافته نشده‌است. چاپهای جدید اصول مبتنی برمتن تجدیدنظرشده بوسیلهٔ تئون[2] اسکندرانی است که تقریباً ۷۰۰ سال بعد از نوشته شدن اثر اصلی، تهیه شده است. در اوایل قرن نوزدهم بودکه نسخهٔ قدیمی‌تری، که تنها اختلافاتی جزئی باتحریر تئون داشت، در کتابخانهٔ واتیکان کشف شد. مطالعهٔ دقیق نقل قولها و توضیحاتی که نویسندگان اولیه داده‌اند نشان می‌دهدکه تعریفها، اصول متعارفی، و اصول موضوعهٔ رسالهٔ اصلی با متون تجدیدنظرهای بعدی اندکی تفاوت دارند ولی قضایا و براهین آنها اساساً به‌همان صورتی مانده‌اندکه نگارش اقلیدس بوده است.

اولین ترجمه‌های لاتینی کامل اصول نه از یونانی وبلکه از عربی صورت گرفتند. در قرن هشتم، تعدادی از دستنوشته‌های آثار یونانی موجود در بیزانس[3] به وسیلهٔ اعراب ترجمه شد. و در ۱۱۲۰، محقق انگلیسی، آدلارد باثی[4] ترجمهٔ لاتینی‌از اصول را ازروی یکی از این ترجمه‌های عربی قدیمیتر به عمل آورد. ترجمه‌های لاتینی دیگر ازعربی‌توسط

---

1. Stobaeus 2. Theon 3. Byzantine 4. Adelard of Bath

گـرارد وی کرمونایی[1] (۱۱۸۷-۱۱۱۴) و، ۱۵۰ سال بعـد از آدلارد، به وسیلهٔ یوهانس کمپانوس[2] صورت گرفت. اولین انتشار چاپی اصول در ۱۴۸۲ در ونیز صورت گرفت و ترجمهٔ کمپانوس را در برداشت. این کتاب بسیار نادر به طرز نفیسی تهیه گردید و اولین کتاب ریاضی مهمی بود که بـه چاپ می‌رسید. تـرجمهٔ لاتینی مهمی از یونانـی توسط کوماندینو[3] در ۱۵۷۲ انجام شد. این ترجمه به عنوان مبنایی برای بسیاری از ترجمه‌های بعدی، از جمله اثر بسیار معتبر رابرت سیمسن[4]، به کار گرفته شد، که از اثر اخیر، به‌نوبهٔ خـود، نسخ انگلیسی متعددی اقتباس شدنـد. اولیـن ترجمهٔ انگلیسی کامل اصـول ترجمهٔ جاودانی بیلینگزلی[5] منتشره در سال ۱۵۷۰ بود.*

وجود کتابهای اصول دیگر پیش از اصـول اقلیدس از ارزش کار او نمی‌کاهد. به استناد خلاصهٔ ائودموسی، بقراط خیوسی اولین تلاش را در این راه به عمل آورد و بعداز او لئون[6]، که از لحاظ تاریخی بیـن افلاطون و ائودوکسوس قـرار دارد، به این تلاش دست‌زد. گفته‌اند که در اثر لئون در مقایسه با اثر بقراط، قضایا سنجیده‌تر انتخاب‌شده‌اند، و این قضایا تعدادشان بیشتر و سودمندتـر بوده‌اند. کتاب درسی آکادمی افلاطون توسط تئودیوس مگنزیایی[7] نوشته‌شده بود و از آن به‌عنوان مجموعهٔ اصول تحسین آمیـزی ستایش شده است. ظاهـراً هندسهٔ تئودیوس پیشرو بلافصل اثر اقلیدس و بـدون شك در دسترس وی بوده است، به ویژه اگر اقلیدس در آکادمی افلاطونی درس خوانده باشد. اقلیدس با کارمهم تئایتتوس و ائودوکسوس هم آشنا بوده است. بنا بـر این، محتمل است که اصـول اقلیدس، عمدتاً، تألیفی بسیار موفقیت آمـیز و تدوینی منظم از آثار نویسندگان پیشین بوده باشد. تردیدی نیست که اقلیدس می‌بایست تعدادی از براهین را خود پیدا و تعداد کثیری را کامل کند، ولی حسن عمدهٔ اثر او در گزینش ماهرانهٔ قضایا و دادن ترتیب منطقی به آنهاست که از قرار معلوم ازمشتی فرضهای آغازین استنتاج شده‌اند.

۴-۵ مندرجات «اصول»

بـرخلاف تصورات رایـج، اصول اقلیدس تنهـا منحصر بـه هندسه نبوده و بلکـه شامل

---

1. Gherardo of Cremona 2. Johannes Campanus
3. Commandino 4. Robert Simson 5. Billingsley

* نگاه کنید به

R. C. Archibald "The first translation of Euclid's *Elements* into English and its source," *American Mathematical Monthly*, 57 (August–September 1950), pp. 443–452. and W.F.Shenton, "The first English Euclid," *American Mathematical Monthly*, 35 (December, 1928) pp. 505–512.

6. Leon 7. Theudius of Magnesia

مقدار قابل ملاحظه‌ای مطالب راجع به نظریهٔ اعداد وجبر مقدماتی (هندسی) است. این اثر مشتمل بر ۱۳ مقاله و کلا حاوی ۴۶۵ قضیه است. کتابهای درسی هندسهٔ مسطحه و فضایی دبیرستانهای آمریکا شامل قسمت اعظم مطالبی است که در مقاله‌های I،III،IV،VI،XI،XII

صفحهٔ عنوان اقلیدس بیلینگزلی (سال ۱۵۷۰).

یافته می‌شوند.

مقالهٔ I، البته، با تعاریف مقدماتی لازم، اصول موضوعه، و اصول متعارفی آغاز می‌شود؛ ما در بخش ۵-۷ به این مطالب باز می‌گردیم. ۴۸ قضیهٔ اول مقالهٔ اول به سه گروه تقسیم می‌شوند. ۲۶ تای اول عمدتاً به خواص مثلثها می‌پردازند و سه قضیهٔ تساوی را در بر دارند. قضایای ۲۷ تا ۳۲ مقالهٔ I نظریهٔ خطوط موازی را بنا می‌نهند و ثابت می‌کنند که مجموع زوایای هر مثلث برابر دو قائمه است. قضایای باقیماندهٔ مقاله به متوازی‌الاضلاعها، مثلثها و مربعها همراه با اشارات خاص به‌روابط مربوط به مساحتها مربوط‌اند. قضیهٔ ۴۷ I، همان قضیهٔ فیثاغورس است، با برهانی که عموماً به خود اقلیدس منتسب می‌شد، و قضیهٔ آخر، ۴۸ I، عکس قضیهٔ فیثاغورس است. مطالب این کتاب به‌وسیلهٔ فیثاغورسیان اولیه بسط یافته است.

مقالهٔ II، مقالهٔ کوتاهی با تنها ۱۴ قضیه، به تبدیل مساحتها و جبر هندسی مکتب فیثاغورس می‌پردازد. ما برخی از قضایای این مقاله را در فصل ۳ بررسی کرده‌ایم. در همین مقاله است که معادلهای هندسی تعدادی از اتحادهای جبری را می‌یابیم. قضایای ۱۲ II و ۱۳ II از اهمیت خاصی برخوردارند. این قضایا، همراه باهم و به زبان امروزی‌تر، از این قرارند: دریک مثلث منفرج‌الزاویه (حاده‌الزوایا)، مربع ضلع مقابل به زاویهٔ منفرجه (حاده) برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر مثلث به اضافهٔ (منهای) دو برابر حاصلضرب یکی از این‌دو ضلع در تصویر دیگری بر‌روی این ضلع. لذا این دوقضیه، تعمیم قضیهٔ فیثاغورس هستند که امروزه از آن با نام «قانون کسینوسها» یاد می‌کنیم.

مقالهٔ III، مرکب از ۳۹ قضیه، شامل بسیاری از قضایای آشنا دربارهٔ دایره‌ها، وترها، قاطعها، مماسها، واندازه‌گیری زوایای مربوط به آنهاست که درکتابهای هندسهٔ دبیرستانی دیده می‌شوند. مقالهٔ IV، با تنها ۱۶ قضیه، ساختمانهای هندسی به‌وسیلهٔ ستاره و پرگار را برای چند ضلعیهای منتظم سه، چهار، پنج، شش، و پانزده ضلعی، و محاط کردن این چند ضلعیها را در داخل یك دایرهٔ مفروض و محیط کردن آنها بر یك دایرهٔ مفروض را مورد بحث قرارمی‌دهد. چون از هندسهٔ دوایر که در مقاله‌های III و IV آمده است در آثار فیثاغورس چندان چیزی یافت نمی‌شود، مطالب این مقاله احتمالا به وسیلهٔ سوفسطائیان اولیه و تحقیق‌کنندگان درسه مسئلهٔ مشهور بحث شده درفصل ۴ تهیه شده است.

مقالهٔ V بیان استادانه‌ای از نظریهٔ ائودوکسوس در مورد تناسب است. این نظریهٔ قابل استفاده درکمیتهای نامتوافق و متوافق، «رسوایی منطقی» ناشی ازکشف اعداد گنگ به وسیلهٔ فیثاغورس را حل کرد. تعریف ائودوکسوس از تناسب، یا تساوی دو نسبت، قابل توجه است، وارزش آن را داردکه در اینجا تکرارشود. گویندکمیتهایی به یك نسبت‌اند، اولی به دومی و سومی به چهارمی، هرگاه، اگر مضارب همضریب دلخواه ازاولی وسومی، و مضارب همضریب دلخواه از دومی و چهارمی اختیار شود، مضربهای اول به یك گونه بیشتر از، به یك گونه مساوی با، به یك گونه کوچکتر از مضربهای دوم‌اند که به ترتیب متناظر اختیار شوند. به عبارت دیگر، اگر A، B، C، D چهار کمیت بی‌علامت دلخواه

lem, sub æqualibus rectis lineis contentum, & basim BC *basi* EF *æqualem habebunt; eritque triangulum* BAC *triangulo* EDF *æquale, ac reliqui anguli* B, C *reliquis angulis* E, F *æquales erunt, uterque utrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.*

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE rectæ AB superponatur, cadet punctum E in B, quia DE [a] = AB. Item recta DF cadet in AC, quia ang. A [a] = D. Quinetiam punctum E puncto C coincidet, quia AC [a] = DF. Ergò rectæ EF, BC, cùm eosdem habeant terminos, [b] congruent, & proinde æquales sunt. Quare triangula BAC, EDF; & anguli B, E; itemq; anguli C, F etiam congruunt, & æquantur. Quod erat Demonstrandum.

a *hyp.*
b 14 *ax.*

Prop. V.

Isoscelium triangulorum ABC *qui ad basim sunt anguli* ABC, ACB *inter se sunt æquales. Et productis æqualibus rectis lineis* AB, AC *qui sub base sunt anguli* CBD, BCE *inter se æquales erunt.*

[a] Accipe AF = AD, & junge CD, ac BF.
Quoniam in triangulis ACD, ABF, sunt AB [c] = AC, & AF [d] = AD, angulúsq; A communis, [e] erit ang. ABF = ACD; & ang. AFB [e] = ADC, & bas. BF [e] = DC; item FC [f] = DB. ergò in triangulis BFC, BDC [g] erit ang. FCB = DBC. Q. E D. Item ideo ang. FBC = DCB. atqui ang. ABF [h] = ACD. ergò ang. ABC [k] = ACB. Q. E. D.

a 3. 1.
b 1. post.
c *hyp*
d *constr.*
e 4. 1.
f 3 *ax.*
g 4. 1.
h *pr.*
k 3. *ax.*

Corollarium.

Hinc, Omne triangulum æquilaterum est quoq; æquiangulum.

Prop.

برهان اقلیدس برای قضیهٔ ۵ I (زوایای مجاور به قاعدهٔ یك مثلث متساوی‌الساقین باهم برابرند) مطابق آنچه در اقلیدس آیزك‌برو داده شده است.

باشند. که A و B از یك جنس (هردو یا قطعه خط، یا زاویه، یا مساحت، یا حجم)، C و D هم از یك جنس‌اند، دراین صورت نسبت A به B برابر است با نسبت C به D، هرگاه به‌ازای اعداد صحیح مثبت دلخواه m و n داشته باشیم $mA \gtreqless nB$، بسته به‌اینکه $mC \gtreqless nD$. نظریهٔ ائودوکسوس دربارهٔ تناسب شالوده‌ای برای دستگاه اعداد حقیقی در آنالیز ریاضی عرضه کرد، که بعدها توسط ددکیند و وایرشتراس[1] بسط یافت.

مقالهٔ VI، نظریه ائودوکسوس دربارهٔ تناسب را در هندسهٔ مسطحه به کار می‌برد. در اینجا قضایای بنیادی دربارهٔ مثلثهای متشابه، ساختمانهایی که جزءهای سوم و چهارم تناسب، و واسطهٔ هندسی را می‌دهند؛ حل هندسی معادلات درجهٔ دوم که ما درفصل ۳ آنها را مطالعه کردیم؛ قضیه‌ای مبنی براینکه نیمساز داخلی هرزاویه از مثلث ضلع مقابل را به پاره‌خطهایی متناسب با دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند؛ تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورس که در آن، به جای مربعها، سه شکل متشابه و به طور متشابه ترسیم شده در روی سه ضلع یك مثلث قائم‌الزاویه رسم شده‌اند، وبسیاری قضایای دیگر را می‌بینیم. احتمالاً در این مقاله قضیه‌ای نیست که برفیثاغورسیان اولیه معلوم نبوده، اما برهانهای قبل‌از ائودوکسوس بسیاری ازآنها مغلوط بوده‌اند، زیرا که برنظریهٔ ناقصی در مورد تناسب مبتنی بوده‌اند.

مقاله‌های VII، VIII، و IX، که مجموعاً شامل ۱۰۲ قضیه‌اند، به نظریهٔ مقدماتی اعداد پرداخته‌اند. مقالهٔ VII با فرایندی برای یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه صحیح مشترك دو عدد یا بیشتر، که امروزه به آن **الگوریتم اقلیدسی** می‌گوییم، آغاز می‌شود و آن را به عنوان آزمایشی برای متباین بودن دوعدد به‌کار می‌برد (نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱.۵). دراینجا همچنین شرحی‌ازنظریهٔ عددی، یا فیثاغورسی، تناسب یافت می‌شود. بسیاری از خواص اساسی اعداد در این مقاله اثبات شده‌اند.

مقالهٔ VIII بیشتر باتناسبهای مسلسل وتصاعدهای هندسی مربوط سرو کار دارد. اگر تناسب مسلسل $a:b=b:c=c:d$ را داشته باشیم، در این صورت a، b، c، d یك تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند.

در مقالهٔ IX قضایای مهمی یافت می‌شوند. قضیهٔ IX۱۴ معادل است با قضیهٔ مهمی که **قضیهٔ اصلی حساب** خوانده می‌شود، یعنی اینکه هر عدد صحیح بزرگتر از ۱ را می‌توان به‌یك صورت و دقیقاً به یك صورت به شکل حاصلضرب اعداداول نشان داد. قضیهٔ IX۳۵ روش‌استخراج هندسی فرمول مجموع n جملهٔ اول یك تصاعد هندسی را می‌دهد، وآخرین قضیه، IX۳۶، فرمول مهم اعداد تام را که دربخش ۳ــ۳ بیان شد، ثابت می‌کند.

برهان اقلیدس در مورد IX۲۰ ــ که تعداد اعداد اول بینهایت است ــ عموماً به وسیلهٔ ریاضیدانان به عنوان نمونه‌ای از ظرافت ریاضی تلقی شده است. این برهان

1. Weierstrass

روش غیرمستقیم*، یا برهان خلف را به کار می‌گیرد، و اساساً به قرار زیر است. فرض کنید تنها تعدادی متناهی عدد اول موجود باشند، که آنها را با a، b، ...، k نشان می‌دهیم. حال P را به‌صورت $P = ab...k$ درنظر بگیرید. دراین‌صورت $P+1$ یا اول است یا مرکب. اما چون a، b، ...، k همه اعداد اول‌اند، $P+1$، که از هر یك از اعداد a، b، ...، k بزرگتر است، نمی‌تواند اول باشد. از دیگرسو، اگر $P+1$ مرکب باشد، باید به عدد اولی مانند p قابل‌قسمت باشد. اما p باید یکی از اعضای مجموعهٔ a،b،...،k از کلیهٔ اعداد اول باشد، یعنی اینکه p یکی از مقسوم‌علیه‌های P است. در نتیجه، p نمی‌تواند $P+1$ را عادکند، زیرا $p>1$. بنابراین، فرض آغازین ما که عدهٔ اعداد اول متناهی است، غیرقابل قبول است، و قضیه ثابت می‌شود.

مقالهٔ X با اعداد گنگ، یعنی، با پاره‌خطهایی که نسبت به پاره‌خط مفروضی نامتوافق‌اند، سر و کار دارد. محققین بسیاری این مقاله را شاید بهترین مقالهٔ اصول تلقی می‌کنند. تصور می‌شود که قسمت زیادی از این مقاله کار تئایتتوس باشد، ولی کمال خارق‌العاده، دسته‌بندی استادانه، و پرداخت آن معمولا به اقلیدس نسبت داده می‌شود. تصور اینکه نتایج این مقاله فقط به استدلال انتزاعی و بدون استفاده از نمادهای جبری مناسب حاصل شده باشد به باور نمی‌گنجد. اولین قضیهٔ (XI)، پایهٔ روش افناست که بعداً در مقالهٔ XII به‌کارگرفته شده، بدین معنی که، اگر از هر کمیتی قسمتی که از نصف آن کوچکتر نیست، کم شود، از باقیمانده قسمت دیگری که از نصف آن کوچکتر نیست کم شود، و الی آخر، در نهایت کمیتی به‌جا خواهد ماندکه از هرکمیت معین، همجنس با کمیت اول کوچکتر است. در این مقاله همچنین فرمولهایی را می‌یابیم که اعداد سه‌تایی فیثاغورسی را می‌دهند، فرمولهایی که بابلیهای قدیم شایدآنها را هزار سال پیشتر ازآن می‌دانسته‌اند (نگاه‌کنید به بخش ۲ـ۶).

سه مقالهٔ باقیمانده، XI، XII، وXIII به هندسهٔ فضایی مربوط‌اند، که همهٔ مطالبی را که عموماً در کتابهای دبیرستانی می‌توان یافت، به استثنای مبحث مربوط به کره‌ها، دربرمی‌گیرند. تعاریف و قضایای مربوط به خطها و صفحه‌ها در فضا، قضایای مربوط به متوازی‌السطوحها در مقالهٔ XI یافت می‌شوند. روش افنا در مطالعهٔ احجام در مقالهٔ XII نقش مهمی دارد، و درفصل ۱۱ [جلد دوم] باکمی تفصیل از نو درنظر گرفته خواهد شد. در مقالهٔ XIII ساختمانهایی برای محاط‌کردن پنج چندوجهی منتظم در یك کره عرضه شده‌اند.

این نکتهٔ مکرراً گفته شده، که منظور از اصول اقلیدس درواقع آن بوده‌که صرفاً به عنوان شرح مطولی از پنج چند وجهی منتظم به‌کارآید، ارزیابی نامنصفانه‌ای به نظر می‌آید. ظاهراً ارزیابی درست‌تر چنین است که قصد از این کتاب این بوده که درزمان خود به عنوان یك کتاب درسی مقدماتی در ریاضیات عمومی مورد استفاده قرار گیرد. اقلیدس در ریاضیات عالی نیز کتابهای درسی نگاشته است.

---

* فرمولبندی این برهان به طوری‌که از روش غیرمستقیم اجتناب شود، آسان است.

در خاتمه، اشاره‌ای به معنی اصطلاح «اصول» می‌کنیم. پروکلوس به ما گفته است که منظور یونانیان قدیم از «اصول» یك مطالعهٔ قیاسی، قضایای عمده یا کلیدی بوده است که مورد استفادهٔ وسیع و عمومی در موضوع موردبحث بوده‌اند. کارآنها با نقشی که حروف الفبا در رابطه با زبان دارد مقایسه شده است؛ در حقیقت حروف را هم در زبان یونانی به همین اسم می‌نامند. ارسطو، درکتاب مابعدالطبیعهٔ[1] خود، به همین معنی دربارهٔ «اصول» می‌گوید که «در بین قضایای هندسی، آنهایی را «اصول» می‌نامیم که اثباتشان در اثبات همه یا اغلب قضایای هندسی می‌آیند.» انتخاب قضایایی که باید به عنوان اصول درموضوع مورد بحث اختیار شوند، نیازمند تشخیص درست است، و مزیت اصول اقلیدس برهمهٔ آثار قبلی از جمله درهمین نکته نهفته است.

پس نتیجه می‌شودکه نکتهٔ مکرراً بیان شدهٔ دیگر ــ که در اصول اقلیدس قصد آن بوده که اساساً همهٔ هندسهٔ مسطحه و فضایی معلوم در آن عصر گنجانده شود ــ آشکارا نادرست است. اقلیدس خیلی بیش ازآنچه در اصول وی آمده، هندسه می‌دانسته است.

۵ـ۵ نظریهٔ تناسب

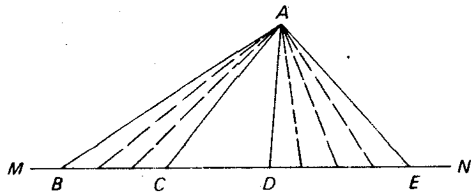
جالب است که به تفاوت بین برهان فیثاغورسی، ائودوکسوسی، و کتابهای درسی جدید برای قضیهٔ سادهٔ مربوط به تناسبها، توجه شود. قضیهٔ VI۱ را انتخاب می‌کنیم: نسبت مساحتهای دو مثلث که ارتفاعشان یکی است، همان نسبت قاعده‌های آنهاست. به خود اجازه می‌دهیم که از قضیهٔ I۳۸ استفاده کنیم که می‌گوید مثلثهایی که قاعده‌های برابر و ارتفاعهای برابر داشته باشند، مساحتهای برابر دارند، و از یك نتیجهٔ قضیهٔ I۳۸ حاکی ازاینکه از دو مثلث که ارتفاعشان یکی است، آنکه قاعدهٔ بزرگتر دارد مساحت بیشتری دارد.

فرض کنید که این مثلثها ABC و ADE باشند. و قاعده‌های BC وDE برروی خط مستقیم MN، مانند شکل ۳۸، قرار داشته باشند. فیثاغورسیان، قبل ازکشف اعداد گنگ، تلویحاً می‌پذیرفتند که هردوپاره‌خط دلخواه متوافق‌اند. بنابراین، فرض می‌شودکه BC و DE دارای یك واحد مشترك برای اندازه‌گیری‌اند، که، به عنوان مثال، در BC، p بار و در DE، q بار می‌گنجد. این نقاط تقسیم را بر BC و DE مشخص کرده آنها را به رأس A وصل کنید. در این صورت مثلثهای ABC و ADE، به ترتیب، به p و q مثلث کوچکتر تقسیم می‌شوند، که همه، بنابر I۳۸، مساحت واحدی دارند. نتیجه می‌شود که $\Delta ABC:\Delta ADE = p:q = BC:DE$ وقضیه ثابت‌می‌شود. بعداً بااین کشف، که‌دوپاره‌خط لزوماً متوافق نیستند، نارسایی این برهان همراه با برهانهای دیگرآشکار گردید، ولذا، آن «رسوایی منطقی» اضطراب‌آور به وجود آمد.

نظریهٔ ائودوکسوسی تناسب، این «رسوایی» را، آن‌گونه که اکنون با اثبات مجدد

---

1. *Metaphysics*



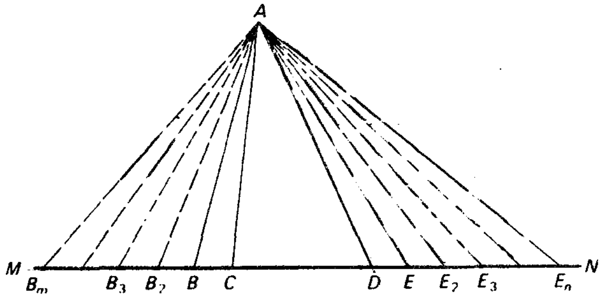
شکل ۳۸

VI۱ به متوالی که در اصول می‌توان دید، شرح می‌دهیم، به طور ماهرانه‌ای مرتفع کرد. بر امتداد CB، به‌طور متوالـی از نقطهٔ B، $m-1$ پاره‌خط مساوی با CB جـدا کنید، و نقاط تقسیم B_2، B_3،...، B_m را، هم‌چنان که در شکل ۳۹ دیـده می‌شود، به A وصل کنید. به همین نحو، بر امتداد DE، متوالیاً از نقطهٔ E، $n-1$ پاره‌خط مساوی با DE جدا کنید، ونقاط تقسیم، E_2، E_3،...، E_n را به‌رأس A وصل کنید. دراین صورت $B_mC=m(BC)$، $\Delta AB_mC=m(\Delta ABC)$، $DE_n=n(DE)$، $\Delta ADE_n=n(\Delta ADE)$. همچنین، بنا بر I ۳۸ و نتیجـهٔ آن، $\Delta AB_mC \gtreqless \Delta ADE_n$؛ بسته بـه اینکـه $B_mC \gtreqless DE_n$ یعنـی $m(\Delta ABC) \gtreqless n(\Delta ADE)$، بسته به‌اینکـه $m(BC) \gtreqless n(DE)$، که از آن، بنا بر تعریف ائودوکسوسی تناسب

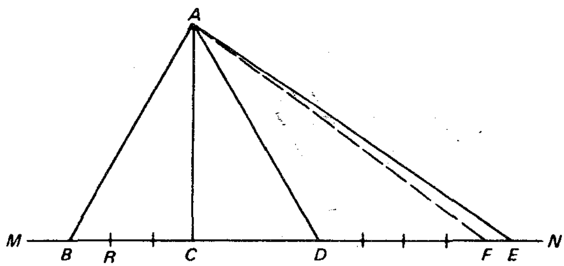
$$\Delta ABC:\Delta ADE=BC:DE،$$

و قضیه ثابت می‌شود. دراینجا هیچ ذکـری ازکمیتهای متوافق و نامتوافق به میان نیامده، زیرا تعریف ائودوکسوسی تناسب را در هردو حالت می‌توان به‌کار برد.

بسیاری ازکتابهای دبیرستانی امروزه با برهانی از این مسئله موافق هستند که متضمن دو حالت است، بسته به اینکه BC و DE متوافق باشند یا نباشند. در حالت متوافق، مانند راه حل فیثاغورسی عمل می‌شود، و برای پرداختن به حالت نامتوافق، مفاهیم حدی ساده مورد استفاده قرار می‌گیرند. مثلا فرض کنید که BC و DE نامتوافق باشند. BC را به n قسمت مساوی تقسیم نمایید، به طوری که BR یکی ازقسمتها باشد (نگاه کنید بـه شکل ۴۰). بر DE پاره‌خطهایی متوالی به طول BR جدا کنید تاسرانجام به نقطه‌ای مانند F بـر DE برسید به طوری کـه $EF<BR$. بنا برحالت متوافق، کـه قبـلا ثابت شده، $\Delta ABC:\Delta ADF=BC:DF$. حـال فـرض کنید $n\to\infty$. آنگـاه $DF\to DE$ و $\Delta ADF\to\Delta ADE$. لذا، در حد، $\Delta ABC:\Delta ADE=BC:DE$. این روش مبتنی براین حقیقت است که هر عدد گنگ را می‌توان به‌عنوان حد دنباله‌ای از اعداد گویا به‌شمار آورد؛



شکل ۳۹



شکل ۴۰

روشی که بـه طور دقیق در اعصار جدید بـه وسیلهٔ گئورگ کانتور[1] (۱۸۴۵-۱۹۱۸) بسط یافت.

۶-۵ چندضلعیهای منتظم

متذکر شده‌ایم که اقلیدس، در مقالهٔ IV اصول خود، ساختمان چندضلعیهای منتظم با سه، چهار، پنج، شش، و پانـزده‌ضلع را، به‌کمك ستاره و پرگار، مورد بحث قرار می‌دهـد. بدین‌ترتیب، با دونیم‌کـردن متوالی زوایا، یا قوسها، می‌توانیم با ابـزارهـای اقلیدسی چندضلعیهـای منتظمی بسازیم کـه 2^n، $(2^n)3$، $(2^n)5$، یا $(2^n)15$ ضلـع داشته باشند. تقریباً تا قرن نوزده معلوم نشده بود که می‌توان چندضلعی منتظم دیگری را بااین ابزارهای محدود ساخت. درسال ۱۷۹۶، کارل‌فریدریش گاوس[2] ریاضیدان برجستهٔ آلمانی نظریه‌ای را ابداع کرد که نشان می‌دهـد هرچندضلعی منتظم را، کـه تعداد اضلاع آن اول باشد، می‌توان باابزارهای‌اقلیدسی ساخت اگروفقط اگر آن عدد به صورت $f(n) = 2^{2^n} + 1$ باشد. برای $n = 0, 1, 2, 3, 4$ مقادیـر $f(n) = 3, 5, 17, 257, 65537$ را می‌یابیم، که

1. Georg Cantor 2. Carl Friedrich Gauss

همه اعداد اول‌اند. بنا براین، چند ضلعیهای ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷ ضلعی را می‌توان باستاره وپرگار رسم کرد و این نکته‌ای است که بریونانیان نامعلوم بود. برای هیچ مقدار دیگری از n بجزآنها که دربالا آمده اول بودن $f(n)$ معلوم نیست.

ساختمانهای اقلیدسی زیادی برای هفده ضلعی منتظم داده شده‌اند. در سال ۱۸۳۲، ریشلوت[1] تحقیقی دربارهٔ ۲۵۷ ضلعی منتظم منتشر نمود، و پروفسورهرمس[2] ازشهر لینگین[3] ده سال از زندگی خود را در راه مسئلهٔ ساختن ۶۵۵۳۷ ضلعی منتظم صرف کرد. گفته شده که کشف گاوس، در سن ۱۹ سالگی، مبنی بر امکان رسم ۱۷ ضلعی منتظم با ستاره و پرگار بود که وی را مصمم ساخت تا زندگی خود را وقف ریاضیات کند. وصیت وی که یك ۱۷ ضلعی برسنگ قبرش کنده‌شود، نشانهٔ مباهات او به‌این‌کشف است. اگرچه این وصیت وی هرگز جامهٔ عمل نپوشید، چنین چندضلعیی روی پایهٔ بنای یادبودی‌که برای گاوس در زادگاه وی، برونسویك[4]، بر پا شده، دیده می‌شود.

۵-۷ جنبهٔ صوری «اصول»

با آنکه مندرجات اصول مهم است، شاید آنچه مهمتر است روش صوری عرضهٔ مندرجات و قضایای آن است. در حقیقت، اصول اقلیدس به‌صورت نمونه‌ای از فرم ریاضی جدید درآمده است.

قطعاً یکی از بزرگترین دستاوردهای ریاضیدانان یونان قدیم، آفرینش شکل تفکر اصل موضوعی است. برای اینکه‌گزاره‌ای دریك دستگاه قیاسی اثبات شود، باید نشان‌داد که این گزاره پیامد منطقی لازم‌از چند گزاره است که قبلا به اثبات رسیده‌اند. گزاره‌های اخیر، به‌نوبهٔ خود، باید به‌کمك گزاره‌هایی که قبلا اثبات شده‌اند، ثابت شوند، وبه‌همین ترتیب الی‌آخر. چون این تسلسل را نمی‌توان به‌طورنامحدود ادامه داد، دربدو امر، باید مجموعهٔ محدودی از گزاره‌ها بدون اثبات پذیرفته شوند، یا در غیر این صورت گناه نابخشودنی دور و تسلسل بااستنتاج گزارهٔ A ازگزارهٔ B وسپس B از A راباید مرتکب شد. این گزاره‌های بدواً پذیرفته شده **پوستولاها**[5] [اصول موضوعه] یا **اکسیومهای**[6] [اصول متعارفی] مبحث نامیده می‌شوند، وتمام گزاره‌های دیگر مبحث بایستی به طورمنطقی‌ازآنها لازم آیند. وقتی که گزاره‌های یك مبحث بدین صورت منظم شوند، گفته می‌شود که مبحث در فرم اصل موضوعی عرضه شده است.

تأثیر جنبهٔ صوری اصول اقلیدس برنسلهای بعدی آن‌چنان عظیم بود که این‌اثر به صورت الگویی برای نمایش ریاضی دقیق درآمد. به‌رغم متروك شدن قابل ملاحظهٔ فرم اقلیدسی در طول قرون هفدهم و هجدهم، تفکر اصل موضوعی امروزه تقریباً درهر زمینه‌ای از ریاضیات نفوذکرده، و بسیاری ازریاضیدانان ازاین نظریه هواداری می‌کنندکه نه‌تنها

1. Richelot   2. Hermes   3. Lingen   4. Brunswick
5. postulate   6. axiom

تفکر ریاضی، اصل موضوعی است بلکه، برعکس، تفکر اصل موضوعی، خود تفکر ریاضی می‌باشد. یك نتیجهٔ نسبتاً جدیـد، به وجود آمدن زمینه‌ای از مطالعات بوده است که **علم اصول موضوعه**[1] نامیده می‌شود و به‌بررسی خواص عمومی مجموعه‌های اصول موضوعه و تفکر اصل موضوعی اختصاص دارد. در بخش ۱۵-۲ به این مطلب بازمی گردیم.

اغلب ریاضیدانان وفیلسوفان یونانی قدیم بین «اصول‌موضوعه» و«اصول‌متعارفی» فرق می‌نهادند. حداقل سه وجه تمایز توسط دسته‌های مختلف عنوان شده است.

۱- اصل متعارفی یك گزارهٔ بدیهی پذیرفته شده‌است دربارهٔ چیزی، و اصل موضوع یك ساختمان بدیهی پذیـرفته شده دربارهٔ چیزی است؛ بنابراین اصول متعارفی و اصول موضوعه تا حد زیادی همان رابطه را باهم دارند که بین قضایا و مسائل ساختمانی موجود است.

۲- اصل متعارفی فرضی است مشترك درهمهٔ علوم، درحالی که اصل موضوع فرضی است که مختص علم خاص تحت مطالعه می‌باشد.

۳- اصل متعارفی فرضی است درمورد چیزی که برمتعلم، هم آشکار و هم قابل قبول است؛ اصل موضوع فرضی است ازچیزی که برمتعلم نه لزوماً آشکاراست و نه لزوماً قابل قبول. مورد اخیر اساساً وجه ممیزهٔ بیـان شده توسط ارسطو است. در ریاضیات جدید از این لحاظ هیچ تمایزی قائل نمی‌شوند وصفات بدیهی بودن و آشکار بودن نیـز موردنظر نیستند. پاره‌ای ازریاضیدانان یونان قدیم به این نقطه‌نظر متمایل بودند.

دقیقاً محقق نیست که اقلیدس چه گزاره‌هایی را برای اصول موضوعه و اصول متعارفی خود پذیرفته وهمچنین، معین نیست که تعداد گزاره‌ها برای این منظور دقیقاً چندتا بوده‌اند، زیرا تغییرات واضافاتی توسط مصححین بعدی به عمل آمده است. مع‌هذا، شواهـد کافی وجود دارد مبنی براینکه وی با وجه‌تمایـز دوم موافق بوده و اینکه احتمالا معادلهای ده گـزارهٔ زیر را پذیرفته بوده است، پنج «اصل متعارفی» ، یا مفهوم عمومی، و پنج «اصل موضوع» هندسی:

A۱ چیزهایی که با یك چیز مساوی‌اند، با یکدیگر نیز مساوی‌اند.

A۲ اگر چیزهای مساوی به‌چیزهای مساوی اضافه شوند، کلها مساوی‌اند.

A۳ اگر چیزهای مساوی از چیزهای مساوی کم شوند، باقیمانده‌ها مساوی‌اند.

A۴ چیزهایی که بریکدیگر منطبق شوند با یکدیگر مساوی‌اند.

A۵ کل از جزء بزرگتر است.

P۱ از هر نقطه می‌توان خط مستقیمی به هر نقطهٔ دیگر کشید.

P۲ هر خط مستقیم متناهی را می‌توان روی همان خط به طور نامحدود امتداد داد.

P۳ می‌توان دایره‌ای با هرنقطهٔ دلخواه به‌عنوان مرکز آن و با شعاعی مساوی هر پاره‌خط رسم شده از مرکز آن ترسیم کرد.

---

1. axiomatics

۴P همهٔ زوایای قائمه با هم مساوی‌اند.

۵P اگر خط مستقیمی دو خط مستقیم را قطع کند به طوری که مجموع زوایای داخلی یك طرف آن کمتر از دو قائمه باشد، این دوخط مستقیم، اگربه‌طور نامحدود امتداد داده شوند، در طرفی که دو زاویه مجموعاً از دو قائمه کمترند، همدیگر را قطع خواهند کرد.

اصول بر آن است که همهٔ ۴۶۵ قضیهٔ خود را از این ده گزاره استخراج کند. بسط مطلب از نوع ترکیبی[1] می‌باشد یعنی رسیدن از آنچه معلوم و ساده‌تر است به مجهول و موارد پیچیده‌تر. بدون تردید فرایند عکس، که تحلیل[2]* نامیده‌می‌شود، یعنی تحویل مجهول و موارد پیچیده‌تر به معلوم، در کشف برهانهای بسیاری از قضایا نقشی داشته است، اما هیچ نقشی در ارائهٔ مطالب هندسی ندارد.

۸-۵ سایر آثار اقلیدس

اقلیدس علاوه بر اصول رسالات متعددی نوشته است، که بعضی از آنها تا به امروز محفوظ مانده‌اند. یکی از اینها که داده‌ها[3] [معطیات] نامیده می‌شود، با مطالب شش مقالهٔ اول اصول مرتبط است. یك داده را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از اجزاء یا روابط یك شکل تعریف کرد به طوری که اگر همه جز یکی داده شوند، بتوان آن یکی را تعیین کرد. مثلا اجزاء A , a , R یك مثلث، که در آن A یك زاویه، a ضلع مقابل به این زاویه، و R شعاع دایرهٔ محیطی است، یك داده را تشکیل می‌دهند، چون با معلوم بودن هر دوتایی از این اجزاء، سومی به موجب آنها تعیین می‌شود. این نکته، هم به طریق هندسی وهم از رابطهٔ $a=۲R\sin A$ روشن است. آشکار است که مجموعه‌ای از داده‌های از این قبیل می‌توانند در تحلیلی که مقدم بر کشف یك ساختمان یا یك برهان می‌باشد، سودمندباشند، و نیت کتاب مزبور بدون تردید همین است.

اثر دیگر اقلیدس درهندسه، که از طریق ترجمهٔ عربی به‌دست ما رسیده، کتاب درباب تقسیم اشکال[4] است. دراینجا مسائل ساختمانی را می‌یابیم که در آنها تقسیم شکلی با یك خط تحدید شده‌ای موردنظر است به طوری که اجزاء آن دارای مساحتهایی به‌یك نسبت مورد نظر باشند. مثالی از این مسائل، مسئلهٔ تقسیم مثلث مفروضی به دو مساحت مساوی به وسیلهٔ خطی است که برنقطهٔ مفروضی در داخل مثلث رسم می‌شود. مثالهای دیگر در مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱.۳ (ب) و ۱۱.۳ (ج) یافت می‌شوند.

---

1. synthetic 2. analysis

* واژه‌های تحلیل و تحلیلی (*analytic*) با مضامین متعددی در ریاضیات به‌کار رفته‌اند. ازاین قرار هندسهٔ تحلیلی، شاخهٔ عظیمی از ریاضیات را که آنالیز نامیده می‌شود، توابع تحلیلی و غیره را داریم.

3. Data 4. *On Divisions*

سایر آثار هندسی اقلیدس که اکنون در دست نیست و وجودشان تنها از شروح بعدی معلوم است، عبارت‌اند از پسوداریا[1]، یا کتاب مغالطه‌های هندسی، پوریسم*، که دربارهٔ آن حدسیات زیادی زده می‌شود، مقاطع مخروطی، رساله‌ای در چهار مقاله که بعداً کامل و بـه دست آپولونیوس بر آن مطالبی افزوده شده است، مکانهای رویه‌ای[2] [یا مکانهـای واقع روی رویه‌ها]، که دربارهٔ آن هیچ‌چیز به‌یقین نمی‌دانیم.

دیگـر آثار اقلیدس دربارهٔ ریاضیات عملـی است، و دوتا از اینها باقـی هستند: فاینومنا[3] [الظاهرات]، که به هندسهٔ کروی مورد نیاز درنجوم رصدی می‌پردازد، و رسالهٔ نور[4]، که رساله‌ای مقدماتی درمورد مناظر و مرایاست. تصورمی‌شود که اقلیدس اثری نیز درباب مقدمات موسیقی نگاشته باشد.

مطالعهٔ مسئله‌ای

۱۰۵ الگوریتم اقلیدسی

الگوریتم اقلیدسی، یا فـرایند اقلیدسی، برای پیدا کـردن بزرگتریـن مقسوم‌علیه مشترك (ب.م.م.) دوعـدد صحیح مثبت از آن جهت چنین نام یافته است که درشروع مقالهٔ هفتم اصول اقلیدس دیده می‌شود، اگرچه این فرایند بدون تردید خیلی پیشتر از آن معلوم بوده است. این الگوریتم جـزو مبانی بسیاری ازپیشرفتهای ریاضیات نوین قـرار دارد. این فرایندکه به شکل قاعده‌ای بیان می‌شود، چنین است: از دو عددآن را که بزرگتـر است بر عدد کوچکتر تقسیم نمایید. مقسوم‌علیه را برباقیمانده تقسیم کنید. این عمل، تقسیم آخـرین مقسوم‌علیه برآخـرین باقیمانده را ادامه دهید، تا آنکه تقسیم بی‌باقیمانده شود. آخـرین مقسوم‌علیه ب.م.م. موردنظر دوعدد صحیح و مثبت اولیه است.

(الف) ب.م.م. ۵۹۱۳ و ۷۵۹۲ را، با الگوریتم اقلیدسی، پیدا کنید.

(ب) ب.م.م. ۱۸۲۷، ۲۵۲۳، و۳۲۴۸ را با الگوریتم اقلیدسی، پیدا کنید.

(ج) ثابت کنیدکه الگوریتم اقلیدسی به ب.م.م. منتهی می‌شود.

(د) فرض کنیدکه h ب.م.م. اعداد a وb باشد. نشان دهیدکه اعداد صحیحی‌مانند p وq (نه لزوماً مثبت) وجود دارند به طوری که $pa+qb=h$.

---

1. *Pseudaria*

* **پوریسم** (*Porism*) امروزه به‌عنوان گزاره‌ای گرفته می‌شود، بیانگـر شرطی که مسئلهٔ معینی را قابل حل می‌گـرداند، و در این‌صورت مسئله بینهایت جواب دارد. برای مثال، اگر r و R شعاعهای دو دایره و d فاصلهٔ بین مراکز آنها باشد، مسئلهٔ‌محاط‌کردن مثلثی در دایرهٔ به شعاع R که بردایرهٔ به‌شعاع r محیط شود، فقط و فقط وقتی قابل حل است که $R^2-d^2=2Rr$، و در این صورت بینهایت مثلث از این قبیل وجود خواهد داشت. ما از منظور اقلیدس از این واژه اطلاع دقیقی نداریم.

2. *Surface Loci* 3. *Phaenomena* 4. *Optics*

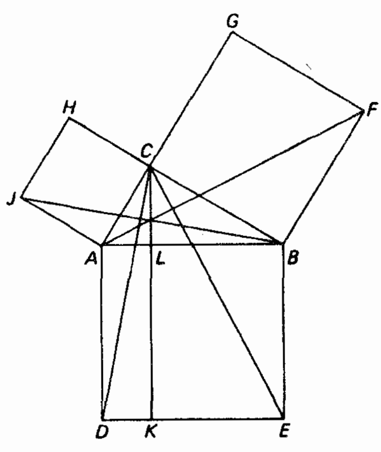
(ه) p و q را برای اعداد صحیح قسمت (الف) پیدا کنید.
(و) ثابت کنید که a و b وقتی و فقط وقتی متباین هستند که اعداد صحیحی مانند p و q وجود داشته باشند به طوری که $pa+qb=1$.

۲.۵ کاربردهای الگوریتمی اقلیدسی

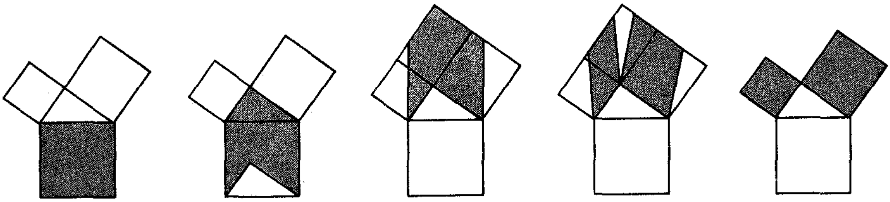
(الف) با استفاده از مطالعهٔ مسئله‌ای ۱.۵ (و) ثابت کنید که اگر p اول باشد و حاصلضرب uv را عاد کند، آنگاه p یا u را عاد می‌کند یا v را.
(ب) از قسمت (الف) قضیهٔ اصلی حساب را ثابت کنید: هر عدد صحیح بزرگتر از ۱ را می‌توان به‌طور منحصر به فرد به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کرد.

۳.۵ قضیهٔ فیثاغورس

(الف) برهان ظریف اقلیدس برای قضیهٔ فیثاغورس مبتنی برنمودار شکل ۴۱ است، که از آن گاهی با عنوان باشلق فرانسیسی، یا صندلی عروس یاد می‌شود. خلاصهٔ برهان مزبور از این قرار است: $(AC)^2 = 2\Delta JAB = 2\Delta CAD = ADKL$. به‌همین نحو، $(BC)^2 = BEKL$، و الی آخر. جزئیات برهان را کامل کنید.
(ب) نشان دهید که شکل ۴۲ چگونه برهانی پویا برای قضیهٔ فیثاغورس است، که می‌توان آن را روی پردهٔ سینما نشان داد، ودر آن مربع روی وتر به‌طور پیوسته به‌مجموع مربعات روی ساقهای مثلث قائم‌الزاویه تبدیل می‌شود.
(ج) عده‌ای از رؤسای جمهور آمریکا اندکی با ریاضیات سروکار داشته‌اند.

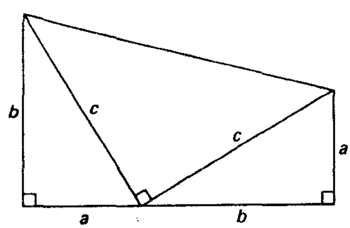


شکل ۴۱



جورج واشینگتن[1] مساح مشهوری بود، تامس جفرسون[2] سهم عمده‌ای در ترغیب آموزش ریاضیات عالی در ایالات متحده داشته است، و اعتقاد براین است که آبراهام‌لینکلن[3] با مطالعهٔ اصــول اقلیدس، منطق را آموخته است. خلاقتر از آنهــا جیمز آبــرام گارفیلد[4] (۱۸۸۱-۱۸۳۱)، بیستمین رئیس جمهور آمریکا بوده، که در ایام تحصیلش علاقهٔ شدید و مهارت نسبتاً خوبی در ریاضیات مقدماتی نشان داد. در سال ۱۸۷۶، وقتی‌که عضو مجلس نمایندگان بود و پنج سال قبل از آنکه رئیس جمهور ایالات متحده شود، بــه طور مستقل برهان بسیار زیبایی از قضیهٔ فیثاغورس را کشف کرد. وی دریك بحث ریاضی با عده‌ای دیگر از اعضای کنگره، به جواب مسئله دست یافت، و متعاقب آن برهان در مجلهٔ تعلیم و تربیت نیوانگلند[5] چاپ شد. برهــان مزبور بــه محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ شکل ۴۳ از دو طریق مختلف بستگی دارد ـ اول به وسیلهٔ فرمول محاسبهٔ مساحت ذوزنقه و دوم به عنوان مجموع سه مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ذوزنقه را می‌توان به‌آنها تقطیع کرد. این برهان را به تفصیل انجام دهید.

(د) عکس قضیهٔ فیثاغورس را بیان و آن را ثابت کنید.



شکل ۴۳

---

1. George Washington 2. Thomas Jefferson 3. Abraham Lincoln 4. James Abram Garfield 5. *New England Journal of Education*

۴.۵ مقالهٔ دوم اقلیدس

(الف) قضیهٔ II۱ اقلیدس چنین است: اگر دوخط مستقیم موجود باشند، و یکـی از آنها به تعدادی پاره‌خط دلخواه بریـده شود، مستطیلی که این دو خط مستقیم اضلاع آن باشند برابر است با مستطیلهایی که اضلاع آنها متشکل از خط مستقیم نابریده و هر یك از پاره خطها باشد. این، همتای هندسی کدام قانون آشنای جبری است؟

(ب) نشان دهید که قضایای II۱۲ و II۱۳ اساساً همان قانون کسینوسها هستند.

(ج) نشان دهید که چگونه می‌توان قضیهٔ فیثاغورس را به‌عنوان حالت‌خاصی ازقانون کسینوسها درنظر گرفت.

۵.۵ کاربردهای قضیهٔ اصلی علم حساب

قضیهٔ اصلی علم حساب می‌گویـد که، به ازای هـر عدد صحیح مفروض a، اعداد صحیح نامنفی یکتای $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$،... که تنها عده‌ای متناهی از آنها مخالف صفرنـد، وجود دارند به طوری که

$$a=۲^{a_۱}۳^{a_۲}۵^{a_۳}\ldots$$

که درآن ۲، ۳، ۵، ... اعداد اول متوالی هستند. این حکم، نمادگذاری مفیدی را به‌ذهن القا می‌کند؛ می‌نویسیم

$$a=(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$$

که درآن a_n آخرین توان غیر صفر است. مثلاً داریم $(۲,۱)=۱۲$، $(۱,۰,۰,۱)=۱۴$، $(۰,۳)=۲۷$ و $(۳,۲,۱)=۳۶۰$.

قضایای زیر را ثابت کنید:

(الف) $$ab=(a_۱+b_۱, a_۲+b_۲, \ldots)$$

(ب) b یك مقسوم‌علیه a است اگر و فقط اگر به ازای هر i، $b_i\leqslant a_i$.

(ج) عدهٔ مقسوم‌علیه‌های a عبارت است از $(a_۱+۱)(a_۲+۱)\ldots(a_n+۱)$.

(د) یك شرط لازم وکافی برای آنکه عددی مانند n مربع کامل باشد، این است که عدهٔ مقسوم‌علیه‌های n فرد باشد.

(ه) اگر $a_i\neq b_i$، از بین دوعدد a_i و b_i کوچکترین آنها را، مساوی g_i می‌گیریم و اگـر $a_i=b_i$، g_i را مساوی a_i یا b_i می‌گیریـم. در این صـورت ثـابت کنید کـه $g=(g_۱, g_۲, \ldots)$ ب.م.م. a و b است.

(و) اگر a و b متباین باشند و b، ac را عاد کند، آنگاه b، c را عاد می‌کند.

(ز) اگـر a و b متباین باشند و اگـر a، c را و b، c را عاد کند، آنگاه ab، c را عاد می‌کند.

(ح) نشان دهید که $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ گنگ هستند.

۶.۵ نظریهٔ ائودوکسوسی تناسب

(الف) با روش ائودوکسوسی و با روش کتابهای درسی جدید، قضیهٔ VI۳۳ را ثابت کنید: نسبت زوایای مرکزی دریك دایره یا دو دایرهٔ مساوی، با نسبت کمانهای جداشده به وسیلهٔ آنان برابر است.

(ب) با روش ائودوکسوسی و سپس تکمیل آن با روش کتابهای درسی جدید، قضیهٔ VI۲ را ثابت کنید: خطی که به موازات یك ضلع مثلثی رسم شود، دو ضلع دیگر را به یك نسبت تقسیم می‌کند.

(ج) قضیهٔ VI۲ را با استفاده از قضیهٔ VI۱ ثابت کنید (نگاه کنید به بخش ۵-۵).

۷.۵ چند ضلعیهای منتظم

(الف) فرض کنید $n=rs$، که در آن n، r، s، اعداد صحیح مثبت‌اند. نشان دهید که اگر یك n ضلعی منتظم با ابزارهای اقلیدسی قابل ساختن باشد، آنگاه هر r ضلعی وهر s ضلعی نیز چنین است.

(ب) نشان دهید که ساختن ۲۷ ضلعی منتظم با ابزارهای اقلیدسی غیر ممکن است.

(ج) فرض کنید که r و s اعداد صحیح مثبت متباین باشند و r ضلعی منتظم و s ضلعی منتظم نیز بدین طریق قابل ساختن است. نشان دهید که یك $r\,s$ ضلعی منتظم نیز بدین طریق قابل ساختن است.

(د) از چند ضلعیهای منتظم با کمتر از ۲۰ ضلع، چند ضلعیهای منتظمی با ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷ ضلع را می‌توان با ابزارهای اقلیدسی ترسیم کرد. این چند ضلعیها را، به استثنای ۱۷ ضلعی منتظم، عملا بسازید.

(ه) یك ۱۷ ضلعی منتظم به روش مذکور درمقالهٔ ه. و. ریچموند در سالنامهٔ ریاضی (سال ۱۹۰۹) رسم کنید.[1]

فرض کنید که OA و OB دوشعاع متعامد یك دایرهٔ مفروض به مرکز O باشند. C را بر OB چنان بیابید که $OC=OB/۴$. حال D را بر OA طوری پیدا کنید که (زاویهٔ OCD) $=$ (زاویهٔ OCA)/۴. سپس E را بر امتداد AO چنان بیابید که (زاویهٔ DCE) $=۴۵^\circ$. دایره‌ای به قطر AE رسم کنید که OB را در F قطع کند، و سپس دایرهٔ $D(F)$ را رسم کنید تا OA وامتداد AO را در $G_۴$ و $G_۶$ قطع کند. از نقاط $G_۴$ و $G_۶$ عمودهایی بر OA خارج کنید تا دایرهٔ مفروض را در $P_۴$ و $P_۶$ قطع کند. نقاط اخیر چهارمین و ششمین رئوس ۱۷ ضلعیی هستند که اولین رأس آن A است.

(و) قضیهٔ XIII۱۰ را ثابت کنید: ضلعی از یك پنج ضلعی منتظم، از یك شش ضلعی منتظم، و از یك ده ضلعی منتظم محاط در یك دایره، تشکیل یك مثلث قائم‌الزاویه می‌دهند.

---

1. H. W. Richmond, "Construct a Regular Polygon of Seventeen Sides," *Mathematische Annalen*, 67 (1909, p. 459).

(ز) نشان دهیدکه در یك مثلث قائم‌الزاویه باساقهای ۳ و ۱۶ زاویهٔ حادهٔ کوچکتر خیلی نزدیك به نصف زاویهٔ مرکزی مقابل به‌یك ضلع ۱۷ ضلعی منتظم است. با استفاده از این حقیقت، یك ساختمان تقریبی اقلیدسی برای ۱۷ ضلعی منتظم ارائه دهید.

۸.۵ مجموع زوایای یك مثلث

با فرض تساوی زوایای متبادل داخلی تشکیل شده به وسیلهٔ خط موربی که یك زوج خط موازی را قطع می‌کند، ثابت کنیدکه:

(الف) مجموع زوایای یك مثلث برابر است با یك زاویهٔ نیمصفحه.

(ب) مجموع زوایای داخلی یك n ضلعی محدب، برابر است با $n-2$ زاویهٔ نیمصفحه.

۹.۵ چند قیاس راجع به مساحتها

با فرض اینکه مساحت یك مستطیل با حاصلضرب ابعادآن داده می‌شود، سلسله‌قضایای زیر را ثابت کنید.

(الف) مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصلضرب قاعده در ارتفاع آن.

(ب) مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب یکی از اضلاع در ارتفاع وارد بر آن.

(ج) مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصلضرب دو ساق آن.

(د) مساحت مثلث برابراست با نصف حاصلضرب محیط درشعاع دایرهٔ محاطی آن.

(ه) مساحت ذوزنقه برابراست باحاصلضرب ارتفاع درنصف مجموع قاعده‌های آن.

(و) مساحت چند ضلعی منتظم برابر است با نصف حاصلضرب محیط درسهم آن.

(ز) مساحت دایره برابر است با نصف حاصلضرب محیط در شعاع آن.

۱۰.۵ چند قیاس راجع به زوایا

فرض کنید: (۱) زاویهٔ مرکزی دایره به وسیلهٔ کمان مقابل به آن اندازه گرفته می‌شود؛ (۲) مجموع زوایای یك مثلث برابراست با یك زاویهٔ نیمصفحه؛ (۳) زوایای مجاور به قاعدهٔ هرمثلث متساوی‌الساقین برابرند؛ (۴) مماس بریك دایره، بر شعاعی که به‌نقطهٔ تماس رسم شود، عمود است. سلسله قضایای زیر را ثابت کنید:

(الف) هرزاویهٔخارجی‌یك مثلث برابراست بامجموع دوزاویهٔ داخلی‌غیرمجاورآن.

(ب) اندازهٔ هرزاویهٔ محاطی دریك دایره با نصف قوس مقابل برابر است.

(ج) هر زاویه محاط در نیمدایره قائمه است.

(د) اندازهٔ زاویه‌ای که توسط دو وتر متقاطع در یك دایره تشکیل می‌شود با نصف

مجموع دو قوس مقابل برابر است.

(ه) اندازهٔ زاویه‌ای که از تلاقی دو قاطع در یك دایره به‌وجود می‌آید با نصف تفاضل دو قوس مقابل آن برابر است.

(و) اندازهٔ زاویه‌ای که ازمماس بریك دایره و وتر مار بر نقطهٔ تماس تشکیل می‌شود بانصف قوس مقابل برابر است.

(ز) زاویه‌ای‌که از یك خط مماس و قاطعی بریك دایره تشکیل می‌شود، با نصف تفاضل دو قوس مقابل اندازه گرفته می‌شود.

(ح) زاویه‌ای‌که از دو مماس متقاطع بر یك دایره تشکیل می‌شود، با نصف تفاضل دوقوس مقابل اندازه گرفته می‌شود.

۱۱.۵ اصول

(الف) اگر می‌خواستید دوتا از قضایای زیر را به عنوان «اصول» در یك درس هندسهٔ مسطحه انتخاب‌کنید، کدامها را انتخاب می‌کردید؟

۱. سه ارتفاع یك مثلث، که در صورت لزوم امتداد داده می‌شوند، در یك نقطه متلاقی هستند.

۲. مجموع سه زاویهٔ یك مثلث برابر است با دو زاویهٔ قائمه.

۳. اندازهٔ زاویهٔ محاط در یك دایره با نصف قوس مقابل به آن برابر است.

۴. طولهای مماسهای مرسوم از هرنقطهٔ واقع برامتداد وتر مشترك دو دایرهٔ متقاطع برابرند.

(ب) یك معلم هندسه در نظر دارد که مبحث متوازی‌الاضلاعها را در کلاس خود تدریس‌کند. بعد از تعریف متوازی‌الاضلاع، این معلم چه قضایایی دربارهٔ متوازی‌الاضلاع را به عنوان «اصول» باید عرضه کند؟

(ج) یك معلم هندسه بـه عنوان مقدمه‌ای برتدریس مبحث اشکال متشابه، یك یا دو جلسه درس دربارهٔ نظریهٔ تناسبها ارائه می‌کند. وی چه قضایایی را باید به‌عنوان «اصول» این مبحث برگزیند، و به چه ترتیبی باید آنها را تنظیم کند؟

۱۲.۵ داده‌ها

فرض‌کنید‌که C، B، A زوایای یك‌مثلث؛ c، b، a اضلاع مقابل به‌آنها؛ h_a، h_b، h_c ارتفاعهای وارد براین اضلاع؛ m_a، m_b، m_c میانه‌های این اضلاع؛ t_a، t_b، t_c نیمسازهای مرسوم براین اضلاع؛ r و R شعاعهای دوایر محاطی و محیطی؛ b_a و c_a تصویرهای اضلاع b و c بر a، و r_a شعاع دایرهٔ مماس برضلع a و امتدادهای اضلاع b و c، باشند. نشان دهیدکه هریك از اینها که در زیر می‌آیند، تشکیل داده‌ای را برای یك مثلث می‌دهند.

(الف) C ،B ،A (ب) c/a ،b/c ،a/b

(ج) b، A، h_c (د) $b+c$، A، h_b+h_c

(ه) $b-c$، A، h_c-h_b (و) h_a، t_a، $B-C$

(ز) h_a، m_a، b_a-c_a (ح) R، $B-C$، b_a-c_a

(ط) R، r_a-r، a (ی) h_a، r، r_a

۱۳۰۵ رسم شکلها با استفاده از داده‌ها

یك داده در صورتی می‌تواند درحل یك مسئلهٔ ترسیمی مفید باشد که هر یك از اجزای داده را بتوان از سایر اجزا ساخت. مثلثی را درصورت مفروض بودن اجزای زیر رسم کنید (برای نمادگذاری نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲۰۵):

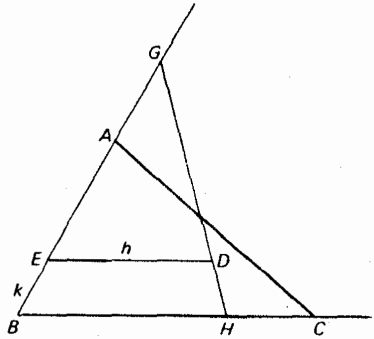
(الف) a، A، h_b+h_c

(ب) $a-b$، h_b+h_c، A (ج) R، r، h_a

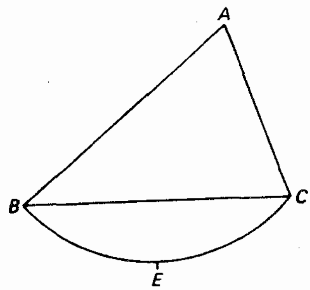
۱۴۰۵ تقسیمات

(الف) جزئیات راه حل زیررا (که اساساً در اثر در باب تقسیم اشکال اقلیدس یافت می‌شود) کامل کنید. این حل مربوط است به مسئلهٔ رسم یك خط مستقیم GH که بر نقطهٔ مفروض D در داخل مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع BA و BC را به ترتیب در G و H قطع می‌کند، و به طوری که مساحتهای مثلثهای GBH و ABC برابر باشند (نگاه کنید به شکل ۴۴).

DE را به‌موازات CB رسم کنیدتا AB را در E قطع کند. طولهای DE و EB را به ترتیب به وسیلهٔ h و k، وطول GB را با x نشان‌دهید. دراین صورت $x(BH)=ac$. اما $BH/h=x/(x-k)$. باحذف BH، معادلهٔ $x^2-mx+mk=0$ را به دست می‌آوریم، که در آن $m=ac/h$، و الی آخر.



شکل ۴۴



شکل ۴۵

(ب) مسئلهٔ زیر را، که قضیهٔ ۲۸ درکتاب درباب تقسیم اشکال اقلیدس است، حل کنید: در شکل ۴۵، سطح $ABEC$ را به وسیلهٔ خط مستقیمی که از E، نقطهٔ وسط قوس مستدیر BC می‌گذرد، به دونیم کنید.

(ج) درکتاب درباب تقسیم اشکال اقلیدس مسئلهٔ دونیم کردن سطح ذوزنقهٔ مفروضی توسط خطی به موازات قاعدهٔ ذوزنقه مطرح می‌شود. این مسئله را با ستاره و پرگار حل کنید.

عنوان مقاله

۱/۵ مبدأ روش اصل موضوعی: توضیحهای تکاملی و انقلابی.
۲/۵ نظر ارسطو و پروکلوس دربارهٔ روش اصل موضوعی.
۳/۵ مباحث اصل موضوعی مادی درمقابل مباحث اصل موضوعی صوری.
۴/۵ سرگذشت، آثار، و تأثیر اقلیدس.
۵/۵ مراجع اصول اقلیدس.
۶/۵ جبر در اصول اقلیدس.
۷/۵ نظریهٔ اعداد در اصول اقلیدس.
۸/۵ کاربردهای نظریهٔ ائودوکسوسی تناسب در هندسهٔ مسطحه.
۹/۵ آیا راهی شاهانه در هندسه وجود دارد؟
۱۰/۵ مشهورترین تک‌سخن در تاریخ ریاضیات (اصل موضوع توازی اقلیدس).

کتابنامه

AABOE, ASGER, *Episodes from the Early History of Mathematics.* (New Mathematical Library, no. 13.) New York: Random House and L. W. Singer, 1964.
ARCHIBALD, R. C., *Euclid's Book on Division of Figures.* New York: Cambridge University Press, 1915.
BELL, E. T., *The Magic of Numbers.* New York: McGraw-Hill, 1946.

BUNT, L. N. H.; P. S. JONES; and J. D. BEDIENT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
COHEN, M. R., and I. E. DRABKIN, *A Source Book in Greek Science*. New York: McGraw-Hill, 1948. Reprinted by Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958.
COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
DANTZIG, TOBIAS, *The Bequest of the Greeks*. New York: Charles Scribner, 1955.
DAVIS, H. T., *Alexandria, the Golden City*. 2 vols. Evanston, Ill.: Principia Press of Illinois, 1957.
DUNNINGTON, G. W., *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. New York: Hafner, 1955.
EVES, HOWARD, and C. V. NEWSOM, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. rev. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
FORDER, H. G., *The Foundations of Euclidean Geometry*. New York: Cambridge University Press, 1927.
FRANKLAND, W. B., *The First Book of Euclid's Elements with a Commentary Based Principally upon that of Proclus Diadochus*. New York: Cambridge University Press, 1905.
GOW, JAMES, *A Short History of Greek Mathematics*. New York: Hafner, 1923.
HEATH, T. L., *History of Greek Mathematics*. vol. 1, New York: Oxford University Press, 1921. Reprinted by Dover, 1981.
———, *A Manual of Greek Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1931.
———, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 2d ed., 3 vols. New York: Cambridge University Press, 1926. Reprinted by Dover, 1956.
JAMES, GLENN, ed., *The Tree of Mathematics*. Pacoima, Calif.: The Digest Press, 1957.
PROCLUS, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Translated by G. R. Morrow. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970.
SARTON, GEORGE, *Ancient Science and Modern Civilization*. Lincoln, Neb.: The University of Nebraska Press, 1954.
SMITH, D. E., *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.
THOMAS, IVOR, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. 2 vols. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939–41.
THOMAS-STANFORD, CHARLES, *Early Editions of Euclid's Elements*. London: Bibliographical Society, 1926.
VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening*. Translated by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961. Paperback ed. New York: John Wiley, 1963.

۶

ریاضیات یونان پس از اقلیدس

۱ـ۶ وضع تاریخی

شهر اسکندریه از مزایای زیادی برخوردار بود، ویکی از این امتیازات رشك‌برانگیز در صلح پایدار بودن آن با بقیهٔ مناطق جهان بود. اگرچه این شهر درطول سلطنت بطالسه، که تقریباً ۳۰۰ سال دوام آورد، گهگاه دستخوش نبردهای قدرت داخلی شد، اما از ستیزهای خارجی مصون ماند. این وضع، پس‌ازیك دوران کوتاه درگیری که طی آن مصر به صورت قسمتی ازامپراطوری روم درآمد، خاتمه یافت. ازآن پس پاکس رومانا[1] در این سرزمین مستقر گردید. تعجب‌آور نیست که اسکندریه به صورت مأوایی برای فضلا درآمد و درمدت بیش ازنیم هزاره آن همه فضایل علمی دنیای کهن، از آن شهر نشأت گرفت. تقریباً هر ریاضیدان عهد عتیقی که دراین فصل مورد بحث قرارمی گیرد، دردانشگاه اسکندریه استاد یاشاگرد بوده است.

در دورهٔ پایانی اعصار قدیم تسلط با رومیان بود. در سال ۲۱۲ق.م.، سیراکوز[2] به دنبال محاصرهٔ رومیان تن به تسلیم داد؛ درسال ۱۴۶ق.م. کارتاژ[3] در مقابل قدرت امپراطوری روم سقوط کرد، و در همان سال، آخرین شهریونانی، کورنت[4]، نیز سقوط نمود، و یونان به صورت استانی از امپراطوری روم درآمد. بین‌النهرین تاسال ۶۵ق.م.

---

۱. پاکس رومانا (Pax Romana) یا صلح رومی مواد قراردادی بودکه توسط روم برهریك‌از کشورهای تحت فرمان اعمال می‌شد.ــم.

2. Syracuse 3. Carthage 4. Corinth

فتح نشد، و مصر تا سال ۳۰ق.م. تحت ادارهٔ بطالسه باقی ماند. تمدن یونانی در زندگی روم نفوذ کرد، و مسیحیت، علی‌الخصوص در بین بردگان و فقرا، رو به گسترش نهاد. حکمرانان رومی مالیاتهای سنگینی می‌گرفتند، اما از سایر جهات در سازمان اقتصادی مستعمرات شرقی دخالتی نمی‌کردند.

کنستانتین[1] کبیر اولین امپراطور روم بود که به مسیحیت گروید و آن را دین رسمی اعلام نمود. در ۳۳۰ب.م.، کنستانتین پایتخت خودرا بـه بیزانس یا بوزانتیوم[2]، که نام جدید کنستانتینوپول[3] [قسطنطنیه] را بر آن نهاد، منتقل کرد. در ۳۹۵ب.م. امپراطوری روم به امپراطوریهای شرقی وغربی تقسیم شد، که یونان پاره‌ای ازقسمت شرقی آن بود.

ساخت اقتصادی هردو امپراطوری اساساً مبتنی بر کشاورزی، بااستفادهٔ فزاینده از کار برده‌ها بود. چنان شرایطی مانعی دربرابرکار خلاق علمی بود و افولی تدریجی‌درتفکر سازنده آغاز، گردید، که درقسمتهای غربی، که در آنجا بردگی در مقیاس وسیعتری به کار گرفته می‌شد، مشخصتر بود. افول نهایی بازاربرده، با تأثیر اسفبار آن براقتصاد روم، مواجه باتنزل علم به یك سطح متوسط بود. مدرسهٔ اسکندریه تدریجاً، همـراه با فروریزی جامعهٔ باستان، رنگ باخت. تفکرخلاق جای خود را به انباشتن وتفسیرمطالب قبلی داد. روزهای تیره وتاری درپی‌جنگ مسیحیت باکفر سپری‌شد، وسرانجام، در ۶۴۱ب.م. اسکندریه به‌دست اعراب تصرف شد.

۶ـ۲ ارشمیدس

یکی از بزرگترین ریاضیدانان همهٔ اعصار، و بـه یقین بـزرگترین آنان در دوران باستان، ارشمیدس ، از اهالـی شهریونانی سیراکوز واقع درجزیرهٔ سیسیل بود. وی در حدود سال ۲۸۷ق.م. به دنیا آمد ودر زمان غارت سیراکوز به دست رومیـان، در سال ۲۱۲ق.م. کشته شد. اوپسریك منجم و مورد التفات (وحتی شایـد ازمنسوبان) شاه هیرون[4] سیراکـوزی بود. بنابه روایتی وی بخشی از ایام عمررا در مصر، و به احتمال قـوی در دانشگاه اسکندریه، سپری کرد. زیرا، کونون[5] ودوسیتئوس[6] و اراتستن را در زمرهٔ دوستان خود به حساب آورده، که دو نفر اول از اخلاف اقلیدس بودند، و آخـری یك کتابدار دانشگاه بود. بسیاری ازکشفیات ریاضی ارشمیدس درخطاب به این افراد نوشته شده‌اند.

مورخین رومی داستانهای جالبی دربارهٔ ارشمیدس نقل کـرده‌اند. در این میان از همه آشناتر توصیفاتی از تدابیر استادانهٔ وی برای کمك به دفاع از سیراکوز است در مقابل محاصره‌ای که به وسیلهٔ‌سرداررومی، مارسلوس[7] رهبری می‌شد. ازجملهٔ این ابداعات وی منجنیقهایی بودند بابردهای قابل‌تنظیم، سنگ‌افکنهای متحرك برای انداختن وزنه‌های سنگین برروی کشتیهای دشمن وقتی‌که خیلی به دیوار شهرنزدیك می‌شدند، و جرثقیلهای

---

1. Constantine 2. Byzantium 3. Constantinople
4. Hieron 5. Conon 6. Dositheus 7. Marcellus

چنگک‌دار بزرگی که کشتیهای دشمن را از روی آب بلند می‌کردند. این داستان که وی از آینه‌های محرقهٔ بزرگی برای به آتش کشیدن کشتیهای دشمن استفاده کرده، بعدها عنوان شده است، اما می‌تواند درست باشد. داستانی هم در این‌باره وجود دارد که وی چگونه براین گفتهٔ خود که «جایی برای ایستادن به من بدهید تازمین را بلند کنم»، اعتبار بخشید. به این ترتیب که کشتیی با بارسنگین راکه قبلا جمع کثیری ازکارگران به زحمت قادر به کشیدن آن به ساحل بودند، یك تنه و بدون کوشش زیاد، بااستفاده از قرقره‌های مرکب حرکت داد.

ظاهراً ارشمیدس از یك تمرکز ذهنی قدرتمندی برخوردار بوده، و داستانهایی از بی‌خبری‌او ازپیرامون خود، وقتی که به‌مسئله‌ای اشتغال خاطرداشته، گفته‌شده‌است. نمونه‌ای ازاینهاکه مکرراً گفته شده، تاج شاه هیرون و زرگرمورد سوء ظن است. گویا شاه هیرون تاجی زرین داشته ونگران ازآنکه مبادا درساختن آن به طورپنهانی نقره به‌کار رفته‌باشد، مطلب را بـه ارشمیدس ارجاع می‌کند، که او، روزی در حال استحمام، باکشف اولین قانون ئیدروستاتیك به راه حل مسئله دست می‌یابد. بافراموش کردن اینکه جامه برتن کند، ازحمام درمی‌آیـد و در خیابانها به سوی خانهٔ خود می‌دود، در حالی‌که فریـاد می‌زده «ایورکا[1]، ایورکا!»، (یافتم، یافتم!).

ارشمیدس قسمت زیادی از کارهندسهٔ خود را بـه‌کمك اشکال مرسوم در خاکستر یا روغن بعد ازاستحمام که برتن خود می‌مالیده، انجام می‌داد. در واقع، نقل شده است که اجل وی به‌وقت تاراج سیراکوز درحالی فرا رسید که ذهنش مشغول نموداری رسم شده بریك سینی شن بوده است. مطابق یکـی ازاین روایات، وی بـه یك رومی در حال چپاول فرمان می‌دهد تا ازروی نمودار او کنار برود، که در این هنگام غارتگر بـه خشم آمده نیزه‌اش را دربدن مرد سالخورده فرو می‌کند.

وجود تجهیزات دفاعی ابداعی ارشمیدس باعث شدکه سیراکوز نزدیك سه سال در مقابل محاصـرهٔ رومیان تاب بیاورد. خطوط دفاعـی شهر سرانجام وقتی شکسته شد کـه سیراکوزیهای مغرور، طی جشنی در داخل شهر، از نگهبانی غافل ماندند. در مارسلوس نسبت به‌دشمن نابغه‌اش حس احترام شدیدی‌به‌وجودآمده بود، وسرانجام وقتی که به‌حصار شهررخنه‌کرد، اکیداً دستورداد که گـزندی به ریاضیدان نامی شهر وارد نیاید. دریافت خبر مرگ ارشمیدس، مارسلوس را سخت اندوهگیـن کرد و با عزت و احترام زیاد این دانشمند برجسته رابه خاك سپرد. ارشمیدس‌که به حق به یکی‌ازکشفیات هندسی‌عظیم خود (که بعداً شرح آن خواهد آمد) می‌بالید، علاقهٔ خود را به‌حك کره ومنشور مستدیر قائمی محاط درآن برسنگ قبـرش ابراز کـرده بود. مارسلوس دستور داد که وصیت او به جا آورده شود.

سالها بعد، در ۷۵ق.م. وقتی که کیکرو[2] [سیسرون] به عنوان خزانه‌دار دولت روم

---

1. eureka 2. Cicero

درسیسیل خدمت می‌کرد، در مورد محل گور ارشمیدس به پرس‌وجو پرداخت. برای او شگفت‌آور بود که سیراکوزیها چیزی دربارهٔ آن نمی‌دانستند. کیکرو با تلاش فراوان همهٔ یادواره‌ها را در گورستان شهر، که تعدادشان بسیار زیاد بود، بررسی کرد. بالاخره متوجه ستون کوچکی شد که کمی بالاتر از بته‌ها و خاربنهایی که روی آن را پوشانده بودند، قرار داشت و شکل کره و استوانهٔ محاط در آن برروی آن بود. بدین‌ترتیب بود که قبر مدتها در بوتهٔ غفلت و فراموشی‌ماندهٔ بزرگمرد سیراکوز پیدا شد. کیکرو مردانی را برای درو کردن خاروخاشاك گماشت و دستور داد که آن اطراف را بعد از آن به همان صورت نگهدارند. این را که چنین تکریمی تاچه زمانی استمرار داشته، نمی‌دانیم، زیرا دوباره قبر ارشمیدس کاملا ناپدید شده بود. باز، درسال ۱۹۶۵، موقعی که برای بنای یك هتل در سیراکوز، خاکبرداری می‌شد، دربین تودهٔ خاك درون بیل مکانیکی سنگ قبری مشاهده شد که کره و استوانه‌ای محاط در آن برآن حك شده بود. بدین‌ترتیب قبرناپدید شده یك بار دیگر پیدا شد.

در اشاره به مرگ ارشمیدس، سرویلیام روان همیلتن[1] خاطرنشان‌کرده است که «آیاکسی هست که شهرت ارشمیدس را برشهرت فاتحش مارسلوس ترجیح ندهد؟»، و آلفردنورث وایتهد[2] در همین مضمون گفته است که «هیچ رومی هرگز در حال اندیشه بر یك تصویر هندسی جان نباخته است». گ. ه. هاردی، ریاضیدان انگلیسی قرن بیستم گفته است که «وقتی هم اخیلوس[3] [آشیل] فراموش شده باشد، باز ارشمیدس در یادها خواهد بود، زیرا زبانها می‌میرند ولی اندیشه‌های ریاضی زنده می‌مانند». ولتر[4] به همین نحوخاطرنشان کرده است که «ارشمیدس مخیله‌ای قویتر از هومر داشته است».

آثار ارشمیدس شاهکارهایی از بیان ریاضی‌اند و تاحدقابل توجهی به مقالات مندرج در مجله‌های ریاضی امروزی شباهت دارند. این‌آثار باپرداختی عالی و باایجازدر کلام نوشته شده‌اند و خلاقیت عظیم، مهارت در محاسبه، و دقت در استدلال را به نمایش می‌گذارند. حدود ده رساله به دست ما رسیده است، و نشانه‌هایی از آثار مفقود وی وجود دارند. احتمالا مهمترین سهمی که این آثار در ریاضیات دارند بسط اولیهٔ چند روش حساب انتگرال است. دریکی از فصول آتی [جلد دوم کتاب] به این مطلب بازمی گردیم.

سه اثر از آثار باقیماندهٔ ارشمیدس، به هندسهٔ مسطحه اختصاص دارند. این آثار عبارت‌اند از اندازه‌گیری دایره[5]، تربیع سهمی[6]، و در باب مارپیچها[7]. در اولین این آثار بود که ارشمیدس روش کلاسیك محاسبهٔ π را فتح باب کرد، که قبلا دربخش ۴-۸ به توصیف آن پرداخته‌ایم. دراثر دوم، که مشتمل بر ۲۴ قضیه است، نشان داده می‌شود که مساحت یك قطعهٔ سهموی عبارت از چهارسوم مساحت مثلث محاط شده‌ای است که‌دارای

1. Sir William Rowan Hamilton 2. Alfred North Whitehead
3. Aeschylus 4. Voltaire 5. *Measurement of a Circle*
6. *Quadrature of the Parabola* 7. *On Spirals*

ارشمیدس

(کولور سرویس)[1]

همان قاعدهٔ سهموی بوده و رأس متقابل آن در نقطه‌ای است که در آن مماس با قاعده موازی است. این امر متضمن مجموعیابی یك سری هندسی همگراست. اثر سوم شامل ۲۸ قضیه است که به خواص منحنیی اختصاص یافته است که امروزه به‌مارپیچ ارشمیدس معروف و معادلهٔ قطبی آن $r=k\theta$ است. به ویژه، مساحت محصور به وسیلهٔ منحنی و دوبردار شعاعی اساساً به همان صورتی به دست آمده است که امروزه در تمرینهای حساب دیفرانسیل و انتگرال عمل می‌شود. اشاراتی بربسیاری ازآثار مفقود ارشمیدس دربارهٔ هندسهٔ مسطحه وجود دارد و دلیلی در دست است برای اینکه باورکنیم که بعضی از قضایای این آثار در لیبر اسومپتوروم[2] [مأخوذات]، مجموعه‌ای که از طریق اعراب به‌ما رسیده، حفظ شده است (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۴.۶). یك نویسندهٔ‌عرب [= عربی نویس[3]] براین ادعاست که ارشمیدس کاشف فرمول مشهور،

$$K=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

برای مساحت یك مثلث بر حسب سه ضلع آن است. این فرمول سابق براین به هرون اسکندرانی منسوب می‌شده است.

دو اثرازآثار باقیماندهٔ ارشمیدس به هندسهٔ سه‌بعدی اختصاص دارند، که عبارت‌اند از درباب‌کره و استوانه[4] و درباب شبه مخروطهاوشبه‌کره‌ها[5]. دراولین‌این‌دو، که‌در دومقاله نگاشته‌شده و شامل ۶۰قضیه است، قضایایی ظاهرمی‌شوند که مساحت کره ومنطقه‌ای با یك

---

1. Culver Service
2. *Liber assumptorum*
۳. منظور نویسندهٔ کتاب، ابوریحان بیرونی ایرانی است. ـم.
4. *On the Sphere and Cylinder*
5. *On Conoids and Spheroids*

قاعده [عرقچین] وحجم کره و قطعه‌ای با یك قاعده را می‌دهند (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۲.۶). در مقالهٔ دوم مسئلهٔ تقسیم کره به وسیلهٔ صفحه‌ای به دو قطعه که حجم آنها به یك نسبت مفروض باشند، دیده می‌شود. این مسئله به معادلهٔ درجهٔ سومی منجر می‌شود که حل آن درمتن، به صورتی که به دست مارسیده است، دیده نمی‌شود، ولی توسط ائوتوکیوس در یکی از قطعات آثار ارشمیدس پیدا شده است. بحثی دربارهٔ شرایطی که تحت آنها معادلهٔ درجهٔ سوم دارای یك ریشهٔ حقیقی و مثبت باشد، وجود دارد. این گونه ملاحظات تا متجاوز بر یك هزار سال بعد در ریاضیات اروپایی دیگر ظاهر نمی‌شوند. رساله با دو قضیهٔ جالب به پایان می‌رسد. (۱) اگر V و V' و S و S' حجمهای قطعه‌ها و مساحتهای منطقه‌هایی باشند که از بریدن کره‌ای به وسیلهٔ یك صفحهٔ غیرقطری به وجود می‌آیند، به طوری که V و S به تکهٔ بزرگتر مربوط باشند، دراین صورت

$$S^{۳/۲}:S'^{۳/۲}<V:V'<S^{۲}:S'^{۲}.$$

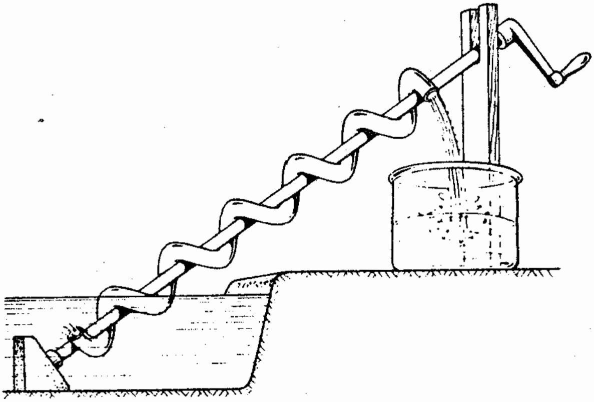
(۲) از بین همهٔ قطعه‌های کروی با یك قاعده که دارای مساحات منطقوی برابر باشند، نیمکره بزرگترین حجم را دارد. رسالهٔ درباب شبه مخروطها و شبه‌کره‌ها مشتمل بر ۴۰ قضیه است، که عمدتاً به تفحصی دربارهٔ احجام اجسام درجهٔ دوم می‌پردازد. پاپوس ۱۳ چندوجهی نیمه‌منتظم را به ارشمیدس منسوب نموده، اما متأسفانه شرح خود ارشمیدس از آنها مفقود شده است.*

ارشمیدس دو مقالهٔ مربوط به هم دربارهٔ حساب نوشته، که یکی از آنها در دست نیست. مقالهٔ موجود، تحت عنوان ماسه شمار[1]، درخطاب به گلون[2]، پسرشاه هیرون، است، و یك دستگاه حسابی برای نمایش اعداد بزرگ، در یافتن حدبالایی برای تعداد دانه‌های شنی که کره‌ای به مرکز زمین و به شعاع زمین تا خورشید را پرنماید، به کار می‌برد. از میان نکات منقول دربارهٔ نجوم دراینجاست که درمی‌یابیم که آریستارخوس[3] (حدود ۲۳۰-۳۱۰ ق.م.) نظریهٔ کپرنیکی منظومهٔ شمسی را عرضه کرده بوده است. علاوه براین دو مقاله راجع به حساب، مسئلهٔ موسوم به مسئلهٔ گاوها[4] را داریم، که از تعارفات موجود در آن چنین به نظر می‌رسد که توسط ارشمیدس در خطاب به اراتستن نوشته شده است. مسئلهٔ مزبور ازمسائل مشکل معادلات سیاله و متضمن هشت مجهول بامقادیر صحیح است که به وسیلهٔ هفت معادلهٔ خطی به‌هم مربوط شده‌اند، بااین دوشرط اضافی که مجموع یك جفت از مجهولها یك مربع کامل است درحالی که مجموع یك جفت دیگر، یك عدد مثلثی می‌باشد. بدون دو شرط اضافی کوچکترین مقادیر مجهولات اعدادی هستند که سر به

---

* الگوهای ساختمان برای اجسام ارشمیدسی را می‌توان در
Miles C. Hartley, *Patterns of Polyhedra*, rev. ed.
یافت.

1. *Sand Reckoner* 2. Gelon 3. Aristarchus
4. Cattle Problem



نقشهٔ یك پیچ آبی ارشمیدسی

میلیونها می‌زنند، و باوجود دو شرط اضافی یکی از مجهولات عددی است با بیش از ۲۰۶۵۰۰ رقم!

دو رساله دربارهٔ ریاضیات کاربردی از ارشمیدس دردست است، در باب تعادل در صفحه[1] و در باب اجسام شناور[2]. اولین این دو، در دومجلد و شامل ۲۵ قضیه است. در اینجا، ضمن مطالعه‌ای اصل موضوعی، خواص ابتدایی مراکز هندسی وتعیین مراکزهندسی سطوح مسطحهٔ مختلفی دیده می‌شوند، وبا یافتن مرکز یك قطعهٔ سهموی و سطحی محدود به یك سهمی و دو وتر موازی خاتمه می‌یابد. کتاب در باب اجسام شناور نیز در دو مقاله است، که شامل ۱۹ قضیه بوده و اولین کاربرد ریاضیات درئیدروستاتیك می‌باشد. این رساله، که مبتنی بردواصل موضوع است، ابتدا آن قوانین آشنای ئیدروستاتیك راکه امروزه دریك درس مقدماتی فیزیك با آن روبرو می‌شویم، بسط می‌دهد و سپس چند مسئلهٔ نسبتاً مشکل را مورد تأمل قرار می‌دهد وباتنحص جالب توجهی‌از وضعیتهای سکون و پایداری قطعهٔ قائمی از یك سهمیوار دوار شناور دریك مایع پایان می‌یابد. ارشمیدس رسالات دیگری هم دربارهٔ فیزیك ریاضی نوشته است، که فعلا در دست نیستند. به عنوان مثال پاپوس ازاثر دباب اهرمها[3] یاد می‌کند، و تئون اسکندرانی قضیه‌ای را از اثردیگری که محتوای آن دربارهٔ خواص آینه‌ها بوده، نقل می‌کند. شاید چنین بوده‌که در اصل اثر بزرگتری از ارشمیدس وجود داشته که دو مقالهٔ درباب تعادل در صفحه تنها بخشی از آن را تشکیل می‌داده‌اند. تازمان نگارش اثر سیمون استوین[4] در قرن شانزدهم علم استاتیك و نظریهٔ ئیدروستاتیك ازحدی‌که ارشمیدس بدان رسیده بود، چندان فراترنرفت.

---

1. *On Plane Equilibriums* 2. *On Floating Bodies*
3. *On Levers* 4. Simon Stevin

یکی از مهیجترین کشفیات اعصار جدید در تاریخ ریاضیات، کشف رسالهٔ گمشدهٔ ارشمیدس تحت عنوان «روش»[1]، توسط هایبرگ[2]، در قسطنطنیه بود که درسال ۱۹۰۶ روی داد. این رساله به‌صورت نامه‌ای است خطاب به اراتستن و اهمیت آن به دلیل اطلاعی است که دربارهٔ یك «روش» که ارشمیدس در کشف بسیاری ازقضایای خود از آن استفاده کرده، به دست می‌دهد. اگرچه «روش» را امروزه می‌توان به وسیلهٔ اعمال انتگرالگیری امروزی دقیقتر نمود، ارشمیدس «روش» را تنها برای کشف قضایایی به کاربرد که بعداً بااستفاده از روش افنا آنها را به‌طور دقیقتر ثابت کرد. ازآنجاکه «روش» با مفاهیم حساب انتگرال ارتباط خیلی نزدیك دارد، بررسی آن‌را به‌یکی ازفصول آتی [جلد دوم]، که به‌منشأ و توسعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال اختصاص دارد، واگذار می‌کنیم.

۶-۳ اراتستن

اراتستن از اهالی کورنه در ساحل جنوبی دریای مدیترانه و تنها چند سال جوانتر از ارشمیدس بود. وی سالهای زیادی از اوایل عمر را در آتن گذراند و، وقتی حدود ۴۰ سال داشت، توسط بطلمیوس سوم فرمانروای مصر برای رفتن به اسکندریه به‌عنوان معلم پسر وی و برای خدمت به عنوان سرکتابدار در دانشگاه آنجا دعوت شد. گفته‌اندکه در سنین پیری، در حدود سال ۱۹۴ق.م. وی از بیماری آماس چشم کورشد و با گرسنگی کشیدن عمدی خود را کشت.

اراتستن به طور استثنایی در همهٔ رشته‌های دانش عصر خود صاحب استعداد بود. وی به عنوان ریاضیدان، منجم، مورخ، فیلسوف، شاعر، و ورزشکار متشخص بود. گفته‌اند که دانشجویان دانشگاه اسکندریه وی را پنتاتلوس[3]، یعنی قهرمان پنج رشتهٔ ورزشی می‌خواندند. اورا بتا[4] نیز نامیده‌اند، ونظراتی در خصوص ریشهٔ احتمالی این لقب، داده شده است. عده‌ای براین باورندکه علت آن دانش وسیع و درخشان وی بوده که باعث شده به وی به نظر یك افلاطون ثانی بنگرند. توضیحی که کمتر التفات‌آمیز است، آنکه، گرچه وی در زمینه‌های زیادی استعداد داشته اما در هیچیك از رشته‌ها سرآمد معاصرین خود نبوده‌است؛ به عبارت دیگر، همیشه رتبهٔ دوم راداشته است. هریك ازاین توضیحات، وقتی که درمی‌یابیم منجمی به نام آپولونیوس (به احتمال زیاد آپولونیوس پرگا[5]یی) اپسیلون[6] نامیده می‌شده، تضعیف می‌شود. به‌این دلیل مورخی به نام جیمز گائو[7] عقیده دارد که شاید بتا و اپسیلون صرفاً از شماره‌های یونانی (۲ و ۵) محلهای کار یااتاقهای درس دانشگاه مختص به‌این دو، ناشی شده‌اند. از سوی دیگر، بطلمیوس هفایستیو[8] مدعی است که آپولونیوس به این دلیل اپسیلون نامیده شده که ماه را، که ε از علامات آن بوده، مورد مطالعه قرار داده است.

1. *Method* 2. Heiberg 3. Pentathlus 4. Beta
5. Perga 6. Epsilon 7. James Gow 8. Ptolemy Hephaestio

آثار متعددی از اراتستن توسط نویسندگان بعدی ذکر شده‌اند. قبلاً، در مطالعهٔ مسئله‌ای ۳.۴ (ج)، حل مکانیکی مسئلهٔ تضعیف را از وی دیده‌ایم. مهمترین دستاورد علمی او، اندازه‌گیری زمین، در مطالعهٔ مسئله‌ای ۱.۶ (ج) بررسی می‌شود.

از اراتستن درحساب به خاطر شیوهٔ زیر، موسوم به **غربال**[1]، برای یافتن کلیهٔ اعداد اول کوچکتر از یك عدد مفروض یاد می‌شود. به ترتیب و باشروع از۳، کلیهٔ اعداد فرد کمتراز n را می‌نویسیم. پس از آن اعداد مرکب دنباله را به صورت زیر غربال می کنیم، بعد از ۳، اعداد را سه درمیان، سپس بعد از اولین عدد باقیمانده، یعنی ۵، اعداد را پنج درمیان، سپس بعد ازاولین عدد باقیمانده، ۷ ، اعدادرا هفت درمیان، بعد ازاولین عدد باقیمانده، یعنی، ۱۱، اعداد رایازده درمیان، و الی آخر، خط می‌زنیم. دراین روند بعضی از اعداد بیش‌از یك‌بار خط می‌خورند. کلیهٔ اعداد باقیمانده، همراه با عدد ۲، فهرست اعداد اول کمتر از n را تشکیل می‌دهند.

۶-۴ آپولونیوس

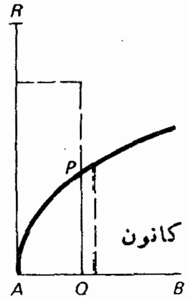
اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس سه غول ریاضی قرن سوم قبل از میلاد هستند. آپولونیوس، که ۲۵ سالی ازارشمیدس جوانتر بود، درحدود ۲۶۲ق.م. درپرگا واقع‌در آسیای صغیر جنوبی متولد شد. اطلاع کمی راکه از زندگی آپولونیوس معلوم است به اختصار می‌گوییم. در جوانی به اسکندریه رفت، زیرنظر جانشینان اقلیدس درس خواند، و مدت مدیدی در همانجا ماند. بعداً از پرگاموم[2]، در آسیای غربی، جایی که درهمان اواخردانشگاه و کتابخانه‌ای براساس الگوی دانشگاه اسکندریه برپاشده بود، دیدارکرد. او به اسکندریه مراجعت کرد و درهمانجا درحدود سال ۲۰۰ق.م. درگذشت.

گرچه آپولونیوس منجمی برجسته بودواگرچه‌دربارهٔ موضوعات مختلف ریاضی چیز نوشته است، عامل عمدهٔ شهرت وی کتاب برجستهٔ مقاطع مخروطی[3] اوست، اثری که نام «هندسه‌دان کبیر»[4] رادربین‌معاصرانش، برای وی کسب‌نمود. مقاطع مخروطی آپولونیوس، در هشت مقاله و شامل حدود ۴۰۰ قضیه، تحقیق جامعی است ازاین مقاطع و جای آثار قبلی مناپخموس، آریستایوس[5]، و اقلیدس را دراین مبحث می‌گیرد. تنها هفت‌تا از این هشت مقاله به دست ما رسیده است، چهارتای اول به یونانی و سه‌تای بعد از روی یك ترجمهٔ عربی مربوط به قرن نهم میلادی. چهارمقالهٔ اول، که ازآن‌میان مقاله‌های I، II، و III ازقرار معلوم براساس کار قبلی اقلیدس می‌باشند، به نظریهٔ مقدماتی عمومی مقاطع مخروطی می‌پردازند درحالی که مقاله‌های بعدی وقف تحقیقات تخصصیتری شده‌اند.

پیش از آپولونیوس، یونانیان مقاطع مخروطی را از سه نوع مخروط دوار، بسته به اینکه زاویهٔ رأس کوچکتر از قائمه، مساوی باآن یا بزرگتر ازآن باشد، استخراج

---

1. sieve 2. Pergamum 3. *Conic Sections*
4. The Great Geometer 5. Aristaeus



شکل ۴۶

می‌کردند. باقطع دادن هریك ازاین مخروطها باصفحه‌ای عمود برمولد مخروط، به‌ترتیب، بیضی، سهمی، وهذلولی نتیجه می‌شود. تنها یك‌شاخهٔ هذلولی موردنظربود. اما آپولونیوس، در مقالهٔ I رسالهٔ خود، همهٔ مقاطع مخروطی را به طریق معمول امروزی از یك مخروط دوپارچهٔ مستدیر قائم یا مایل به دست می‌آورد.

نامهای [یونانی] بیضی، سهمی، و هذلولی به وسیلهٔ آپولونیوس داده شده، واز اصطلاحات قدیمی فیثاغورسی مربوط به اضافه‌کردن مساحتها اخذ شده است. وقتی که فیثاغورسیان مستطیلی را برپاره‌خطی اضافه می‌کردند (یعنی، قاعدهٔ مستطیل را در روی پاره‌خط می‌نهادند، به طوری که یکی از دوسر قاعده بریك انتهای پاره‌خط منطبق می‌شد)، می‌گفتند که حالتی از «الیپسیس»[1] [ناقص]، «پارابوله»[2] [مکافی] یا «هوپربوله»[3] [زاید] را دارند، بسته به اینکه قاعدهٔ مستطیل مضاف کوتاهتر ازپاره‌خط، دقیقاً منطبق برآن، یا افزون برآن بود. حال فرض کنید که AB محور اصلی مقطع مخروطی، P نقطهٔ دلخواهی بر مقطع مخروطی، و Q پای عمود وارد بر AB از P باشد (نگاه کنید به شکل ۴۶). در A، که یکی ازرئوس مقطع مخروطی است، عمودی بر AB رسم کرده وبرآن طولی مانند AR برابر آنچه امروزه آن‌را لاتوس رکتوم[4] [ضلع قائم]، یا پارامتر p، مقطع مخروطی می‌نامیم، جداکنید. بر پاره‌خط AR، مستطیلی اضافه کنید که AQ یك ضلع آن و $[PQ]^2$ مساحت آن باشد. بسته به اینکه مضاف کوتاهتر ازپاره‌خط AR، منطبق برآن یا زیادتر ازآن باشد، آپولونیوس مقطع مخروطی‌را یك الیپس[5] [بیضی]، یك‌پارابولا[6] [سهمی]، یا یك‌هیپربولا[7] [هذلولی] می نامد. به عبارت دیگر، اگر منحنی را نسبت به یك دستگاه مختصات دکارتی که محورهای x و y آن بـه‌ترتیب در امتداد AB و AR است، درنظر بگیریم، و اگر مختصات P را با x و y نشان دهیم، دراین صورت منحنی یك بیضی، سهمی، یا هذلولی

است، بسته به اینکه $y^2 \lesseqgtr px$. در واقع درمورد بیضی و هذلولی،

---

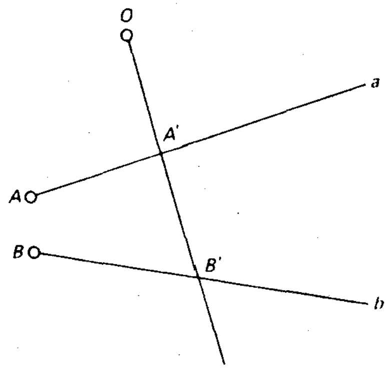
1 ellipsis 2. parabole 3. hyperbole 4. latus rectum
5. ellipse 6. parabola 7. hyperbola

$$y^2=px\mp\frac{px^2}{d},$$

که در آن d طول قطر مار بررأس A است. آپولونیوس، قسمت عمدهٔ هندسهٔ مقاطع مخروطی را از معادلهای هندسی این معادلات دکارتی استخراج می‌کند. حقایقی از این قبیل سبب دفاع عده‌ای از این فرضیه می‌شود که هندسهٔ تحلیلی از اختراعات یونانیان بوده است.

مقالهٔ II رسالهٔ آپولونیوس دربارهٔ مقاطع مخروطی به‌خواص مجانبها وهذلولیهای مزدوج، و رسم مماسها می‌پردازد. مقالهٔ III حاوی طبقه‌بندیی از قضایاست. در اینجا مثلاً قضایایی دربارهٔ سطوح وجود دارند نظیر: اگر مماسهای یك مقطع مخروطی در هردو نقطهٔ دلخواه A و B در C متقاطع بوده، و نیز قطرهای ماربر B و A را در D و E قطع کنند، در این صورت مثلثهای CBD و CAE از نظرمساحت برابرند. دراینجا همچنین خواص همساز قطبها و قطبیها (موضوعی که برای آنها که درسی مقدماتی در هندسهٔ تصویری داشته‌اند، آشناست) و قضایایی راجع به حاصلضرب قطعات وترهای متقاطع را می‌توان دید. به‌عنوان مثالی ازمطلب اخیرقضیهٔ زیررا داریم(که امروزه گاهی قضیهٔ نیوتون نامیده می‌شود): اگر دو وتر PQ و MN، موازی با دو امتداد مفروض، یکدیگررا در O قطع‌کنند، دراین صورت $(PO)(OQ)/(MO)(ON)$ مقدارثابتی مستقل از وضعیت O است. خواص کانونی مشهور مخروطیهای مرکزدار [بیضیها و هذلولیها] در انتهای مقالهٔ III کتاب مزبور ظاهر می‌شوند. در سرتاسر رساله، نه ذکری از خاصیت کانون ـ هادی مقاطع مخروطی درمیان است و نه، ازاین نظر، ازکانون سهمی صحبتی می‌شود. این مایهٔ شگفتی است چراکه، به عقیدهٔ پاپوس، اقلیدس ازاین خواص مطلع بوده است. مقالهٔ IV رساله، عکس برخی از قضایای مقالهٔ III دربارهٔ خواص همساز قطبها و قطبیها را ثابت می‌کند. قضایایی نیز دربارهٔ زوج مقاطع مخروطی متقاطع وجود دارد. ازبین مقاله‌های باقیمانده از آپولونیوس مقالهٔ V از همه مهمتر وبدیعتراست. این مقاله به‌بررسی قائمهایی می‌پردازد که به عنوان پاره‌خطهای ماکسیمم یا مینیمم مرسوم از نقطه‌ای بر یك منحنی درنظر گرفته می‌شوند. ساختمان وشمارش قائمهای مرسوم ازیك نقطهٔ مفروض دراین مقاله مورد بررسی قرار گرفته‌اند. موضوع تابه‌جایی پیش برده شده است که می‌توان معادلات دکارتی گسترده‌های (پوشهای قائمهای) سه مخروطی را نوشت! مقالهٔ VI مشتمل برقضایا و مسائل ساختمان دربارهٔ مخروطیهای متساوی و متشابه است. مثلاً نشان داده شده است‌که چگونه در یك مخروط قائم مفروض می‌توان مقطعی برابر با یك مقطع مخروطی مفروض یافت. مقالهٔ VII شامل تعدادی قضایا متضمن اقطار مزدوج است، مثل ثابت بودن مساحت متوازی‌الاضلاعی که از خطوط مماس بر دو سر دوقطر مزدوج در یك مقطع مخروطی مرکزدار تشکیل می‌شود.

مقاطع مخروطی رسالهٔ بزرگی است، اما، به‌علت وسعت و وسواس‌دربیان وغیرعادی بودن عبارات بسیاری ازقضایای پیچیدهٔ آن، خواندنش تاحدی‌سخت است. حتی ازتوضیح



شکل ۴۷

خلاصهٔ مندرجات آن در فوق، ملاحظه می‌شود که رسالهٔ مزبور خیلـی کاملتر از دروس امروزی معمول در دانشگاهها دراین مبحث است.

پاپوس نشانه‌هـای مختصری از مندرجات شش اثر دیگر آپولونیوس داده است. این آثارعبارت‌اندازدرباب‌قطعهای متناسب[1] (۱۸۱قضیه)، درباب قطع فاصله‌ای[2] (۱۲۴ قضیه)، درباب قطع معین[3] (۸۳قضیه)، تماسها[4] (۱۲۴ قضیه)، گرایشها[5] (۱۲۵ قضیه)، و مکانهای مسطح[6] (۱۴۷ قضیه). ازمیان اینها فقط اولی باقی‌مانده که به عربی است. این اثر به مسئلهٔ کلی زیر می‌پردازد. (نگاه کنید به شکل ۴۷): دو خط a و b با دو نقطهٔ ثابت A بر a و B بر b مفروض‌اند، برنقطهٔ مفروض O باید خطی مانند $OA'B'$ رسم شود که a را در A' و b را در B' قطع کند به طوری که $AA'/BB'=k$، k یك ثابت مفروض است. جامعیت مطالعه بااین حقیقت مشخص می‌شود که آپولونیوس ۷۷ حالت مجزا را درنظـر می‌گیرد. اثر دوم، مسئلهٔ مشابهی را مورد رسیدگـی قرار داده، بااین تفاوت که در اینجا می‌خواهیم‌داشته باشیم، $(AA')(BB')=k$. اثرسوم، مسئلهٔ زیررا موردتأمل‌قرار می‌دهد: باچهارنقطهٔ A،B،C،D مفروض بریك خط، باید نقطه‌ای مانند P برخط پیدا کنیم به‌طوری که داشته باشیم $(AP)(CP)/(BP)(DP)=k$. اثـری که دربارهٔ تماسها است به مسئلهٔ رسم دایره‌ای مماس برسه دایرهٔ مفروض می‌پردازد که درآن دایره‌های مفروض می‌توانند بـه طور مستقل بـه خطوط مستقیم یا به‌نقاط تبدیل شوند. این مسئله که اکنون به **مسئلهٔ آپولونیوس** معروف است، ریاضیدانان زیادی، از جمله ویت، اویلر، و نیوتن را به خود جلب کرده است. یکی از اولین راه حلها که هندسهٔ دکارتی جدید را به‌کاربرده به وسیلهٔ

---

1. *On Proportional Sections*
2. *On Spatial Section*
3. *On Determinate Section*
4. *Tangencies*
5. *Vergings*
6. *Plane Loci*

شاگرد دکارت، پرنسس الیزابت[1]، دختر فردریك[2] پنجم، بوهم[3] داده شده است. احتمالا زیباترین راه حل همان است که به وسیلهٔ افسر توپخانه و استاد ریاضی فرانسوی، ژوزف دیه‌ژرگون[4] (۱۸۵۹-۱۷۷۱) داده شده است. مسئلهٔ کلی در **گرایشها** عبارت بود از درج پاره‌خطی بین دو مکان مفروض به طوری که محمل این پاره‌خط از نقطهٔ مفروض بگذرد.

آخرین اثر، مکانهای مسطح، از جمله موارد دیگر، شامل دو قضیهٔ زیر است:

۱. اگر A و B نقاط ثابت و k ثابت مفروضی باشد، دراین صورت مکان هندسی نقطه‌ای مانند P، به طوری که $AP/BP=k$، یا یك دایره است (اگر $k\neq 1$) یا یك خط مستقیم (اگر $k=1$).

۲. اگر A و B و ... نقاط ثابت و a، b، ...، k مقادیر ثابت مفروض باشند، در این صورت مکان هندسی نقطه‌ای مانند P، به طوری که $a(AP)^2+b(BP)^2+\ldots=k$، یك دایره است. دایرهٔ (۱) درکتابهای جدید هندسهٔ دانشگاهها به **دایرهٔ آپولونیوس** معروف است.

کوششهایی برای احیای هر شش اثر بالا به عمل آمده است: دو اثر اول به وسیلهٔ ادموند هالی[5] در سال ۱۷۰۶، سومی به وسیلهٔ رابرت سیمسن در سال ۱۷۴۹، چهارمی به وسیلهٔ ویت درسال ۱۶۰۰، پنجمی به وسیلهٔ گتالدی[6] درسالهای ۱۶۰۷و۱۶۱۳، آلکساندر اندرسون[7] درسال ۱۶۱۲، وسموئل هورسلی[8] در سال ۱۷۷۰، و آخری توسط فرما در سال ۱۶۳۷ و به طورکاملتر، به‌وسیلهٔ سیمسن درسال ۱۷۴۶. علاوه‌براین‌شش‌اثر، به‌کتابهای مفقود دیگری از آپولونیوس توسط نویسندگان قدیمی اشاره شده است.

۶-۵ هیپارخوس، منلائوس، بطلمیوس، و مثلثات یونانی

منشأ مثلثات نامعلوم است. مسائلی در پاپیروس ریند وجود دارند که متضمن کتانژانت فرجه‌های قاعدهٔ هرم می‌باشند، و همچنان‌که در بخش ۲-۶ دیدیم، لوح میخی بابلی پلیمپتن ۳۲۲ اساساً شامل جدول مهمی ازسکانتهاست. شاید تحقیقات جدید درریاضیات بین‌النهرین باستان بسط قابل ملاحظهٔ مثلثات عملی راآشکارکند. منجمین بابلی قرنهای چهارم وپنجم ق.م. حجم معتنابهی از داده‌های رصدی راگرد آورده بودند، و اکنون معلوم شده‌است که مقدار زیادی از این اطلاعات به یونانیان منتقل گردیده بوده‌است. این نجوم اولیه بود که مثلثات کروی را به وجود آورد.

احتمالا برجسته‌ترین منجم عهد باستان هیپارخوس[9] [ابرخس] بوده، که در حدود ۱۴۰ ق.م. رونق یافت. گرچه رصدی از اعتدال ربیعی توسط هیپارخوس در ۱۴۶ق.م.

---

1. Princess Elizabeth 2. Frederick 3. Bohemia
4. Joseph-Diez Gergonne 5. Edmund Halley 6. Ghetaldi
7. Alexander Anderson 8. Samuel Horsley 9. Hipparchus

در اسکندریه ثبت شده است، مهمترین رصدهای وی در رصدخانهٔ مشهور مرکز تجارتی رودس[1] انجام شده است. هیپارخوس رصدگری بینهایت دقیق بود، ودر نجوم، باکارهای برجسته‌ای مانند تعیین طول متوسط یك ماه قمری با تقریب کمتر از ″۱ نسبت به مقادیر قابل‌قبول امروزی، محاسبهٔ دقیقی از میل دایرةالبروج وکشف و برآورد تقدیم اعتدالین سالانه اعتبار یافته است. گفته‌اند که وی اختلاف منظر ماه را نیز محاسبه کرده، حضیض و حرکت متوسط ماه را تعیین کرده، و ۸۵۰ ستارهٔ ثابت را فهرست کرده است. هیپارخوس، یاشاید هیپسکلس[2] (حدود ۱۸۰ ق.م.)، تقسیم یك دایره به°۳۶۰ را دریونان متداول کرد، و به جانبداری از تعیین موضع نقاط روی زمین به‌کمك عرض و طول جغرافیایی معروفیت یافته است. آگاهی به این دستاوردها جنبهٔ دست‌دوم دارد، زیرا تقریباً هیچیك ازنوشته‌های هیپارخوس به دست ما نرسیده است.

بااین‌حال، مهمتر ازدستاوردهای هیپارخوس درنجوم، نقشی است که وی در بسط مثلثات ایفاکرده است. شارح قرن‌چهارم، تئون اسکندرانی، یك رسالهٔ ۱۲ مقاله‌ای راجع به تشکیل **جدول وترها** را به هیپارخوس منسوب نموده است. جدولی که بعداً توسط کلاودیوس بطلمیوس داده شده و تصور می‌شود که ازرسالهٔ هیپارخوس اخذ شده باشد، طول وترهای همهٔ زوایای مرکزی دایرهٔ مفروضی را با فاصله‌های نیم درجه و از $\frac{1^\circ}{2}$ تا °۱۸۰ می‌دهد. شعاع دایره به ۶۰ قسمت مساوی تقسیم می‌شود و سپس طول وترها در دستگاه شصتگانی برحسب یکی از این قسمتها به عنوان واحد بیان می‌شوند. مثلاً، با استفاده از نماد crd α [وترα] برای نمایش دادن طول وتر یك زاویهٔ مرکزی مانند α، مواردی نظیر

$$\text{crd } ۳۶^\circ = ۳۷^p ۴' ۵۵''$$

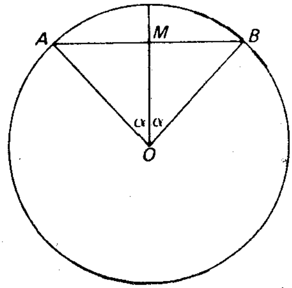
دیده می‌شوند، که البته بدین‌معنی‌است‌که وتریك زاویهٔ مرکزی °۳۶ برابراست‌با۳۷/۶۰ (یا۳۷قسمت جزء) شعاع، به اضافهٔ ۴/۶۰یکی‌ازاین قسمتهای جزء، به اضافهٔ ۵۵/۳۶۰۰ دیگری از قسمتهای جزء. از شکل ۴۸ دیده می‌شود که جدول وترها معادل است با جدول سینوسهای مثلثاتی، زیرا

$$\sin\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{\text{قطر دایره}} = \frac{\text{crd } ۲\alpha}{۱۲۰}$$

بنابراین جدول وترهای بطلمیوس، اساساً، سینوسهای زوایا را با فاصله‌های ′۱۵، از °۰ تا °۹۰، می‌دهد. طرز محاسبهٔ این طول وترها، که به طریقهٔ زیبایی به وسیلهٔ بطلمیوس تشریح شده، به احتمال زیاد برهیپارخوس معلوم بوده است. شواهد نشان می‌دهند که هیپارخوس از جدول خود منظماً استفاده کرده و از معادلهای چندین فرمول که امروزه در

---

1. Rhodes 2. Hipsicles



شکل ۴۸

حل مثلثهای قائم‌الزاویهٔ کروی به کار می‌روند، مطلع بوده است.

تئون همچنین از یک رسالهٔ شش مقاله‌ای دربارهٔ وترهای یک دایره که به وسیلهٔ منلائوس[1] اسکندرانی، یکی از معاصرین پلوتارک[2] (حدود ۱۰۰ ب. م.)، نوشته شده، یاد کرده است. این اثر، همراه با آثار گوناگون دیگری از منلائوس، مفقود شده‌اند. با این حال، خوشبختانه رسالهٔ سه مقاله‌ای منلائوس، اسفایریکا[3] [اکر]، به زبان عربی محفوظ مانده است. این اثر به طرز قابل‌توجهی بسط یونانی مثلثات را روشن می‌کند. در مقالهٔ I، تعریف مثلث کروی برای اولین بار ظاهر می‌شود. این مقاله به اثبات تعداد زیادی از قضایایی که اقلیدس در مورد مثلثهای مسطحه ثابت نموده، برای مثلثهای کروی اختصاص دارد، مانند قضایای همنهشتی معمولی [= تساوی]، قضایایی دربارهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین وغیره. علاوه بر آن همنهشتی دو مثلث کروی که زوایای یکی برابر زوایای دیگری است (که مشابهی برای آن در صفحه نیست)، و این حقیقت که مجموع زوایای یک مثلث کروی بزرگتر از دو قائمه می‌باشد، اثبات شده است. مثلثهای کروی متقارن همنهشت تلقی شده‌اند. مقالهٔ II شامل قضایای مورد نظر در نجوم است. در مقالهٔ III مثلثات کروی ضربها بسط یافته، که عمدتاً از حالت کروی قضیه پرتوانی که برای دانشجویان هندسهٔ دانشگاهی به عنوان **قضیهٔ منلائوس** معروف است، استنتاج شده است: اگر خط قاطعی اضلاع BC، CA، AB مثلثی مانند ABC را به ترتیب در نقاط L و M و N قطع کند، آنگاه

$$\left(\frac{AN}{NB}\right)\left(\frac{BL}{LC}\right)\left(\frac{CM}{MA}\right)=-1.$$

در مشابه کروی آن، دایرهٔ عظیمهٔ قاطعی اضلاع BC و CA و AB یک مثلث کروی مانند ABC را به ترتیب در نقاط L و M و N قطع می‌کند. در این صورت نتیجهٔ متناظر معادل است با

1. Menelaus 2. Plutarch 3. *Sphaerica*

$$\left(\frac{\sin\widehat{AN}}{\sin\widehat{NB}}\right)\left(\frac{\sin\widehat{BL}}{\sin\widehat{LC}}\right)\left(\frac{\sin\widehat{CM}}{\sin\widehat{MA}}\right)=-1.$$

حالت مسطحه به وسیلهٔ منلائوس معلوم فرض شده و توسط وی برای اثبات حالت کروی به‌کار رفته است. مقدار زیادی از مثلثات کروی را می‌توان از این قضیه، با اختیار کردن مثلثها و قاطعهای خاص نتیجه گرفت. عکس قضیه هم، چه درحالت مسطحه و چه در حالت کروی درست است.

اثر کامل یونانی در نجوم توسط کلاودیوس بطلمیوس اسکندرانی در حدود ۱۵۰ ب.م. نوشته شد. این رسالهٔ بسیار پر نفوذ، که سونتاکسیس ماثماتیکا، یا «مجموعهٔ ریاضی» نامیده می‌شود، برنوشته‌های هیپارخوس مبتنی است و به خاطر فشردگی و زیبایی چشمگیرش مورد توجه است. برای متمایزساختن آن از سایر آثار کم‌اهمیت‌تر نجوم، شارحین بعدی صفت عالی مگیسته[1] [مجسطی]، یا «بزرگترین» را به‌آن نسبت داده‌اند. بعداً نیز، مترجمین عرب حرف تعریف عربی ال را پیشوند آن کردند، و از آن به‌بعد این اثر باعنوان المجسطی معروف‌شده‌است. این رساله مشتمل بر سیزده مقاله است. مقالهٔ I، علاوه بر برخی مطالب مقدماتی نجومی، شامل جدول وترهاست که در بالا به‌آن اشاره شد، همراه با توضیح مجملی از استخراج آن از قضیهٔ هندسی پرباری که اکنون به **قضیهٔ بطلمیوس** معروف است: در یک چهار ضلعی محاطی حاصلضرب قطرها برابر است با مجموع حاصلضربهای اضلاع مقابل (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۹.۶). مقالهٔ II پدیده‌هایی را بررسی می‌کند که بستگی به کرویت زمین دارند. مقاله‌های III، IV، و V دستگاه زمین مرکزی نجوم را به‌کمک افلاک تدویرمطرح می‌کنند. درمقالهٔ IV راه حلی‌از **مسئلهٔ سه‌نقطهٔ مساحی** دیده‌می‌شود: تعیین نقطه‌ای که‌از آن، سه نقطهٔ مفروض دو به‌دو تحت زوایای مفروضی دیده می‌شوند. این مسئله، سابقه‌ای طولانی داشته است و گاهی «مسئلهٔ اسنل» (۱۶۱۷) یا «مسئلهٔ پوتنوت»[2] (۱۶۹۲) به آن اطلاق می‌شود. درمقالهٔ VI، که نظریهٔ بیضیها را عرضه می‌کند، مقدار π تا چهار رقم اعشار که در بخش ۴ـ۸ به آن اشاره شد، یافت می‌شود. مقاله‌های VII و VIII به فهرست ۱۰۲۸ ستارهٔ ثابت اختصاص یافته‌اند. مقاله‌های دیگر به سیارات اختصاص دارند. المجسطی تازمان کپرنیک[3] و کپلر به عنوان یك اثر استاندە درنجوم باقی ماند.

بطلمیوس درباب تصویر کردن نقشه‌ها (نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰.۶)، نورشناسی، و موسیقی نوشته‌هایی دارد. وی همچنین اقدام بـه استخراج اصل موضوع پنجم (یا توازی) اقلیدس از سایر اصول متعارفی و اصول موضوعهٔ اصول، درتلاش بیهوده‌ای برای حذف این اصل موضوع ازفهرست مفروضات اولیهٔ اقلیدس، کرده است.

---

1. magiste 2. Pothenot 3. Copernicus

۶-۶ هرون

از دیگر کسانی که در ریاضیات کاربردی کار می‌کردند و به این دوره تعلق دارند، هرون اسکندرانی است. زمان زندگی او که دربارهٔ آن گفته‌ها بسیار متفاوت بود و از ۱۵۰ ق.م. تا ۲۵۰ ب.م. را دربرمی‌گرفت، اخیراً به طرز موجهی در نیمهٔ دوم قرن اول ب.م. قرار داده شده است. آثار وی در موضوعات ریاضی و فیزیکی آن چنان متعدد و گوناگون‌اند که معمولا وی را نویسندهٔ دایرةالمعارفی در این زمینه‌ها توصیف می‌کنند. دلایلی در دست است دایر براینکه وی را یك مصری با تعلیمات یونانی بینگاریم. به هر صورت نوشته‌های وی، که اغلب به استفادهٔ عملی توجه دارد تا به‌کمال نظری، آمیختگی غریبی ازنوشته‌های یونانی وشرقی را نشان می‌دهند. وی کار زیادی برای تهیهٔ یك‌شالودهٔ علمی برای مهندسی و مساحی زمین انجام داد. درحدود چهارده رساله ازهرون، که بعضی ازآنها مسلماً به‌مقدار زیادی تنقیح شده‌اند، به دست ما رسیده است؛ و اشاراتی هم به‌آثار مفقودشدهٔ بیشتری رفته است.

آثارهرون را می‌توان به‌دو دسته تقسیم کرد، هندسی و مکانیکی. آثار هندسی عمدتاً به مسائل اندازه‌گیری زمین و آثار مکانیکی به توصیف آلات مکانیکی استادانه‌ای می‌پردازند.

مهمترین اثرهندسی هرون متریکا[1] است، که درسه مقاله نوشته‌شده و به‌وسیلهٔ ر. شون[2] درسال ۱۸۹۶ درقسطنطنیه کشف شده است. مقالهٔ I به‌اندازه‌گیری مساحت مربعها، مستطیلها، مثلثها، ذوزنقه‌ها، و انواع مختلف چهارضلعیهای خاص‌دیگر، چند ضلعیهای منتظم، از مثلث متساوی‌الاضلاع گرفته تا دوازده ضلعی منتظم، دایره‌ها و قطعه‌های آنها، بیضیها، قطعه‌های سهموی، و سطوح استوانه، مخروط، کره، و منطقه‌های کروی می‌پردازد. دراین مقاله‌است که استخراج زیرکانهٔ فرمول مساحت یك مثلث برحسب سه ضلع آن را می‌یابیم (نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای۶.۱۱ (د)). نکتهٔ دیگری در این مقاله که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، روش هرون در یافتن جذر تقریبی اعدادصحیح غیرمربع است. این عبارت از فرایندی است‌که امروزه اغلب به‌وسیلهٔ کامپیوترها به‌کارگرفته می‌شود، یعنی: اگر $n=ab$، آنگاه $\sqrt{n}$ با $(a+b)/۲$ تقریب زده می‌شود، که تقریب با میزان نزدیکی a به b بهبود می‌یابد. این روش تقریبات متوالی را مقدورمی‌سازد. مثلا، اگر $a_۱$ تقریب اولیه‌ای برای $\sqrt{n}$ باشد، آنگاه

$$a_۲=\frac{a_۱+\frac{n}{a_۱}}{۲}$$

تقریب بهتری است، و

---

1. *Metrica* 2. R. Schöne

$$a_3 = \frac{a_2 + \frac{n}{a_2}}{2}$$

بهتر از آن است، و قس‌علی‌هذا. مقالهٔ II متریکا به اندازه‌گیری حجم مخروط، استوانه، متوازی‌السطوح، منشور، هرم، مخروط و هرم ناقص، کره، قطعهٔ کروی، چنبره، اجسام منتظم پنجگانه، و برخی منشورنماها می‌پردازد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱.۶ (ز)). مقالهٔ III با تقسیم برخی سطوح و احجام معین به‌قسمتهایی با نسبتهای مفروض سروکار دارد. ما چنین مسائلی را در مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱.۳ (ب) و ۱۱.۳ (ج) دیده‌ایم.

در کتاب پنوماتیکا[1] هرون توصیفاتی از حدود ۱۰۰ ماشین و بازیچه، نظیر سیفون [صفاره]، ماشین اطفای حریق، آلتی برای بازکردن درهای معابد با آتش درمحراب، ویك ارگ بادی دیده می‌شود. اثر وی به‌نام دیوپترا[2] اختصاص به‌توصیف وکاربردهای مهندسی یك شکل‌قدیمی از تئودولیت، یا زاویه‌یاب مساحی دارد. در کاتوپتریکا[3]، خواص مقدماتی آیینه‌ها و مسائل راجع به‌ساختن آیینه‌هایی با خواص معین، مثلا برای اینکه شخصی پشت سرخود را ببیند یا وارونه دیده شود، و ازاین قبیل، یافت می‌شود. آثار هرون در مکانیك نشانهٔ درك عالی وی از اصول اساسی مهم این رشته است.

۶-۷ جبر یونان باستان

در سال ۱۸۴۲، گ. ه. ف. نسلمان[4]، به طرز مناسبی سه مرحله را در توسعهٔ تاریخی نمادگذاری جبری مشخص کرد. اول، **جبر لفظی** [یا بیانی] را داریم، که در آن حل یك مسئله، بدون علایم اختصاری یا نمادها، به شکل‌استدلالی به نثرخالص نوشته می‌شود. پس ازآن **جبر تلخیصی** می‌آید، که درآن علایم اختصاری برای بعضی از کمیتها و اعمالی که اغلب تکرار می‌شوند، اختیار می‌شود. سرانجام، به عنوان آخرین مرحله، **جبر علامتی** را داریم، که در آن راه‌حلها عمدتاً به صورت نوعی تندنویسی ریاضی ظاهر می‌شوند، که متشکل‌است ازنمادهایی‌که ارتباط ظاهری کمی با آنچه‌که معرف آن می‌باشند، دارند. نسبتاً صحیح است اگر بگوییم که تمام جبر پیش از دیوفانتوس (که دربارهٔ وی دربخش ۶-۸ صحبت خواهد شد) لفظی بوده است. یکی از برجسته‌ترین کارهای دیوفانتوس در ریاضیات، تلخیصی‌کردن جبر یونانی بود. بااین حال جبرلفظی در دیگرجاهای دنیا، بجز در هند، به‌صورتی کاملا عمومی برای چندین صدسال دوام آورد. بالاخص، در اروپای غربی، قسمت‌اعظم جبر تاقرن پانزدهم لفظی باقی ماند. جبر علامتی دراروپای غربی برای اولین‌بار درقرن‌شانزدهم ظاهرشد، اماتااواسط قرن‌هفدهم متداول‌نگردید. خیلی‌ها نمی‌دانند که قسمت زیادی از علایم موجود در کتابهای جبر مقدماتی کنونی کمتر از چهارصد سال

1. *Pneumatica* 2. *Dioptra* 3. *Catoptrica*
4. G. H. F. Nesselmann

عمر دارند.

یکی از مهمترین منابع ما در مسائل جبر یونانی قدیم، مجموعه‌ای است معروف به آنتولوژی [جنگ] پالاتین[1]، یا یونانی. این کتاب شامل گروهی از ۴۶ مسئلهٔ عددی به‌شکل معما است، که حدود ۵۰۰ ب.م. توسط مترودوروس[2] دستوردان جمع‌آوری شده است. گرچه بعضی از مسائل ممکن است از خود مؤلف باشند، دلایل کافی وجود دارد که بپذیریم بسیاری از این مسائل ریشهٔ کاملا قدیمیتری داشته‌اند. این مسائل ظاهراً به‌منظور تفریح فکری، از نوعی هستند که افلاطون به آنها اشاره کرده و شباهت نزدیکی به برخی از مسائل پاپیروس ریند دارند. نصف آنها منجر به معادلات خطی ساده‌ای برحسب یك مجهول می‌گردند، یك دوجین دیگر به‌دستگاه معادلاتی برحسب دومجهول، یکی به‌سه‌معادله با سه مجهول، و یکی به چهار معادله با چهار مجهول؛ و در دو مورد معادلات سیالهٔ درجهٔ اول وجود دارند. تعدادی ازمسائل بسیار شبیه به اغلب مسائلی هستند که در کتابهای جبرمقدماتی امروزی دیده می‌شوند. چند مثال از آنتولوژی یونانی در مطالعه‌های مسئله‌ای ۱۳.۶ و ۱۴.۶ داده شده‌اند. اگرچه این مسائل با نمادهای جبری امروزی به سادگی حل می‌شوند، باید تصدیق کرد که حل لفظی آنها مستلزم تمرکز ذهنی کاملا دقیقی است. خاطرنشان شده است که بسیاری از این مسائل را می‌توان با جبرهندسی فوراً حل نمود، ولی اعتقاد براین است که درواقع آنها به طریقهٔ حسابی، شاید با به‌کاربردن قاعدهٔ امتحان و تصحیح (نگاه کنید به بخش ۲ــ۸)، حل شده بودند. اینکه دقیقاً درچه زمانی جبر یونانی از شکل هندسی به حسابی تغییر یافته، معلوم نیست؛ اما احتمالا این امر در حوالی عصر اقلیدس بوده است.

۶ــ۸ دیوفانتوس

ازکسانی که اهمیت وافری دربسط جبر و تأثیری عظیم بردانشمندان اروپایی نظریهٔ اعداد داشتند، دیوفانتوس[3] اسکندرانی بود. دیوفانتوس، همچون‌هرون، ریاضیدان دیگری باتاریخ وملیت نامعلوم است. گرچه شواهد ضعیفی وجود دارند مبنی براینکه وی شاید ازمعاصرین، یا تقریباً ازمعاصرین هرون بوده، اغلب مورخین مایل‌اند که او را درقرن سوم عصرحاضر قرار دهند. سوای این حقیقت که او دراسکندریه رونق‌یافته چیزی قطعی دربارهٔ وی معلوم نیست، گرچه معمایی در آنتولوژی یونانی وجود دارد که کمی از جزئیات زندگی وی از آن مستفاد می‌شود (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۵.۶ (الف)).

دیوفانتوس سه اثر نوشته است: آریثمتیکا[4]، مهمترین اثر وی که ۶ مقاله از ۱۳مقالهٔ آن باقی است، دربارهٔ اعداد چند ضلعی[5]، که تنها قطعه‌ای از آن باقی است، و پوریسم‌ها، که مفقود شده است. آریثمتیکا شارحین زیادی داشته، اما این رگیومونتانوس[6] بود که در

---

1. *Palatine Anthology* 2. Metrodorus 3. Diophantus
4. *Arithmetica* 5. *On Polygonal Numbers* 6. Regiomontanus

سال ۱۴۶۳، برای ترجمهٔ لاتین متن موجود یونانی دعوت به‌عمل آورد. ترجمهٔ شایسته‌ای از آن، همراه با شرح، در ۱۵۷۵ توسط کسیلاندر[1] (نامی یونانی که ویلهلم هولتسمان[2]، استادی در دانشگاه هایدلبرگ[3] اختیار کرده بود) انجام شد. این ترجمه به نوبهٔ خود توسط باشه دومزیریاك[4] فرانسوی مورد استفاده قرار گرفت، و وی در ۱۶۲۱ اولین چاپ متن یونانی را همراه با ترجمهٔ لاتین و حاشیه‌هایی بر آن منتشر کرد. چاپ دومی، که با بی‌مبالاتی صورت گرفته بود، در ۱۶۷۰ انتشار یافت، و از نظر تاریخی بدان سبب اهمیت دارد که حواشی نوشته شده توسط فرما را، که انگیزهٔ تحقیقات گسترده‌ای در نظریهٔ اعداد شد، شامل می‌شد. ترجمه‌های فرانسوی، آلمانی، و انگلیسی بعداً ظاهر شدند.

آریثمتیکا یك بررسی تحلیلی از نظریهٔ جبری اعداد است و دلالت بر نبوغ مؤلف آن در این زمینه دارد. بخش موجود این اثر به حل حدود ۱۳۰ مسئله، که تنوع قابل‌ملاحظه‌ای دارند، اختصاص یافته است، ومنجر به معادلاتی از درجهٔ اول و دوم می‌شوند. در این اثر حالت بسیار خاصی از معادلهٔ درجهٔ سوم حل شده است. مقالهٔ اول به معادلات معین با یك مجهول مربوط است، و مقاله‌های دیگر به معادلات نامعین [سیاله] از درجهٔ دوم، و گاهی بیشتر، با دو یا سه مجهول می‌پردازند. آنچه قابل توجه است فقدان روشهای کلی، و کاربردهای مکرر تدابیر هوشمندانه‌ای است که به‌اقتضای هر مسئله طرح می‌شوند. دیوفانتوس تنها جوابهای گویای مثبت را قبول داشت و، در اغلب حالات، فقط به یك جواب برای مسئله قانع بود.

چند قضیهٔ مؤثر دربارهٔ اعداد در آریثمتیکا وجود دارند. مثلا، بدون برهان ولی با اشاراتی به پوریسمها، گفته می‌شود که تفاضل دو مکعب گویا مجموع دو مکعب گویا نیز هست. مطلبی که بعداً توسط ویت، باشه، و فرما تحقیق شد. قضایای زیادی دربارهٔ نمایش اعداد به‌صورت مجموع دو، سه، یا چهار مربع وجود دارند، این زمینهٔ تحقیق بعدها به‌وسیلهٔ فرما، اویلر، و لاگرانژ[5] تکمیل شد. شاید ذکر برخی از مسائلی که در آریثمتیکا دیده می‌شوند، جالب باشد، همهٔ آنها جذاب و بعضی از آنها مستلزم تلاش فراوان هستند. باید در نظر داشت که منظور از «عدد»، «عدد مثبت گویا» است.

مسئلهٔ ۲۸*، مقالهٔ II: دو عدد مربع کامل بیابید که اگر حاصلضرب آنها بر هریك از آنها افزوده شود، یك مربع کامل عاید نماید (جواب دیوفانتوس: $^2(۳/۴)$ ، $^2(۷/۲۴)$).

مسئلهٔ ۶، مقالهٔ III: سه عدد پیدا کنید که مجموع آنها یك مربع کامل ومجموع هر زوج آنها یك مربع کامل باشد (جواب دیوفانتوس: ۸۰، ۳۲۰، ۴۱).

مسئلهٔ ۷، مقالهٔ III: سه عدد که تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند، پیدا کنید که مجموع

---

1. Xylander 2. Wilhelm Holzmann 3. Heidelberg
4. Bachet de Méziriac 5. Lagrange

* شماره‌گذاری این مسائل به همان ترتیبی است که ت. ل. هیث در *Diophantus of Alexandria* چاپ دوم، به‌کار برده است.

هر زوج از آنها یك مربع کامل باشد (جواب دیوفانتوس: $\frac{1}{2}$۱۲۰، $\frac{1}{2}$۸۴۰، $\frac{1}{2}$۱۵۶۰).

مسئلهٔ ۱۳، مقالهٔ III: سه‌عدد پیدا کنید که وقتی حاصلضرب هردوتا از آنها به سومی افزوده شود، حاصل یك مربع کامل باشد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۶.۶ (د)).

مسئلهٔ ۱۵، مقالهٔ III: سه‌عدد پیدا کنید که اگرحاصلضرب هردوتا از آنها به‌مجموع آن دو افزوده شود، حاصل یك مربع کامل باشد (نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۶.۶(د)).

مسئلهٔ ۱۰، مقالهٔ IV: دوعدد پیدا کنید که مجموع آنها برابر بامجموع مکعبات آنها باشد (جواب دیوفانتوس: ۷/۵، ۷/۸).

مسئلهٔ ۲۱، مقالهٔIV: سه‌عدد، که تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند، پیدا کنید که تفاضل هردوتایشان یك مربع‌کامل باشد (جواب دیوفانتوس: ۷/۸۱، ۷/۱۴۴، ۷/۲۵۶).

مسئلهٔ ۱، مقالهٔ VI: یك مثلث فیثاغورسی پیدا کنید که در آن وتر منهای هر یك از ساقها، یك مکعب کامل باشد (جواب دیوفانتوس: ۴۰، ۹۶، ۱۰۴).

مسئلهٔ ۱۶، مقالهٔ VI: یك مثلث فیثاغورسی پیدا کنید که در آن طول‌نیمساز یکی از زوایای حاده، گویا باشد (نگاه‌کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۵.۶ (ج)).

مسائل جبری نامعین [معادلات سیاله] که درآن تنها باید جوابهای گویا را یافت، به **مسائل دیوفانتوسی** معروف شده‌اند. در واقع، موارد استفادهٔ امروزی این اصطلاح اغلب متضمن‌تحدید جوابها به‌اعداد صحیح است. اما دیوفانتوس خود ابداع‌کنندهٔ مسائلی از این قبیل نبوده است. همچنین برخلاف آنچه گاهی گفته می‌شود، اولین کسی نبوده است‌که با معادلات سیاله کار کرده، و اولین کسی نبوده که معادلات درجهٔ دوم را به روش‌غیر هندسی حل کرده است. مع‌هذا، وی شاید اولین کسی بوده‌که گامهایی در جهت نمادگذاری جبری برداشته است. این گامها ماهیتاً ازنوع علایم‌اختصاری تندنویسی بودند.

دیوفانتوس علایم اختصاری برای مجهول، توانهای مجهول تامرتبهٔ ششم، تفریق، تساوی، ومعکوسها داشت. کلمهٔ «اریثمتیك»[1] انگلیسی کنونی از کلمهٔ یونانی آریثمتیکه[2] ترکیبی ازکلمات‌آریثموس[3] برای «عدد» و تکنه[4] برای «علم»، ناشی می‌شود. هیث به‌طور نسبتاً متقاعد کننده‌ای خاطرنشان کرده است که نماد دیوفانتوس برای مجهول احتمالا از ادغام دو حرف یونانی α و ρ، درکلمهٔ اریثموس مشتق شده است، که با گذشت زمان، به‌سیگمای‌نهایی‌یونانی s شباهت پیداکرده است. باوجود اینکه دراین مورد تردید وجود دارد، معنی نماد برای توانهای مجهول کاملا روشن است. مثلا «توان دوم مجهول» با Δ^{Υ}، دو حرف اول کلمهٔ یونانی دونامیس[5] ($\Delta\Upsilon\mathrm{NAMI}\Sigma$) برای «توان» نشان داده می‌شود. همینطور «مکعب‌مجهول» با K^{Υ}، دوحرف‌اول کلمهٔ‌یونانی کوبوس[6] ($\mathrm{K}\Upsilon\mathrm{BO}\Sigma$) برای «مکعب» نشان داده می‌شود. می‌توان به سادگی توضیحاتی برای توانهای بعدی

---

1. arithmetic 2. arithmetike 3. arithmos 4. techne
5. dunamis 6. kubos

مجهــول داد، $\Delta^{\Upsilon}\Delta$ (مربع ـ مربع)، ΔK^{Υ} (مــربع ـ مکعب)، و $K^{\Upsilon}K$ (مکعب ـ مکعب) عرضه کرد. نماد دیوفانتوس برای «منها» شبیه یك V وارون است که نیمساز زاویهٔ آن رسم شده باشد. این بــه عنوان ترکیبی از Λ و I، حــروفی در کلمهٔ یونانــی لایپیس[1] ($\Lambda E I \Psi I \Sigma$) برای «فاقد بودن»، تعبیر شده است. کلیهٔ جملات منفی در یك عبارت یك‌جا جمع می‌شوند و نماد منها پیش‌از آنها می‌آید. جمع با پهلوی هم نهادن نشان داده می‌شود، وضریب هر توان مجهول با ارقام یونانی الفبایی (نگاه کنید به‌بخش ۱ـ۶) بعد از نماد توان، نمایش داده می‌شود. اگر جملهٔ ثابتی موجود باشد آنگاه M، مخففی از کلمهٔ یونانی‌مونادس[2] ($MONA\Delta E\Sigma$) برای «آحاد»، باضریب عددی مناسب، برای نمایش آن به‌کار می‌رود. مثلا x^3+13x^2+5x و x^3-5x^2+8x-1 به صورت

$$K^{\Upsilon}\alpha\Delta^{\Upsilon}\iota\gamma\varsigma\epsilon \quad \text{و} \quad K^{\Upsilon}\alpha\varsigma\eta\Lambda\Delta^{\Upsilon}\epsilon\mathring{M}\alpha,$$

ظاهر می‌شوند، که به‌طور تحت‌اللفظی چنین خوانده می‌شوند

مکعب مجهول ۱، مربع مجهول ۱۳، مجهول ۵

و

(مکعب مجهول ۱، مجهول ۸) منهای (مربع مجهول ۵، آحاد ۱).

بدین‌ترتیب بود که جبر لفظی به جبر تلخیصی بدل شد.

۶ـ۹ پاپوس

جانشینان بلافصل اقلیدس، ارشمیدس، و آپــولونیوس بــرای مدتی سنت والای هندسی یونان را ادامه دادند، ولی این سنت بعداً به تدریج رو به ضعف نهاد، و پیشرفتهای جدید به نجوم، مثلثات، و جبر محدود شد. پس‌از آن در اواخر قرن سوم ب.م.، ۵۰۰ سال بعد از آپولونیوس، مردی پرشور وشوق و توانا به‌نام پاپوس اسکندرانی پا به عرصه گذاشت که سعی کرد تاعلاقهٔ تازه‌ای را ازنو نسبت به این موضوع برانگیزد.

پاپوس شروحی بر اصول و داده‌های اقلیدس، و دربارهٔ المجسطی و پلانیسفریوم[3] [تسطیح کره] بطلمیوس نوشت، ولی تقریباً همهٔ آنچه ما دراین‌باره می‌دانیم ازطریق تأثیر آنها درنوشته‌های شارحین بعدی است. اثرواقعاً عظیم پاپوس مجموعهٔ ریاضی[4] وی‌است، که ترکیبی از شرح و راهنمای آثــار هندسی موجود در زمان او، مملو از قضایای بدیع متعدد، اصلاحات، تعمیمها، وتذکرات تاریخی است. ازبین هشت مقالهٔ آن، اولی وقسمتی ازدومی مفقود شده‌اند.

از قضاوت نسبت به آنچه باقی‌مانده، مقالهٔ II مجموعهٔ ریاضی به روشی برای‌نوشتن و کاربا اعداد بزرگ، که توسط آپولونیوس به وجود آمده بود، می‌پردازد. مقالــهٔ III

1. leipis 2. monades 3. *Planispherium*
4. *Mathematical Collection*

دارای چهار بخش است، دو بخش اول به نظریهٔ میانگینها (برای مثال، نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۷.۶ (الف)) می‌پردازند، و در آنها اشاره‌ای به مسئلهٔ درج دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض شده است، سومی برخی نامساویها را در یك مثلث، و چهارمی محاط‌کردن پنج چندوجهی منتظم در یك کره را مورد بررسی قرار می‌دهد.

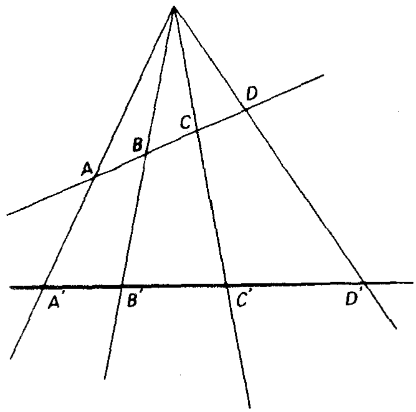
در مقالهٔ IV، تعمیم پاپوس از قضیهٔ فیثاغورس (که در مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۷.۶ (ج) داده شده)، «قضیهٔ قدیمی» دربارهٔ گزن (که در انتهای مطالعهٔ مسئله‌ای ۴.۶ بیان شده)، توصیف، تکوین، و بعضی خواص حلزونی ارشمیدس، کونکوئید نیکومدس، مربع‌ساز دینوستراتوس، با کاربردهایی در سه مسئلهٔ مشهور، و بحثی از حلزونی خاصی که بر کره‌ای رسم شده، دیده می‌شود.

مقالهٔ V عمدتاً به برابرمحیطی، یا مقایسهٔ مساحت دو شکل که دارای محیطهای محصورکنندهٔ مساوی‌اند و حجم اجسامی که دارای سطوح محصورکنندهٔ برابرند، اختصاص دارد. این کتاب همچنین شامل قطعهٔ جالبی دربارهٔ زنبورها و خواص ماکسیمم ـ مینیمم حجره‌های شانهای عسل است. در این کتاب است که اشارهٔ پاپوس به ۱۳ چندوجهی نیمه منتظم ارشمیدس را، که در بخش ۶ـ۲ ذکر شد، می‌بینیم. مقالهٔ VI دربارهٔ نجوم است و به رسالاتی می‌پردازد که می‌بایست به‌عنوان مقدمه‌ای بر المجسطی بطلمیوس مطالعه می‌شده‌اند.

مقالهٔ VII از نظر تاریخی بسیار مهم است، زیرا شرح آثاری است که گنجینهٔ آنالیز[1] را تشکیل می‌دهند. این مجموعه، بعد از اصول اقلیدس، مدعی در برداشتن مطالبی بوده که برای ریاضیدانان حرفه‌ای از لوازم اساسی تلقی می‌شده است. ۱۲ رسالهٔ مورد بحث عبارت‌اند از داده‌ها، پوریسمها، و مکانهای رویه‌ای اقلیدس، مقاطع مخروطی آپولونیوس، و شش اثری که در انتهای بخش ۶ـ۴ مورد بررسی قرار گرفتند، مکانهای فضایی[2] آریستایوس، و درباب میانگینها[3]ی اراتستن. در این مقاله صورت بدوی قضیهٔ مرکز هندسی پ. گولدین[4] را می‌بینیم (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۸.۶). همچنین بحثی دربارهٔ «مکانهای هندسی نسبت به‌سه یا چهارخط» داده شده است: اگر p_1، p_2، p_3 و p_4 طول چهار پاره‌خطی باشندکه از نقطه‌ای مانند P، ومتکی برچهار خط مفروض رسم می‌شوند، و زوایای مفروضی با این خطوط می‌سازند، اگر $p_1p_2=kp_3^2$، یا $p_1p_2=kp_3p_4$، که در آن k یك مقدار ثابت است، آنگاه مکان هندسی P یك مقطع مخروطی است. این مسئله، که به وسیلهٔ آپولونیوس حل شده، از نظرتاریخی بدان‌جهت اهمیت دارد که در تلاش برای تعمیم آن به n خط بود که دکارت درسال ۱۶۳۷ به تبیین روش مختصاتی هدایت شد؛ معاصرین پاپوس بدون موفقیت سعی به تعمیم‌دادن این مسئله کرده بودند. حالت خطی، به‌اصطلاح **قضیهٔ استوارت**[5]، که در کتابهای هندسهٔ دانشگاهی ظاهرمی‌شود، نیز دراین کتاب دیده می‌شود، یعنی: اگر A، B، C و D چهار نقطهٔ دلخواه برخطی باشند، آنگاه

$$(AD)^2(BC)+(BD)^2(CA)+(CD)^2(AB)+(BC)(CA)(AB)=0$$

1. *Treasury of Analysis* 2. *Solid Loci* 3. *On Means*
4. P. Guldin 5. Stewart



شکل ۴۹

که درآن پاره‌خطهای مورد بحث، پاره‌خطهای علامت‌دار هستند. درواقع، رابرت‌سیمسن درکشف قضیه‌ای برای حالت کلیتر که درآن D ممکن است خارج ازخط ABC باشد، براستوارت پیشی گرفت. **نسبت ناتوافقی**، یا **خاجی** (AB,CD) چهارنقطهٔ همخط A،B،C و D را می‌توان به صورت (AC/CB) / (AD/DB)، یعنی؛ به صورت نسبت نسبتهایی که C و D پاره‌خط AB را به‌آنهـا تقسیم می‌کنند، تعریف کـرد. درمقالهٔ VII مجموعهٔ ریاضی، پاپوس ثابت می‌کند که اگرچهارنیمخط متقارب (نگاه کنید به شکل۴۹) به وسیلهٔ دو مورب قطع شونـد، به طوری کـه نقاط متناظـر A، B، C، D، و A'، B'، C'، D' به دست آیند، درایـن صورت دو نسبت خاجی (AB, CD) و $(A'B', C'D')$ برابرند. به عبارت دیگر، نسبت خاجی چهار نقطهٔ همخط نسبت به‌عمل تصویرکـردن پایاست. این ازقضایای بنیادی هندسهٔ تصویری است. مقالهٔ VII راه‌حلی برای مسئلهٔ زیررا دربردارد: محاط کردن مثلثی در دایرهٔ مفروض به‌طوری که اضلاع آن، یادرصورت لزوم امتدادآنها، از سه نقطهٔ همخط بگذرند. این مسئله به عنوان **مسئلهٔ کاستیون[۱]-کرامر[۲]** شهرت یافته‌است، زیرا درقرن هجدهم مسئله توسط کرامر به حالتی که در آن سه نقطه لـزوماً همخط نیستند، تعمیم داده شد، و حلی از این تعمیم به‌وسیلهٔ کاستیون درسال ۱۷۷۶ منتشر گردید. همچنین راه‌حلهایی توسط لاگرانژ، اویلر، لوییلیه[۳]، فوس[۴]، و لکسل[۵] در ۱۷۸۰ داده شدند. چند سال بعد، پسربچهٔ ۱۶ سالهٔ صاحب قریحه‌ای ازایتالیا، به‌نام جیوردانو[۶]، مسئله را به محاط کردن یك n ضلعی، که اضلاع آن از n نقطهٔ مفروض می‌گذرند، دریك دایره تعمیم وراه‌حل زیبایی بـرای آن ارائه داد. پونسله مسئله را باگذاشتن مقطع مخروطی دلخواهی به جای دایره تعمیم بیشتری داد. در مقالهٔ VII، اولین بیان مضبوط خاصیت کانون هادی سه‌مقطع

---

1. Castillon 2. Cramer 3. Lhuilier 4. Fuss
5. Lexell 6. Giordano

مخروطی ظاهر می‌شود.

مقالهٔ VIII، مانند مقالهٔ VII، شامل مطالبی است که بیشتر آن احتمالا ابداع خود پاپوس است. در اینجا ما راه حلی از مسئلهٔ ساختن یك مقطع مخروطی مار بر پنج نقطهٔ مفروض را می‌بینیم. قضیهٔ جالبی که احتمالا کار پاپوس بوده و دراین مقاله دیده می‌شود، در مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۷.۶ (ه) داده شده است.

مجموعهٔ ریاضی پاپوس منبعی است واقعی سرشار از قطعات هندسی. مقایسه‌هایی که در حد امکان به عمل آمده، نشان داده‌اند که شرحهای تاریخی مشمول دراین اثر موثق‌اند. ما قسمت عمدهٔ دانش خود را از هندسهٔ یونانی به این رسالهٔ عظیم مدیونیم، که از آثار بیش از ۳۰ ریاضیدان باستانی مختلف شاهد می‌آورد یا به آنها ارجاع می‌دهد. شاید بتوان آن را تذکرهٔ هندسهٔ یونانی نامید.

۶-۱۰ شارحین

بعد از پاپوس، ریاضیات یونانی ازحالت یك مطالعهٔ زنده خارج گردید و ما صرفاً تداوم خاطرهٔ آن را توسط نویسندگان و شارحین کم‌اهمیت‌تر می‌بینیم. در بین اینها تئون، اسکندرانی، دختر وی هوپاتیا[1]، پروکلوس، سیمپلیکیوس[2]، و ائوتوکیوس قرار دارند.

تئون در دورهٔ متلاطم اواخر قرن چهارم ب.م. می‌زیست ومؤلف شرحی، در ۱۱ مقاله، برالمجسطی بطلمیوس است. همچنین، یادآوری می‌کنیم که، چاپهای جدید اصول اقلیدس مبتنی برتجدیدنظر تئون در متن اصلی است.

دخترتئون، هوپاتیا، در ریاضیات، طب، و فلسفه متشخص بود، و بنابر روایات، شروحی برآریثمتیکای دیوفانتوس و مقاطع مخروطی آپولونیوس نوشته است. وی‌اولین بانوی ریاضیدان است که در تاریخ ریاضیات ازاویاد شده است. زندگی و قتل وحشیانهٔ او به دست دسته‌ای از مسیحیان متعصب در مارس سال ۴۱۵ میلادی، در رمان چارلز کینگزلی[3] بازآفرینی شده است.*

مورخین ریاضی به فیلسوف و ریاضیدان نوافلاطونی، پروکلوس، به خاطر شرح مقالهٔ اول اقلیدس[4] او، که یکی از منابع اصلی اطلاعات ما دربارهٔ تاریخ اولیهٔ هندسهٔ مقدماتی است، مدیون‌اند. پروکلوس به آثار تاریخی وانتقادی (یاشروح برچنان آثاری) که اکنون مفقود شده‌اند، دسترسی داشته، که از اهم آنها تاریخ هندسهٔ[5] ائودموس در چهار مقاله و اثر ظاهراً جامع گمینوس[6] به نام نظریهٔ علوم ریاضی[7] می‌باشند. شرح

---

1. Hypatia 2. Simplicius 3. Charles Kingsley

* *Hypatia or New Foes with an Old Face.* (New York: E. P. Dutton, 1907).

4. *Commentary on Euclid, Book 1* 5. *History of Geometry*

6. Geminus 7. *Theory of the Mathematical Sciences*

پروکلوس بر جمهوریت[1] افلاطون نیزشامل عبارات جالبی برای مورخین ریاضی است. پروکلوس در اسکندریه درس خواند، در رأس مدرسهٔ آتنی قرارگرفت، و در سال ۴۸۵ وقتی حدود ۷۵ سال داشت، درآتن درگذشت.

به سیمپلیکیوس، شارح‌ارسطو، نیزدینی برعهده داریم. وی شرحهایی ازکوششهای آنتیفون را برای تربیع دایره، از هلالهای بقراط، و از دستگاه کرات متحدالمرکز که به وسیلهٔ ائودوکسوس برای توضیح حرکات ظاهری اعضای منظومهٔ شمسی ابداع شده بود، داده است. او شرحی نیز برمقالهٔ اول اصول اقلیدس نوشت، که گزیده‌هایی به زبان عربی بعداً از آن صورت گرفت. سیمپلیکیوس درنیمهٔ اول قرن ششم می‌زیست وهم در اسکندریه و هم درآتن درس خواند.

احتمالا یکی از معاصرین سیمپلیکیوس، ائوتوکیوس بوده، که شروحی بر درباب کره‌ها و استوانه‌ها، اندازه‌گیری دایره، و در باب تعادل در صفحهٔ ارشمیدس، و مقاطع مخروطی آپولونیوس نوشت.

مدرسهٔ آتنی به مبارزات خود دربرابراوجگیری ضدیت مسیحیان ادامه داد تااینکه ایشان، در ۵۲۹ب.م. فرمانی از امپراطور یوستینیایوس[2] دریافت کردند که درهای مدرسه را برای همیشه بست. سیمپلیکیوس وبرخی دیگراز فلاسفه ودانشمندان به ایران گریختند، که درآنجا خسرو اول پادشاه ایران به نیکی آنها را پذیرا شد و در ایران آنچه راکه شاید بتوان آکادمی آتنی ایران نامید، برپاکردند. بذرهای علوم یونانی که به‌این‌ترتیب کاشته شدند، قرنها بعد درکنف حمایت مسلمین شکوفا شدند.*

مدرسهٔ اسکندریه در دست مسیحیان روزگار چندان بهتری نداشت. اما، دست‌کم، تا زمان سقوط اسکندریه به دست اعراب در ۶۴۱ نیمه موجودیتی داشت. اینان پس ازآن برهرچه‌که‌از مسیحیان باقی‌مانده بود،آتش‌افکندند.[3] تاریخ طولانی و باشکوه ریاضیات یونان این‌گونه به پایان رسید.

مطالعهٔ مسئله‌ای

۱.۶ اندازه‌گیریهای آریستارخوس و اراتستن

آریستارخوس ساموسی (حدود ۲۸۷ ق.م.) ریاضیات را در نجوم به‌کار برد. چون وی

---

1. *Republic* 2. Justinian

* نگاه کنید به

George Sarton, *The History of Science*, Vol. 1, p. 400.

[این‌کتاب توسط غلامحسین صدری‌افشار به فارسی ترجمه شده است].

۳. برای اطلاع از نظریات موافق و مخالف در این‌باره رجوع کنید به دکتر ذبیح‌الله صفا؛ تاریخ علوم عقلی در تمدن اسلامی؛ انتشارات مؤسسهٔ امیرکبیر و استاد شهید مرتضی مطهری؛ کتابسوزی ایران و مصر، انتشارات صدرا. ــ م.

فرضیهٔ خورشید مرکزی منظومهٔ شمسی را ارائه داد، به‌عنوان کپرنیك عهد باستان شهرت یافته است.

(الف) آریستارخوس با استفاده از ابزارهـای ابتدایی، مشاهده کـرد که فاصلهٔ زاویه‌ای بین مـاه، وقتی که در تربیع اول باشد، و خورشید ۲۹/۳۰ زاویهٔ قائمه است. وی بـرمبنای این اندازه‌گیری (بـدون استفاده از مثلثات) نشان داد کـه فاصلهٔ زمین تا خورشید بیـن ۱۸ تا ۲۰ بـرابـر فاصلهٔ زمین تا ماه است. صحت و سقم این مطلب را با استفاده از نتیجهٔ مشاهدهٔ آریستارخوس تعیین کنید (زاویهٔ مورد نظـر، در واقع حدود $89°50'$ است).

(ب) آریستارخوس، در رسالهٔ خود، در باب اندازه‌ها و فاصله‌های خورشید و ماه، معادل حقیقت زیر را

$$\frac{\sin a}{\sin b}<\frac{a}{b}<\frac{\tan a}{\tan b},$$

کـه در آن $0<b<a<\pi/2$، به کاربـرد. بادر دست داشتن منحنیهای نمایش توابع $\sin x$ و $\tan x$ نشان دهید کـه باافزایش x از ۰ تا $\pi/2$، $(\sin x)/x$ کاهش یافته، و $(\tan x)/x$ افزایش می‌یابد، و بدین‌طریق نامساویهای بالا را ثابت کنید.

(ج) اراتستن (حدود ۲۳۰ ق.م.) اندازه گیری مشهوری را دربارهٔ زمین انجام داد. وی درسوئنه[1] [آسوان فعلی] به هنگام ظهر ودرموقع انقلاب‌تابستانی، مشاهده کرد که یك تکه چوب قائم هیچ سایه‌ای ندارد، در حالـی که در اسکندریه (که وی تصور می کـرد با سوئنه دریك نصف‌النهار قراردارد) اشعهٔ خورشید به انـدازهٔ ۱/۵۰ یك دایـرهٔ کامل نسبت به حالت قائم انحراف دارد. وی سپس محیط زمین را براساس فاصلهٔ معلوم ۵۰۰۰ استاد[2] [یا استادیوم، نزد یونـانیان واحد طول بـوده، معادل ۱۸۰ گز] بین اسکندریه و سوئنه محاسبه کرد. نتیجهٔ اراتستن را دایر براینکه محیط زمین ۲۵۰۰۰۰ استاد است، به دست آورید. دلیلی دردست است که فرض کنیم یك استاد اراتستنی تقـریباً برابر با ۵۵۹ پا بوده است. با فرض اخیر، از نتیجهٔ فوق قطرقطبی زمین را برحسب مایل حساب کنید: (قطر قطبی زمین باتقریب به نزدیکترین مایل ۷۹۰۰ مایل است).

۲۰۶ درباب کره و استوانه

(الف) صحت دو نتیجهٔ زیر راکه توسط ارشمیدس در اثر او به‌نام در باب کره و استوانه ثابت شده، تحقیق کنید.

۱. حجم کره برابر است با دوسوم حجم استوانهٔ محیطی آن.

۲. سطح کره برابر است با دوسوم سطح کل استوانهٔ محیطی آن.

---

1. Syene 2. Stade

(ب) منطقهٔ‌کروی (با یك ودوقاعده)، قطعهٔ کروی (با یك و دو قاعده)، و قطاع کروی را تعریف کنید.

(ج) با مفروض بودن قضیهٔ زیر: مساحت یك منطقهٔ کروی برابر است باحاصلضرب محیط دایرهٔ عظیمه درارتفاع منطقه، فرمول متداول مساحت‌کره رابه دست آورید و قضیهٔ زیر را ثابت‌کنید: مساحت یك منطقهٔ کروی با یك قاعده [عرقچین‌کروی] برابر است با مساحت دایره‌ای که شعاع آن وتر قوس مولد باشد.

(د) با فرض اینکه حجم یك قطاع کروی با یك سوم حاصلضرب مساحت قاعدهٔ آن و شعاع کره داده می‌شود، نتایج زیررا به دست آورید:

۱. حجم‌یك قطعهٔ‌کروی با یك قاعده، به ارتفاع h وبه شعاع قاعدهٔ a که از کره‌ای به شعاع R بریده شود، با رابطهٔ

$$V=\pi h^{۲}\left(R-\frac{h}{۳}\right)=\pi h\left(\frac{۳a^{۲}+h^{۲}}{۶}\right)$$

داده می‌شود.

۲. حجم یك قطعهٔ کروی با دو قاعده، به ارتفاع h و با شعاعهای قاعدهٔ a و b با رابطهٔ

$$V=\frac{\pi h(۳a^{۲}+۳b^{۲}+h^{۲})}{۶}$$

داده می‌شود.

۳. قطعهٔ کروی (۲) معادل است با مجموع کره‌ای به شعاع $h/۲$ و دواستوانه‌که ارتفاعهای آنها هریك $h/۲$ و شعاعهای قاعده‌شان، به ترتیب، a و b است.

(ه) ارشمیدس در مقالهٔ II درباب کره و استوانه، مسئلهٔ قطع دادن کرهٔ مفروضی را با صفحه‌ای در نظر می‌گیرد به طوری که حجمهای دو قطعهٔ تشکیل شده به نسبت مفروضی باشند. نشان دهیدکه، درنمادگذاری امروزی، این کاربه معادلهٔ

$$n(R-x)^{۲}(۲R+x)=m(R+x)^{۲}(۲R-x).$$

منجر می‌شودکه در آن R شعاع کره، x فاصلهٔ صفحهٔ قاطع از مرکزکره، و $m/n<۱$ نسبت مفروض‌است.

(و) نشان دهیدکه چگونه می‌توان سطح یك‌کره را به‌کمك دوصفحهٔ موازی به سه قسمت با مساحتهای برابر تقسیم کرد.

۳.۶ مسئلهٔ تاج

قضیهٔ ۷ مقالهٔ اول اثر ارشمیدس به نام در باب اجسام شناور، قانون مشهور ئیدروستاتیك

است: هرجسم غوطه‌ور در یك مایع به اندازهٔ نیرویی برابر با وزن مایع جابه‌جا شده، به سمت بالا رانده می‌شود.

(الف) فرض کنید تاجی به وزن w پوند از w_1 پوند طلا و w_2 پوند نقره ساخته شده باشد. فرض کنید که w پوند طلای خالص وقتی در آب وزن شود، به اندازهٔ f_1 پوند و w پوند نقرهٔ خالص وقتی در آب وزن شود، به اندازهٔ f_2 پوند، کاهش وزن یابند، و وقتی تاج در آب وزن شود، f پوند از وزن آن کاسته می‌شود. نشان دهید که

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{f_2-f}{f-f_1}.$$

(ب) فرض کنید که تاج قسمت (الف)، وقتی در آب غوطه‌ور شود، حجمی به‌اندازهٔ V اینچ مکعب آب را جابه‌جا کند و تکه‌هایی از طلا و نقرهٔ خالص، با وزنی به اندازهٔ تاج، به ترتیب، V_1 و V_2 اینچ مکعب آب را، وقتی در آن غوطه‌ور شوند، جابه‌جا نمایند. نشان دهید که

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{V_2-V}{V-V_1}.$$

۴.۶ گزن و سالینون

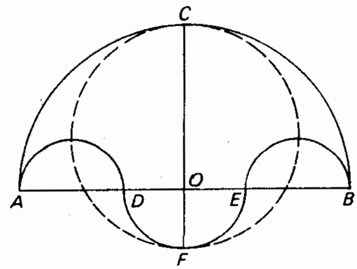
لیبراسومپتورودوم، یا کتاب لمها [مأخوذات] که از طریق ترجمهٔ عربی محفوظ مانده است، شامل برخی قضایای هندسی ظریف منسوب به ارشمیدس است. در بین اینها بعضی خواص گزن یا «کارد کفاشی» قرار دارند. فرض کنید که A، B، C سه نقطهٔ واقع بر یك خط راست باشند، به طوری‌که C بین A و B قرار دارد. نیمدایره‌هایی در یك طرف خط و به قطرهای AC، CB، AB رسم می‌شوند. گزن، شکلی است که به وسیلهٔ این سه نیمدایره محصور شده است. در C، عمودی بر AB اخراج کنید تا بزرگترین دایره را در G قطع کند. فرض کنید که T و W نقاط تماس مماس مشترك خارجی دو نیمدایرهٔ کوچکتر باشند. AC، CB، AB را با $2r_1$، $2r_2$، $2r$ نشان دهید. خواص مقدماتی گزن را که در زیر می‌آیند، ثابت کنید:

(الف) GC و TW مساوی و منصف یکدیگرند.

(ب) مساحت گزن برابر است با مساحت دایره‌ای به قطر GC.

(ج) خطوط GA و GB به ترتیب، از T و W می‌گذرند.

گزن دارای خاصیتهای بسیاری است که اثبات آنها چندان ساده نیست. به عنوان مثال چنین گفته می‌شود که ارشمیدس نشان داده که دوایر محاطی داخلی مثلثهای منحنی‌الخط ACG و BCG مساوی‌اند، و قطر هریك r_1r_2/r است. کوچکترین دایره‌ای که بر این دو دایره مماس بوده و بر آنها محیط است برابر با دایره‌ای به قطر GC، و بنابراین از نظر مساحت با گزن مساوی است. در گزن، زنجیری از دایره‌های C_1، C_2، ...، را در نظر بگیرید



شکل ۵۰

که همه برنیمدایره‌های به قطر AB و AC مماس باشند، و در آن C_1 همچنین برنیمدایرهٔ به‌قطر BC مماس است، C_2 بر C_1 مماس است وقس‌علی‌هذا. دراین‌صورت اگر r_n نمایش شعاع C_n و h_n فاصلهٔ مرکز آن از ACB باشد، داریم $h_n = 2nr_n$. قضیهٔ اخیر درمقالهٔ IV مجموعهٔ ریاضی پاپوس دیده می‌شود و درآنجا به عنوان یك «قضیهٔ باستانی» به‌آن اشاره شده است.

(د) قضیهٔ ۱۴ لیبراسومپتوروم دربارهٔ شکلی است بـه نام سالینون[1] («انبار نمك») که درشکل ۵۰ تصویر شده و درآن نیمدایره‌هایی برروی پاره‌خطهای AB، AD، DE، و EB و به‌قطر این‌پاره‌خطها، با $AD = EB$، رسم می‌شوند. قضیهٔ مزبور بیان می‌کند که مساحت‌کل سالینون (کـه به طورکامل باکمانهای نیمدایره شکل محصور است) برابر با مساحت دایره‌ای است که قطرآن خط تقارن شکل، FOC، است. این‌حکم را ثابت‌کنید.

۵.۶ قضیهٔ وتر شکسته

ابوریحان بیرونی (۹۷۳–۱۰۴۸) قضیهٔ وتر شکسته را به ارشمیدس نسبت داده است، که بیان می‌کند هرگاه، همچنان‌که در شکل ۵۱ نشان داده شده، AB و BC وترشکسته‌ای را در یك دایره تشکیل دهند و $BC > AB$، و اگر M نقطهٔ وسط قوس ABC باشد، F پای عمود وارد از M بر BC نقطهٔ وسط وتر شکسته ABC است.

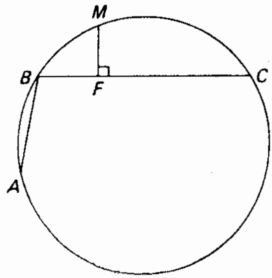
(الف) قضیهٔ وترشکسته را ثابت‌کنید.

(ب) با قراردادن $2x =$ (قوس MC) و $2y =$ (قوس BM)، متوالیاً نشان دهید که $MC = 2\sin x$، $BM = 2\sin y$، $AB = 2\sin(x-y)$، $FC = 2\sin x\cos y$، $FB = 2\sin y\cos x$. حال نشان دهید که ازقضیهٔ وترشکسته اتحاد

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$$

نتیجه می‌شود.

1. salinon



شکل ۵۱

(ج) با استفاده از قضیهٔ وتر شکسته، اتحاد زیر را به دست آورید

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x.$$

۶.۶ خاصیت کانون ـ هادی

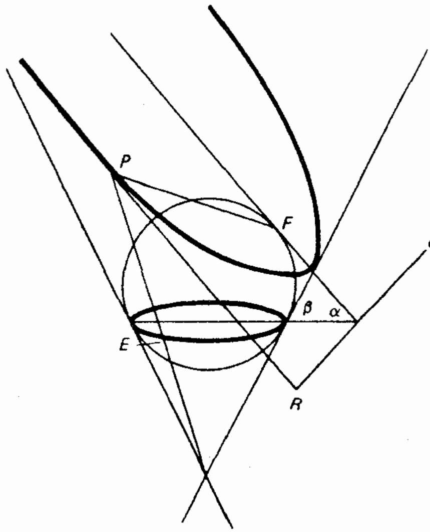
(الف) گرچه یونانیان مقاطع مخروطی را به عنوان مقطعهایی از مخروطها تعریف کرده‌اند، در دروس دانشگاهی در هندسهٔ تحلیلی مرسوم است که آنها را با خاصیت کانون ـ هادی تعریف کنند. لم (۱) زیر را ثابت‌کرده و سپس برهان سادهٔ (۲) راکه هر مقطع از مخروط مستدیر قائم دارای خاصیت کانون ـ هادی است، تکمیل کنید.

۱. طولهای دو پاره‌خط دلخواه محدود بین یك نقطه و یك صفحه به نسبت عکس سینوس زوایایی است‌که این خطوط با صفحه می‌سازند.

۲. صفحهٔ مقطع یك مخروط مستدیر قائم را با p نشان دهید. فرض‌کنید که‌کره‌ای در امتداد یك دایره که صفحهٔ آن را q می‌نامیم برمخروط مماس و نیز با صفحهٔ p درنقطهٔ F مماس باشد (نگاه‌کنید به شکل ۵۲). فرض‌کنید p و q در امتداد خط d یکدیگر را قطع نمایند. از p، که نقطهٔ دلخواهی برمقطع مخروطی است، عمودی مانند PR برخط d وارد کنید. فرض کنید که مولدی از مخروط که از p می‌گذرد صفحهٔ q را در نقطه‌ای مانند E قطع کند. بالاخره، فرض کنید که α زاویهٔ بین صفحات p و q و β زاویه‌ای باشد که یکی از مولدهای مخروط با صفحهٔ q می‌سازد، نشان دهید که $PF/PR=PE/PR=(\sin\alpha)/(\sin\beta)=e$، که در آن e یك مقدار ثابت است. بنابراین F یك کانون، d هادی نظیر آن، و e خروج از مرکز مقطع مخروطی است. (این روش ساده و زیبا در حدود ربع اول قرن نوزدهم به وسیلهٔ دو ریاضیدان بلژیکی به اسامی آدولف کتله[1] (۱۷۹۶ـ۱۸۷۴) و ژرمینال داندلن[2] (۱۷۹۴ـ۱۸۴۷) کشف شد.)

(ب) نشان دهید که اگر p کلیهٔ مولدهای یکی از دوپارچهٔ مخروط را قطع کند،

1. Adolphe Quetelet 2. Germinal Dandelin



شکل ۵۲

آنگاه $e<1$؛ اگر p با یکی و فقط با یکی از مولدهای مخروط موازی باشد آنگاه $e=1$، اگر p هردو پارچهٔ مخروط را قطع کند، آنگاه $e>1$.

۷.۶ تماسها

در رسالهٔ مفقود خود دربارهٔ تماسها، آپولونیوس مسئلهٔ رسم دایره‌ای مماس بر سه دایرهٔ مفروض A، B، C را بررسی نمود، که در آن A، B، C هریك می‌توانند به طور مستقل یکی از اشکال تبهگن نقطه یا خط راست را به خود گیرند. این مسئله به **مسئلهٔ آپولونیوس** شهرت یافته است.

(الف) نشان دهید که برای مسئلهٔ آپولونیوس، بسته به اینکه هر یك از A، B، C، نقطه، خط، یا دایره باشند، ده حالت وجود دارد. تعداد جوابها درهرحالت کلی چیست؟

(ب) مسئله را وقتی که A، B، C دو نقطه و یك خط باشند، حل کنید.

(ج) مسئله را وقتی که A، B، C دو خط و یك نقطه باشند به حالت (ب) تحویل نمایید.

(د) کانون و هادی یك سهمی p، وخطی‌مانند m داده شده‌اند. باابزارهای اقلیدسی نقاط تلاقی p و m را پیدا کنید.

۸.۶ مسائلی از آپولونیوس

(الف) مسئلهٔ سادهٔ گرایشی زیر را که توسط آپولونیوس در کتاب گرایشها مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، حل کنید: درج وتری با طول مفروض در یك دایرهٔ مفروض که بر یك نقطهٔ مفروض گرایش داشته باشد.

یك مسئلهٔ مشکلتر مربوط به گرایشها که به وسیلهٔ آپولونیوس مطالعه شده، چنین است: یك لوزی که یکی از اضلاع آن امتداد داده شده، مفروض است. مطلوب است درج پاره‌خطی به‌طول مفروض در زاویهٔ خارجی آن به طوری که امتدادش بر رأس مقابل گرایش داشته باشد. راه حلهای متعددی براین مسئله به وسیلهٔ هویگنس (۱۶۹۵-۱۶۲۹) داده شده است.

(ب) به کمك هندسهٔ تحلیلی، دو مسئلهٔ (۱) و (۲) را که در بخش ۶-۴ در رابطه باکتاب مکانهای مسطح آپولونیوس بیان شد، ثابت کنید.

(ج) به طور ترکیبی اولین مسئله در (ب) و نیز حالت خاص زیر ازمسئلهٔ دوم در (ب) را حل کنید: مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعات فواصلش از دو نقطهٔ معین، ثابت باشد، دایره‌ای است که مرکز آن وسط پاره‌خطی است که دو نقطهٔ مزبور را به‌هم وصل می‌کنند.

۹.۶ جدول اوتار بطلمیوس

(الف) قضیهٔ بطلمیوس را ثابت کنید: در یك چهارضلعی محاطی حاصلضرب قطرها برابر است با مجموع حاصلضربهای اضلاع مقابل.

(ب) از قضیهٔ بطلمیوس، روابط زیر را استخراج کنید:

۱. اگر a و b وترهای دو قوس از دایره‌ای به شعاع واحد باشند، آنگاه

$$s=\frac{a}{۲}(۴-b^{۲})^{۱/۲}+\frac{b}{۲}(۴-a^{۲})^{۱/۲}$$

وتر مجموع دو قوس است.

۲. اگر a و b، که در آن $a\geqslant b$، وترهای دو قوس از دایره‌ای به شعاع واحد باشند، آنگاه

$$d=\frac{a}{۲}(۴-b^{۲})^{۱/۲}-\frac{b}{۲}(۴-a^{۲})^{۱/۲}$$

وتر تفاضل دو قوس است.

۳. اگر t وتر قوسی از یك دایره به شعاع واحد باشد، آنگاه

$$s=\{۲-(۴-t^{۲})^{۱/۲}\}^{۱/۲}$$

وتر نصف قوس است.

در دایره‌ای به شعاع واحد $\text{crd}\ ۶۰^\circ = ۱$، و می‌توان نشان داد که $\text{crd}\,۳۶^\circ = ۰٫۶۱۸۰$، که برابر است با قطعهٔ بزرگتر شعاع وقتی که به‌نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰.۳(د)). بنابر (۲)، $\text{crd}\ ۲۴^\circ = \text{crd}\ (۶۰^\circ - ۳۶^\circ) = ۰٫۴۱۵۸$. بنابر (۳) می‌توانیم وترهای ۱۲°، ۶°، ۳°، $۹۰'$، و $۴۵'$ را حساب کنیم و $\text{crd}\ ۹۰' = ۰٫۰۲۶۲$ و $\text{crd}\ ۴۵' = ۰٫۰۱۳۱$ را به‌دست آوریم. از مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰.۶(ب)، $\text{crd}\,۶۰'/\text{crd}\,۴۵' < ۶۰/۴۵ = ۴/۳$، یا $\text{crd}\,۱^\circ < (۴/۳)(۰٫۰۱۳۱) = ۰٫۰۱۷۵$، همچنین

$$\text{crd}\ ۹۰'/\text{crd}\ ۶۰' < ۹۰/۶۰ = ۳/۲$$

یا $\text{crd}\ ۱^\circ > (۲/۳)\,(۰٫۰۲۶۲) = ۰٫۰۱۷۵$. بنابراین $\text{crd}\ ۱^\circ = ۰٫۰۱۷۵$. از (۳) می‌توانیم $\text{crd}\ (۱/۲)^\circ$ را پیدا کنیم. حال می‌توان جدول اوتاری به فاصله‌های $(۱/۲)^\circ$ ساخت. این هستهٔ اصلی‌روش بطلمیوس برای ساختن جدول اوتار خود است.

(ج) نشان دهید که روابط (۱)، (۲)، و (۳) در (ب) معادلهای فرمولهای مثلثاتی برای $\sin(\alpha - \beta)$، $\sin(\alpha + \beta)$، و $\sin(\theta/۲)$ هستند.

(د) قضایای جالب زیر را به عنوان پیامدهای قضیهٔ بطلمیوس ثابت کنید: اگر P نقطه‌ای برقوس AB از دایرهٔ محیطی:

۱. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، آنگاه $PC = PA + PB$.

۲. مربع $ABCD$ باشد، آنگاه $(PA + PC)PC = (PB + PD)PD$.

۳. پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ باشد، آنگاه $PC + PE = PA + PB + PD$.

۴. شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ باشد، آنگاه

$$PD + PE = PA + PB + PC + PF.$$

۱۰.۶ تصویر گنجنگاشتی

در کتاب پلانیسفریوم [تسطیح کره] خود، بطلمیوس **تصویر گنجنگاشتی** را به‌عنوان‌نگاشتی مطرح کرد که ضمن آن نقاط روی کره، با تصویر از قطب جنوب، برصفحهٔ استوای کره نمایش داده می‌شوند. تحت این نگاشت (نگاه کنید به شکل ۵۳)

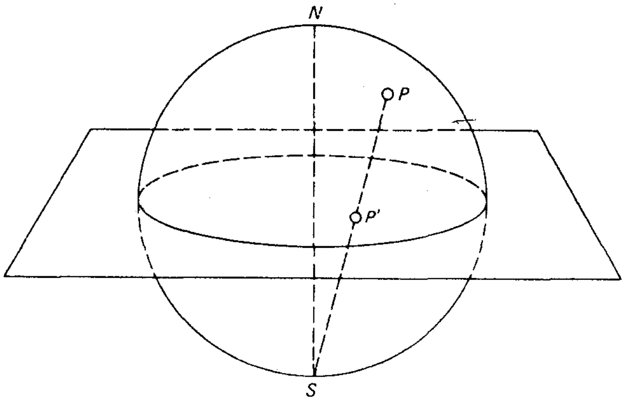
(الف) مدارهای جغرافیایی،

(ب) دایره‌های نصف‌النهار،

(ج) دایره‌های صغیره، روی کره، که از قطب جنوب می‌گذرند،

به چه صورت درمی‌آیند؟

می‌توان نشان‌داد که هردایره‌ای بر کره که برقطب جنوب نگذرد، بردایره‌ای بر روی صفحه نگاشته می‌شود. یك خاصیت بسیار مهم این است که تصویر گنجنگاشتی، یك نگاشت همدیس است، یعنی، نگاشتی که زوایای بین‌منحنیها را حفظ می‌کند. چرا این‌خاصیت در نگاشت قسمت کوچکی از سطح زمین بر یك صفحه اهمیت دارد؟ (بسط جالب توجهی از



شکل ۵۳

مثلثات کروی از روی مثلثات مسطحه و به کمك تصویر گنجنگاشتی در کتاب ج. د. ه. دونی، تحت عنوان مثلثات کروی به تقلید از روش چزارو[1] داده شده است.)

۱۱.۶ مسائلی از هرون

(الف) هفت‌ضلعی منتظم را نمی‌توان با ابزارهای اقلیدسی رسم کرد. هرون در اثر خود، متریکا، برای یك ترسیم تقریبی، ضلع هفت ضلعی منتظم را با سهم شش‌ضلعی منتظمی که دایرهٔ محیطی آن با دایرهٔ محیطی هفت ضلعی منتظم یکی است، برابر می‌گیرد. این تقریب تا چه حد مناسب است؟

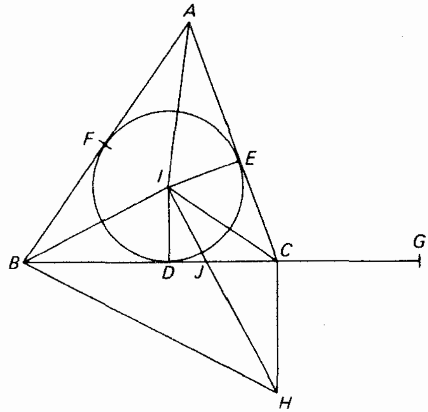
(ب) هرون در کاتوپتریکا، برمبنای این فرض که نور در کوتاهترین مسیر حرکت می‌کند، ثابت می‌کند که زوایای تابش و بازتابش در یك آیینه مساوی‌اند. این مطلب را ثابت کنید.

(ج) مردی قصد دارد برای آوردن یك سطل آب از خانهٔ خود به‌ساحل رودخانه‌ای که لبهٔ مستقیمی دارد، برود و بعداً آن را به‌طویله‌اش، که با خانه در یك‌طرف رودخانه قرار دارد، ببرد. نقطه‌ای از ساحل رودخانه را پیدا کنید که مسافتی را که وی باید طی نماید، مینیمم می‌سازد.

(د) جزئیات استخراج فرمول Δ برای مساحت یك مثلث ABC برحسب اضلاع a، b، c آن توسط هرون را که در زیر ذکر می‌شود، کامل کنید.

۱. فرض کنید که دایرهٔ محاطی، به مرکز I و شعاع r بر اضلاع BC، CA، AB

1. J.D.H. Donnay, *Spherical Trigonometry after the Cesaro Method* (New York: Interscience, 1945).



شکل ۵۴

در نقاط D، E، F، مطابق شکل ۵۴، مماس باشد. برامتداد BC، G را چنان اختیار کنید که $CG=AE$. پاره‌خط IH را بر BI عمود کنید تا BC را در J و خط عمود بر BC در C را در H قطع کند.

۲. اگر $s=(a+b+c)/۲$، آنگاه $\Delta=rs=(BG)(ID)$.

۳. B، I، C، H بر یك دایره واقع‌اند، از این‌رو $\measuredangle CHB$ مکمل $\measuredangle BIC$ و بنابراین برابر با $\measuredangle EIA$ است.

۴. $BC/CG=BC/AE=CH/IE=CH/ID=CJ/JD$

۵. $BG/CG=CD/JD$

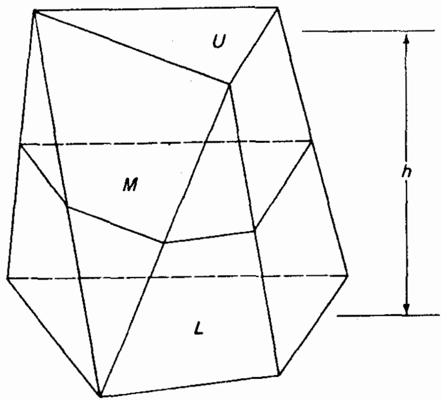
۶.
$$(BG)^۲/(CG)(BG)=(CD)(BD)/(JD)(BD)$$
$$=(CD)(BD)/(ID)^۲$$

۷.
$$\Delta=(BG)(ID)=\{(BG)(CG)(BD)(CD)\}^{۱/۲}$$
$$=\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}^{۱/۲}.$$

(هـ) فرمول (د) را باروش زیر استخراج کنید: فرض کنید h ارتفاع وارد برضلع c و m تصویر ضلع b برضلع c باشد. (۱) نشان دهید که $m=(b^۲+c^۲-a^۲)/۲c$. (۲) این مقدار برای m را در $h=(b^۲-m^۲)^{۱/۲}$ بگذارید. (۳) این مقدار را به جای h در $\Delta=(ch)/۲$ بگذارید.

(و) ازراه تقریبات متوالی، به روش هرون، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۷۲۰}$ را تقریب کنید.

(ز) **منشورنما** [پریسماتوئید] چند وجهیی است که رأسهای آن در دوصفحهٔ موازی قرار دارند. دو وجه واقع در این‌دو صفحهٔ موازی **قاعده‌های** منشورنما خوانده می‌شوند، فاصلهٔ عمودی بین دو صفحه، **ارتفاع** منشورنما، نام دارد، و مقطع موازی با قاعده‌ها



شکل ۵۵

و به یك فـاصله از آنها **مقطع میانی** منشورنما نامیده می‌شود. حجم منشورنما را با V، مساحتهای قاعـدهٔ بالا، قاعـدهٔ پایین، ومقطع میانی را با U، L، M، و ارتفاع را با h، همچنان کـه در شکل ۵۵ نشان داده شده، نمایش می‌دهیم. در کتابهای مربوط به هندسهٔ فضایی نشان داده شده است که

$$V=\frac{h(U+L+۴M)}{۶}.$$

در مقالهٔ دوم متریکا ، هرون برای حجم منشورنمایی کـه دارای قاعـده‌های مستطیل شکل هم‌جهت و با زوج اضلاع متناظر a، b و c، d است، فرمول

$$V=h\left[\frac{(a+c)(b+d)}{۴}+\frac{(a-c)(b-d)}{۱۲}\right]$$

را می‌دهد. نشان دهیدکـه این نتیجه معادل است با آنچه‌که به وسیلهٔ فرمول منشورنما در بالا داده شده است.

(ح) نشان دهید که «عظیمترین هـرم مصری» (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۳.۲ (الف)) حالت خاصی از فرمول منشورنمای (ز) است.

۱۲.۶ دستگاه معادلات همزمان

(الف) توماریداس[1]، ریاضیدان کم‌اهمیت‌تری مربوط به قرن چهارم ق.م.، قاعدهٔ زیررا برای حل مجموعه‌ای از n معادلهٔ خطی همزمان، با n مجهول ارائه کرد. این قاعده

1. Thymaridas

به قدری مشهور شدکه عنوان **گل توماریداس** به آن داده شد. اگر مجموع n کمیت، و همچنین مجموع همهٔ زوجهایی که شامل کمیت خاصی از این n کمیت است، معلوم باشند در این صورت این کمیت خاص برابر است با $1/(n-2)$ برابر تفاضل بین مجموع این زوجها و اولین مجموع داده شده. این قاعده را ثابت کنید.

(ب) در بعضی مسائل داده شده در مجموعهٔ هرونی فرمولهای

$$a \text{،} b=\frac{(r+s)\pm\{(r+s)^{۲}-۸rs\}^{۱/۲}}{۲}$$

برای ساقهای a و bی یك‌مثلث قائم‌الزاویه بامحیط s۲ وشعاع دایرهٔ محاطی r ظاهرمی‌شود. این فرمولها را به دست آورید.

۱۳.۶ مسائلی از «آنتولوژی یونانی»

(الف) چند سیب لازم است تا چهار نفر از بین شش نفر، به ترتیب، یك سوم، یك‌هشتم، یك‌چهارم، و یك‌پنجم تعداد کل آنها را دریافت کنند و پنجمی ده سیب دریافت کند، و یك سیب برای نفر ششم باقی بماند؟

(ب) دموخارس[۱] یك‌چهارم زندگی خود را در کودکی، یك‌پنجم آن را درجوانی، یك سوم آن را درسنین میانسالی و ۱۳ سال را درکهولت گذرانده است. وی چندسال دارد؟

(ج) باآنکه برای افزونتر کردن تو، ای طلایی که همه را مقهور خودداری، از راه عدالت خارج شدم، خود را تهیدست می‌بینم؛ زیرا که از بخت‌بد ۴۰ تالان[۲] آن را بیهوده به دوستان دادم، درحالی‌که اکنون، آه ای مایهٔ نامرادیهای گوناگون بشر، می‌بینم که دشمنانم، نیم، ثلث، و یك‌هشتم دارایی مرا در چنگ دارند. (این مرد نگون‌بخت در ابتدا چند تالان داشته؟)

(د) خارس[۳]ها سبدهایی از سیب حمل می‌کردند که درهریك تعدادی مساوی سیب

---

1. Demochares

2. talent [واحد پولی دریونان قدیم]

۳. در متن Graces جمع Grace که مبدل از Charis (خارس) یونانی است که جمع آن Charites می‌باشد و اینان، در افسانه‌های یونان باستان، سه الهه بودند و خوشی، فریبندگی، و زیبایی در زندگی انسانها و در طبیعت به دست آنان بوده است و عبارت بوده‌انداز: آگالیا (Agalia) = زیرکی، ائوفروزون (Euphrosyne) = خوشی، و تالیا (Talia) = شکوفه. ـــ م.

قرار داشت. موسا[1]ها به آنها برخوردند وازهریك ازآنها سیب خواستند و آنها تعدادی مساوی سیب به هـریك از موساها دادند واکنون هر کدام از نه موسا و سه خارس تعداد مساوی سیب دارند. به من بگو که آنها چندتا سیب دادند و چگـونه تعداد سیبهای آنها مساوی شد. (این مسئله‌ای در معادلات سیالـه است. کـوچکتـرین جواب قابل قبول را پیدا کنید.)

۱۴۰۶ مسئلهٔ گونه‌ها از «آنتولوژی یونانی»

مسائلی از نوع متعارف درکتابهـای جبر مقدماتی امروزه یافت می‌شوند که به زمانهای قدیم بازمی‌گردند. برای مثال مسئلهٔ «کار»، مسئلهٔ «آب‌انبار»، و مسئلهٔ «اختلاط و امتزاج» زیرین را که در کتاب آنتولوژی یونانی دیده می‌شوند، درنظربگیرید.

(الف) آجـرساز، من دراتمام این خانه تعجیل دارم. امروز هوا صاف است ومن دیگر خیلی آجر لازم ندارم. زیرا تمام آنچه را که می‌خواهم بجز سیصدتا دارم. توبه تنهایی در یك روز می‌توانی این‌قـدر آجـر بسازی، اما پسرت وقتی کار دویست آجر را تمام‌کرد، و دامادت وقتی دویست و پنجاه آجر ساخته بود، دست از کارکشیدند. اگرهمه باهم کارکنید، این تعداد آجر را چند روزه می‌سازید؟

(ب) من‌یك شیربرنجین هستم؛ فواره‌های من دوچشم من، دهانم، وکف پای راستم است. چشم راستم‌کوزه‌ای را در دو، چشم چپم در سه، وپای راستم درچهار روز (۱روز = ۱۲ ساعت) پر می‌کنند. دهانم قادربه پرکردن آن در شش ساعت است. به من بگو این چهار فواره برروی‌هم درچه مدت آن را پر خواهند کرد؟

(ج) تاجی ازطلا، مس، قلع، وآهن به وزن ۶۰ مینا[2] بسازید، به طوری‌که دوسوم آن طلا و مس، سه‌چهارم آن طلا و قلع، و سه‌پنجم آن طلا وآهـن باشد. وزن طلا، مس، قلع، وآهن مـوردنیاز را پیدا کنید. این یك مثال عددی از گل تومارپداس است (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲۰۶ (الف)).

۱۵۰۶ دیوفانتوس

(الف) تقریباً همهٔ آنچـه از زندگی شخصی دیوفانتوس می‌دانیم همان است کـه

---

۱. درمتن Muse، مبدل ازکلمهٔ یونانی mousa است. این‌کلمه در افسانه‌های یونان باستان اشارت به هـر یك از نه الهه‌ای داردکه فرمانروای ادبیات و هنرها و علوم بوده‌انـد. اینها عبـارت بوده‌اند از کالیوپ (Calliope)، کلیو (Clio) ائوتـروپ (Eutrope)، ملپومن (Melpomene)، ترپ‌زیخور (Therpsichor)، اراتو (Erato)، پولومینا (Polymina)، اورانیا (Urania)، و تالیا (Talia).ـم.

۲. mina واحد وزنی بوده متغیر و متداول در یونان، مـصر باستان، و غیره و عموماً معادل ۱۰۰ درهم گرفته می‌شده. ـم.

درخلاصهٔ زیر از کتیبهٔ گوری که در آنتولوژی یونانی داده‌شده، مندرج است: «دیوفانتوس یك ششم زندگانی خود را درکودکی به سر برد، یك‌دوازدهم آن‌را درجوانی، و یك‌هفتم دیگر را درتجرد. پنج سال بعد از ازدواجش صاحب پسری شد که چهار سال پیش از پدر، در سنی که نصف سن (نهایی) پدرش بود، درگذشت». دیوفانتوس به هنگام وفات چند سال داشت؟

(ب) مسئلهٔ زیر را، که در آریثمتیکای دیوفانتوس آمده است (مسئلهٔ ۱۷، مقالهٔ اول) حل کنید: چهار عدد پیدا کنید، که مجموع هر آرایش سه به سه آنها معلوم باشد، مثلا ۲۲، ۲۴، ۲۷، و ۲۰.

(ج) مسئلهٔ زیر را، که آن نیز درآریثمتیکا (مسئلهٔ ۱۶، مقالهٔ ششم) یافت می‌شود، حل کنید:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، که در C قائمه است، AD زاویهٔ A رانصف می کند. مجموعهٔ کوچکترین اعداد صحیح رابرای AB، AD، AC، BD، DC پیدا کنید به‌طوری که $DC:CA:AD=۳:۴:۵$.

(د) اوگاستس دمورگن[1]، که در قرن نوزدهم می‌زیست، معمای زیر را مطرح کرد: «من در سال $x^۲$، x ساله بودم.» وی چه موقع به دنیا آمده بوده؟

۱۶.۶ مطالبی از نظریهٔ اعداد «آریثمتیکا»

(الف) اتحادهای

$$(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲)=(ac\pm bd)^۲+(ad\mp bc)^۲$$

را ثابت و ازآنها برای بیان $(۳۷)(۱۳)=۴۸۱$ به صورت مجموع دو مربع کامل به دو طریق مختلف، استفاده کنید.

این اتحادها بعدها، درسال ۱۲۰۲، توسط فیبوناتچی در لیبرآباکی وی داده شدند و نشان می‌دهند که حاصلضرب دوعدد که هر یك از آنها به صورت مجموع دو مربع کامل قابل بیان باشد، به صورت مجموع دو مربع کامل نیز قابل بیان است. می‌توان نشان دادکه این اتحادها فرمولهای جمع برای سینوس و کسینوس را دربر می گیرند. اتحادها بعداً منشأ نظریهٔ گاوسی صورتهای درجهٔ دوم حسابی و برخی پیشرفتها در جبر نوین شدند.

(ب) $(۱۷)(۱۳)(۵)=۱۱۰۵$ را به چهار طریق مختلف به صورت مجموع دو مربع کامل نشان دهید.

در دو مسئلهٔ زیر «عدد» به معنی «عددگویای مثبت» است.

(ج) اگر m و n اعدادی بااختلاف ۱ باشند، واگر x، y، a اعدادی باشند به‌طوری که $x+a=m^۲$، $y+a=n^۲$، نشان دهید که $xy+a$ یك مربع کامل است.

---
1. Augustus De Morgan

(د) اگر m عدد دلخواهی باشد و $x=m^2$، $y=(m+1)^2$، $z=2(x+y+1)$، نشان دهید که شش عدد $xy+x+y$، $yz+y+z$، $zx+z+x$، $xy+z$، $yz+x$، $zx+y$ همه مجذور کامل‌اند.

۱۷.۶ مسائلی از پاپوس

(الف) در مقالهٔ III مجموعهٔ ریاضی پاپوس، نمایش هندسی جالب زیررا ازبعضی میانگینها می‌یابیم. B را روی پاره‌خط AC اختیارکنید، به طوری که B نقطهٔ وسط AC، یعنی O نباشد. عمود بر AC در B را خارج کنید تا نیمدایرهٔ به قطر AC را در D قطع کند، و فرض کنیدکه F پای عمود وارد از B بر OD باشد. نشان دهیدکه OD، BD، FD نمایش میانگین حسابی، میانگین هندسی ومیانگین همساز پاره‌خطهای AB وBCاند، و نشان دهیدکه، اگر $AB\neq BC$،

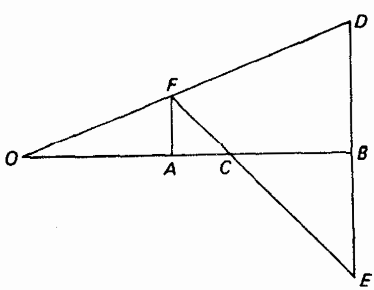
. میانگین همساز<میانگین هندسی<میانگین حسابی

(ب) در مقالهٔ III مجموعهٔ ریاضی، پاپوس ترسیم زیرکانهٔ زیررا برای میانگین همساز دوپاره‌خط مفروض OA و OB درشکل ۵۶ می‌دهد. برروی عمودبر OB درB، $BD=BE$ را جدا و فرض کنید که عمود بر OB در A، OD را در F قطع‌کند. EF را رسم کنید تا OB را در C قطع نماید. در این صورت OC میانگین همساز مطلوب است. این را ثابت کنید.

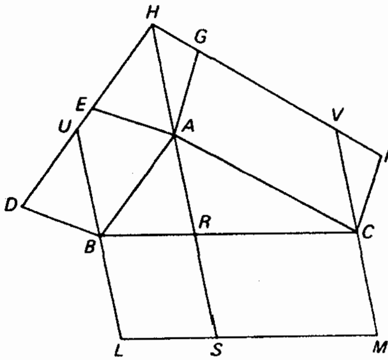
(ج) تعمیم زیر از قضیهٔ فیثاغورس را، که به وسیلهٔ پاپوس در مقالهٔ IV مجموعهٔ ریاضی داده شده، ثابت‌کنید. ABC (نگاه‌کنید بـه شکل ۵۷) مثلث دلخواهی بوده و $ABDE$، $ACFG$ متوازی‌الاضلاعهای دلخواهی باشند که در خارج آن روی AB و AC رسم شده‌اند. فرض کنیدکه DE و FG یکدیگر را در H قطع کنند و BL و CM را مساوی و موازی با HA رسم کنید. دراین صورت

$$\square BCML=\square ABDE+\square ACFG.$$

(د) قضیهٔ (ج) را باگذاشتن یك چهاروجهی به‌جای مثلث ومنشورهای مثلث‌القاعده



شکل ۵۶



شکل ۵۷

بروجوه چهاروجهی به جای متوازی الاضلاعهای روی اضلاع مثلث، به فضای سه بعدی تعمیم دهید.

(ه) در مقالهٔ VIII مجموعهٔ ریاضی، پاپوس قضیهٔ زیر را ثابت می‌کند: اگر D، E، F نقاطی بر اضلاع BC، CA، AB، مثلث ABC باشند به طوری که $BD/DC=CE/EA=AF/FB$، آنگاه مثلثهای DEF و ABC دارای یک مرکز هندسی مشترک‌اند. این حکم را به‌طریقهٔ ترکیبی یا تحلیلی ثابت کنید.

۱۸۰۶ قضایای مربوط به مرکز ثقل

در مقالهٔ VII مجموعهٔ ریاضی، پاپوس در آوردن یکی از قضایای مرکز ثقل که گاهی به پ.گولدین (۱۶۴۲–۱۵۷۷) اسناد داده‌می‌شود، متقدم بوده است. این قضایا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: (۱) اگر یك قوس مستوی حول محوری در صفحهٔ منحنی که ضمناً منحنی را قطع نمی‌کند دوران داده شود، مساحت سطح دواری که بدین ترتیب تشکیل می‌شود برابر است با حاصلضرب طول قوس و طول مسیری که به وسیلهٔ مرکز ثقل قوس پیموده می‌شود. (۲) اگر یك سطح مستوی حول محوری در صفحه‌اش، که سطح را قطع نمی‌کند، دوران داده شود، حجم جسم دواری که بدین ترتیب تشکیل می‌شود برابر است با حاصلضرب آن سطح در طول مسیری که به وسیلهٔ مرکز ثقل آن سطح پیموده می‌شود. با استفاده ازاین قضایا پیداکنید:

(الف) حجم و مساحت رویهٔ چنبره‌ای را که از دوران دایره‌ای به شعاع r حول محوری واقع در صفحهٔ دایره و به فاصلهٔ $R>r$ از مرکز دایره تشکیل می‌شود.

(ب) مرکز ثقل یك قوس نیمدایره‌ای.

(ج) مرکز ثقل یك سطح نیمدایره‌ای.

(دومین قضیهٔ بالا بودکه توسط پاپوس پیشبینی شد ــ عامترین قضیه متضمن حسابان که در عهد باستان مطرح شده بود.)

۱۹.۶ رسم بیضی با پرگار بازودار

قضیهٔ زیر به پروکلوس نسبت داده شده است: اگر پاره‌خطی به طول ثابت درحالی که دو سر آن برروی دو خط متقاطع قراردارند، حرکت کند، آنگاه هرنقطهٔ ثابت روی پاره‌خط، یا براامتداد آن، بخشی از یك بیضی را رسم می‌نماید.

(الف) یك زوج محورهای متعامد Ox و Oy را به عنوان دو خط قضیهٔ پروکلوس انتخاب وفرض کنید AB قطعه خطی با طول ثابت باشد. P را بر AB (یا درصورت لزوم برامتداد آن) انتخاب کنید و AP و BP را با a و b نشان دهید. نشان دهید که وقتی A برمحور yها و B برمحور xها حرکت می‌کند، P بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

را رسم می‌کند.

(ب) مکانیسم ساده‌ای (بیضی‌نگار) برمبنای نتیجهٔ قسمت (الف) برای رسم یك بیضی با نیم‌قطرهای معلوم a و b طرح کنید.

۲۰.۶ قضیهٔ منلائوس

نقطه‌ای که بریك ضلع مثلث یا برامتداد آن واقع است، ولی بریکی از رئوس مثلث نیست یك **نقطهٔ منلائوس** مثلث برای این ضلع نامیده می‌شود. سلسله قضایای زیر را، که در آن همهٔ پاره‌خطها و زوایا، پاره‌خطها و زوایای جهت‌دار (یا سودار) می‌باشند، ثابت کنید:

(الف) **قضیهٔ منلائوس:** شرط لازم و کافی برای اینکه سه نقطهٔ منلائوس D، E، F از اضلاع BC، CA، AB از یك مثلث ABC همخط باشند، آن است که

$$\left(\frac{BD}{DC}\right)\left(\frac{CE}{EA}\right)\left(\frac{AF}{FB}\right)=-1.$$

(ب) اگر رأس O در یك مثلث BOC به نقطه‌ای مانند D (غیراز B یا C) واقع بر خط BC وصل شود، آنگاه

$$\frac{BD}{DC}=\frac{OB\sin BOD}{OC\sin DOC}.$$

(ج) فرض کنید D، E، F نقاط منلائوس‌از اضلاع BC، CA، ABی یك‌مثلث ABC باشند، وفرض کنید O نقطه‌ای درفضا باشدکه در صفحهٔ مثلث ABC نیست. دراین صورت نقاط D، E، F وقتی و فقط وقتی همخط هستندکه

$$\left(\frac{\sin BOD}{\sin DOC}\right)\left(\frac{\sin COE}{\sin EOA}\right)\left(\frac{\sin AOF}{\sin FOB}\right)=-1.$$

(د) فرض کنید که D'، E'، F' سه نقطهٔ منلائوس‌از اضلاع $B'C'$، $C'A'$، $A'B'$ یك مثلث کروی $A'B'C'$ باشند. در این صورت D'، E'، F' برروی دایرهٔ عظیمه‌ای از کره قرار دارند اگر و فقط اگر

$$\left(\frac{\sin \widehat{B'D'}}{\sin \widehat{D'C'}}\right)\left(\frac{\sin \widehat{C'E'}}{\sin \widehat{E'A'}}\right)\left(\frac{\sin \widehat{A'F'}}{\sin \widehat{F'B'}}\right)=-۱.$$

(این حالت کروی قضیهٔ منلائوس است که منلائوس آن را در اسفایریکای خود به کار برده است.)

۲۱.۶ مطالب دیگری دربارهٔ میانگینها

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند میانگینهای زیر برای a و b مفید تشخیص داده شده‌اند:

حسابی : $A=(a+b)/۲$

هندسی : $G=(ab)^{۱/۲}$

همساز : $H=۲ab/(a+b)$

هرونی : $h=[a+(ab)^{۱/۲}+b]/۳$

پاد همساز : $c=(a^۲+b^۲)/(a+b)$

جذر میانگین مربعات : $r=[(a^۲+b^۲)/۲]^{۱/۲}$

مرکز ثقلی : $g=۲(a^۲+ab+b^۲)/۳(a+b)$

(الف) اگر $a\neq b$، نشان دهید که

$$c>r>g>A>h>G>H.$$

(ب) اگر $a^۲$، $b^۲$، $c^۲$ تصاعد حسابی تشکیل دهند، آنگاه $b+c$، $c+a$، $a+b$، تصاعد همساز تشکیل می‌دهد.

(ج) اگر a،b،c تصاعدهمساز تشکیل‌دهند، $a/(b+c)$، $b/(c+a)$، $c/(a+b)$ نیز چنین‌اند.

(د) اگر بین a و b دو میانگین حسابی $A_۱$ و $A_۲$، دو میانگین هندسی $G_۱$ و $G_۲$، و دو میانگین همساز $H_۱$ و $H_۲$ درج شوند، آنگاه $G_۱G_۲:H_۱H_۲=A_۱+A_۲:H_۱+H_۲$.

(ه) فرض کنید که aوb، $a>b$، طولهای قاعده‌های پایینی‌وبالایی یك ذوزنقه را نشان دهند. آنگاه هر پاره‌خط موازی قاعده و محصور بین دو ساق ذوزنقه نوعی میانگین قاعده‌های a و b است. نشان دهیدکه:

۱. میانگین حسابی ساقهای ذوزنقه را نصف می‌کند.
۲. میانگین هندسی ذوزنقه را به دو ذوزنقهٔ متشابه تقسیم می‌کند.
۳. میانگین همساز برنقطهٔ تلاقی قطرها می‌گذرد.
۴. میانگین هرونی در ثلث راه بین میانگین حسابی و میانگین هندسی قراردارد.

۵. میانگین پاد همساز به اندازه‌ای که میانگین همساز بالای میانگین حسابی قرار دارد، از این میانگین پایینتر است.

۶. جذر میانگین مربعات مساحت ذوزنقه را نصف می‌کند.

۷. میانگین مرکز ثقلی از مرکز هندسی مساحت ذوزنقه می‌گذرد.

(و) ذوزنقه‌ای با قاعده‌های a و b رسم کرده و قطعات قسمت (هـ) را بسازید. اکنون به طور هندسی صحت نامساویهای قسمت (الف) را تحقیق کنید.

(ز) عدد $(a+wb)/(۱+w)$، که در آن $w>۰$، **میانگین وزندار** a و b، برای وزن w، نامیده می‌شود. نشان دهید که میانگینهای زیر دارای وزنهای ذکر شده‌اند:

۱. حسابی: $w=۱$

۲. هندسی: $w=\sqrt{a/b}$

۳. همساز: $w=a/b$

۴. هرونی: $w=-(\sqrt{ab}+b-۲a)/(\sqrt{ab}+a-۲b)$

۵. پاد همساز: $w=b/a$

۶. جذر میانگین مربعات:

$$w=-(\sqrt{a^۲+b^۲}-a\sqrt{۲})/(\sqrt{a^۲+b^۲}-b\sqrt{۲})$$

۷. مرکز ثقلی: $w=-(a^۲+ab-۲b^۲)/(b^۲+ab-۲a^۲)$

(ح) فرض کنید PT و PS مماسهای مرسوم بر دایرهٔ مفروض از یک نقطهٔ خارجی مانند P باشند، و فرض کنید TS قاطع قطری PBA را در C قطع کند. نشان دهید که PC میانگین همساز PA و PB است.

(ط) فرض کنید CD و CE نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ C از مثلثی مانند ABC باشند. نشان دهید که AB میانگین همساز AD و AE است.

(ی) فرض کنید s ضلع یک مربع محاط در یک مثلث و یک ضلع آن در امتداد قاعدهٔ مثلث واقع باشد. نشان دهید که s نصف میانگین همساز قاعده و ارتفاع وارد بر این ضلع از مثلث است.

(ك) فرض کنید s یک ضلع مربع محاط در داخل یک مثلث قائم‌الزاویه بوده و یک زاویهٔ آن منطبق بر زاویهٔ قائمهٔ مثلث باشد. نشان دهید که s نصف میانگین همساز ساقهای مثلث است.

(ل) فرض کنید که ABC مثلثی با یک زاویهٔ ۱۲۰° در B باشد، و فرض کنید BT منصف‌الزاویهٔ B باشد. نشان دهید که BT نصف میانگین همساز BA و BC است.

(م) فرض کنید که s، a، b کمانهای یک هفتم، دو هفتم، و سه‌هفتم محیط یک دایره باشند. نشان دهید که s نصف واسطهٔ هندسی بین a و b است.

(ن) اتومبیلی با سرعت $r_۱$ مایل درساعت از A به B سفر می‌کند و سپس با سرعت

r_2 مایل درساعت از B به A باز می‌گردد. نشان دهید که سرعت متوسط در رفت‌و برگشت میانگین همساز r_1 و r_2 است.

(س) یك روش احتیاطی معمول که دررابطه بایك ترازوی دوکفه، وقتی که ظن عدم برابری بازوها می‌رود، به‌کار گرفته می‌شود، به **توزین دوگانه** شهرت دارد. در اینجا وزن مجهول در کفهٔ طرف چپ گذاشته شده و با وزنه‌ای مانند w_1 وزن می‌شود، سپس وزن مجهول درکفهٔ طرف راست گذاشته شده و با وزنه‌ای مانند w_2 توزین می‌شود. نشان دهید که وزن مجهول واسطهٔ هندسی بین w_1 و w_2 است.

(ع) نشان دهید که میانگین مرکز ثقلی a و b برابر است با میانگین هرونی a^2 و b^2 تقسیم برمیانگین حسابی a و b.

(ف) نشان دهید که $g=(H+2c)/3=(2A+c)/3$

عنوان مقاله

۱/۶ چرا ارشمیدس را بزرگترین ریاضیدان دوران باستان می‌دانند؟

۲/۶ اجسام صلب ارشمیدسی، با الگوهای ساختمان آنها.

۳/۶ اقامهٔ ادله مبنی براینکه ارشمیدس مخترع حساب انتگرال بوده است.

۴/۶ اقامهٔ ادله به نفع منایخموس و آپولونیوس به عنوان مخترعین هندسهٔ تحلیلی.

۵/۶ آثار اراتستن.

۶/۶ دستاوردهای ریاضی منجمین یونانی.

۷/۶ تأثیر هرون دربسط ریاضیات کاربردی.

۸/۶ اولین بانوی ریاضیدان.

۹/۶ مکتب ریاضیات اسکندریه.

۱۰/۶ میانگینها.

۱۱/۶ ریاضیات درتمدن روم.

۱۲/۶ «آنتولوژی یونانی».

کتابنامه

AABOE, ASGER, *Episodes from the Early History of Mathematics* (New Mathematical Library, No. 13.) New York: Random House and L. W. Singer, 1964.

APOLLONIUS OF PERGA, *Conics*. 3 vols. Translated by R. Catesby Taliaferro. (Classics of the St. John's program.) Annapolis, Md.: R. C. Taliaferro, 1939.

BUNT, L. N. H.; P. S. JONES; and J. D. BEDIENT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.

CLAGETT, MARSHALL, *Archimedes in the Middle Ages*. 2 vols. Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1964.

——— *Greek Science in Antiquity*. New York: Abelard Schuman, 1955. Paperback ed. New York: Collier Books, 1963.

COHEN, M. R., and I. E. DRABKIN, *A Source Book in Greek Science*. New York: McGraw-

Hill, 1948. Reprinted by Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958.
COOLIDGE, J. L., *History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. New York: Oxford University Press, 1945.
——— *History of Geometric Methods*. New York: Oxford University Press. Paperback ed. New York: Dover, 1963.
DANTZIG, TOBIAS, *The Bequest of the Greeks*. New York: Charles Scribner's, 1955.
DIJKSTERHUIS, E. J., *Archimedes*. New York: Humanities Press, 1957.
EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*. Vol. 1. Boston: Allyn and Bacon, 1963.
GOW, JAMES, *A Short History of Greek Mathematics*. New York: Hafner, 1923.
HARTLEY, MILES C., *Patterns of Polyhedra*. Rev. ed. Ann Arbor, Mich.: Edwards Brothers, 1957.
HEATH, T. L., *Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections*. New York: Barnes and Noble, 1961.
———, *Aristarchus of Sama*. New York: Oxford University Press, 1913. Reprinted by Dover, 1981.
———, *Diophantus of Alexandria*. Rev. ed. New York: Cambridge University Press, 1910.
———, *History of Greek Mathematics*. Vol. 2. New York: Oxford University Press, 1921. Reprinted by Dover, 1981.
———, *A Manual of Greek Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1931.
———, *The Works of Archimedes*. New York: Cambridge University Press, 1897. Reprinted by Dover.
MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. Translated by John Dyer-Bennet. San Francisco: Holden-Day, 1964.
ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.
PETERS, C. H. F., and E. B. KNOBEL, *Ptolemy's Catalogue of Stars; A Revision of the Almagest*. Washington, D.C.: Carnegie Institution, 1915.
SARTON, GEORGE, *Ancient Science and Modern Civilization*. Lincoln, Neb.: The University of Nebraska Press, 1954.
STAHL, W. H., *Ptolemy's Geography; A Select Bibliography*. Lincoln, Neb.: University of Nebraska Press, 1954.
———, *Roman Science*. Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1962.
THOMAS, IVOR, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. 2 vols. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939–41.
VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening*. Translated by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961. Paperback ed. New York: John Wiley, 1963.

۷

ریاضیات چینی، هندی، و عربی

چین*

۷ـ۱ منابع و ادوار

راجع به ریاضیات باستانی چین اساساً چیزی که دارای ماهیت دست اولی باشد، به یادگار نمانده است. این امر ناشی از این واقعیت است که چینیان باستان کشفیات خود را بر خیزران ثبت می‌کردند که با سیر ایام دوام نمی‌آورد. به‌عنوان معضلی افزون بر ایـن، کتابسوزان فضیحت‌باری است که به‌دستور امپراطور خودخواه شی‌هوآنگ‌ـتی[1] در ۲۱۳ ق.م. صورت گرفت. اگرچه فرمان امپراطور یقیناً به‌طور کامل اجرا نشد، و اگرچه بسیاری از کتابهایی که سوزانده شدند بعدها از روی حافظه مجدداً به‌نگارش درآمدند، مـا اکنون به‌اصالت هرآنچه مدعی قدمتی قبل از آن زمان نامیمون است، تردید داریم. از این‌رو دانش ما از ریاضیات قدیمی چین تقریبا به‌طور کامل برپایهٔ مسموعات است. همچنین، تا همین اواخر، عدم آشنایی با زبان چینی مانع بزرگی برای محققین بود و آنها مجبور بودند کـه‌عمدتاً بریک کتاب، به‌نام، رشد ریاضیات در چین و ژاپن[2] منتشره درسال ۱۹۱۳ به‌وسیلهٔ ریاضیدان

---

* مطالب بخشهای بعدی دربارهٔ چین به‌طور عمده از د.ج. استرویك

D.J. Struik, "On ancient Chinese mathematics," *The Mathematics Teacher*, 56 (1963): pp. 424 – 432

اقتباس شده است.

1. Shï Huang-ti
2. *The Development of Mathematics in China and Japan*

ژاپنی یوشومیکامی[1] ومعدودی مقالات پراکنده که توسط اروپاییان قرن نوزدهم نوشته شده بود، تکیه کنند. باانتشار جلد سوم کتاب بسیار فاضلانهٔ ج. نیدهام[2]، به‌نام علم و تمدن در چین[3]، در سال ۱۹۵۹، وضع به‌طور قابل ملاحظه‌ای بهبود یافته است.

شاید درست‌تر باشد که اول، ولو به‌اختصار، ادوار اصلی تاریخ چین مقدم برسال ۱۶۴۴ شرح داده شوند. ما بحث را بادورهٔ فئودالی چو[4]، که از حدود ۱۰۳۰ ق.م. تا ۲۲۱ ق.م. را دربر می گیرد، آغاز می کنیم. این دوره با امپراطوری متحد تحت سلسلهٔ هان[5] (۲۰۶ ق.م. ـ ۲۲۲ ب.م.) به‌اوج خود رسید و با آن ادامه یافت و یك‌دورهٔ تجزیه رابه‌دنبال داشت که تاحدود ۶۰۰ ب.م. طول کشید. دراین دوره بودکه آیین بودابه‌طور کامل در چین مستقر گردید. سپس، چین متحد جدید تحت رهبری تانگ[6] (۹۰۶ــ۶۱۸)، پنج سلسلهٔ حکومتهای مستقل[7] (۹۶۰ ــ ۹۰۷)، سونگ[8] (۱۲۷۹ ــ ۹۶۰)، یوئان[9] (۱۳۶۸ــ۱۲۶۰)، و مینگ[10] (۱۶۴۴ــ۱۳۶۸) اداره شد. سه سلسلهٔ اخیر همه بریك‌چین متحدفرمان راندند. نفوذ اروپاییان‌درریاضیات، همانند سایرموضوعات، با ورود هیأتهای مذهبی یسوعی، در زمان رهبری دودمان مینگ آغاز شد.

مارکوپولو[11] (۱۳۲۴؟ــ۱۲۵۴؟) از۱۲۷۵ تا ۱۲۹۲ از چین دیدارکرد وقوبیلای قاآن «وحشی» (۱۲۹۴ــ۱۲۱۶) باتکمیل فتوحاتش در چین در سال ۱۲۷۹، این کشور را تحت رهبری سلسلهٔ یوئان یکپارچه نمود.

۲ـ۷ از چو تا تانگ

حتی در ایام ماقبل چو، شمارش چینی دهدهی بود و ازآن پس هم چنین مانده است. در دورهٔ رهبری سلسلهٔ هان، یا شاید پیشتر، دستگاه شمار میله‌ای، که آن‌چنان که در مطالعهٔ مسئله‌ای ۴.۱(ج) توصیف شد ردیف‌کردن تکه‌های خیزران را به‌کار می گرفت، استقرار یافت، جاهای خالی دراین دستگاه نمایش صفر بودند. اعمال مقدماتی حساب باتکه‌های خیزران برروی تخته‌های شمارش انجام می‌شدند. از چرتکهٔ معروف چینی کنونی، سوئان پان[12]، متشکل ازمهره‌های متحرکی برمیله‌ها یا سیمهای موازی، برای اولین‌بار در اثری به‌تاریخ ۱۴۳۶ یاد می‌شود، گرچه می‌تواند بسیار قدیمیتر ازاین به‌وجود آمده‌باشد. کاملا محتمل است که مربعهای جادویی نیز در روزگاران پیش از چو پدید آمده باشند (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۳.۷).

مهمترین کتاب ریاضی چین باستان، حساب در نه بخش[13]، یاکوی ـ چانگ سوئان‌ـ

---

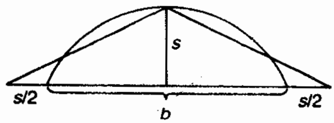
1. Yosho Mikami 2. J. Needham
3. *Science and Civilization in China* 4. Chou 5. Han
6. Tang 7. Five Dynasties of the Independent States
8. Sung 9. Yüan 10. Ming 11. Marco Polo
12. suan pan 13. *Arithmetic in Nine Sections*

شو[1] به‌دورهٔ هان برمی گردد و بسیار محتمل است که شامل مطالب بسیار قدیمیتر از این دوره نیز باشد. این کتاب مجموعه‌ای از ۲۴۶ مسئله در کشاورزی، روشهای بازرگانی، مهندسی، مساحی، حل معادلات، وخواص مثلثهای قائم‌الزاویه است. قواعد حل داده‌شده‌اند ولی به‌تعبیر یونانی آن برهانی وجود ندارد. درمسئلهٔ ۳۶ بخش ۱، مساحت یك‌قطعه دایره به‌قاعدهٔ b و سهم(ارتفاع) s با $s(b+s)/۲$ داده‌می‌شود، این‌نتیجه، ممکن است به‌طریقی که شکل ۵۸ نشان می‌دهد حاصل شده باشد. در این شکل وقتی خطهای قاطع به‌گونه‌ای رسم شوند که مساحت مثلث متساوی‌الساقین با مساحت قطعهٔ دایره مساوی به نظر آید، چنین می‌نمایدکه این قاطعها امتداد قاعده را در نقاطی به فاصلهٔ $s/۲$ در طرفین آن قطع می کنند. این فرمول تجربی در مورد یك نیمدایره، منجر به مقدار ۳ برای π می گردد. در این کتاب مسائلی موجودند که منتهی به دستگاههای معادلات خطی همزمان می‌شوند، که به مدد آنچه که امروزه آنها را روشهای ماتریسی می‌نامیم، حل شده‌اند. نمونهٔ برخی ازمسائل این اثر را می‌توان در مطالعهٔ مسئله‌ای ۱.۷ و ۲.۷ یافت.

اثر کلاسیك مشهوردیگری، شاید حتی‌قدیمیتر ازحساب در نه بخش، کتاب چوئو-پی[2] است، که فقط تااندازه‌ای جنبهٔ ریاضی دارد. عمدهٔ اهمیت آن برای ما ناشی از بحثی‌است برمبنای نمودار شکل ۵۹ (ولی بدون برهان)، از قضیهٔ فیثاغورس.

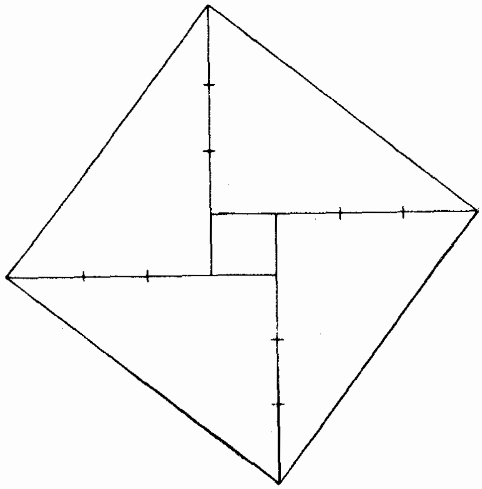
بعد از دورهٔ هان، دوران زندگی سون - تزی[3] ریاضیدان می‌رسد، که کتابی شامل مطالب زیادی شبیه به محتویات کتاب حساب در نه‌بخش نوشت. درهمین اثر است که با نخستین مسئلهٔ چینی در آنالیز نامعینها [معادلات سیاله] مواجه می‌شویم: «اشیائی به تعداد نامعلوم موجودندکه چون بر۳ تقسیم شوند باقیماندهٔ ۲، چون بر ۵ تقسیم شوند باقیماندهٔ ۳، وچون بر۷ تقسیم شوند، باقیماندهٔ ۲ دارند. این عدد (کوچکترین آن) کدام است؟» در اینجا سرآغازهای قضیهٔ باقیماندهٔ چینی مشهور از نظریهٔ مقدماتی اعداد را می‌یابیم.

در دورهٔ بعد از هان، همچنین عده‌ای از ریاضیدانان را می‌بینیم که توجه خود را به‌محاسبهٔ π، نسبت محیط دایره به‌قطر آن، معطوف داشته‌اند. تقریب گویای ۱۴۲/۴۵ برای π، که ۱۵۵ر۳ = π را به‌دست می‌دهد، به‌یك صاحبمنصب نظامی به‌نام وانگ‌فان[4]، مربوط به‌قرن سوم، نسبت داده شده است. یکی از معاصرین وانگ‌فان، به‌نام لیوهوی[5]



شکل ۵۸

1. *K'ui - ch'ang suan - shu* 2. *Chóu - peï* 3. Sun - tzï
4. Wang Fan 5. Liu Hui



شکل ۵۹

شرح کوتاهی برحساب در نه بخش نوشت که کتابچهٔ ریاضی سی‌آیلند[1] نامیده شد. در این اثر مطالب جدیدی را در مساحی می‌یابیم، که رابطهٔ

$$۳٫۱۴۱۰ < \pi < ۳٫۱۴۲۷$$

از آن جمله است. در حدود دو قرن بعد، تسوچونگ‌ـ چی (۵۰۱ ـ ۴۳۰) و پسرش، که کتاب مشترکشان امروزه دردست نیست، مقدار

$$۳٫۱۴۱۵۹۲۶ < \pi < ۳٫۱۴۱۵۹۲۷$$

و تقریب گویای قابل‌ملاحظهٔ ۳۵۵/۱۱۳ را یافتند، که π را به‌طور صحیح تا ۶ رقم اعشار به‌دست می‌دهد. کشف مجدد این تقریب گویا دراروپا تاسال ۱۵۸۵ صورت نگرفت(نگاه کنید به بخش ۴ـ۸). به‌نظر می‌رسد که بردقت محاسبهٔ π که تسوها بر آن دست یافتند تا سال ۱۴۲۹ تفوقی حاصل نگردید. دراین سال غیاث‌الدین جمشیدکاشانی (متوفی به‌حدود سال ۱۴۳۶) π را به‌طور صحیح تا ۱۶ رقم اعشاری به‌دست‌آورد. ریاضیدانان غربی تاحوالی ۱۶۰۰ برتقریب تسوها پیشی نگرفتند.

۳ـ۷ از تانگ تا مینگ

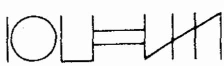
در دورهٔ سلسلهٔ تانگ مجموعه‌ای از مهمترین کتابهای ریاضی گرد آورده شدند تا در بررسیهای دولتی مورد استفادهٔ رسمی قرار گیرند. صنعت چاپ درقرن هشتم ابداع گردید، اما اولین‌اثر ریاضی به‌چاپ‌رسیده، تاآنجا که اطلاع داریم، تاسال ۱۰۸۴ منتشرنشده‌است.

1. *Sea Island Mathematical Manual*

دراثری تقریباً به‌سال ۶۲۵، که وانگ هسیائوتونگ[1] نامی آن‌را نوشته است، اولین معادلهٔ درجهٔ سوم در ریاضیات چینی ظاهر می‌شود که از معادلهٔ $x^3 = a$، مربوط به حساب در نه بخش پیچیده‌تر است.

یك نسخهٔ مهم چاپی حساب درنه‌بخش در دورهٔ سلسلهٔ سونگ در سال ۱۱۱۵ ظاهر شد. اواخر حکومت سلسلهٔ سونگ تا اوایل حکومت سلسلهٔ یوئان مهمترین دوره را در ریاضیات باستانی چین مشخص می‌سازد. ریاضیدانان برجستهٔ زیادی رونق یافتند و کتب ریاضی باارزشی پدید آمدند. ازجملهٔ این ریاضیدانان چین کیوشائو[2] (که کتابش به‌تاریخ ۱۲۴۷ است)، لی‌یه[3] (با کتابهایی بـه تـاریخهای ۱۲۴۸ و ۱۲۵۹)، یانگ هوی[4] (باکتابهایی به تاریخهای ۱۲۶۱ و ۱۲۷۵)، و بزرگترین آنها، چوشی کیئه[5] (باکتابهایی به‌تاریخهای ۱۲۹۹ و ۱۳۰۳) هستند.

چین معادلات نامعین را از جایی‌که سون تزی ناتمام گذاشته بود، ادامـه داد. وی همچنین اولین چینی بودکه علامت مجزایی، یك دایره، را برای صفر ارائه داد. وی یکی از ریاضیدانانی بودکه روش استخراج ریشهٔ دوم را (آن‌گونه که در حساب در نه بخش آمده) به معادلات از درجه‌های بالاتر تعمیم داد واین‌کار منجر به‌روش‌عددی حل معادلات جبری شدکه امروزه به‌آن روش هورنر اطـلاق می کنیم، زیرا ایـن روش به‌طور مستقل توسط مدیرمدرسهٔ‌انگلیسی، ویلیام جورج هورنر[6]، (۱۷۸۶-۱۸۳۷) کشف و تـوسط وی در ۱۸۱۹ نشر گردید. وی بکلی از این واقعیت‌که یك طرح محاسباتی قدیمی چینی را از نوکشف کرده، بی‌اطلاع بود. لی‌یه از این لحاظ از اهمیت خاصی بـرخوردار است که نمادی را برای اعداد منفی، با قراردادن خط موربی برروی رقم سمت راست عددکه در دستگاه علمی، یا میله‌ای، چینی نوشته شود، ارائه داد. مثلا ۱۰۷۲۴ — به صورت

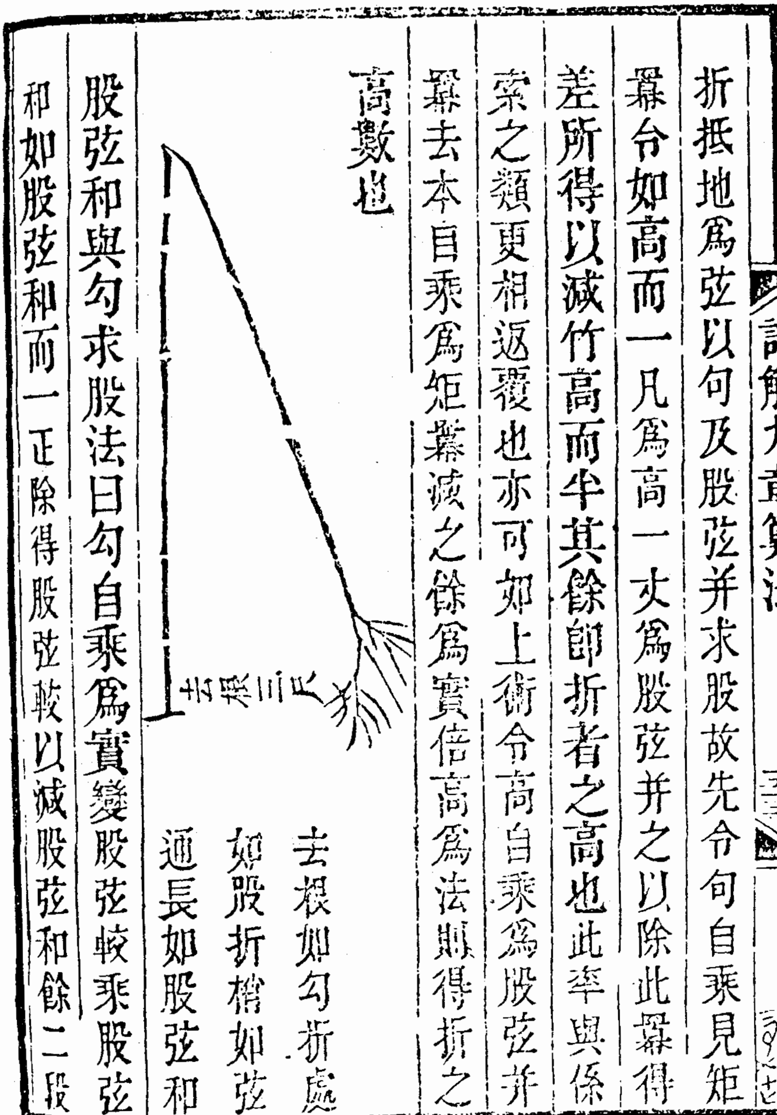


ظاهر می‌شود. یانگ‌هوی، که کتابهایش به‌گونه‌ای بسط حساب در نه بخش است، به‌طوری ماهرانه، اساساً با همان روشهای کنونی، باکسرهای اعشاری کارکرد. یانگ‌هوی همچنین قدیمیترین نمایش‌موجود ازآنچه راکه به‌نام مثلث حسابی پـاسکال شهـرت دارد، به ما داده است (نگاه کنید به بخش ۹-۹ [جلد دوم])، که دوباره در کتاب جـدیدتری کـه به‌وسیلهٔ چوشی کیئه در ۱۳۰۳ نگـارش یافته، دیده می‌شود. چـو سخن از مثلثی به‌میان می‌آوردکه در زمان خود او جنبهٔ باستانی داشته است. بدین گونه به‌نظر می‌رسدکه قضیهٔ دو جمله‌ای را برای مدت مدیدی در چین مـی‌شناخته‌انـد. کتابهای چو کاملترین نمایش روشهای حسابی - جبری راکه به‌دست ما رسیده، ارائـه می‌دهند. وی روشهـای ماتریسی آشنای امروزی را به کار می‌برد، و روش حذف و جاگذاری او با کار ج. ج. سیلوستر[7]

1. Wagn Hs'iao - t'ung 2. Ch'in Kiu-shao 3. Li Yeh
4. Yang Hui 5. Chu Shï-kié 6. William George Horner
7. J. J. Sylvester

(۱۸۹۷-۱۸۱۴) مقایسه شده است.

در دورهٔ بعد از سونگ پیدایش ریاضیدانانی که اغلب به‌عنوان منجم کار می‌کردند، ادامه یافت، اما چیزی که اساساً نو باشد، کمتر در ریاضیات آنها ظاهر گردید. درحالی که

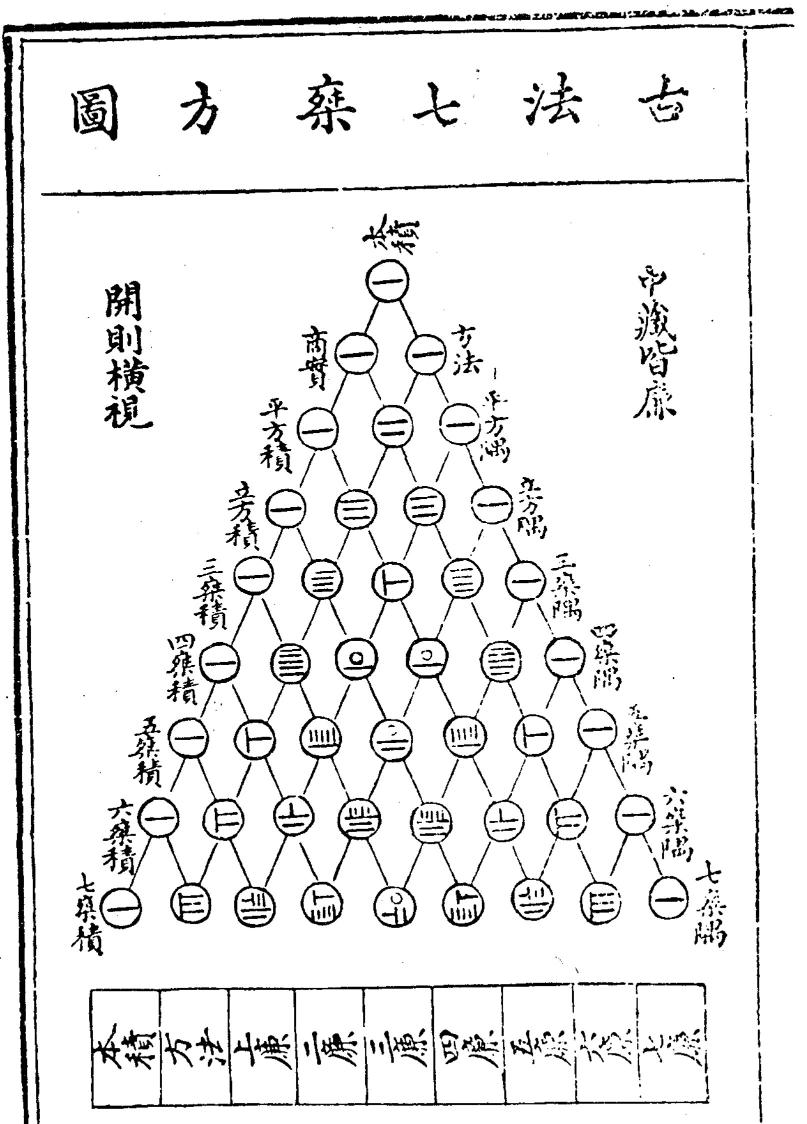

詳解九章算法

折抵地爲弦以句及股弦并求股故先令句自乘見矩
冪令如高而一凡爲高一丈爲股弦并之以除此冪得
差所得以減竹高而半其餘卽折者之高也此率與係
索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘爲股弦并
冪去本自乘爲矩冪減之餘爲實倍高爲法則得折之
高數也

股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實變股弦較乘股弦
和如股弦和而一正除得股弦較以減股弦和餘二段

مسئلهٔ خیزران شکسته، مربوط به اثری از یانگ هوی (۱۲۶۱).

در دورهٔ قدیمیتر تانگ می‌توان نفوذ هندی را تجسس‌نمود، دردورهٔ بعدتر یوئان می‌توان اثراتی از نفوذ اعراب را دید. در ریاضیات چین باستان به‌ندرت می‌توان چیزی‌یافت‌که مستقیماً نشانی‌از ریاضیات اروپایی (یونانی یا لاتین) داشته باشد. تنها در ریاضیات‌عصر مینگ، پس ازآنکه هیأتهای مذهبی یسوعی درچین رخنه کردند، نفوذ غربی مشهوداست.



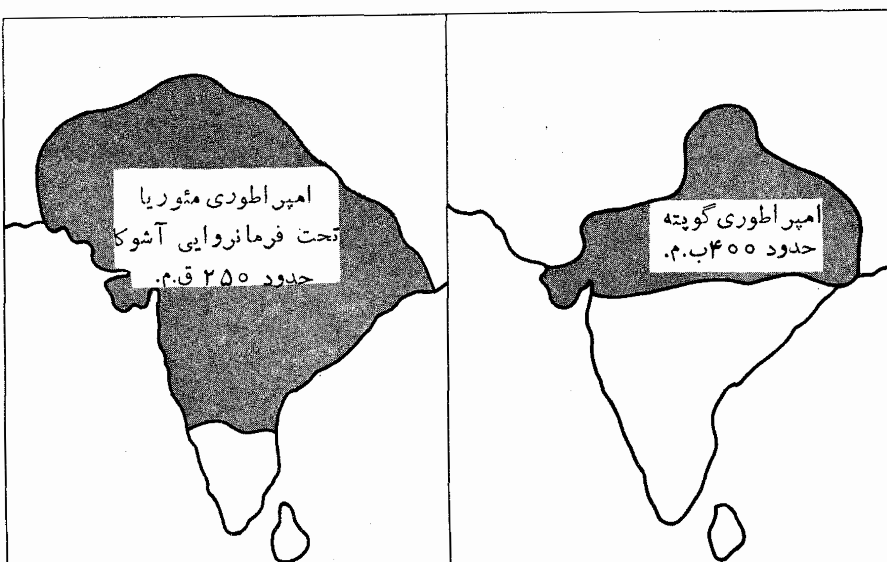
مثلث حسابی پاسکال به‌صورتی‌که در ۱۳۰۳ توسط چوشی‌کیئه ترسیم شده است.

هند

۷-۴ بررسی کلی

به‌جهت فقدان مدارك موثق، از چگونگی پیدایش ریاضیات هندی باستان اطلاع بسیار کمی در دست است. قدیمیترین تاریخ درخرابه‌های ۵۰۰۰ سالهٔ شهری در موهنجودارو[1] حفظ شده است. شواهدی از خیابانهای عریض، منازل آجری، خانه‌های آپارتمانی با حمامهای کاشیکاری شده، آبراهه‌های سرپوشیدهٔ شهری، و استخرهای شنای عمومی‌نشان از تمدنی‌دارد که به‌اندازهٔ تمدنهایی که در هرجای دیگر درشرق باستان یافت می‌شد، پیشرفته بوده است. ایـن اقوام اولیه دستگاههای نگارش، شمارش، سنجش وزن، و اندازه‌گیری داشتند، و کانالهایی برای‌آبیاری می‌کندند. همهٔاین‌کارها نیازقابل ملاحظه‌ای به ریاضیات بنیادی و مهندسی داشتند. از آنچه برسر این اقوام آمده، اطلاعی نداریم.

در حدود ۴۰۰۰ سال پیش بودکه دسته‌های سرگردان ازجلگه‌های بزرگ آسیای مرکزی، باعبور از گذرگاههای هیمالیا به هندوستان رفتند. این‌قوم‌آریایی نامیده‌می‌شدند، که ازکلمه‌ای سانسکریت به‌معنی «اشراف» یا «زمینداران» گـرفته شده است. بسیاری از آنها در همانجا ماندند، و بقیه راهی اروپا شدند و ریشهٔ دودمان هندواروپایی را تشکیل دادند. نفوذ آریاییها تدریجاً در سراسر هندگسترش یافت. در هزار سال اول اقامت خود هم سانسکریت نوشتاری و هم سانسکریت گفتاری را تعالی بخشیدند. اینان بـانی رواج

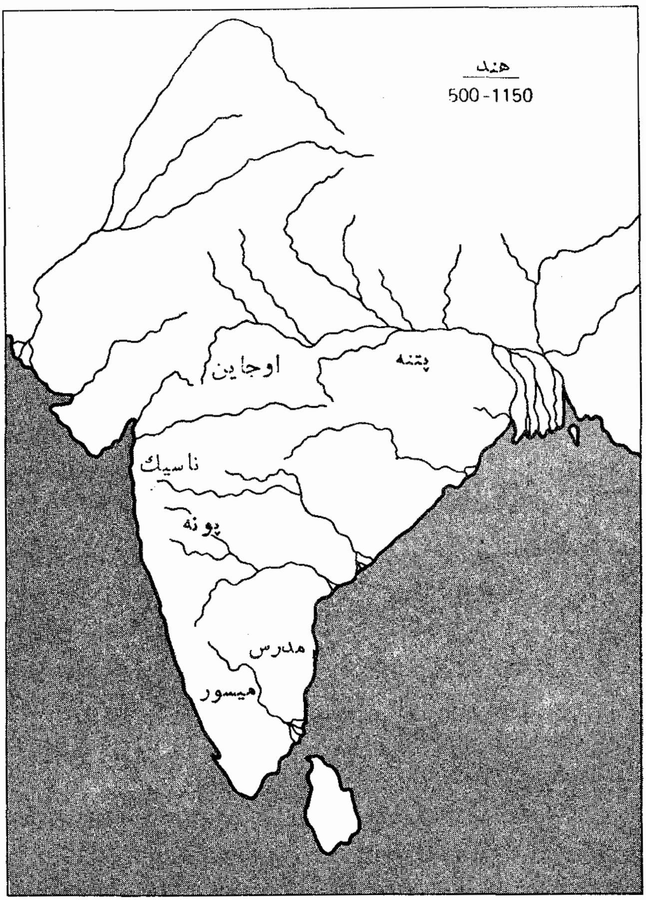


---

1. Mohenjo Daro

نظام کاستی نیز بودند. در قرن ششم ق.م. لشکریان ایران تحت فرماندهی داریوش وارد هند شدند اما فتوحات دائمی به‌عمل نیاوردند. دو شخصیت برجسته از هند قدیم، پانینی[1] دستوردان وبودا، معلم مذهبی به‌این دوره تعلق دارند. احتمالا ایـن دوره، زمان تقریبی شولوسوتره‌ها[2] («قواعد ریسمان») نیز هست، که عبارت از برخی نوشته‌های مذهبی مورد توجه در تاریخ ریاضی است، ازآن جهت که اینها متضمن قواعدی هندسی برای ساختن محرابها به‌مدد کشیدن طناب هستند و نشان ازآشنایی باسه‌تاییهای فیثاغورسی دارند.

بعد از فتح موقت شمال غـربی هندوستان به‌دست اسکنـدر کبیر در ۳۲۶ ق.م. امپراطوری مئوریا[3] تأسیس شدو به‌تدریج برسرتاسر هند و قسمتهایی از آسیای مرکزی گسترش یافت. مشهورترین فرمانروای مـائوریا شاه آشوکا (۲۳۲–۲۷۲ق.م.) بود که



1. Panini 2. Sulvasūtras 3. Maurya

تعدادی از ستونهای عظیم سنگی وی، که در هر شهر مهم زمان او در هند بنا شده بودند، هنوز پا برجا هستند. این ستونها از این لحاظ برای ما اهمیت دارند که، چنانچه در بخش ۱ــ۹ بیان شد، بعضی از آنها ابتدایی‌ترین نمونه‌های محفوظ علایم عددی کنونی را برخود دارند.

بعد از آشوکا، هندوستان دستخوش یك رشته تهاجمات گردید که نهایتاً سلسلهٔ گوپته[1] را تحت حکومت امپراطوران بومی هند درپی داشت. دورهٔ گوپته به صورت عصر طلایی رنسانس سانسکریت درآمد و هند، مرکزی برای کسب دانش، هنر، و طب گردید. شهرهای ثروتمند سربرآوردند و دانشگاهها بنا گردیدند. اولین اثر مهم در زمینهٔ نجوم، کتاب مجهول المؤلف، به‌نام سوریه سدهانته[2] («شناسایی خورشید»)، به همین دوره که احتمالاً اوایل قرن پنجم بود، برمی‌گردد. ریاضیات هندی از اینجا درخدمت نجوم، و نه مذهب در می‌آید. کتاب مربوط به قرن ششم پنچ سدهانتیکه[3]، اثر وراهمیهیره[4] منجم از اهالی اوجاین[5] و برمبنای کتاب سوریه سدهانته قبلی، شامل خلاصهٔ سودمندی است از مثلثات اولیهٔ هند و یك جدول سینوسها که ظاهراً از جدول اوتار بطلمیوس استخراج شده‌است.

در میزان نفوذ ریاضیات یونانی، بابلی، و چینی برریاضیات هند، وبالعکس، هنوز نظر قاطعی ابراز نشده است، اما شواهد فراوانی مبنی براینکه نفوذ از هر دوسو قابل ملاحظه بوده است، وجود دارد. یکی ازفواید مشخص پاکس رومانا، نشردانش بین شرق و غرب بود، و از زمانی بسیار دور، هند نمایندگانی را هم باغرب و هم با خاور دور مبادله می‌کرد.

از حدود ۴۵۰ب.م. تاحوالی پایان‌سالهای ۱۴۰۰، هند دوباره به‌دفعات درمعرض هجوم بیگانه قرار گرفت. ابتدا نوبت هونها بود، بعداً اعراب درقرن هشتم، و ایرانیها در قرن یازدهم. چندین ریاضیدان سرشناس هندی دراین دوران می‌زیستند. دو آریبهطه، برهمگوپته[6]، مهاویره[7]، و بهاسکره از آن زمره بودند. آریبهطهٔ بزرگ رونقش در قرن ششم بود و درمجاورت پتنهٔ[8] کنونی درکنار رود گنگ به‌دنیا آمد. وی اثری در نجوم به‌نام آریبهطه نگاشت که فصل سوم آن به‌ریاضیات اختصاص دارد. دو آریبهطه تااندازه‌ای با هم مشتبه‌می‌شوند، وامکان آن‌هست که آثار آنها به‌درستی ازهم تمیزداده‌نشده‌باشد. برهمگوپته برجسته‌ترین ریاضیدان هندی قرن هفتم بود. وی درمرکزنجومی اوجاین، در هند مرکزی، به‌سرمی‌برده وکارمی‌کرده است. درسال ۶۲۸، وی کتاب برهمسپهوته سدهانته[9] («دستگاه تجدید نظرشدهٔ برهمه»)[10] را نوشت، که اثری در نجوم است مشتمل بر ۲۱ فصل که‌فصول ۱۲و۱۸ آن راجع به ریاضیات‌است. مهاویره‌که حوالی سال ۸۵۰ رونق یافت، ازاهالی میسور[11] در هند جنوبی بود وآثاری در ریاضیات مقدماتی نوشت. بهاسکره در اوجاین،

---

1. Gupta 2. *Sūrya Siddhānta* 3. *Pānca Siddhañtikā*
4. Varāhamihira 5. Ujjain 6. Brahmagupta 7. Mahāvira
8. Patna 9. *Brahma - sphuta - sidd'hānta*
10. the revised system of Brahma 11. Mysore

شهر محل اقامت وراهمیهیره و برهمگوپته می‌زیست. اثر او سدهانته شیرومنی[1] («دیهیم یك دستگاه نجومی»)[2] در ۱۱۵۰ نوشته شده و پیشرفت کمی نسبت به کار برهمگوپته که متعلق به‌متجاوز بر ۵۰۰ سال پیش بود، نشان می‌دهد. قسمتهای ریاضی مهم اثر بهاسکره لیلاوتی[3] («زیبا») و ویجگنیته[4] («حساب بذر»)[5]* هستندکه به‌ترتیب سروکار با حساب و جبر دارند. قسمتهای ریاضی آثار برهمگوپته و بهاسکره توسط ه. ت. کولبروك[6] در ۱۸۱۷ به‌انگلیسی برگردانده شدند. سوریه سدهانته توسط ا. برگس[7] در ۱۸۶۰ ترجمه شده، و اثرمهاویره به‌وسیلهٔ م.رنگاچاریه[8] در ۱۹۱۲ منتشر گردید.

ریاضیات هندی بعد از بهاسکره تااعصارجدید درواقع به‌انحطاط گرایید. در۱۹۰۷ انجمن ریاضی هند تأسیس شد، و درسال بعد انتشار مجلهٔ انجمن ریاضی هند[9] در مدرس آغاز شد. مجلهٔ آمار هند، سنخیا[10]، در۱۹۳۳ آغاز به‌نشر کرد.

شاید جالبترین ریاضیدان هندی اعصار جدید میرزای فقیر و نابغهٔ تعلیم نایافته، سرینیواسا رامانوجان[11] (۱۸۸۷–۱۹۲۰) بودکه توانایی حیرت آوری دردرك سریع و عمیق روابط بغرنج عددی‌داشت. وی درسال۱۹۱۳ توسط استاد برجستهٔ انگلیسی،درنظریهٔ اعداد، ج. ه. هاردی[12] (۱۸۷۷–۱۹۴۷) «کشف» گردید، و تلاشهای وی رامانوجان را در سال بعد برای تحصیل در دانشگاه کیمبریج به انگلستان آورد. این امر به یکی از پراهمیت‌ترین همکاریهای ریاضی بین این‌دو انجامید.

در کتابهای درسی تاریخ ریاضیات تناقضات و سردرگمیهایی به هنگام بررسی ریاضیات هند دیده‌می‌شود. این‌امر، ونه درحدکمی، معلول مبهم بودن و در مواردی تقریباً نامفهوم بودن نوشته‌های مؤلفان هندی است. تاریخ ریاضیات هندی‌همچنان درانتظاریك بررسی قابل‌اعتمادتر ومحققانه‌تری است.

۷–۵ محاسبات عددی

دربخش ۱–۹ اطلاعات اندکی را که راجع به‌نقش ایفاشده توسط هندیان دربسط دستگاه عددنویسی موضعی کنونی دردست است به‌اجمال بررسی‌کردیم. اکنون شرح کوتاهی‌از روشهای هندی‌محاسبه دراین‌دستگاه را ارائه می‌دهیم. رمز فهم الگوریتمهای ابداع شده در پی‌بردن به‌کیفیت نوشت افزاری است‌که دراختیار محاسبین بوده است. به‌عقیدهٔ مورخ

---

1. *Siddhānta Śiromani* 2. diadem of an astronomical system
3. *Lilāvati* 4. *Vijaganita* 5. seed arithmetic

* به‌یقین نمی‌دانیم‌که لیلاوتی و ویجگنیته قسمتهایی از سدهانته شیرومنی باشند. امکان دارد که‌اینها دو اثر مجزا باشند.

6. H. T. Colebrooke 7. E. Burgess 8. M. Rangācārya
9. *Journal of the Indian Mathematical Society* 10. *Sankhyā*
11. Srinivasa Ramanujan 12. G. H. Hardy

آلمانی ه. هانکل[1] آنها عموماً با قلم نیی که در رنگ سفید و رقیقی فرو می‌بردند، بر تختهٔ سیاه کوچکی می‌نوشتند، که به‌سادگی می‌شد آن را پاك کرد، و یا با چوبی بر یك لوح سفید که مساحتی کمتر از یك فوت مربع داشت و روی آن را با پاشیدن آرد سرخ رنگی پوشانده بودند، می‌نوشتند. درهر موردجای نوشتن کوچك بود و برای آنکه نوشته خوانا باشد به‌ارقام نسبتاً بزرگی نیاز بود، مع‌هذا حك و اصلاح کاملا به سادگی انجام می‌شد. ازاین رو مراحل محاسبه طوری طرح‌ریزی شده بودند که باپاك کردن هر رقمی که نقش خود را ایفا کرده بود، جا برای نوشتن باز شود.

عمل جمع هندی قدیم احتمالا، به‌جای اینکه مطابق سلیقهٔ کنونی ما از راست به‌چپ باشد، ازچپ به راست انجام می‌شده. به‌عنوان مثال جمع ۳۴۵ و ۴۸۸ را در نظر بگیرید. احتمالا اینها، یکی در زیر دیگری وکمی پایینتر از لبهٔ فوقانی لوح محاسبه، همچنانکه در تصویر همراه دیده می‌شود، نوشته می‌شده‌اند. محاسب می‌گفته، ۷ = ۴ + ۳، و ۷ را بالای ستون چپ می‌نوشته. سپس ۱۲ = ۸ + ۴، که ۷ را به‌یك ۸، که یك ۲ از پی آن می‌آید، بدل می‌کند. بنابراین ۷ پاك شده و ۸۲ نوشته می‌شود. ما در مثال خود، به‌جای پاك کردن، ۷ را خط زده و ۸ را بالای آن نوشته‌ایم. حال ۱۳ = ۸ + ۵، که ۲ را به یك ۳ که ۳ی دیگری به دنبال دارد، تبدیل می‌کند. دو مرتبه همه چیز با مالش سریع انگشتی تصحیح و جواب نهایی بر بالای لوح ظاهر می‌شود. حال می‌توان ۳۴۵ و ۴۸۸ را پاك کرد و بقیهٔ لوح را برای کارهای بعدی دراختیار داشت.

$$\begin{array}{ccc} 8 & 3 & \\ \cancel{7} & \cancel{2} & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 8 \end{array}$$

در یك شرح فاقد تاریخ برلیلاوتی بهاسکره روش دیگری را می‌یابیم که به مدد آن جمع ۳۴۵ و ۴۸۸ به‌صورت زیرانجام می‌شود:

مجموع یکانها	۵ + ۸ = ۱۳
مجموع دهگانها	۴ + ۸ = ۱۲۰
مجموع صدگانها	۳ + ۴ = ۷۰۰
مجموع مجموعها	= ۸۳۳

برای‌عمل‌ضرب‌از روشهای متعددی استفاده می‌شده است. صورت نوشته‌شدهٔ ضرب سادهٔ مثلاً، ۵۶۹ در ۵، ممکن‌است به‌شکل‌زیر ظاهر شود، که مجدداً عمل از چپ به‌راست انجام می‌شود. برروی لوح، کمی پایینتر از لبهٔ فوقانی آن، ۵۶۹ و به دنبال آن در همان خط، مضروب‌فیه، ۵ ، را بنویسید. سپس، چون ۲۵ = ۵ × ۵، ۲۵ در بالای ۵۶۹، به صورتی که در شکل مقابل نشان داده شده، نوشته می‌شود. حال، ۳۰ = ۵ × ۶، که ۵ موجود در ۲۵ را به‌یك ۸ بدل‌می‌کند و به‌دنبال آن هم یك ۰ می‌آید. این بعدازحك‌سریعی تثبیت‌می‌شود. دراین

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 4 & \\ 2 & \cancel{5} & \cancel{0} & 5 \\ & 5 & 6 & 9 \quad 5 \end{array}$$

1. H. Hankel

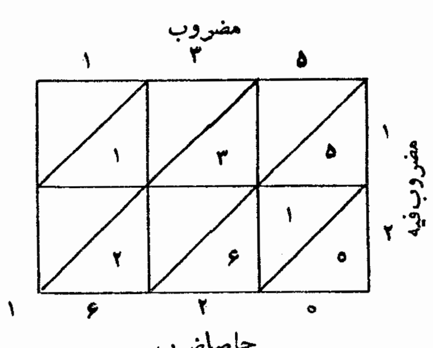
مثال، مجدداً بـه جای پاك کـردن، ۵ را خـط زده‌ایم و ۸ را بالای آن نـوشته‌ایم. حال ۴۵ = ۹ × ۵، که ۰ را به‌یك ۴ که به‌دنبال آن یك ۵ می‌آید، بدل مـی‌کند. حاصلضرب نهایی، ۲۸۴۵، اکنون در بالای لوح محاسبه آشکار می‌شود.

ضرب پیچیده‌تری، مثلا نظیر ۱۲ × ۱۳۵، ابتدا با پیدا کـردن ۵۴۰ = ۴ × ۱۳۵، مـانند بـالا، سپس ۱۶۲۰ = ۳ × ۵۴۰، و یا بـا جمع کـردن ۱۳۵۰ = ۱۰ × ۱۳۵ و ۲۷۰ = ۲ × ۱۳۵ برای به‌دست آوردن ۱۶۲۰، انجام می‌شود. یا ممکن است، بنابه گفتهٔ هانکل، آن‌را بـه‌صورت زیر ترتیب داد. کمی پایینتر از بالای لـوح، مضروب ۱۳۵ و مضروب‌فیه ۱۲ را به قسمی بنویسید که رقم یکان مضروب زیـر آخریـن رقم سمت چپ مضروب‌فیه قرار گیرد. حال ۱۳۵ = ۱ × ۱۳۵، کـه در بالای لوح نوشته می‌شود. سپس، با پاك کردن، مضروب ۱۳۵ را یك رقم به‌راست منتقل و در ۲ مربوط بـه ۱۲ ضرب کنید. با انجام ایـن کار داریـم ۲ = ۱ × ۲، که ۳ی موجود درحاصلضرب جزئی را به‌۵ بدل‌می‌کند. حال ۶ = ۳ × ۲، که دو ۵ حاصلضرب جزئی جدید را به‌۶۱ تبدیل می‌کند. سرانجام، ۱۰ = ۵ × ۲، که ۱ آخری در حاصلضرب جزئی را به ۲یی که ۰ی درپی دارد، بدل می‌کند. حاصلضرب کامل، ۱۶۲۰، اکنون در بالای لوح ظاهر می‌شود.

	۶	۲	
	~~۵~~	~~۱~~	
۱	~~۳~~	~~۵~~	۰
	۱		۲
~~۱~~	~~۳~~	~~۵~~	
	۱	۳	۵

روش دیگری برای ضرب، که براعراب معلوم بوده، و احتمالا از هندوان گرفته‌شده و نیز شباهت زیادی به عمل ضرب امروزی دارد، در تصویر زیر دیده می‌شود که در آن دوباره حـاصلضرب ۱۳۵ را در ۱۲ پیدا مـی‌کنیم. نمودار شبکـه‌ای عملا رسم و عمل جمع به‌طور قطری انجام می‌شود. توجه‌کنید که، به‌دلیل نحوهٔ تقسیم هر خانه به دو بخش به‌وسیلهٔ یك قطر، هیچگونه نیازی به ده بریکها در موقع ضرب نیست.

اعراب، که بعدها بـرخی روشهای هندیان را به‌عاریت گرفتند، قادر بـه‌بهبود آنها نبودند و لذا به‌تطبیق آنها با کار «کاغذی»، که عمل حك به‌آسانی بر آن صورت نمی‌گیرد، پرداختند، که دراین‌صورت ارقام نامطلوب، خط خورده و ارقام جدید بربالا یا زیر ارقام



قبلی، هم‌چنان‌که ما در شکل صفحهٔ قبل عمل کرده‌ایم، نوشته می‌شوند.

بسط الگوریتمهای جدید برای اعمال حسابی ابتدایی امروز ما که محتملا در قرنهای دهم و یازدهم در هندوستان آغازشد، توسط اعراب اخذگردید و بعدها به‌اروپای غربی انتقال یافت، و در اینجا بود که این الگوریتمها به‌اشکال امروزی خود تغییر یافتند. این کار به‌نحو قابل ملاحظه‌ای از طرف نویسندگان قرن پانزدهم اروپا که دربارهٔ حساب چیز می‌نوشتند، مورد توجه قرار گرفت.

۶ـ۷ حساب و جبر

هندیان حسابدانان بااستعدادی بودند وخدمات شایانی به‌علم جبر کردند.

بسیاری از مسائل در حساب به روش امتحان و تصحیح حل می‌شدند. روش مقبول دیگری همانا روش **معکوس کردن** بود، که شخص باداشتن مقداری اطلاع درجهت‌عکس‌عمل می‌کند. برای مثال، مسئلهٔ زیر را در نظر بگیرید که در لیلاوتی اثر بهاسکره ارائه شده: «دخترك زیبا که چشمانی درخشان داری، به‌من بگو، از آنجاکه روش صحیح عکس‌کردن را دریافته‌ای، چه عددی است که چون در ۳ ضرب شود، سپس به اندازهٔ ۳/۴ حاصلضرب افزایش یابد، آنگاه به ۷ تقسیم شود، به‌اندازهٔ ۱/۳ خارج‌قسمت کاهش‌یابد، در خود ضرب شود، به‌اندازهٔ ۵۲ کاهش یابد، با استخراج ریشهٔ دوم، اضافه کردن ۸، تقسیم بر ۱۰ عدد ۲ را عاید نماید؟» بنا به روش معکوس از ۲ شروع می‌کنیم و در جهت عکس عمل می‌کنیم. بدین ترتیب، $[(۲)(۱۰)-۸]^۲+۵۲=۱۹۶$، $\sqrt{۱۹۶}=۱۴$، $(۱۴)(۳/۲)(۷)(۴/۷)/۳=۲۸$، که جواب مسئله است. توجه‌کنید آنجا که مسئله دستور تقسیم بر ۱۰ داده، ما در ۱۰ ضرب می‌کنیم، آنجاکه گفته شده ۸ را اضافه کنیم ۸ راکم می‌کنیم، آنجاکه گفته شده جذر بگیریم، مجذور می‌کنیم، و الی آخر. تعویض هرعمل با معکوس آن دلیل این نامگذاری است. البته اگر هم می‌خواستیم مسئله را به روشهای امروزی حل کنیم، دقیقاً چنین عمل می‌کردیم. بنابراین، اگر x را نمایش عدد مطلوب بگیریم، داریم:

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{(۲/۳)(۷/۴)(۳x)}{۷}\right]^۲-۵۲}+۸}{۱۰}=۲.$$

برای حل این معادله دو طرف را در ۱۰ ضرب می‌کنیم، سپس از هرطرف ۸ کم می‌کنیم، بعداً طرفین را مجذور مـی‌کنیم، و قس علی‌هذا. این مسئله همچنین رویهٔ هندیان را در پوشاندن جامهٔ شعر به‌مسائل حسابی نشان می‌دهد. این بدان جهت بود که کتابهای درسی مدارس به‌شعر نوشته می‌شدند، و نیزاینکه مسائل اغلب برای سرگرمی عموم مورد استفاده قرار می‌گرفتند.

هندیان مجموع تصاعدهای حسابی و هندسی را یافتند و مسائل تجاری در باب

مرابحه‌های ساده و مرکب، تخفیف، و شراکت را حل کردند. آنها همچنین مسائل امتزاج و آب انبار را، مشابه با آنهاکه در کتابهای درسی امروزی یـافت می‌شوند، حل کردند. نمونه‌های متعددی از مسائل حسابی هندیان را می‌توان در مطالعه‌های مسئله‌ای ۴.۷، ۵.۷، ۶.۷ یافت.

منشأ قسمت اعظم اطلاعات ما از حساب هندی، لیلاوتی بهاسکـره است. داستان شورانگیزی دربارهٔ این اثر گفته شده است. بنا بر این قصه، ستارگان پیشبینی کرده‌بودندکه اگر لیلاوتی، تنها دختر بهاسکره، در ساعتی غیراز یك ساعت معین در روز خجستهٔ معینی ازدواج می‌کرد، طالع شومی در انتظارش بود. درآن روزبه‌هنگامی که عروس نگران در حال نظارهٔ پایین رفتن‌سطح آب درساعت آبی بود، مرواریدی از تزیینات سرش، بی آنکه خود متوجه باشدافتاده و، بامسدودکردن سوراخ جام، جریان آب‌را به‌خارج بند می‌آورد، و بدین‌ترتیب لحظهٔ فرخنده بی‌خبر سپری مـی‌شود. بـرای تسکین دختر شوربخت خود، بهاسکره نام وی را برکتابش می‌گذارد.

هندیان جبر خود را تلخیص نمودند. مانند دیوفانتوس، جمع را معمولا باپهلوی هم نهادن نشان می‌دادند. تفریق را بانهادن نقطه‌ای بربالای مفروق، ضرب را بـانوشتن بهه[1] (هجای اول کلمـه بهویته[2] «حاصلضرب») بعد از عوامـل ضرب، تقسیم را بـا نـوشتن مقسوم‌علیه درزیر مقسوم، ریشهٔ دوم را با نوشتن که[3] (از کلمهٔ کرنه[4] «گنگ») قبل‌ازکمیت مربوطه نشان می‌دادند. برهمگوپته مجهول را با یا[5] (از کلمهٔ یاوتاوت[6]، «به قدری که») نشان داد. به اعداد صحیح معلـوم پیشوند رو[7] (از روپه[8]، «عدد مطلـق») اضافه می‌شد. مجهولهای اضافی باهجاهای اول واژه‌های معرف رنگهای مختلف نشان داده می‌شدند. مثلا یـك مجهـول دیگـر ممکن بـود بـا کا[9] (از کلمهٔ کالـکه[10]، «سیاه») معرفـی گـردد و $۸xy+\sqrt{۱۰}-۷$ به‌صورت زیر ظاهر شود

$$\text{یا کا ۸ که ۱۰ رو ۷̇}$$

هندیان اعداد منفی و گنگ راپذیرفتند، وتشخیص دادندکه یك مجذور (باجوابهای حقیقی) دارای دو ریشهٔ صوری است. آنها جواب جبری معادلات درجهٔ دوم را بااستفاده از روش آشنای تکمیل مربع یکدست کردنـد. امروزه به روش اخیر اغلب **روش هندی** اطلاق می‌شود، بهاسکره دو اتحاد مهم

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{(a+\sqrt{a^۲-b})/۲}\pm\sqrt{(a-\sqrt{a^۲-b})/۲}$$

---

1. bha 2. bhavita 3. ka 4. karana 5. yā
6. yāvattāvat 7. rū 8. rūpa 9. kā 10. kālaka

را عرضه کرد که در کتابهای جبری کنونی گاهی برای یافتن ریشهٔ دوم یك عـدد اصم[1] دو جمله‌ای به‌کار می‌رود. این اتحادها در مقالهٔ دهم اصول اقلیدس نیز دیده می‌شوند، امـا در آنجا به‌زبان پیچیده‌ای عرضه شده‌اند که به‌زحمت قابل درك است.

هندیان توانایی قابل ملاحظه‌ای در آنالیز نامعینها از خود نشان دادنـد و شاید از اولین کسانی بودند که روشهایی کلی دراین شاخه از ریاضیات ابـداع نمودند. برخلاف دیوفانتوس که در پی یك جواب گویا بـرای یك معادلهٔ سیاله بـود، هندیان به یافتن همهٔ جوابهـای صحیح معادلات همت گماشتند. آریبهطه و برهمگوپته جوابهای صحیح معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$ را، که در آن a، b، c اعداد صحیح‌اند، یـافتند. معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ دوم $xy=ax+by+c$ به‌روشی که بعدها وسیلهٔ اویلر از نـو اختراع شد، حل گردید. کار برهمگوپته و بهاسکره روی معادلهٔ موسوم به‌معادلهٔ پل[2]، $y^{۲}=ax^{۲}+۱$، که a در آن عدد صحیح نامجذوری است، ازنظرعده‌ای مهم تلقی شده است. آنها نشان‌دادند که چگونه از یك جواب x، y، $xy\neq ۰$، بینهایت جواب دیگررا می‌توان یافت. نظریهٔ کامل معادلهٔ پل سرانجام توسط لاگرانژ در ۱۷۶۹ـ۱۷۶۶ تدوین شد. کارهندیان برروی معادلات سیاله دیرتر ازآنکه تأثیر سودمندی را موجب شود، به‌غرب رسید.

۷ـ۷ هندسه و مثلثات

هندیان مهارتی درهندسه نداشتند. براهین دقیق نامعمول بود ومطالعات اصول موضوعه‌ای وجود نداشتند. هندسهٔ آنان عمدتاً تجربی و عموماً در رابطه بامساحی بود.

شولوسوترههای باستانی نشان می‌دهند که هندیان اولیه هندسه را در ساختن محرابها به‌کار می‌بستند و دراین راه از رابطهٔ فیثاغورس استفاده می‌نمودند. این قواعد دستوراتی را برای یافتن مربعی برابر مجموع یا تفاضل دو مربع مفـروض و مربعی برابربا مستطیل مفروضی در اختیار می‌گذاشتند. در همانجا جوابهایی برای مسئلهٔ تربیع دایره نیز ظاهر می‌شود که معادل بااختیار $d=(۲+\sqrt{۲})s/۳$ و $s=۱۳d/۱۵$ است که درآن d قطر دایره و s ضلع مربع مساوی با آن است. همچنین عبارت

$$\sqrt{۲}=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{(۳)(۴)}-\frac{۱}{(۳)(۴)(۳۴)}$$

در همانجا ظاهر می‌شود که ازآن جهت جالب است کـه کسرها همه کسرهای با صورت واحدند، و ازآن‌رو که عبارت مزبور تاپنج رقم اعشار صحیح است.

---

۱. surd، اگرچه این کلمه گاه به‌معنی irrational یاگنگ به‌کار می‌رود، اصـلا به معنی عددی است به‌صورت مجموع یك عددگویا با ریشهٔ گنگ یك عددگویا یا بیشتر، مـانند $\sqrt{۳}$ و $۱+\sqrt[۳]{۲}+\sqrt{۵}$. ـ م.

2. Pell

هم برهمگوپته و هم مهاویره نه‌تنها فرمول هرون را برای مساحت مثلث برحسب‌سه ضلع آن ارائه دادند، بلکه تعمیم قابل ملاحظهٔ آن را*

$$K=[(s-a)\ (s-b)\ (s-c)\ (s-d)]^{۱/۲}$$

برای مساحت یك‌چهار ضلعی محاطی با اضلاع a، b، c، d و نصف محیط s عرضه‌کردند. به‌نظر مـی‌رسد کـه شارحین بعدی متوجه محدودیت اعمال‌شده برچهار ضلعی نشده‌اند. فرمول برای حالت کلی چنین است

$$K^{۲}=(s-a)\ (s-b)\ (s-c)\ (s-d)-abcd\cos^{۲}\left(\frac{A+C}{۲}\right),$$

که در آن A و C دو رأس متقابل چهار ضلعی هستند.

در هندسهٔ هندی، مهمتر از همه و درحد اعـلای کیفیت، قضایای بـرهمگوپته‌اند، حاکی از اینکه قطرهای m و n یك‌چهار ضلعی محاطی که دارای اضلاع متوالی a، b، c،d هستند، با

$$m^{۲}=\frac{(ab+cd)\ (ac+bd)}{ad+bc}$$

$$n^{۲}=\frac{(ac+bd)\ (ad+bc)}{ab+cd}$$

داده می‌شوند، و اینکه اگر a، b، c، A، B، C اعـداد صحیح مثبت باشند بـه‌قسمی که $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$ و $A^{۲}+B^{۲}=C^{۲}$، آنگاه چهارضلعی‌محاطی که‌به‌اضلاع متوالی aC، cB، bC، cA (که شبه ذوزنقه‌برهمگوپته نامیده می‌شود) دارای مساحت و قطرهای‌گویاست، و قطرهایش برهم عمودند (نگاه‌کنید به مطالعه‌های مسئلـه‌ای ۹.۷ و ۱۰.۷). برهمگوپته قضیهٔ بطلمیوس دربارهٔ چهار ضلعیهای محاطی را می‌دانسته است.

در فرمولهای مساحی هندی بی‌دقتیهای زیادی ظاهر می‌شوند. مثلا آریبهطه حجم هرم را به‌صورت نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع، و حجم‌کره را بـه‌صورت $\pi^{۳/۲}r^{۳}$ می‌دهد. هندیان چندمقدار دقیق برای π ارائه‌کردند، اما اغلب $\pi=۳$ و $\pi=\sqrt{۱۰}$ را نیز به‌کار می‌بردند.

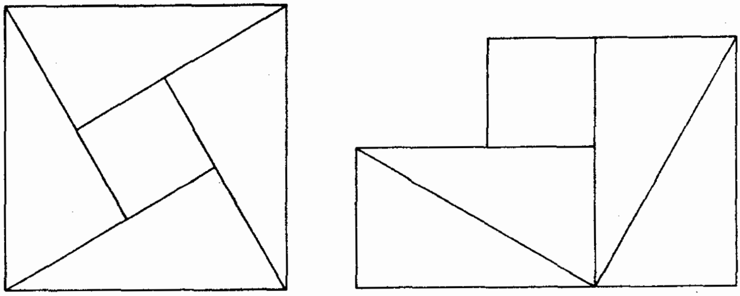
اغلب دانش‌آموزان در هندسهٔ دبیرستانی اثبات بهاسکره برای قضیهٔ فیثاغورس از راه تقطیع را دیده‌اند، که درآن مربع روی وتر، مثل شکل ۶۰، به‌چهار مثلث، که هریك با مثلث مفروض مساوی است، به‌اضافهٔ مربعی که ضلع آن برابر تفاضل ساقهای مثلث مفروض

* برای استخراج این فرمول، مثلا رجوع کنید‌به

E. W. Hobson, *A Treatise on Plane Trigonometry* 4th ed. p. 204

یـا

R. A. Johnson, *Modern Geometry*, p. 81.



شکل ۶۰

است، تقسیم می‌شود. این قطعات را می‌توان به‌سادگی از نومرتب نمود تا جمع مربعات بر روی دو ساق را پدیدآورند. بهاسکره شکل را رسم نموده و توضیح بیشتری جز کلمهٔ «بنگر!» نداده است. مع‌هذا، با کمی استفاده از جبر، برهان را می‌توان نوشت. زیرا اگر c وتر و a و b دوساق مثلث باشند

$$c^{۲}=۴\left(\frac{ab}{۲}\right)+(b-a)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}.$$

این برهان از راه تقطیع بسیار پیش ازاین در چین وجود داشت. بهاسکره همچنین برهان دیگری را با رسم ارتفاع وارد بر وتر ارائه‌کرد. از مثلثهای متشابه شکل ۶۱ داریم

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{m}, \quad \frac{c}{a}=\frac{a}{n}$$

یا

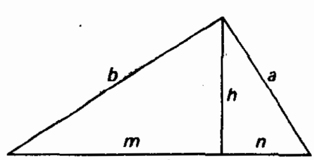
$$cm=b^{۲}, \quad cn=a^{۲}.$$

از جمع کردن، به‌دست می‌آوریم

$$a^{۲}+b^{۲}=c(m+n)=c^{۲}.$$

این برهان توسط جان والیس[1] در قرن هفدهم مجدداً کشف شد.

هندیان، همچون یونانیان مثلثات را به‌عنوان ابزاری در نجوم تلقی می‌کردند. آنها از تقسیمات درجه، دقیقه، و ثانیهٔ معمول در بین ما استفاده می‌کردند و جداولی برای سینوسها ساختند. (البته آنها برخلاف یونانیان که جداول وتر ساخته بودند، جداول نصف



شکل ۶۱

1. John Wallis

و ترساختند.) هندیان معادلهای سینوس، کسینوس، وسهم[1] $(\text{versin } A = ۱ - \cos A)$ را به‌کار بردند. آنها سینوس نصف زاویه را به‌وسیلهٔ رابطهٔ $\text{versin } ۲A = ۲\sin^۲ A$ محاسبه کردند. آنها در نجوم، مثلثهای مسطحه و کروی را حل کردند. کیفیت نجوم نزد آنها ضعیف است و نشان از بی‌استعدادی در ارصاد، جمع‌آوری و مقابله و تطبیق وقایع، و استنتاج قوانین دارد. مثلثات آنها را می‌توان بیشتر واجد جنبهٔ حسابی توصیف نمود تا جنبهٔ هندسی.

۷-۸ مقایسهٔ ریاضیات یونانی و هندی

بین ریاضیات یونانی و هندی اختلاف زیادی وجود دارد. در وهلهٔ اول، هندیانی که در ریاضیات کار می‌کردند، خود را در اصل منجم می‌پنداشتند، ولذا ریاضیات هندی عمدتاً به‌صورت ابزاری در خدمت نجوم باقی ماند؛ اما در یونان، ریاضیات هستی مستقلی یافت و ریاضیات به‌خاطر خود ریاضیات مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین، به‌خاطر وجود نظام کاستی، ریاضیات در هند تقریباً به‌طور کامل به‌وسیلهٔ روحانیون رشد و نمو یافت؛ در یونان باب ریاضیات بر هر کسی که پروای مطالعهٔ آن را داشت، مفتوح بود. بعلاوه، هندیان حسابگرانی ممتاز ولی هندسه‌دانانی متوسط بودند، یونانیان در هندسه تفوق یافتند ولی به‌کارهای محاسباتی کمتر توجهی از خود نشان دادند. حتی مثلثات هندی، که قابل ستایش بود، ماهیت حسابی داشت؛ مثلثات یونانی واجد خصیصهٔ هندسی بود. هندیان به‌نظم می‌نوشتند و آثار خود را اغلب در قالب زبانی مبهم و مرموز در می‌آوردند، یونانیان سعی در بیان واضح و منطقی داشتند. ریاضیات هندی عمدتاً تجربی بود که براهین و روشهای استخراج به‌ندرت در آن عرضه می‌شد، صفت ممیزهٔ ریاضیات یونانی در اصرار آن بر براهین دقیق است. ریاضیات هندی از نظر کیفیت اصلا یکدست نیست، ریاضیات پرمایه و ضعیف اغلب در کنار هم ظاهر می‌شوند؛ یونانیان ظاهراً غریزه‌ای داشتند که آنها را در تمیز کیفیت مطلوب از ضعیف و حفظ اولی و رها کردن دومی رهنمون بود. به گفتهٔ نویسندهٔ مسلمان ابوریحان بیرونی در کتاب معروفش تحقیق ماللهند، ریاضیات هندی، برخلاف ریاضیات یونانی که کیفیتی یکدست عالی دارد «مخلوطی است از صدف و خزف... یا ممزوجی از در پربها و سنگریزهٔ بی‌بها».

قسمتی از اختلاف بین ریاضیات یونانی و هندی، امروزه در تفاوت بین بسیاری از کتابهای درسی مقدماتی جبر و هندسه ما جنبهٔ دائمی یافته است.

اعراب

۷-۹ ظهور فرهنگ اسلامی

ظهور و افول امپراطوری عرب یکی از جالب توجه‌ترین وقایع تاریخ است. درظرف دههٔ

---

1. versed sine

بعد از هجرت [حضرت] محمد [ص] از مکه به مدینه در ۶۲۲ میلادی [سال ۱ هجری]، قبایل پراکنده و نامتحد شبه جزیرهٔ عربستان به‌یاری شور و شوق مذهبی شدید به یك ملت قدرتمند قوام یافتند. طی یك قرن، نیروی سلاح تحت لوای سبز و طلایی اسلام، حکومت و نفوذ ستاره و هلال پرچم اسلام را برقلمروی بسط داده بود که از هندگرفته، ایران، بین‌النهرین، افریقای شمالی، و آشکارا تا اسپانیا را در برمی‌گرفت. اختلاف در بین مدعیان خلافت سبب یك جدایی شرقی ـ غربی در این حکومت در سال ۷۵۵ شد، که به حکومت خلیفه‌ای در بغداد و خلیفهٔ دیگری در قرطبه منجر گردید. تقریباً تا سال ۱۰۰۰ امپراطوری شرقی از برتری معنوی برخوردار بود. ولی دراین زمان قسمت اعظم قلمرو شرقی به‌وسیلهٔ ترکان بیرحم سلجوقی مورد تاخت و تازقرارگرفت. بین سالهای ۱۱۰۰ و ۱۳۰۰، صلیبیون مسیحی درصدد بیرون‌راندن مسلمین از بیت‌المقدس برآمدند. در سال ۱۲۵۸، بغداد به‌وسیلهٔ مغولها اشغال شد، خلیفهٔ شرقی از قدرت ساقط شد، و امپراطوری عربی روبه‌انحطاط نهاد. در سال ۱۴۹۲، اسپانیا آخرین حاکم موری[1] خود را برکنار کرد، و اعراب جای پای خود در اروپا را از دست دادند.

آنچه که برای حفظ قسمت‌اعظم فرهنگ جهان اهمیت شایانی داشت، نحوهٔ دستیابی و بهره‌وری از فضایل یونانی و هندی توسط اعراب بود. خلفای بغداد نه‌تنها به‌خوبی حکومت کردند، بلکه به‌حامیان علم بدل گشتند و فضلای برجسته‌را به‌دربار خود فراخواندند.

۱. Moorish، مور(Moor) اصطلاحی است که برای مسلمانان حاکم‌براسپانیا در قرن هشتم به‌کار می‌رفت و اینها ترکیبی از اعراب و اقوام شمال افریقا بودند.ــم.

آثار هندی و یونانی متعددی در نجوم، طب، و ریاضیات با تلاش فراوان به‌زبان عربی برگردانده شدند و بدین‌ترتیب تا آن‌زمان که فضلای اروپایی قادر به ترجمهٔ مجدد آنها به‌زبان‌لاتین یا سایر زبانها گردند، محفوظ ماندند. اگر کار فضلای عرب نمی بود، بیشتر علوم یونانی وهندی به‌طور جبران‌ناپذیری در طی دورهٔ طولانی عصر تاریکی[1] [قرون‌وسطی] از بین می‌رفت.

در زمان فرمانروایی خلیفه منصور، آثار برهمگوپته به بغداد آورده شدند (تقریباً ۷۶۶) و تحت حمایت خلیفه، به‌عربی ترجمه شدند. گفته شده که ارقام هندی بدین وسیله وارد ریاضیات عربی شده است. خلیفهٔ بعدی هارون‌الرشید بود که از سال ۷۸۶ تا ۸۰۸ میلادی حکومت کرد و آشنایی غربیان باوی به داستانهای هزار و یکشب[2] مربوط می‌شود. تحت حمایت وی بسیاری از آثار کلاسیک علمی یونان به‌عربی برگردانده‌شدند، که قسمتی از اصول اقلیدس از آن جمله است. همچنین درعهد حکومت او معارف هندی رخنهٔ بیشتری به‌بغداد پیدا کرد. مأمون پسر هارون‌الرشید نیز، که از سال ۸۰۹ تا ۸۳۳ میلادی حکومت کرد، حامی علم و خود یك منجم بود. او رصدخانه‌ای دربغداد بنا کرد و اندازه‌گیری نصف‌النهار زمین را به‌عهده گرفت. کار شاق تهیهٔ ترجمه‌های عربی رضایتبخش از آثار کلاسیك یونانی به‌فرمان وی ادامه پیدا کرد؛ المجسطی به‌عربی درآمده و ترجمهٔ اصول کامل گردید. دستنوشته‌های یونانی، به‌عنوان یکی از شرایط صلح، از امپراطوری بیزانس مصادره و سپس توسط فضلای مسیحی سریانی که به‌دربار مأمون فراخوانده شده بودند، به‌عربی ترجمه شدند. در عصر این حکومت فضلای زیادی به نوشتن آثاری در زمینهٔ ریاضیات و نجوم پرداختند، که مشهورترین آنها محمدبن موسی الخوارزمی بود. وی رساله‌ای در جبر و کتابی دربارهٔ ارقام هندی نگاشت، که بعدها وقتی در قرن دوازدهم به لاتین ترجمه شدند هر دو تأثیر فوق‌العاده‌ای در اروپا گذاشتند. از دانشمندان کمی متأخرتر ثابت‌بن‌قره (۹۰۱-۸۲۶) بود، که به‌عنوان پزشك، فیلسوف، زباندان، وریاضیدان شهرت‌داشت. وی‌اولین ترجمهٔ عربی واقعاً رضایتبخش را از اصول پدید آورد. ترجمه‌های وی از آپولونیوس، ارشمیدس، بطلمیوس، و تئودوسیوس در ردیف بهترین ترجمه‌های انجام‌شده قلمداد می‌شود. او همچنین درنجوم، مخروطات، جبرمقدماتی، مربعهای‌جادویی، و اعداد متحابه (نگاه کنید به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱.۷) رسایلی دارد.

احتمالا نام‌آورترین ریاضیدان مسلمان درقرن دهم ابوالوفای بوزجانی (۹۴۰- ۹۹۸) است، که درخراسان، ناحیه‌ای کوهستانی در ایران، به‌دنیا آمد. اشتهار وی به‌جهت ترجمهٔ آثار دیوفانتوس، معرفی تابع تانژانت توسط وی به‌عالم مثلثات، و محاسبهٔ جدولی از سینوسها و تانژانتها برای فواصلی به طول ′۱۵ است. وی مطالبی در چندین مبحث ریاضیات نوشت. از ابوکامل وکرخی [کرجی] که از مؤلفین قرون دهم و یازدهم بودند، باید به‌خاطر کارهایشان در جبر یاد کرد. اولی متأثر از خوارزمی بود و به‌نوبهٔ خود برریاضیدان اروپایی فیبوناتچی (۱۲۰۲) تأثیر نهاد. کرخی، که از هواداران دیوفانتوس بود، اثری به‌نام فخری به‌وجود آورد که یکی از فاضلانه‌ترین کارهای مسلمین درجبر است.

---

1. Dark Ages 2. *Arabian Nights*

اما شاید عمیقترین و بدیعترین اثرجبری حل هندسی معادلهٔ درجهٔ سوم توسط عمر خیام (حوالی ۱۱۰۰)، خراسانی‌زادهٔ دیگری، است که دنیای غرب او را به‌عنوان مصنف رباعیات دلنشین می‌شناسد. ازخیام همچنین به‌خاطر اصلاحیهٔ دقیق پیشنهادی‌اش برای تقویم یاد شده است.

نویسندهٔ نسبتاً متأخر دیگر، [خواجه] نصیرالدین [طوسی] (حدود ۱۲۵۰)، است، که او هم خراسانی بود. وی اولین اثر در باب مثلثات مسطحه و کروی را، که از نجوم مستقل تلقی شود، نگاشت. ساکری[1] (۱۷۳۳ ـ ۱۶۶۷) کارش در هندسهٔ نااقلیدسی را با دانشی ازنوشته‌های نصیرالدین در باب اصل توازی اقلیدس شروع کرد. این نوشته‌ها بعداً به‌وسیلهٔ جان والیس در قرن هفدهم به‌لاتین درآمده و توسط او برای تدریس هندسه در آکسفورد مورد استفاده قرار گرفت. سرانجام الغ بیگ، منجمی ایرانی از تبار شاهی در قرن پانزدهم، است که جداول سینوس و تانژانت برجسته‌ای تدوین کرد، با فواصل ′۱ و صحیح تا ۸ رقم اعشار یا بیشتر. کاشانی، که در بخش ۷ـ۲ از او به‌خاطر تقریب دقیق π یاد کرده‌ایم، در دربار او می‌زیست. کاشانی کارهای مهمی در رابطه با کسرهای اعشاری انجام داد و تا آنجا که می‌دانیم اولین نویسندهٔ عرب [= عربی نویس] است که به‌کار باقضیهٔ دو جمله‌ای، در شکل «مثلث پاسکال» پرداخته است.

۷ـ۱۰ حساب و جبر

قبل از [حضرت] محمد [ص]، اعراب همهٔ ارقام را به کلمات می‌نوشتند. بعدها مدیریت گسترده‌تر زمینهای تصرف شده، تاحدی در مطرح شدن یك نمادگذاری کوتاه دخیل بود. زمانی دستگاههای اعداد محلی مورد پذیرش بودند، و زمانی استفاده از دستگاه شمار رمزی، شبیه دستگاه یونانی یونیایی، که از ۲۸ حرف عربی استفاده می‌کرد، تقریباً رواج عام یافت. این نمادها نیز به‌نوبهٔ خود، جای خود را به‌نماد هندی دادند که اولین بار به‌وسیلهٔ بازرگانان و کسانی که در زمینهٔ حساب چیز می‌نوشتند، پذیرفته شده بود. کاملا عجیب آنکه ارقام هندی در برخی از حسابهای متأخر امپراطوری شرقی کنار گذاشته شده‌اند. مثلا ابوالوفا و کرخی، در قرنهای دهم و یازدهم، حسابهایی نوشتند که در آنها همهٔ اعداد دوباره باکلمات نوشته‌شده بودند. این نویسندگان عرب [= عربی‌نویس] متأخر، ازتعالیم هندی دورشده وتحت‌تأثیر روشهای یونانی قرار گرفتند. هیچ اثری مبنی براستفاده‌ازچرتکه در بین‌اعراب قدیمی یافت نشده است.

اولین‌حساب عربی که برآن وقوف‌داریم، از آن خوارزمی است؛ دسته‌ای ازحسابهای عربی دیگر به‌وسیلهٔ مؤلفین بعدی ازپی‌آن آمدند. این حسابها عموماً قواعد محاسبه‌را، که از روی الگوریتمهای هندی الگوبرداری شده بودند، شرح می‌دادند. آنها همچنین عملی راکه معروف به طرح نه نه است، ارائه دادند، که برای امتحان‌کردن محاسبات حسابی به‌کار می‌رود، و قاعدهٔ امتحان و تصحیح و قاعدهٔ خطأین که به‌کمك آنها برخی مسائل

---

1. Saccheri

جبری را می‌توان به‌طریقهٔ غیرجبری حل کرد، از آنهاست (به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۲.۷ و ۱۴.۷ رجوع کنید). جذر و کعب، کسرها، و قاعدهٔ سه نیز بارها تشریح شده‌اند.

به‌نظرمی‌رسد که **قاعدهٔ سه**، مانند اغلب مطالب دیگر درحساب مقدماتی، از هندیان گرفته شده باشد، و درواقع توسط برهمگوپته و بهاسکره به‌همین‌نام خوانده شده است. تاقرنها، این قاعده دربین بازرگانان اعتبار عمده‌ای داشت. قاعدهٔ مزبور به‌طور مکانیکی و بدون استدلال بیان می‌شد، و ارتباط آن با تناسب تا پایان قرن چهاردهم تشخیص داده نشد. نحوهٔ بیان این قاعده توسط برهمگوپته چنین است: درقاعدهٔ سه، مایه، بهره، ومطلوب نامهای جمله‌ها هستند. جمله‌های اول و آخر باید از یك جنس باشند. مطلوب ضرب‌در بهره، وتقسیم برمایه، همانا محصول است. برای روشن‌شدن مطلب مسئلهٔ زیر را که بهاسکره داده است، درنظر بگیرید: اگر دو و نیم پله[1] زعفران به‌سه هفتم نیسکه[2] خریداری شود، با ۹ نیسکه چند پله می‌توان خرید؛ دراینجا ۳/۷ و ۹، که از یك جنس‌اند، مایه و مطلوب هستند، و ۵/۲ بهره است. جواب یا محصول، در این صورت با $(۵/۲)(۹)/(۳/۷)=۵۲(۱/۲)$ داده می‌شود. امروزه ما مسئله را کاربرد ساده‌ای از تناسب به‌حساب می‌آوریم،

$$x:۹=۵/۲:۳/۷.$$

نویسندگان اولیهٔ حساب اروپایی مطالب زیادی را به‌قاعدهٔ سه اختصاص دادند و ماهیت مکانیکی آن را در اشعار هجایی و اشکال نموداری می‌توان مشاهده نمود.

در جبر خوارزمی اصالت کمتری می‌توان دید. چهارعمل اصلی شرح داده شده و معادلات خطی و درجهٔ دوم حل گردیده‌اند، و حل معادلات درجهٔ دوم هم به‌طریق حسابی وهم به‌طریق‌هندسی صورت گرفته است. کار وی شامل مقداری مساحی هندسی وچند مسئله در ارث است.

ریاضیدانان مسلمان بهترین‌کارهای خود را درزمینهٔ جبر هندسی عرضه داشتند، که این امر با حل هندسی معادلات درجهٔ سوم به‌وسیلهٔ عمرخیام به‌اوج خود رسید. دراینجا معادلات‌درجهٔ‌سوم به‌طورمنظم‌دسته‌بندی‌شده ویك‌ریشهٔ معادله به‌عنوان طول نقطهٔ برخورد یك دایره‌و یك‌هذلولی متساوی‌الساقین یادوهذلولی متساوی‌الساقین به‌دست‌آمده‌است (به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۵.۷ مراجعه‌کنید). خیام‌ریشه‌های منفی راردکرده ودراغلب موارد قادربه‌کشف همهٔ ریشه‌های مثبت نبود. معادلات درجهٔ سوم از مطالعهٔ مسائلی نظیر ساختن هفت ضلعی منتظم و مسئلهٔ ارشمیدسی بریدن یك کره به‌دو قطعه به‌نسبتی معین ناشی شده‌اند. ابوالوفا راه حلهای هندسی برای برخی معادلات درجهٔ چهارم ارائه داد.

بعضی از ریاضیدانان مسلمان به‌معادلات سیاله علاقه نشان دادند. مثلا برهانی (که احتمالا ناقص بود و اکنون دردسترس نیست) براین قضیه که نمی‌توان دو عدد صحیح مثبت یافت که مجموع مکعبات آنها مکعب عدد صحیح ثالثی باشد، ارائه داده شد. این

---

1. pala 2. niska

حالت خاصی از آخرین «قضیهٔ» مشهور فرماست، که در فصل ۱۰ [جلد دوم] دوباره به آن بازخواهیم گشت. قبلاً از قاعدهٔ ثابت‌بن‌قره برای یافتن اعداد متحابه یاد شده است. گفته شده است که این اولین نمونهٔ کار ریاضی اصیل است که توسط اعراب انجام شده است. کرخی اولین نویسندهٔ عرب [= عربی‌نویس] بود که قضایایی ارائه وثابت نمود که مجموع مربعات و مکعبات اولین n عدد طبیعی را می‌داد.

جبر عربی، بجز آنچه که مربوط به اعراب غربی متأخر است، لفظی بود.

۱۱-۷ هندسه و مثلثات

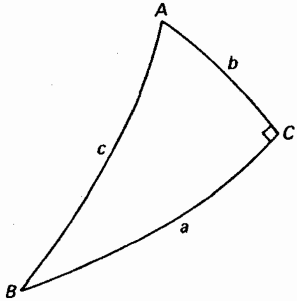
نقش مهم اعراب [= عربی نویسان] در هندسه بیشتر از جنبهٔ حفظ آن بود و نه ازجنبهٔ کشفیات جدید درآن. دنیا به‌جهت تلاشهای خستگی‌ناپذیر آنان در ترجمه‌های رضایتبخش آثار بزرگ کلاسیك یونان، دین عظیمی در قبال آنها به‌عهده دارد.

مطالعهٔ زیبایی در هندسه توسط ابوالوفا انجام شده است، که در آن چگونگی قرار دادن رئوس چند وجهی منتظم بر کره‌های محیطی آنها، با استفاده از پرگارهایی که فرجهٔ ثابت دارند، نشان داده شده است. قبلاً از حل هندسی معادلات درجهٔ سوم خیام و اثر پرنفوذ [خواجه] نصیرالدین دراصل توازی ذکری به‌میان آورده‌ایم. نصیرالدین قسمتی از کار پیشتر خیام تحت عنوان بحثی از مشکلات در اقلیدس[1] [شرح ما اشکل من‌مصادرات اقلیدس] را با شرح و «تصحیحاتی» منتشر نمود. دراین قسمت‌کار پیشین، ما به‌آنچه که ظاهراً اولین بررسی سه‌حالتی که بعدها، توسط ساکری، نام فرضهای حاده، منفرجه وقائمه را یافتند، برمی‌خوریم (به بخش ۶-۱۳ رجوع کنید). برهان اصیلی از قضیهٔ فیثاغورس نیز به نصیرالدین منسوب است. این برهان اساساً همان است که در یادداشتهای مربوط به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۷.۶(ج)، برای تعمیم پاپوس ازقضیهٔ فیثاغورس، پیشنهاد کرده‌ایم.

نام‌الهیثم، یا، مشهورتر، الهازن[2] (حوالی ۱۰۳۹-۹۶۵) در رابطه بامسئلهٔ موسوم به‌**مسئلهٔ الهازن** در ریاضیات‌حفظ‌شده است: رسم خطوطی بردونقطهٔ مفروض واقع درصفحهٔ یك دایرهٔ مفروض به‌طوری که یکدیگر را روی دایره قطع کنند و در آن نقطه زوایای مساوی بادایره بسازند. مسئله منجر به‌یك معادلهٔ درجهٔ چهارم می‌شود که به‌سبك یونانی بایك هذلولی و دایرهٔ متلاقی حل شده است. الهازن در شهربصره واقع درجنوب عراق به دنیا آمد و شاید بتوان اورا بزرگترین فیزیکدان مسلمان دانست. مسئلهٔ بالا در رابطه با رسالهٔ اپتیك وی، که بعدها نفوذ زیادی در اروپا گذاشت، مطرح شد.

دربارهٔ الهازن داستان رقت‌انگیزی گفته شده است. وی بدبختانه یك‌بار لاف زد که می‌تواند ماشینی بسازد که قادر به‌کنترل و تنظیم طغیان سالانهٔ رودخانهٔ نیل باشد. ازاین‌رو به‌وسیلهٔ خلیفه حاکم به‌قاهره احضار شد تا ایدهٔ خودرا شرح دهد و شاید هم آن‌را عملی نماید. الهازن که ازعملی نبودن محض طرح خودآگاه بود و ازخشم خلیفه می‌ترسید، خود

1. *Discussion of the Difficulties in Euclid* 2. Alhazen



شکل ۶۲

را بهدیوانگی زد، زیراکه درآن زمان مجانین ازحمایت ویژه‌ای برخوردار بودند. الهازن ناچار شد تازمان مرگ خلیفه حاکم درسال ۱۰۲۱ بااحتیاط زیاد براین نیرنگ پافشارد.

اغلب ریاضیدانان عرب، چون‌هندوان، خودرا دروهلهٔ اول منجم به‌حساب‌می‌آوردند و ازاین‌رو علاقهٔ قابل ملاحظه‌ای به‌مثلثات نشان می‌دادند. قبلا از برخی‌کارهای انجام‌شده توسط مسلمانان در ساختن جداول مثلثاتی یادکرده‌ایم. شاید بتوان استفاده از هرشش‌تابع مثلثاتی و اصلاحات انجام شده در استخراج فرمولهای مثلثات کروی را به‌آنان منسوب کرد. قاعدهٔ کسینوسها برای یك مثلث غیرقائم کروی، یعنی

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

به‌وسیلهٔ بتانی (باصورت لاتینی آلباتگنیوس[1]، حوالی ۹۲۰) داده شد، و فرمول

$$\cos B = \cos b \sin A$$

برای مثلث کرویی که زاویهٔ قائمه‌ای در C دارد (به‌شکل ۶۲ رجوع کنید)، گاهی، به‌احترام منجم مسلمان غربی جابربن‌افلح (که اغلب جبرنامیده می‌شود و حوالی ۱۱۳۰ در سویل[2] رونق یافت) قضیهٔ جبر خوانده می‌شود.

۷-۱۲ کمی در علم اشتقاق

ریشهٔ بسیاری از نامها و واژه‌های امروزی را می‌توان در دورهٔاعراب یافت، مثلا هر فرد علاقه‌مند به‌نجوم ارصادی احتمالا آگاه است که‌عدهٔ زیادی ازنامهای‌ستارگان [درزبانهای اروپایی]، به‌ویژه‌ستاره‌های کم‌فروغ، عربی‌اند. به‌عنوان‌نمونه‌های‌مشهور دبران، نسرواقع، و رجل الجبار از جملهٔ ستاره‌های پر فروغ، و غول، سها، و عناق از جملهٔ ستاره‌های کم‌فروغ می‌باشند. نامهای بسیاری از ستارگان دراصل عباراتی حاکی از موقعیت ستارگان در صورتهای فلکی بودند. این‌عبارات توصیفی وقتی از فهرست بطلمیوس به تحریرعربی

1. Albategnius 2. Seville

در آمدند، بعدها به‌واژه‌های واحدی قلب شدند. به‌عنوان مثال منکب‌الجوزاء (زیر بغل جبار)، فم‌الحوت (دهان ماهی)، ذنب (دم پرنده)، رجل (ساق‌غول) راداریم، وقس‌علی‌هذا. قبلا، در بخش ۶ـ۵، اشتقاق المجسطی را پی گرفتیم، که نامی است عربی که اغلب به‌اثر بزرگ بطلمیوس اطلاق می‌شود.

اشتقاق کلمهٔ‌الجبرای‌انگلیسی ازعنوان حساب‌الجبروالمقابله، رسالهٔ‌خوارزمی دراین موضوع، بسیار جالب توجه است. این‌عنوان به طور تحت اللفظی به «Science of reunion and the opposition» یا به‌طورآزادتر به «Science of transposition and cancellation»* ترجمه شد. این کتاب، که هنوز باقی‌است، در اروپا ازطریق‌ترجمه‌های لاتین آن شناخته شد، و کلمهٔ الجبر، یا الجبرا، را باعلم‌معادلات مترادف نمود. البته از اواسط قرن نوزدهم به‌بعد، الجبرا معنی بسیار وسیعتری یافته‌است.

واژهٔ عربی الجبر، درکاربرد غیرریاضی آن، ازطریق مورهای اسپانیا به‌اروپا راه یافت. درآنجا الجبریستا[1] یك شکسته‌بند (به‌هم برآورندهٔ استخوانهای شکسته) بود، و نامعمول نبود که یك سلمانی آن‌زمان خود را الجبریستا بخواند، زیرا شکسته‌بندی‌و حجامت ازکارهای جنبی سلمانیهای قرون وسطی بود.

کتاب خوارزمی درباب استفاده از ارقام هندی نیز کلمه‌ای را به‌واژگان ریاضیات معرفی کرده‌است. این کتاب درصورت اصلی آن موجود نیست، ولی در ۱۸۵۷ یك‌ترجمهٔ لاتینی آن به‌دست آمدکه چنین شروع می‌شود، «روایت است از الگوریتمی...» دراینجا نام الخوارزمی به الگوریتمی بدل شده‌بود، که واژهٔ امروزی «الگوریتم» به‌معنی‌فن محاسبه به‌هر شیوهٔ خاص، به‌نوبهٔ خود از آن مشتق شده است.

معانی نامهای‌کنونی توابع مثلثاتی، بجز سینوس از تعابیر هندسی آنها وقتی‌که زاویه بر مرکز دایره‌ای به شعاع واحد قرار داده شود، روشن است. مثلا، در شکل ۶۳ اگر شعاع دایره یك واحد باشد، اندازه‌های $\tan\theta$ و $\sec\theta$ با طول قطعه خط مماس[2] CD و قطعه خط قاطع[3] OD داده می‌شوند. و البته‌کتانژانت به‌معنی متمم تانژانت‌است و قس علی‌هذا. توابع تانژانت، کتانژانت، سکانت وکسکانت به‌نامهای متعدد دیگری نیز شهرت داشتند، و نامهای فعلی در قرن شانزدهم ظاهر شده‌اند.

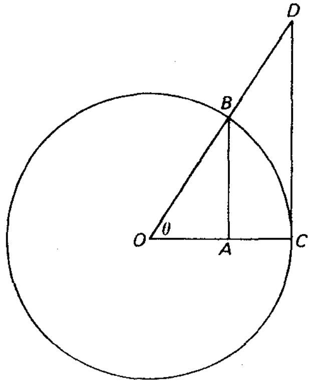
ریشهٔ کلمهٔ سینوس جالب است. آریبهطه آن را اردها ـ جیا[4] («نصف‌وتر») و نیز جیا ـ اردها[5] («وترنصف») نامید، وسپس این اصطلاح را صرفاً با به‌کاربردن جیا («وتر») مختصر نمود. اعراب جیب[6] را مطابق قواعد آواشناسی از جیا گرفتند، که به‌پیروی از رسم اعراب در حذف حروف مصوت، به‌صورت جب[7] نوشته شد. درحال‌حاضر جیب

---

* برای تحلیل دقیقتری، رجوع کنید به‌مقالهٔ

Solomon Gandz, "The origin of the term 'algebra'," *American Mathematical Monthly*, 33, (1926), pp. 437–440.

1. algebrista 2. tangent 3. secant 4. ardhā-jyā
5. jyā - ardhā 6. jîba 7. jb



شکل ۶۳

در زبان عربی، جدا از معنی فنی آن، کلمهٔ بی‌مفهومی است. نویسندگان بعدی، که به‌جب به‌عنوان مختصر شدهٔ جیب بی‌معنی برمی‌خوردند تصمیم گرفتند که جیب[1] را به‌جای آن بگذارند، که شامل همان حروف است و کلمهٔ عربی مناسبی به‌معنی «خلیج کوچك» یا «خلیج» است. بعدها، گرارد وی کرمونایی (حوالی ۱۱۵۰)، وقتی از عربی ترجمه می‌کرد، جیب عربی را با معادل لاتین آن، سینوس، جانشین کرد که از همان زمان کلمهٔ کنونی *sine* پدید آمد.

۷-۱۳ سهم اعراب

ارزیابی سهم اعراب در بسط ریاضیات به‌هیچ‌وجه مورد توافق نیست. برخی برای نویسندگان مسلمان، به‌ویژه برای کار آنها در جبر و مثلثات، خلاقیت و نبوغ بسیار زیادی قائل‌اند. به‌نظر دیگران این نویسندگان شاید فاضل باشند ولی به‌ندرت خلاق‌اند، و خاطرنشان می‌کنند که کار آنان هم از نظر کمیت وهم ازنظر کیفیت نسبت به‌کار یونانیان یا نویسندگان جدید کاملا در درجهٔ دوم قراردارد. از سویی باید پذیرفت که آنان حداقل به‌پیشرفتهای کمی دست یافتند، و از سوی دیگر شاید چنین باشد که وقتی به بعضی دستاوردهای آنان در برابر زمینهٔ عقیم علمی سایر قسمتهای دنیا نگریسته شود، از حد واقعی عظیمتر به‌نظر می‌آیند. واقعیت مهم دیگری، در برهم‌زدن تعادل به‌نفع آنها، این است که آنان به‌طور اعجاب‌انگیزی به عنوان نگهبانان بخش عمدهٔ ثروتهای معنوی دنیا خدمت نمودند، ثروتهایی که پس از سپری شدن عصر تاریکی به‌اروپاییان متأخر انتقال یافت.

مطالعهٔ مسئله‌ای

۱.۷ مسائلی از «حساب در نه بخش»

مسائل زیر را که در حساب درنه بخش دیده می‌شود، حل کنید.

---

1. jaib

(الف) مسئلهٔ ۱۱، بخش IV. «مزرعه‌ای به عرض ۱، ۱/۲، ۱/۳، ۱/۴، ۱/۵، ۱/۶، ۱/۷، ۱/۸، ۱/۹، ۱/۱۰، ۱/۱۱، ۱/۱۲ پو[1] داده‌شده است، می‌دانیم که‌مساحت مزرعه۱مو[2] است. طول مزرعه‌چیست؟ (یك پو برابردوگام‌است؛ ۲۴۰ پوی مربع = ۱مو، عرض مزرعه ۱۲/۱ + ... + ۱/۳ + ۱/۲ + ۱ پو است.)

(ب) مسئلهٔ ۱۴، بخش IV. «مزرعهٔ مربعی به‌مساحت ۷۱۸۲۴ پوی مربع داده شده است. ضلع مربع چیست؟»

(ج) مسئلهٔ ۱۶، بخش I. «مزرعه‌ای به شکل قطعه‌ای از یك دایره داده شده است، که قاعدهٔ آن $\frac{1}{2}$۷۸ پو و تیر[3] آن $\frac{7}{9}$۱۳ پو است. مساحت آن چیست؟» (ازفرمول تقریب $A = s(b+s)/2$ استفاده کنید.)

(د) مسئلهٔ ۱، بخش VIII. «سه بافه محصول مرغوب، ۲ بافه محصول متوسط، و ۱ بافه محصول نامرغوب به‌۳۹ دوئو[4] فروخته می‌شوند. دو بافهٔ مرغوب، ۳ بافهٔ متوسط، و ۱ بافهٔ نامرغوب به‌۳۴ دوئو فروخته می‌شوند. یك‌بافهٔ مرغوب، ۲ بافهٔ متوسط، و ۳بافهٔ نامرغوب به‌۲۶ دوئو فروخته می‌شوند. قیمت هربافه از محصول مرغوب، متوسط، و نامرغوب چیست؟»

۲.۷ قضیهٔ فیثاغورس

(الف) مسئلهٔ ۱۱، بخش IX، از حساب در نه بخش ازاین قرار است: «دری‌هست که ارتفاع آن از عرض آن به‌اندازهٔ ۶ چی[5] و ۸ تسون[6] بزرگتر است. حداکثر فاصله بین‌رأسها ۱ چانگ[7] است.ارتفاع وعرض‌در چیست؟» (۱ چانگ = ۱۰ چی، ۱چی = ۱۰ تسون.)

(ب) مسئلهٔ زیر را، که از یکی از مسائل حساب در نه‌بخش اقتباس شده است، حل کنید: «در وسط یك استخر مدورکه قطرآن ۱۰ فوت است، نیی‌روییده است‌که یك فوت بالاتر ازآب قرار می‌گیرد.وقتی آن‌را خم می‌کنند، درست به‌لبهٔ استخر می‌رسد.عمق‌آب چقدر است؟»

(ج) مسئلهٔ خیزران شکسته راکه درحساب درنه‌بخش و بعداً در آثار یانگ‌هوی دیده می‌شود حل‌کنید: «خیزرانی است به‌ارتفاع ۱۰ پا، قسمت فوقانی آن که شکسته، به‌فاصلهٔ ۳ پا ازساق آن به‌زمین می‌رسد. فاصلهٔ نقطهٔ شکستگی را تا زمین پیداکنید.»

(د) بااستفاده از تعمیمی از شکل ۵۹، برهانی برای قضیهٔ فیثاغورس ابداع کنید.

(ه) فرمول درست مساحت قطعه‌ای از یك دایره را بر حسب قاعدهٔ b و تیر s قطعه پیداکنید.

---

1. pu 2. mu

۳. Sagitta خطی‌که وسط قوسی را به‌وسط وتر وصل می‌کند.ــ م.

4. dou 5. ch'ih 6. ts'un 7. chang

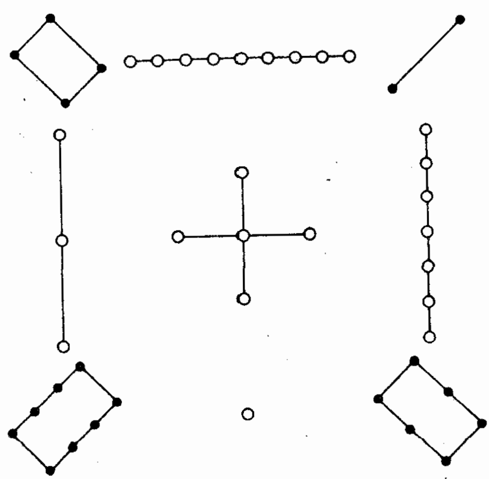
۳۰۷ مربعهای جادویی

هیچ مطالعه‌ای از ریاضیات چین باستان، هراندازه هم که مختصر باشد، نباید ذکری از به‌اصطلاح مربع جادویی لوشو[1] را از قلم بیندازد.

یکی از قدیمیترین آثار کلاسیک ریاضیات چین ای - کینگ[2]، یا کتاب درباب جایگشتها[3] است. دراین کتاب نموداری از ارقام ظاهر می‌شود که به‌لوشو معروف است و بعدها به‌صورت شکل ۶۴ تصویر شده است. لوشو قدیمیترین نمونهٔ شناخته شدهٔ یك مربع جادویی است، وبه‌روایت اساطیر این مربع اولین‌بار توسط امپراطور یو[4]، در حدود ۲۲۰۰ق.م. مشاهده شدکه بر پشت یك لاك‌پشت مقدس در امتداد کرانهٔ رودخانهٔ زرد، آذین شده بود. این یك آرایهٔ مربعی از ارقام است که درشکل ۶۴ با گرههایی به رشته درآمده نشان داده شده است ـ گرههای سیاه برای اعداد زوج و گرههای سفید برای اعداد فرد.

(الف) یك **مربع جادویی از مرتبهٔ n** آرایه‌ای مربعی‌از n^2 عدد صحیح متمایز با چنان ترتیبی است که n عدد روی هر سطر، ستون، یا قطر اصلی دارای مجموع یکسان می‌باشند که **ثابت جادویی** مربع نامیده‌می‌شود. مربع جادویی **نرمال** نامیده می‌شودهرگاه n^2 عددمزبور، اولین n^2 عدد صحیح مثبت باشند. نشان دهیدکه ثابت جادویی یك مربع جادویی نرمال ازمرتبهٔ n ام برابر با $n(n^2+1)/2$ است.

(ب) دولالوبر[5]، وقتی در سالهای ۱۶۸۷-۱۶۸۸ به‌عنوان فرستادهٔ لوئی چهاردهم درسیام بود، روش ساده‌ای برای پیدا کردن مربعهای جادویی نرمال از هرمرتبه فرد را



شکل ۶۴

1. lo-shu 2. *I-King* 3. *Book on Permutations* 4. Yu
5. De la Loubère

	۱۸	۲۵	۲	۹	
۱۷	۲۴	۱	۸	۱۵	۱۷
۲۳	۵	۷	۱۴	۱۶	۲۳
۴	۶	۱۳	۲۰	۲۲	۴
۱۰	۱۲	۱۹	۲۱	۳	۱۰
۱۱	۱۸	۲۵	۲	۹	

شکل ۶۵

فرا گرفت. باساختن یك مربع‌جادویی از مرتبهٔ پنجم این روش راشرح می‌دهیم. مربعی‌رسم و آن‌را به‌۲۵ خانه تقسیم کنید (نگاه کنید به‌شکل ۶۵). باخانه‌هایی درکنار لبه‌های بالایی و راست حاشیه‌هایی برمربع ایجاد کنید، وخانهٔ اضافه شده درگوشهٔ سمت راست بالا را سایه بزنید. در خانهٔ وسطی بالای مربع اصلی عدد ۱ را بنویسید. در این صورت قاعدهٔ عمومی این است که در امتداد قطری به‌طرف بالا به‌سمت راست با اعداد صحیح متوالی پیش رویم. استثنائاتی براین قاعدهٔ عمومی در مواقعی که چنان عملی مارا از مربع اصلی بیرون می‌برد یا ما را به خانهٔ قبلا اشغال شده‌ای هدایت می‌کند، وجود دارد. در وضعیت اول باتغییرجا به‌سوی‌دیگر مربع، یا از بالا به‌پایین یا از راست به‌چپ، بسته‌به‌اینکه‌درچه حالتی باشیم، به‌داخل‌مربع اصلی بازمی‌گردیم وباقاعدهٔ‌عمومی کارراادامه‌می‌دهیم. دروضعیت دوم‌عدد رادرخانه‌ای که درست‌در زیرخانه‌ای که آخرین‌بار اشغال‌شده قراردارد، نوشته‌و سپس‌طبق‌قاعدهٔ‌عمومی کاررا ادامه‌می‌دهیم. خانهٔ‌سایه‌خورده بایدبه‌عنوان‌اشغال‌شده تلقی‌شود.

بنابراین، در مثال ما، قاعدهٔ عمومی ۲ را در امتداد قطر روبه‌بالا از ۱ در چهارمین خانهٔ مرزی در امتداد لبهٔ بالایی قرار خواهد داد. بنابراین، باید ۲ را به‌چهارمین خانهٔ در سطرزیرین مربع اصلی منتقل کنیم. وقتی به‌۴ می‌رسیم، این‌عدد ابتدا در سومین خانه مرزی از زیر در امتداد لبهٔ راست قرار می‌گیرد. بنابراین، باید درطرف مقابل و چپ در سومین خانه اززیر، در اولین ستون مربع اصلی‌نوشته شود. قاعدهٔ عمومی ۶ رادرخانه‌ای که قبلا به‌وسیلهٔ ۱ اشغال‌شده‌قرارمی‌دهد. ازاین‌رواین‌عدددرخانه‌ای‌نوشته‌می‌شودکه دقیقاً‌در زیرخانه‌ای است‌که باآخرین‌عدد نوشته‌شده، یعنی‌۵، اشغال‌شده است، وهمین‌طورالی‌آخر.

یك مربع جادویی نرمال از مرتبه هفتم را بسازید.

(ج) نشان‌دهید که‌خانهٔ‌مرکزی یك‌مربع‌جادویی نرمال ازمرتبهٔ‌سوم باید با ۵ اشغال‌شود.

(د) نشان دهید که در یك‌مربع جادویی از مرتبهٔ سوم ۱ هرگز نمی‌تواند در یك خانهٔ گوشه‌ای ظاهر شود.

۴.۷ چند مسئلهٔ قدیمی هندی

(الف) مسئلهٔ زیر را که تعمیم یکی از مسائل برهمگوپته (حدود ۶۳۰) است حل کنید: «دو مرتاض در بالای صخره‌ای به ارتفاع h می‌زیستند، که فاصلهٔ پای آن صخره از یك دهکدهٔ مجاور به‌اندازهٔ d بود. یکی از آنها از صخره به‌پایین آمد و به دهکده رفت. دیگری، که یك ساحر بود، به‌ارتفاع x به سمت بالا وسپس درامتداد یك‌خط مستقیم به‌طرف دهکده پرواز کرد. مساحت پیموده شده توسط هردو یکی بود. x را پیدا کنید». در مسئلهٔ اصلی $h = ۱۰۰$ و $d = ۲۰۰$.

(ب) صورت دیگری از مسئلهٔ خیزران شکسته (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۲.۷ (ج)) در زیر را که توسط برهمگوپته داده شده حل کنید: «خیزرانی به‌ارتفاع ۱۸ ذراع به‌وسیلهٔ باد شکسته است. رأس آن در فاصلهٔ ۶ ذراع ازپای خیزران بازمین تماس دارد. طول قطعات خیزران را به‌من بگو».

(ج) یك حساب بی‌نام، مشهور به دستنویس بخشالی[1]*، درسال ۱۸۸۱ در بخشالی، درشمال‌غربی هندوستان، ازخاك درآورده شد. این اثر شامل ۷۰ صفحه از الیاف درخت غان بود. مبدأ وتاریخ آن، موضوع حدسیات زیادی بوده است. تخمینهایی ازتاریخ آن ازقرن سوم تا دوازدهم ب.م. تغییر می‌کنند. مسئلهٔ زیر را که دراین‌دستنویس دیده‌می‌شود، حل کنید: «تاجری برای کالاهای معینی درسه نقطهٔ مختلف عوارض می‌پردازد. دراولی وی ۱/۳ کالاها را، در دومی ۱/۴ (باقیمانده) را، و درسومی ۱/۵ (باقیمانده) را می‌دهد. عوارض کل ۲۴ است. مقدار اصلی کالاها چقدر بوده است؟»

۵.۷ مسائلی از مهاویره

ماهیت بسیاری از مسائل حسابی هندی، از روی مسائل زیر، که ازمهاویره (حدود ۸۵۰) اقتباس شده، سنجیده می‌شود. این‌مسائل را حل کنید.

(الف) یك‌مار براق سیاه قوی وسرسخت که ۸۰ انگوله[2] درازی دارد با سرعت $۷\frac{۱}{۲}$ انگوله در۱۴/۵ روز وارد سوراخی می‌شود، و درمدت ۱/۴ روز دم‌آن به‌اندازهٔ ۱۱/۴ انگوله رشد می‌کند. آه ای زیور حسابدانان، به‌من بگو در چه مدت این مار به‌طورکامل وارد سوراخ می‌شود؟

(ب) از یك مجموعه میوه‌های انبه، شاه ۱/۶، ملکه ۱/۵ باقیمانده، و سه تن از شاهزادگان درجه اول ۱/۴، ۱/۳، و ۱/۲ باقیمانده‌های متوالی را برداشتند وجوانترین فرزند سه‌انبهٔ باقیمانده را برداشت. ای آنکه درمسائل مختلف راجع به‌کسرها هوشمندی،

---

1. *Bakhshali manuscript*

* نگاه‌کنید به

H. C. Midonick, "*The Treasury of Mathematics*" pp. 92–105.

2. angula

اندازهٔ آن مجموعه ازانبه‌ها را بده.

(ج) قیمت مخلوط ۹ لیمو و ۷ سیب جنگلی معطر ۱۰۷ است؛ همچنین، قیمت مخلوط ۷ لیمو و ۹ سیب جنگلی معطر ۱۰۱ است. آه ای حسابدان، فوراً قیمت یك لیمو و یك سیب جنگلی را بـه من بگو، در حالی که بـه طـور مشخص آن قیمتها را ازهم جـدا کرده‌ای.

(د) یك‌چهارم یك گله شتر درجنگل دیده شده بود، دوبرابرجذرآن گله به دامنه‌های کـوهستان رفته بود؛ وسه‌برابرپنج‌شتر درکرانهٔ رود باقی مانده بود. مقدارعددی این گلهٔ شتران چیست؟

۶.۷ مسائلی از بهاسکره

مسائـل حسابـی هندی معـمولا متضمن معادلات درجـهٔ دوم، قضیهٔ فیثاغورس، تصاعد حسابی، و جایگشتها بودند. مسائل زیـر را که از بهاسکـره (حـدود ۱۱۵۰) اخذ شده، درنظر بگیرید.

(الف) جذر نصف تعداد زنبورهای یك دسته زنبور عسل روی یك بوتهٔ گل یاس نشسته‌اند، ۸/۹ دسته پشت سرباقی مانده‌اند، یك زنبور ماده دور زنبور نری پروازمی‌کند که درداخل گل نیلوفری، که به‌هنگام شب‌مجذوب بوی خوش آن شده و اکنون در داخل آن گـرفتار شده، در حال وزوز کردن است. ای دلرباترین بانو، تعداد زنبورها را به من بگو.

(ب) سوراخ ماری درپای ستونی است که ۱۵ ذراع ارتفاع دارد، وطاووس نری دربالای آن آشیان‌کرده است. بادیدن مار، که ازفاصلهٔ سه برابر ارتفاع ستون، به طرف سوراخش درحال خزیدن است، به طور مایل ناگهان به روی او جست می‌زند. فوراً بگو که آنها در چند ذراعی سوراخ مار به‌هم می‌رسند، درحالی که هردو یك فاصلهٔ مساوی را می‌پیمایند؟

(ج) پادشاهـی در یك لشکـرکشی بـرای ربودن فیلهای دشمنش، در روز اول ۲ یوجنه[1] راهپیمایی می‌کند. بگـو، ای محاسب هوشمند، وی باچـه میزان فزاینده‌ای از راهپیمایی روزانه پیش برود که دریك هفته، به شهردشمن خود، به‌فاصلهٔ ۸۰ یوجنه برسد؟

(د) چند صورت مختلف درشکل سامبو[2] (شیوا[3]) با تعویض ده نشانه که به طـور وارونه در دستهای متعدد خود گرفته، حاصل می‌شود: یعنی، طناب، قلاب فیل، مار، دهل، جمجمه، نیزهٔ‌سه سر، تختخواب، دشنه، تیر، کمان. همچنین در مورد هاری[4] باتعویض گرز، حلقهٔ آهن، نیلوفر، و صدف؟

(ه) ارجونه[5]، که درنبرد به‌خشم آمده بود، یك ترکش پر از تیر رها می‌کند تا کرنه[6]

---

1. yojana 2. Sambu 3. Siva [ازخدایان هندوان]
4. Hari 5. Arjuna 6. Carna

را به قتل برساند: با نصف تیرهایش تیرهای رقیب خود را دفع می‌کند؛ باچهار برابر جذر تمام تیرهـای ترکش، اسب او را می‌کشد؛ با شش تیر، سلیه[1] (ارابه‌ران کرنه) را به قتل می‌رساند؛ با سه‌تیرچتر، علم وکمان او را خراب می‌کند؛ و بایکی سردشمن را از تن جدا می‌کند. ارجونه روی‌هم رفته چند تیر رها کرده است؟

۷.۷ اعداد اصم درجهٔ دوم

یك رادیکال عددی کـه درآن عـدد زیر رادیکال گـویا و خود رادیکال گنگ است، یك **عدد اصم** نامیده می‌شود. یك عدد اصم، **درجهٔ‌دوم**، **درجهٔ سوم**، وغیره نامیده می‌شود بسته به اینکه فرجهٔ رادیکال آن دو، سه، و غیره باشد.

(الف) نشان دهیدکه یك عدد اصم درجهٔ دوم نمی‌تواند برابر با مجموع یك عدد گویای غیر صفر و یك عدد اصم درجهٔ دوم باشد.

(ب) نشان دهید که‌اگر $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$، که در آن $\sqrt{b}$ و $\sqrt{d}$ عدد اصم بوده و a و c گویا هستند، آنگاه $a=c$ و $b=d$.

(ج) اتحادهای بهاسکره راکه دربخش ۶-۷ داده شده ثابت‌کنید و از یکی‌از آنها برای‌بیان $\sqrt{۱۷+\sqrt{۲۴۰}}$ به صورت مجموع دوعدد اصم درجهٔ دوم استفاده کنید.

۸.۷ معادلات سیالهٔ درجهٔ اول

هندیان مسئلهٔ پیدا کردن همهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$ را که در آن a و b و c اعداد صحیح‌اند، حل کردند.

(الف) اگر $ax+by=c$ دارای یك جواب صحیح‌باشد، نشان دهیدکه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b یکی از مقسوم‌علیه‌های c است. (این قضیه می‌گوید که اگر a و b را متباین فرض‌کنیم، چیزی‌ازکلیت‌کاسته نمی‌شود.)

(ب) اگر x_1 و y_1 یك جواب صحیح $ax+by=c$ را تشکیل دهند، که در آن a و b متباین‌اند، نشان دهید که همهٔ جوابهای صحیح با $x=x_1+mb$، $y=y_1-ma$ داده می‌شوند، که در آن m یك عـدد صحیح دلخواه است. (این قضیه می‌گوید که همهٔ جوابهای صحیح معلوم‌انـد هرگاه تنها یك جواب صحیح را بتـوان یافت. یك راه ساده برای پیداکردن یك جواب صحیح، در راهنمایی مطالعهٔ مسئله‌ای ۸.۷ (ج) داده‌می‌شود.)

(ج) $۷x+۱۶y=۲۰۹$ را برای یافتن جوابهای صحیح مثبت حل‌کنید.

(د) $۲۳x+۳۷y=۳۰۰۰$ را برای یافتن جوابهای صحیح مثبت حل‌کنید.

(هـ) به چند صورت می‌توان مبلغ پنجاه تومان رابرحسب پنج ریالی وبیست‌ریالی پرداخت نمود؟

---

1. Salya

(و) کوچکترین جواب قابل قبول برای مسئلهٔ سیالهٔ زیر از مهاویره را پیدا کنید: «در حواشی روشن وفرحبخش یك جنگل، پراز درختهای متعددی باشاخه‌هایی که زیر بار گلها و میوه‌ها خم شده بودند، مانند درختهای جمبو[1]، درختهای لیمو ترش، موز، نخلهای‌فوفل، درختهای‌جك[2]، نخلهای‌خرما، درختهای هینتله[3]، پلمیره[4]، درختهای‌پوناگه[5]، ودرختهای‌انبه. هرگوشهٔ آن آکنده ازالحان دسته‌هایی ازطوطیان وفاخته‌ها، کنارچشمه‌هایی با نیلوفرهای آبی در میان آنها و زنبورهایی که دور نیلوفرها در پرواز بودند. در این حواشی جنگل عده‌ای مسافر خسته باخوشحالی وارد شدند. درآنجا ۶۳ کپهٔ مساوی موز به‌علاوهٔ ۷ دانه موز دیگر وجود داشتند، و این میوه‌ها به‌طور مساوی بین ۲۳ مسافر تقسیم شد به‌طوری که هیچ موزی باقی نماند. حال اندازهٔ عددی یك کپه موز را به‌من بگو.»

۹.۷ قطرهای یك چهار ضلعی محاطی

سلسلهٔ قضایای زیر را ثابت کنید:

(الف) حاصلضرب دوضلع یك‌مثلث برابر است با حاصلضرب ارتفاع وارد برضلع سوم در قطر دایرهٔ محیطی آن.

(ب) فرض کنید $ABCD$ یك چهار ضلعی محاطی به قطر دایرهٔ محیطی δ باشد. طول اضلاع AB، BC، CD، DA را با a، b، c، d، قطرهای BD، AC را با m و n، و زاویهٔ بین یکی از قطرها و عمود بر دیگری را با θ نمایش دهید. نشان دهیدکه

$$m\delta\cos\theta = ab+cd \text{ ، } n\delta\cos\theta = ad+bc.$$

(ج) برای چهار ضلعیهای بالا نشان دهیدکه

$$m^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\cdot$$

$$n^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\cdot$$

(د) اگر، درچهارضلعی بالا، قطرها برهم عمود باشند، آنگاه

$$\delta^2 = \frac{(ad+bc)(ab+cd)}{ac+bd}\cdot$$

---

1. jambu 2. jack 3. hintala 4. palmyra
5. punnága

۱۰۰۷ چهار ضلعیهای برهمگوپته

(الف) برهمگوپته فرمول $K^{2}=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ را برای K، مساحت یك چهارضلعی محاطی به‌اضلاع a، b، c، d ونیم محیط s داد. نشان دهیدکه‌فرمول هرون برای مساحت یك مثلث حالت خاصی از این‌فرمول است.

(ب) بااستفاده از فرمول برهمگوپته (الف) نشان دهید که مساحت یك چهار ضلعی که هم محاطی و هم محیطی باشد، برابر است با ریشهٔ دوم حاصلضرب اضلاع آن.

(ج) نشان دهید که یك چهار ضلعی دارای قطرهای متعامد است اگر و فقط اگر مجموع مربعات دو ضلع مقابل برابر باشد با مجموع مربعات دو ضلع مقابل دیگر.

(د) برهمگوپته نشان داد که اگر $a^{2}+b^{2}=c^{2}$ و $A^{2}+B^{2}=C^{2}$، آنگاه هر چهار ضلعی به‌اضلاع متوالی aC، cB، bC، cA دارای قطرهای متعامد است. این را ثابت کنید.

(ه) اضلاع، قطرها، قطر دایرهٔ محیطی، و مساحت شبه ذوزنقهٔ برهمگوپته را پیدا کنید (نگاه کنید به بخش۷ـ۷) که با دوسه‌تایی فیثاغورسی (۳، ۴، ۵) و (۵، ۱۲، ۱۳) معین می‌شود.

۱۱۰۷ ثابت‌بن‌قره، کرخی، و نصیرالدین

(الف) ثابت‌بن‌قره (۸۲۶ـ۹۰۱) قاعدهٔ زیررا برای پیداکردن اعداد متحابه ابداع نمود: اگر $p=3\times 2^{n}-1$، $q=3\times 2^{n-1}-1$، $r=9\times 2^{2n-1}-1$ سه عدد اول فرد باشند، آنگاه $2^{n}pq$ و $2^{n}r$ دوعدد متحابه‌اند. صحت آن‌را برای $n=2$ و $n=4$ تحقیق کنید (نگاه کنید به بخش ۳ـ۳).

(ب) تعمیم زیر ازقضیهٔ فیثاغورس را که توسط ثابت بن‌قره داده شده است، ثابت کنید: اگرمثلث ABC مثلث دلخواهی باشد، واگر B' و C' نقاطی بر BC باشندبه‌طوری که $\angle AB'B=\angle AC'C=\angle A$، آنگاه $(AB)^{2}+(AC)^{2}=BC(BB'+CC')$.
نشان‌دهید که وقتی زاویهٔ A یك زاویهٔ قائمه باشد، این‌قضیهٔ بدل به قضیهٔ فیثاغورس می‌شود.

(ج) دانشمندان عرب [=عربی نویس] مدعی بودند که ارشمیدس کتابی به نام دربارهٔ هفت ضلعی در دایره[1] نوشته است. چنین اثری از ارشمیدس، به دست ما نرسیده است، ولی این ادعا وقتی که قضیهٔ جالب زیر، که توسط ثابت‌بن‌قره به دست ما رسیده، معلوم شد، بیشتر اعتبار یافت: اگر C و D نقاطی بر یك پاره‌خط AB باشند به طوری که $(AD)(CD)=(DB)^{2}$، $(CB)(DB)=(AC)^{2}$ و اگر H چنان یافته شود که $CH=AC$، $DH=DB$، آنگاه HB ضلعی ازیك هفت ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ محیطی AHB است؛ بعلاوه اگر امتدادهای HC و HD دایره را به ترتیب در F و E

---

1. *On the Heptagon in a Circle*

قطع کنند، آنگاه A، F و E سه رأس متوالی یک هفت ضلعی منتظم هستند. این قضیه را ثابت کنید.

(د) کرخی (حدود ۱۰۲۰) اثری در باب جبر به نام فخری نوشت، که به‌خاطر حامی وی فخرالملوك، صدراعظم بغداد در آن زمان، چنین نامیده شد. مسئلهٔ ۱ بخش ۵ فخری خواستار یافتن دوعددگویاست به طوری که مجموع مکعبات آنها مربع یك عددگویا باشد. به عبارت دیگر، اعداد گویای x و y و z را پیدا کنید به‌قسمی که

$$x^{3}+y^{3}=z^{2}.$$

کرخی اساساً مقادیر x و y و z را به صورت

$$x=\frac{n^{2}}{1+m^{3}}, \quad y=mx, \quad z=nx$$

اختیار می کند که درآن m و n اعداد گویای دلخواه هستند. صحت این امر را تحقیق و x و y و z را به ازای $m=2$ و $n=3$ پیدا کنید.

(ه) قضیهٔ سادهٔ زیر را که به نصیرالدین منسوب است، ثابت کنید: مجموع دوعدد فرد مربع خود نمی‌تواند یك مربع باشد.

۱۲.۷ طرح نه نه

(الف) نشان دهید که وقتی مجموع ارقام یك عدد طبیعی بر ۹ تقسیم شود، همان باقیمانده‌ای به‌دست می‌آید که موقع تقسیم خود عدد بر ۹.

عمل به دست آوردن باقیمانده، وقتی که یك عدد طبیعی مفروض بریك عدد صحیح n تقسیم می‌شود به **طرح n، n** معروف است. قضیهٔ بالا نشان می‌دهد که طرح نه‌نه علی‌الخصوص کار آسانی است.

(ب) فرض کنید که باقیماندهٔ به دست آمده را وقتی که یك عدد طبیعی مفروض بر ۹ تقسیم می‌شود، زیادتی برای آن عدد بنامیم. دوقضیهٔ زیر را ثابت کنید: (۱) زیادتی برای یك مجموع برابر است بازیادتی برای مجموع زیادتیهای عوامل جمع. (۲) زیادتی برای حاصلضرب دو عدد برابر است بازیادتی برای حاصلضرب زیادتیهای دو عدد.

این دو قضیه پایه‌ای را برای امتحان جمع و ضرب باطرح نه نه عرضه می کند.

(ج) ۴۷۸ و ۹۹۳ را جمع و سپس ضرب کنید وبا طرح نه نه امتحان کنید.

(د) نشان دهید که اگر ترتیب ارقام یك عدد طبیعی به هر طریق ممکن جابگشت داده شود تا عدد جدیدی تشکیل شود، آنگاه تفاضل بین عدد قدیم و عدد جدید بر ۹ قابل قسمت است.

این مطلب اساس **امتحان حسابدارها**[1] است. اگر مبالغ ستونهای بدهکار وبستانکار

---

1. bookkeeper's check

در روش دفترداری دوبل باهم نخوانند، و اختلاف بین دو مبلغ بر ۹ قابل‌قسمت باشد، آنگاه بسیار محتمل است که اشتباه معلول جابه‌جا شدن ارقام در موقع ثبت یك بدهکاری یا بستانکاری باشد.

(ه) حیلهٔ عددی زیر را توضیح دهید: از کسی خواسته می‌شود که عددی را در نظر بگیرد، یك عدد جدید بامعکوس نمودن ترتیب ارقام تشکیل دهد، عددکوچکتر را ازعدد بزرگتر کم کند؛ تفاضل را درعدد دلخواهی ضرب نماید؛ یك‌رقم‌دلخواه‌غیرصفردرحاصلضرب راخط بزند وآنچه راکه باقی مانده اعلام کند. شخصی که تردستی می‌کند رقم خط‌خورده را با محاسبهٔ زیادتی عدد اعلام شده و سپس تفریق این زیادتی از ۹ پیدا می‌کند.

(و) قضیهٔ (الف) را برای یك پایهٔ دلخواه مانند b تعمیم دهید.

۱۳۰۷ طرح یازده یازده

(الف) سه قضیهٔ زیر راجع به طرح یازده یازده را ثابت کنید.

۱. فرض کنید s_1 مجموع ارقام در محلهای فرد یك عدد طبیعی n و s_2 مجموع ارقام در محلهای زوج آن باشد. دراین صورت زیادتی ۱۱ در n برابر است با زیادتی ۱۱ در تفاضل $s_1 - s_2$، که درآن اگر $s_1 < s_2$، s_1 را با افزودن مضربی از ۱۱ افزایش می‌دهیم.

۲. برای یافتن زیادتی ۱۱ درهر عدد طبیعی، رقم سمت چپ را از همسایهٔ آن‌کم کنید، این تفاضل را ازرقم بعدی درسمت راست‌کم کنید، و الی‌آخر، وهروقت‌که مفروق ازمفروق‌منه بزرگترشد، ۱۱ را به مفروق‌منه اضافه‌کنید.

۳. درطرح یازده یازده می‌توانیم هرزوج ارقام متوالی مشابه راکناربگذاریم.

(ب) زیادتی ۱۱ را در ۱۸۵۹۲۷ و در ۸۱۵۲۹۷، با استفاده از قضیهٔ الف ـ ۱ پیداکنید. زیادتی ۱۱ را درهمان دو عدد بااستفاده ازقضیهٔ الف ـ۲ پیداکنید. زیادتی ۱۱ را در ۱۴۸۳۳۷ پیدا کنید.

(ج) چهار قضیهٔ زیر را ثابت کنید:

۱. زیادتی ۱۱های یك مجموع برابراست بازیادتی مجموع زیادتیهای عوامل‌جمع.

۲. زیادتی ۱۱های مفروق‌منه برابر است با زیادتی مجموع زیادتیهای تفاضل و مفروق.

۳. زیادتی ۱۱های حاصلضرب دوعدد برابراست بازیادتی درحاصلضرب زیادتیهای دو عدد.

۴. زیادتی ۱۱های مقسوم برابر است با زیادتی حاصلضرب زیادتیهای مقسوم‌علیه و خارج‌قسمت که به اندازهٔ زیادتی باقیمانده به‌آن اضافه شود.

(د) جمع $۱۱۵۰۵ = ۴۰۹۰ + ۳۵۶۶ + ۲۱۹۵ + ۱۰۹۶ + ۴۵۴ + ۱۰۴$ را باطرح یازده‌یازده امتحان کنید.

(ه) تفریق $۲۳۰۲۸-۸۴۷۶=۱۴۵۵۲$ را باطرح یازده یازده امتحان کنید.

(و) ضرب $(۸۲۰۵)(۵۳۶)=۴۳۹۷۸۸۰$ را باطرح یازده یازده امتحان کنید.

(ز) تقسیم $۶۲۵۴۰/۲۰۷=۳۰۲+۲۶/۲۰۷$ را با طرح یازده یازده امتحان کنید.

۱۴۰۷ قاعدهٔ خطأین

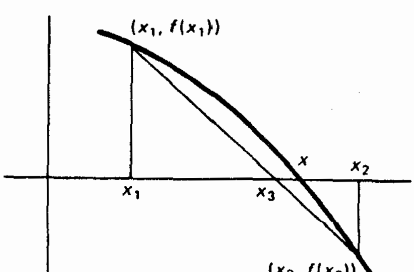
(الف) یکی ازقدیمیترین روشها برای تقریب ریشه‌های حقیقی یك معادله، قاعده‌ای است که به رگولا دو ئوروم فالسوروم[1] معروف است که معمولا **قاعدهٔ خطأین** نامیده می‌شود. به‌نظر می‌رسدکه این روش ازهند سرچشمه گرفته و توسط اعراب به‌کاررفته است. به‌طور خلاصه، و درصورت جدید آن، روش مزبور چنین است: فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ دو عدد باشند که نزدیك به یك ریشهٔ x معادلهٔ $f(x)=۰$، و در طرفین آن قرار دارند. در این صورت محل تلاقی وتری که نقاط $(x_۱ ، f(x_۱))$ و $(x_۲ ، f(x_۲))$ را به هم وصل می‌کند با محور xها، تقریبی مانند $x_۳$ برای ریشهٔ مطلوب می‌دهد (نگاه کنید به شکل ۶۶). نشان دهید که

$$x_۳=\frac{x_۲f(x_۱)-x_۱f(x_۲)}{f(x_۱)-f(x_۲)}.$$

این عمل را اکنون می‌توان با زوج $x_۱$، $x_۳$ یا $x_۳$، $x_۲$ بسته به اینکه کدام مناسب باشد، ادامه داد.

(ب) به‌کمك قاعدهٔ خطأین،آن ریشهٔ معادلهٔ $x^۳-۳۶x+۷۲=۰$ راکه بین۲و۳ قرار دارد، تا سه رقم اعشار محاسبه‌کنید.

(ج) به کمك قاعدهٔ خطأین، آن ریشهٔ معادلهٔ $x-\tan x=۰$ را که بین ۴٫۴ و ۴٫۵ قرار دارد، تا سه رقم اعشار محاسبه‌کنید.



شکل ۶۶

1. *regula duorum falsorum*

۱۵۰۷ روش خیام برای حل معادلات درجهٔ سوم

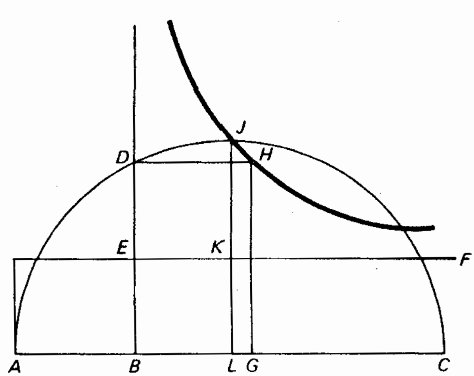
(الف) با پاره‌خطهای مفروض به‌طولهای a، b، n، پاره‌خطی به‌طول $m=a^3/bn$ بسازید.

(ب) عمر خیام اول کسی بود که به مطالعهٔ همهٔ انواع معادلات درجهٔ سوم که یك ریشهٔ مثبت دارند، پرداخت. جزئیات طرح کلی زیر از حل هندسی خیام برای معادلهٔ درجهٔ سوم

$$x^3+b^2x+a^3=cx^2$$

را که در آن a، b، c، x طولهای پاره‌خطهایی درنظر گرفته می‌شوند، کامل کنید. خیام این نوع معادلهٔ درجهٔ سوم را در قالب الفاظ چنین بیان کرده است: «یك مکعب، چند ضلع، و چند عدد برابر با چند مربع هستند.»

درشکل ۶۷، $AB=a^3/b^2$ (بنابر قسمت اول) و $BC=c$ را بسازید. نیمدایره‌ای به قطر AC رسم کنید. فرض کنید که عمود بر AC در B آن را در D قطع کند. بر BD، $BE=b$ را جدا کنید و از E، EF را موازی AC رسم کنید. G را بر BC چنان پیدا کنید که، $(BG)(ED)=(BE)(AB)$ و مستطیل $DBGH$ را کامل کنید. بر H یك هذلولی متساوی‌الساقین رسم کنید به قسمی که EF و ED مجانبهای آن باشند، و فرض کنید که این هذلولی، نیمدایره را در J قطع کند. فرض کنید که خط موازی با DE مار بر J، EF را در K و BC را در L قطع کند. متوالیاً نشان دهید که:
(۱) $(EK)(KJ)=(BG)(ED)=(BE)(AB)$، (۲) $(BL)(LJ)=(BE)(AL)$،
(۳) $(LJ)^2=(AL)(LC)$، (۴) $(BE)^2/(BL)^2=(LJ)^2/(AL)^2=LC/AL$،
(۵) $(BE)^2(AL)=(BL)^2(LC)$، (۶) $b^2(BL+a^3/b^2)=(BL)^2(c-BL)$،
(۷) $(BL)^3+b^2(BL)+a^3=c(BL)^2$. بنابراین BL یك ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم مفروض است.



شکل ۶۷

(ج) به طور هندسی، به روش عمرخیام، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم

$$x^{3}+2x+8=5x^{2}$$

را پیدا کنید. با اندك تعمیم این روش، ریشهٔ منفی را پیدا کنید.

۱۶.۷ یك راه حل هندسی برای معادلات درجهٔ سوم

(الف) نشان دهید که معادلهٔ درجهٔ سوم ناقص

$$ax^{3}+bx+c=0$$

را می‌توان دریك دستگاه مختصات دکارتی که منحنی درجهٔ سوم $y=x^{3}$ قبلا در آن رسم شده، صرفاً با رسم خط $ay+bx+c=0$، به طور هندسی حل کرد و ریشه‌های حقیقی آن را یافت.

(ب) به روش (الف)، معادلهٔ درجهٔ سوم $x^{3}+6x-15=0$ را حل کنید.

(ج) معادلهٔ درجهٔ سوم $4x^{3}-39x+35=0$ را به طریق هندسی حل کنید.

(د) نشان دهید که هر معادلهٔ درجهٔ سوم کامل

$$ax^{3}+bx^{2}+cx+d=0$$

رامی‌توان باجایگذاری $x=z-b/3$ به‌یك معادلهٔ درجهٔ سوم ناقص برحسب z تبدیل کرد.

(و) حـال معادلهٔ درجهٔ سوم $x^{3}+9x^{2}+20x+12=0$ را به طـریق هندسی حل کنید.

جالب اینکه ریشه‌های مختلط موهومی معادله‌های درجهٔ سوم ناقص یا کامل را نیـز می‌توان به طریق هندسی پیدا کـرد. مثلا، نگاه کنید به جبر نموداری اثر آرتر شولتس[1].

۱۷.۷ ترسیمهای هندسی بر یك کره

دانشمندان عرب [= عربی نویس] بـه ترسیمهایی برسطح یك کره علاقه نشان می‌دادند. مسائل زیر را درنظر بگیرید، که بـاید با ابزارهای اقلیدسی و ترسیمهای مسطحهٔ مناسب حل شوند.

(الف) یك کرهٔ مادی مفروض است، قطر آن را پیدا کنید.

(ب) بر یك کرهٔ مادی جاهای رئوس یك مکعب محاطی را مشخص کنید.

(ج) بر یك کـرهٔ مادی مفروض جاهای رئوس یـك چهاروجهی منتظم محاطـی را مشخص کنید.

---

1. Arthur Schultze, *Graphic Algebra* (New York: Macmillan Company, 1922) Sections 58,59,65.

عنوان مقاله

۱/۷ کتابسوزی در چین در سال ۲۱۳ ق.م.
۲/۷ آثار ریاضی چینی، پیش از سال ۱۲۰۰.
۳/۷ تأثیرنسبی ریاضیات چینی و هندی برریاضیات اروپایی.
۴/۷ آثار ریاضی هندی، پیش از سال ۱۲۰۰.
۵/۷ دو آریبهطه.
۶/۷ مهاویره و کار او.
۷/۷ حوزهٔ علمی بغداد.
۸/۷ سهم عمرخیام در ریاضیات.
۹/۷ آثار ریاضی یونانی که اگر اعراب نبودند، از بین می‌رفت.
۱۰/۷ علل انحطاط ریاضیات اسلامی.
۱۱/۷ تاریخ ریاضیات اولیهٔ ژاپنی.
۱۲/۷ انتقال دانش ریاضی درپی فتوحات مقدونیها، مسلمین، و رومیها.

کتابنامه

CAJORI, FLORIAN, *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. Chicago: Open Court, 1928–29.
CLARK, W. E., ed., *The Aryabhatiya of Aryabhata*. Chicago: Open Court, 1930.
COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
———, *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.
DATTA, B., *The Science of the Sulba: A Study in Early Hindu Geometry*. Calcutta: University of Calcutta, 1932.
———, and A. N. SINGH, *History of Hindu Mathematics*. Bombay: Asia Publishing House, 1962.
HARDY, G. H., *A Mathematician's Apology*. Foreword by C. P. Snow. Cambridge: The University Press, 1967.
HEATH, T. L., *A Manual of Greek Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1931.
HILL, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe*. New York: Oxford University Press, 1915.
HOBSON, E. W., *A Treatise on Plane Trigonometry*. 4th ed. New York: Macmillan, 1902. Reprinted by Dover, New York.
JOHNSON, R. A., *Modern Geometry*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1929. Reprinted by Dover Publications, New York.
KAKHEL, ABDUL-KADER, *Al-Kashi on Root Extraction*. Lebanon: 1960.
KASIR, D. S., ed., *The Algebra of Omar Khayyam*. New York: Columbia Teachers College, 1931.
KARPINSKI, L. C., ed., *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*. New York: Macmillan, 1915.
———, *The History of Arithmetic*. New York: Russell & Russell, 1965.
KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.
KÛSHYÂR IBN LABBÂN, *Principles of Hindu Reckoning*. Translated by Martin Levey and Marvin Petruck. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1965.
LAMB, HAROLD, *Omar Khayyam, A Life*. New York: Doubleday, 1936.
LARSEN, H. D., *Arithmetic for Colleges*. New York: Macmillan, 1950.
LEVEY, MARTIN, *The Algebra of Abû Kâmil*. Madison, Wis.: The University of Wisconsin, Press, 1966.
LOOMIS, E. S., *The Pythagorean Proposition*. 2d ed. Ann Arbor, Mich.: private printing,

Edwards Bros., 1940. Reprinted by the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1968.

MACFALL, HALDANE, *The Three Students*. New York: Alfred A. Knopf, 1926.

MIKAMI, YOSHIO, *The Development of Mathematics in China and Japan*. New York: Hafner, 1913. Reprinted by Chelsea, New York, 1961.

NEEDHAM, J., with the collaboration of WANG LING, *Science and Civilization in China*. Vol. 3. New York: Cambridge University Press, 1959.

ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.

SAYILL, AYDIN, *Logical Necessities in Mixed Equations* by *'Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time*. Ankara: 1962.

SMITH, D. E., and L. C. KARPINSKI, *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston: Ginn, 1911.

STORY, W. E., *Omar Khayyam as a Mathematician*. (Read at a meeting of the Omar Khayyam Club of America, April 6, 1918). Needham, Mass.: private printing, Rosemary Press, 1919.

WINTER, H. J. J., *Eastern Science*. London: John Murray, 1952.

WOLFE, H. E., *Introduction to Non-Euclidean Geometry*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1945.

۸

ریاضیات اروپایی، ۵۰۰ تا ۱۶۰۰

۸-۱ عصر تاریکی

دوره‌ای که با سقوط امپراطوری روم در اواسط قرن پنجم شروع شده و تا قرن یازدهم ادامه می‌یابد، به عصر تاریکی اروپا معروف است، زیرا در طول این دوره، تمدن در اروپای غربی به سطح بسیار پایینی رسید. تعلیم وتربیت تقریباً از بین رفت، دانش یونانی در آستانهٔ نابودی قرار گرفت، واغلب هنرها و پیشه‌هایی که ازدنیای باستان به ارث رسیده بودند، فراموش شدند. تنها راهبان دیرهای کاتولیك، و معدودی افراد غیرروحانی بافرهنگ، رشتهٔ باریکی از دانش یونانی‌ولاتین را حفظ کردند. این دوره باخشونت مادی زیاد و ایمان شدید مذهبی مشخص می‌شود. نظم اجتماعی قدیم برچیده شد و جامعه به‌صورت فئودالی و کلیسایی درآمد.

رومیان هرگز ریاضیات مجرد را پیش نگرفتند و بلکه صرفاً به جنبه‌های عملی این موضوع که با تجارت و شهرسازی مربوط می‌شد، اکتفا نمودند. باسقوط امپراطوری روم و تعطیلی قسمت عمدهٔ تجارت بین شرق وغرب درتعاقب آن و رها شدن طرحهای مهندسی دولتی، حتی این علایق نیزروبه‌زوال گذاشتند، واغراق‌آمیز نیست اگر بگوییم که درتمام نیم‌هزاره‌ای که عصرتاریکی را شامل می‌شود، صرفنظر از بسط تقویم مسیحی، در زمینهٔ ریاضیات کاربسیار اندکی در غرب انجام گردید.

از جملهٔ کسانی که خیرخواهانه باایفای نقشی در تاریخ ریاضیات در عصر تاریکی

اعتباری یافته‌اند، می‌توانیم ازشهروند رومی بوئتیوس[1] شهید، از فضلای انگلیسی وابسته به‌کلیسا، بید[2] و آلکوین، و حکیم و روحانی مشهور فرانسوی ژربر[3]، که پاپ سیلوستر[4] دوم شد، یاد کنیم.

در تاریخ ریاضیات اهمیت بوئتیوس (حدود ۵۲۴-۴۷۵) براین پایه است که نوشته‌های وی در هندسه وحساب برای قرنهای متمادی به عنوان کتابهای درسی استاندارد در مدارس رهبانی باقی ماندند. این آثار بسیارضعیف‌اوج دستاورد ریاضی تلقی می‌شدند، و بدین ترتیب به خوبی فقر این رشتهٔ علمی را در اروپای مسیحی در طول عصر تاریکی نشان می‌دهند. زیرا هندسهٔ وی چیزی نیست جز بیان قضایای مقالهٔ اول و معدودی قضایای منتخب از مقاله‌های سوم وچهارم اصول اقلیدس همراه باکاربردهایی در مساحی مقدماتی، و حساب اوبرمبنای اثر خسته‌کننده و نیمه‌رمزی نیکوماخوس مربوط به چهارقرن پیشتر، که البته زمانی شهرت بسیار داشت، قرار دارد. (عده‌ای براین عقیده‌اندکه حداقل قسمتی از این کتاب هندسه، ساختگی است.) بوئتیوس بااین آثار، وبا نوشته‌هایش در فلسفه مؤسس مکتب فلسفهٔ مدرسی قرون وسطی گردید. آرمانهای اعلای وی و صداقت انعطاف ناپذیرش وی را دچار دردسرهای سیاسی نمود و مرگ دردناکی را متحمل شد که کلیسا وی را به خاطر آن شهید اعلام نمود.

بید (حدود ۷۳۵-۶۷۳)، که بعدها عنوان بید بزرگوار[5] یافت، در نورثامبرلند[6] انگلستان، متولد شد، ویکی از بزرگترین فضلای کلیسای قرون‌وسطی گردید. آثار متعدد وی شامل نوشته‌هایی دربارهٔ موضوعات ریاضی است، که مهمترین آنها رسالهٔ وی دربارهٔ تقویم و حساب سرانگشتی است. آلکوین (۸۰۴-۷۳۵)، که در یورکشر[7] متولد شد، حکیم انگلیسی دیگری بود. وی به فرانسه فراخوانده شد تا شارلمانی[8] را در پروژهٔ آموزشی بلند پروازانه‌اش یاوری کند. آلکوین دربارهٔ تعدادی مباحث ریاضی مطالبی نگاشت و مجموعه‌ای از مسائل معمایی که برای قرنهای متمادی برنویسندگان کتابهای درسی تأثیر داشت، با تردید به وی منسوب شده است (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰.۸).

ژربر (حدود ۱۰۰۳ - ۹۵۰) در اوورنی[9]، در فرانسه، به دنیا آمد، و به زودی تواناییهای خارق‌العاده‌ای ازخود نشان داد. او یکی از اولین مسیحیانی بودکه درمدارس مسلمانان اسپانیا درس خواند و شواهدی دردست است که محتملا وی ارقام هندی-عربی را، بدون صفر، درمراجعت با خود به اروپای مسیحی آورده است. گفته‌اندکه وی چرتکه، کرهٔ زمین وکرهٔ سماوی، یك ساعت، و احتمالا یك ارغنون‌ساخته است. چنین دستاوردهایی سوءظن عده‌ای از معاصرانش را مبنی براینکه وی روح خود را به شیطان فروخته است، برانگیخت. بااین حال، وی به تدریج درکلیسا ترقی نمود وسرانجام درسال ۹۹۹ به مقام

---

1. Boethius 2. Bede 3. Gerbert 4. Sylvester
5. Bede the Venerable 6. Northumberland 7. Yorkshire
8. Charlemagne 9. Auvergne

پاپی انتخاب شد. وی حکیمی ژرف‌اندیش تلقی می‌شد و دربارهٔ علم احکام نجوم، حساب، و هندسه آثاری نوشت (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰۸ (و)).

۸-۲ دورهٔ انتقال

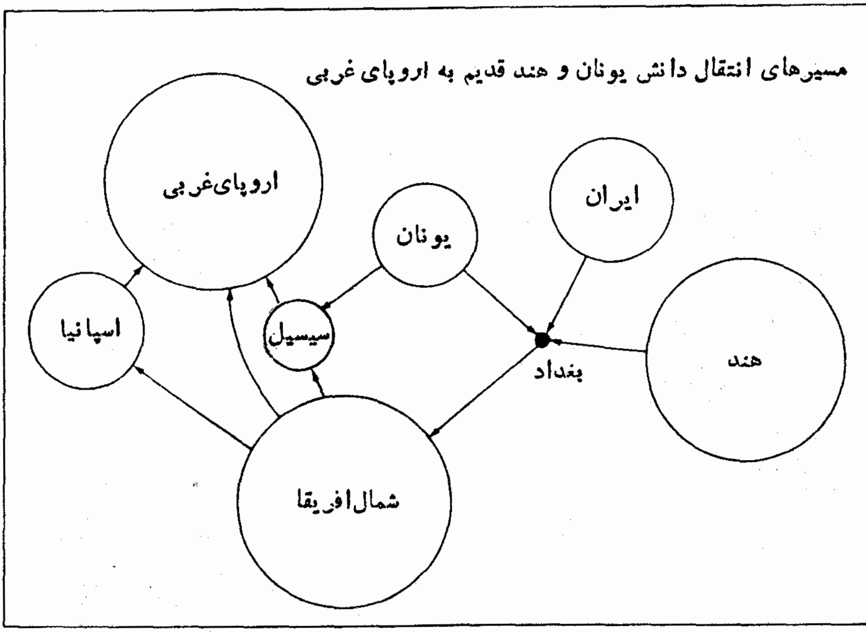
تقریباً همزمان با ژرفتر نفوذ تدریجی آثار کلاسیك علوم و ریاضیات یونان به اروپای غربی آغاز شد. سپس یك دورهٔ انتقال شروع شد که در طول آن دانش باستان، که به دست فرهنگ اسلامی محفوظ مانده بود، به اروپای غربی انتقال یافت. این‌کار از طریق ترجمه‌های لاتینی انجام شده توسط فضلای مسیحی، که به مراکز دانش مسلمانان سفر می‌کردند، ازطریق روابط بین پادشاهی نورمان[1] سیسیل و شرق، و ازطریق روابط تجاری اروپای غربی با دنیای لوانت[2] [کرانهٔ خاوری مدیترانه] و دنیای عرب، صورت گرفت.

خارج شدن تولیدو[3] [طلیطله] توسط مسیحیان از دست مسلمانان در ۱۰۸۵ هجوم فضلای مسیحی را به‌آن شهر، برای کسب دانش مسلمانان در پی‌داشت. نفوذ به سایرمراکز مسلمین‌دراسپانیا نیز صورت گرفت وقرن‌دوازدهم، درتاریخ ریاضیات، بدل به‌قرن‌مترجمین شد. یکی از مقدمترین فضلای مسیحی که به این حرفه پرداخت، یك‌راهب انگلیسی به‌نام آدلارد باثی (حدوده۱۱۲۰) بود که طی‌سالهای ۲۹-۱۱۲۶ از اسپانیا دیدن‌کرد و به‌طور گسترده‌ای در یونان، سوریه، و مصر به سفر پرداخت. ترجمه‌هایی به زبان لاتین از اصول اقلیدس و جداول نجومی خوارزمی به‌آدلارد نسبت داده می‌شود. اشارات تکان دهنده‌ای به مخاطرات جانی که آدلارد برای کسب دانش عربی به‌آن تن داده، وجود دارد؛ برای به دست آوردن دانشی که با وسواس زیاد مورد محافظت بود، وی خود را در جامهٔ یك طلبهٔ مسلمان درآورد. مترجم متقدم دیگر پلاتوی تیوولیایی[4] ایتالیایی (حدوده۱۱۲۰) بود که وی نجوم بتانی، اکر تئودوسیوس وآثار متعدد دیگری را ترجمه‌کرد. کوشاترین مترجم این عصر گراردوی کرمونایی (۱۱۸۷-۱۱۱۴) بود که بالغ‌بر ۹۰ اثر عربی را به لاتین درآورد، که المجسطی بطلمیوس، اصول اقلیدس، و جبرخوارزمی‌ازآن جمله‌اند. دربخش ۷-۱۲، نقشی راکه گراردوی کرمونایی در پیدایش کلمهٔ امروزی سینوس به عهده دارد، ذکر کردیم. سایر مترجمین نامی قرن دوازدهم جان سویلی[5] و رابرت چستری[6] بودند.

موقعیت مکانی و تاریخ سیاسی سیسیل این جزیره را به صورت برخوردگاه طبیعی شرق و غرب درآورد. سیسیل درابتدا مستعمرهٔ یونان بود، سپس بخشی از امپراطوری روم گردید، بعد از سقوط امپراطوری با قسطنطنیه پیوند یافت، در قرن نهم به مدت ۵۰ سال به دست اعراب افتاد، مجدداً به وسیلهٔ یونانیان مسخر گردید، و سپس تحت استیلای نورمانها درآمد. دردوران رژیم نورمان زبانهای یونانی، عربی، و لاتین درکنار هم مورد استفاده قرار می‌گرفت، و دیپلماتها بکرات به قسطنطنیه و بغدادسفرمی‌کردند. دستنویسهای

---

1. Norman 2. Levant 3. Toledo 4. Plato of Tivoli
5. John of Seville 6. Robert of Chester



یونانی و عربی زیادی در علوم و ریاضیات به دست آمد و به لاتین ترجمه شد. این کار به میزان زیادی توسط دوحاکم و مشوق علم، فردریك دوم (۱۱۹۴–۱۲۵۰) و پسر وی مانفرد[1] (حدود ۱۲۳۱–۱۲۶۶) ترغیب شد.

در بین اولین شهرهایی که با دنیای عرب روابط تجارتی برقرار کردند، مراکز تجارتی ایتالیا در جنوا، پیسا[2]، ونیز، میلان، و فلورانس بودند. بازرگانان ایتالیایی با قسمت اعظم تمدن شرقی تماس یافتند و بدین ترتیب اطلاعات مفیدی در حساب و جبر کسب کردند. این بازرگانان نقش مهمی در رواج دستگاه شمار هندی-عربی بازی کردند.

دردورهٔ انتقال مورد بحث، اسپانیا به صورت مهمترین حلقهٔ ارتباط بین دنیای اسلام و دنیای مسیحی درآمد.

۸-۳ فیبوناتچی و قرن سیزدهم

در آستانهٔ قرن سیزدهم لئوناردو فیبوناتچی («لئوناردو، پسر بوناتچی»، ۱۱۷۰؟- ۱۲۵۰؟)، بااستعدادترین ریاضیدان قرون وسطی وارد عرصه شد. فیبوناتچی، که به

1. Manfred 2. Pisa

لئوناردوفیبوناتچی
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

لئوناردوی پیسایی[1] (یا لئوناردو پیسانو[2]) نیز شهرت دارد، در مرکز تجارتی پیسا، که پدرش در آنجا در ارتباط با امور تجاری به کار مشغول بود، زاده شد. بسیاری از تجارتخانه‌های بزرگ ایتالیایی آن ایام انبارهایی در نقاط مختلف منطقهٔ مدیترانه نگهداری می کردند. بدین طریق بود که، وقتی پدرش به‌عنوان سرگمرکدار خدمت می کرد، لئوناردوی جوان در بوژی[3] در ساحل شمالی افریقا تربیت شد. حرفهٔ پدر از همان سنین اولیه علاقهٔ به‌حساب‌را در کودك برانگیخت. سفرهای گستردهٔ بعدی به‌مصر، سیسیل، یونان، وسوریه وی را با تجربیات ریاضی شرقی و عربی در تماس قرار داد. فیبوناتچی که به برتری روشهای هندی ـ عربی در محاسبات، متقاعد شده بود، در سال ۱۲۰۲، اندکی بعد از مراجعتش به‌موطن، اثر مشهورخود به‌نام لیبر آباکی [کتاب حساب] را منتشرنمود.

ما لیبر آباکی را از طریق چاپ دومی که در ۱۲۲۸ منتشرشد، می‌شناسیم. این اثر به حساب و جبرمقدماتی اختصاص دارد و، گرچه اساساً تحقیق مستقلی است، تأثیر جبر خوارزمی و ابوکامل رانشان می‌دهد. کتاب، نمادگذاری هندی ـ عربی را به طور مبسوط شرح داده و بـه شدت ازآن جانبداری مـی کند و تـأثیرزیادی در رواج این‌ارقام در اروپا داشته است. در ۱۵ فصل این اثر خوانـدن و نوشتن ارقام جدید، روشهای محاسبه با اعداد صحیح وکسرها، محاسبهٔ ریشه‌های دوم و سوم، و حل معادلات خطی و درجهٔ دوم هم باقاعدهٔ امتحان وتصحیح وهم با سلسله اعمال جبری‌توضیح داده می‌شوند. به‌ریشه‌های منفی و موهومی معادلات توجه نمی‌شود و جبر لفظی است. کاربردهـایی متضمن معاملات پایاپای، مشارکت، اختلاط وامتزاج، وهندسهٔ مساحی داده می‌شوند. این اثرشامل‌مجموعهٔ وسیعی از مسائلی است که به عنوان گنجینه‌ای تا قـرنها در خدمت مؤلفین بعدی بود. در

---

1. Leonardo of Pisa　　2. Leonardo Pisano

3. Bougie [بجایهٔ کنونی در الجزایر]

بخش ۲ــ۱۰ یك مسئلهٔ جالب ازاین مجموعه راذکر کرده‌ایم، که ظاهراً از یك مسئلهٔ بسیار قدیمیتر درپاپیروس ریند گرفته شده‌است. مسئلهٔ دیگر، که منشأ **دنبالهٔ فیبوناتچی** به‌صورت: ۱، ۱، ۲، ۳، ۵،...، x، y، $x+y$،... است، وچند مسئلهٔ دیگر از لیبر آباکی، را می‌توان در مطالعه‌های مسئله‌ای ۲.۸، ۳.۸، ۴.۸ یافت.

در ۱۲۲۰ پراکتیکا جئومتریا[1]ی [هندسهٔ عملی] فیبوناتچی، مجموعهٔ وسیعی ازمطالب راجع به هندسه و مثلثات که به طور ماهـرانه‌ای با دقت اقلیدسی ونسبتاً مبتکـرانه تحت مطالعه قـرار گـرفته، ظاهر می‌شود، و در ۱۲۲۵ فیبوناتچی لیبر کـوادراتوروم[2] [کتاب مجذورات] خودرا نوشت و این کتاب اثری درخشان و مبتکرانه در آنالیز نامعینهاست، که وی را به‌عنوان ریاضیدان برجسته‌ای دراین زمینه بین دیوفانتوس وفرما مشخص‌نمود. این آثار فراتر از تواناییهای اغلب فضلای معاصر وی بودند.

نبوغ فیبوناتچی توجه امپراطور فردریك دوم راکه‌حامی دانش‌بود،جلب کرد ودرنتیجه فیبوناتچی بـه دربار دعوت شد تـا در یك‌مسابقهٔ ریاضی شرکت جوید. سه مسئله توسط جان‌پالرمویی[3]، یکـی ازملتزمین دربار امپراطور مطرح شد. اولین مسئله یافتـن یك عدد گـویای x بود به طوری کـه x^2+5 و x^2-5 مربع اعـدادی‌گویا باشند. فیبوناتچی جواب $x=41/12$ را داد، که درست است، زیرا $(41/12)^2+5=(49/12)^2$ و $(41/12)^2-5=(31/12)^2$. راه حل مسئله در لیبر کوادراتوروم آمده‌است. مسئلهٔ دوم یافتن جوابی برای معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+2x^2+10x=20$ بود. فیبوناتچی مبادرت به این اثبات کـرد که هیچ ریشهٔ معادله‌را نمی‌توان به وسیلهٔ صور تهـای گنگ به شکل $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ بیان‌کرد، یا به عبارت دیگـر، هیچ ریشه‌ای از آن را نمی‌توان با ستاره و پرگار ساخت. وی سپس یك جواب تقریبی به دست آورد که، وقتی در نماد اعشاری بیان شود، مساوی ۱٫۳۶۸۸۰۸۱۰۷۵ است، و تـا ۹ رقم اعشار درست است. جواب، بـدون هیچ بحثی همراه‌آن، دراثری ازفیبوناتچی تحت عنوان فلوس[4] («شکوفه» یا «گل») ظاهر می‌شود و مایهٔ شگفتیهایی شده است. مسئلهٔ سوم، کـه آن نیز در فلوس ضبط شده، آسانتر است و می‌توان‌آن را درمطالعهٔ مسئله‌ای ۴.۸ یافت.

گفته شده است‌که فیبوناتچی، به دلیل فقدان معاصرینی همتا با وی، عظیمتر ازآنچه واقعاً بوده به نظر می‌رسد. مطمئناً درست است که قرن سیزدهم ریاضیدانان بسیارمعدودی راکه واجد اهمیتی‌باشند، به‌وجودآورده‌است. تالی فیبوناتچی ومعاصر با وی، یوردانوس نموراریوس[5] بود، که معمولا (ولی به‌احتمال قوی به اشتباه) با راهب آلمانی یوردانوس زاکسو[6]، که در ۱۲۲۲، به عنوان دومین رهبر فـرقهٔ سریعاً در حـال گسترش دومینیکی[7]

---

1. *Practica geometriae* 2. *Liber quadratorum*
3. John of Palermo 4. *Flos* 5. Jordanus Nemorarius
6. Jordanus Saxo

۷. فرقهٔ مذهبی مسیحی که توسط سن‌دومینیك (St. Dominic) در ۱۲۹۲ تأسیس‌شد. آنها را ژاکوبن (یعقوبیین) نیز می‌نامند. ــ م.

انتخاب شد، یکی دانسته می‌شود. وی آثار متعددی دربارهٔ حساب، جبر، هندسه، نجوم، و (احتمالا) استاتیك نوشت. این آثار مطول که بعضی‌ازآنها زمانی به‌شهرت قابل ملاحظه‌ای دست یافتند، اکنون عمدتاً بی‌مایه به نظـر می‌آیند. با این حال نمورازیوس شاید اولیـن کسی بوده که ازحروف به طورگسترده‌ای برای نمایش اعداد کلی استفاده کرده، گرچه این‌کار وی تأثیـرکمی در مؤلفین بعد از وی داشت. تنها دریك مورد بود که فیبوناتچی چنین کرد.

شایـد لازم باشد که از ساکروبوسکو[1] (جان هالیوودی[2] یا جـان هالیفاکسی[3])، کمپانوس، و راجربیکن[4] نیز ذکری به میان آید. اولی در پاریس ریاضیات درس می‌داد ومجموعه‌ای از قواعد حسابی و گردآیه‌ای قابل‌فهم از مطالبی که از المجسطی بطلمیوس و آثار منجمین عـرب استخراج شده بود، نوشت. عامل عمدهٔ شهرت کمپانوس، تـرجمهٔ لاتینی وی از اصول اقلیدس است، که دربخش ۳ــ۵ ذکرشد. راجـربیکن، باآنکه ذاتاً يك نابغه بود، استعداد کمی در ریاضیات داشت ولی با بسیاری از آثار یونان درهندسه و نجوم آشنا شد، و آن‌گـونه که در ستایش وی گفته شده، به ارزش این موضوع کاملا وقوف داشت.

بخش اول قـرن سیزدهم شاهـد ظهور دانشگاههـای پاریس،آکسفورد،کیمبریج، پادوا، و ناپل بود. دانشگاهها بعداً عامل بسیار مؤثری دربسط ریاضیات شدند، و بسیاری از ریاضیدانان به يك یا چندین مؤسسه از این نوع وابسته بودند.

۴ــ۸ قرن چهاردهم

قرن چهاردهم از نظر ریاضیات قرن نسبتاً بی‌حاصلی بود. این قرن، قرن «مـرگ سیاه»[5] بود، که بیش از يك سوم جمعیت اروپا را درکام خود فرو برد، و در این قـرن جنگهای صدساله، با تحولات سیاسی و اقتصادی ناشی ازآن در شمال اروپا شروع شد.

بزرگترین ریاضیدان این دوره نیکول اورم[6] بود، که درحدود ۱۳۲۳ در نرماندی متولد شد. وی درسال ۱۳۸۲ بعد ازطی دوره‌ای از زندگانی که وی را از استادی کالج به اسقفی رساند، درگذشت. وی پنج اثر ریاضی نگاشت و بعضی ازآثار ریاضی ارسطو را ترجمه‌کرد. دریکی از رسالات او اولین مورد استفاده از نماهـای کسری (البته، نه با نمادگذاری امروزی) که برما معلوم است ظاهر می‌شود، و در رسالهٔ دیگـری وی جای نقاط را با مختصات مشخص می‌کند، که بدین‌ترتیب نشانهٔ پیدایش هندسهٔ مختصاتی نوین

1. Sacrobosco 2. John of Holywood 3. John of Halifax

4. Roger Bacon

۵. طاعونی که در قرن چهاردهم در اروپا و آسیا شیوع یافت. این وجه تسمیه از آن روست که بر بدن قربانیان لکه‌های سیاهی ظاهر می‌شد. ــم.

6. Nicole Oresme

است. این رساله یك قرن بعد به چندین چاپ رسید، و ممکن است که ریاضیدانان دورهٔ رنسانس و حتی دکارت را تحت‌تأثیر قرار داده باشد.

اگرچه ریاضیات اروپایی دردوران قرون وسطی اساساً جنبهٔ عملی داشت، ریاضیات نظری کاملا محو نشد. تفکرات فیلسوفان مدرسی منجر به ایجاد تئوریهای ظریفی درزمینهٔ حرکت، بینهایت، و پیوستار شد، که همهٔ آنها از مفاهیم اساسی در ریاضیات نوین هستند. قرنها نزاع مکتب مدرسی و دوپهلوگوییها می‌تواند، تا حدی، انتقال قابل ملاحظه ازتفکر ریاضی باستان به تفکر ریاضی امروز را توضیح دهد، و شاید، همچنان که ا. ت. بل عقیده دارد، بتواند شعبه‌ای از تحلیل ریاضی را تشکیل دهد. از این نقطه نظر، توماس آکویناس[1] (۱۲۷۴ــ۱۲۲۶) را، که شاید تیزترین هوش قرن سیزدهم را داشته، می‌توان دربسط ریاضیات بواقع دارای نقشی دانست. ازکسانی که قطعاً بیشترجزوریاضیدانان‌سنتی بودند، توماس برادواردین[2] (۱۳۴۹ــ۱۲۹۰) است که وقتی عنوان اسقف‌اعظم‌کانتربوری[3] را داشت، وفات یافت. علاوه براندیشه‌هایی دربارهٔ مفاهیم اساسی پیوسته و گسسته و دربارهٔ بینهایت بزرگها و بینهایت کوچکها، برادواردین چهار رسالهٔ ریاضی درباب حساب و هندسه نوشت.

۸ــ۵ قرن پانزدهم

قرن پانزدهم شاهد آغازرنسانس اروپا درهنر ودانش بود. با زوال امپراطوری بیزانس، که منجر به سقوط قسطنطنیه به دست ترکها درسال ۱۴۵۳ شد، آوارگان روانهٔ ایتالیا شدند و گنجینه‌های تمدن یونانی را باخودبه‌همراه آوردند. بسیاری ازآثار کلاسیك یونانی، که تا آن زمان آگاهی به آنها از طریق ترجمه‌های غالباً نامناسب عربی ممکن بود، اکنون از روی منابع اصلی قابل مطالعه بودند. همچنین، در حدود اواسط این قرن، صنعت چاپ اختراع شد و وضع تجاری کتاب را متحول نمود و نشر دانش را در سرعتی بی‌سابقه میسر کرد. درحوالی پایان این قرن، آمریکا کشف شد و به فاصلهٔ کمی کشتیرانی دورکرهٔ زمین صورت گرفت.

فعالیت ریاضی در قرن پانزدهم عمدتاً در شهرهای ایتالیا و در شهرهای مرکزی اروپا، یعنی نورمبرگ، وین، و پراگ تمرکز یافته، و حول حساب، و جبر، و مثلثات متمرکز شده بود. بنابراین ریاضیات اصولا بارشد شهرهای تجارتی تحت‌تأثیر دادوستد، دریانوردی، نجوم، و مساحی رونق یافت.

بارعایت ترتیب گاهشناختی، ابتدا از نیکولاس کوزا[4] یاد می‌کنیم که نام خود را از شهرکوز[5] درکرانهٔ موزل[6]، که درآنجا درسال ۱۴۰۱ به دنیا آمد، گرفت. وی که پسر

---

1. Thomas Aquinas 2. Thomas Bradwardine 3. Canterbury
4. Nicholas Cusa 5. Cues
6. Mosel [رودی که بین شمال فرانسه و غرب آلمان جریان دارد]

ماهیگیر فقیری بود به سرعت در کلیسا ترقی کرد و سرانجام به مقام کاردینالی رسید. در سال ۱۴۴۸، وی فرماندار رم گردید. او تنها یك ریاضیدان درجهٔ دوم بود ولی به‌نوشتن چند رساله دراین موضوع توفیق یافت. دراینجا عمدتاً از او به خاطر کارش دراصلاح تقویم وکوشش وی برای تربیع دایره و تثلیث یك زاویهٔ کلی (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۶.۸) یاد می‌شود. وی درسال ۱۴۶۴ در گذشت.

یك ریاضیدان برتر، گئورگ فون پویرباخ[1] (۱۴۶۱-۱۴۲۳) بود، که نیکولاس کوزا را به عنوان یکی از معلمین خود برشمرده است. وی بعد از تدریس ریاضیات در ایتالیا، در وین اقامت گزید و دانشگاه آنجا را مرکز ریاضی نسل خود کرد. او کتابی دربارهٔ حساب و چند اثر دربارهٔ نجوم نگاشت ویك جدول سینوسها گردآورد. اغلب این آثار تا بعداز مرگ وی منتشر نشدند. وی همچنین ترجمهٔ لاتینی المجسطی بطلمیوس را از روی متن یونانی شروع کرده بود.

تواناترین و بانفوذترین ریاضیدان این قرن یوهان مولر[2] (۱۴۷۶-۱۴۳۶) بود، که بیشتر از روی صورت لاتینی نام زادگاهش کونیگسبرگ[3] («کوه شاهی») به رگیومونتانوس معروف شده است. درسنین جوانی زیرنظر پویرباخ در وین درس خواند و بعداً وظیفهٔ تکمیل ترجمهٔ نامبرده‌ازالمجسطی به‌وی واگذارشد. وی همچنین آثار آپولونیوس، هرون، و ارشمیدس را، از یونانی، ترجمه کرد. رسالهٔ او د تریانگولیس اومنیمودیس[4] [دربارهٔ مثلثها به طور کلی]، که در حدود ۱۴۶۴ نوشته شد ولی بعد از مرگ وی در ۱۵۳۳ منتشر گردید، بزرگترین اثر منتشر شدهٔ وی است و اولین شرح منسجم از مثلثات مسطحه و کروی در اروپا بود که مستقل از نجوم مورد مطالعه قرار می‌گرفت. رگیومونتانوس در ایتالیا وآلمان به سفرهای فراوانی پرداخت و سرانجام در ۱۴۷۱ در نورمبرگ اقامت گزید که درآنجا رصدخانه‌ای برپاداشت، چاپخانه‌ای دایرنمود، و چند رساله دربارهٔ نجوم نوشت. گفته‌اند که وی یك عقاب مکانیکی ساخت که بالهای خود را به‌هم می‌زد و یکی از شگفتیهای روزگار تلقی می‌شد. در سال ۱۴۷۵، رگیومونتانوس توسط پاپ سیکستوس[5] چهارم به رم دعوت شد تادراصلاح تقویم شرکت جوید. به فاصلهٔ کوتاهی بعد از ورودش، در سن ۴۰ سالگی، به‌ناگهان درگذشت. هاله‌ای از اسرار مرگ او را پوشانده است، زیرا، گرچه بنابراغلب گزارشها وی احتمالا به مرض طاعون درگذشته است، شایع شده بود که وی به وسیلهٔ یکی از دشمنانش مسموم کردیده است.

د تریانگولیس اومنیمودیس رگیومونتانوس به پنج مقاله تقسیم می‌شود، دومقالهٔ اول به مثلثات مسطحه و سه‌تای دیگر به مثلثات کروی اختصاص دارند. دراین کتاب، او به‌تعیین مثلثی که در سه شرط مفروض صدق نماید، علاقه نشان می‌دهد. وی در موارد متعددی از جبراستفاده می‌کند، مانند قضیهٔ ۱۲ و ۲۳ مقالهٔ دوم: (II ۱۲) مثلثی را تعیین کنید که یك

---

1. Georg von Peurbach 2. Johann Müller 3. Konigsberg
4. *De triangulis omnimodis* 5. Sixtus

ضلع، ارتفاع وارد بر این ضلع، و نسبت دو ضلع دیگر معلوم باشند؛ (II۲۳) مثلثی را تعیین کنید که تفاضل دو ضلع، ارتفاع وارد برضلع سوم، و تفاضل قطعاتی که ارتفاع روی ضلع سوم جدا می‌کند، معلوم باشند. دراینجا جبر لفظی است، و قسمت مجهول شکل به عنوان ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم یافته می‌شود. اگرچه وی بر آن بود که روشهای خود را کلی قلمداد کند، اما مقادیرعددی مشخصی را برای قسمتهای معلوم می‌دهد. تنها توابع مثلثاتی به‌کار گرفته شده در دتریانگولیس اومنیمودیس سینوس وکسینوس‌اند. مع‌هذا، بعداً رگیومونتانوس یک جدول تانژانتها را محاسبه نمود. در اثر دیگری، رگیومونتانوس جبر و مثلثات را برای مسئلهٔ ساختن یک چهارضلعی محاطی با چهار ضلع مفروض به کار برده است.

برجسته‌ترین ریاضیدان فرانسوی قرن پانزدهم نیکولا شوکه[1] بود که درپاریس به دنیا آمد ولی درلیون به سر برد و به طبابت پرداخت. در سال ۱۴۸۴ وی کتاب حسابی موسوم به سه قسمت در علم اعداد[2] نوشت، که تا قرن نوزدهم چاپ نشد. دراولین قسمت ازسه قسمت این اثر به محاسبه با اعدادگویا، در دومین قسمت به‌اعداد گنگ، و درسومین قسمت به نظریهٔ معادلات پرداخته شده است. شوکه نماهای منفی ومثبت صحیح را تشخیص داد و قسمتی از جبرخود را به‌صورت تلخیصی درآورد. کار وی، برای آن زمان، پیشرفته‌تر از آن بود که تأثیر زیادی برمعاصرینش گذارد. وی در حدود سال ۱۵۰۰ درگذشت. مسائلی از شوکه را می‌توان در مطالعهٔ مسئله‌ای ۹.۸ یافت.

در سال ۱۴۹۴ اولین نسخهٔ چاپی مجموعهٔ حساب، هندسه، نسبت و تناسب[3]، که معمولاً به آن به طور خلاصه سوما [مجموعه] اطلاق می‌شود از طرف راهب ایتالیایی لوکا پاچولی[4] (حدود ۱۵۰۹ ـ حدود۱۴۴۵) انتشاریافت. در این اثر، که به طور آزادانه از منابع زیادی گردآوری شده، هدف آن بود که خلاصه‌ای از حساب، جبر، و هندسهٔ زمان تدوین شود. این کتاب شامل چیز مهمی که در لیبر آباکی فیبوناتچی نتوان یافت، نیست ولی از نمادگذاری برتری استفاده می‌کند.

قسمت حسابی سوما با الگوریتمهایی برای اعمال اصلی و برای استخراج ریشه‌های دوم شروع می‌شود. عرضه‌داشت‌مطالب نسبتاً کامل‌است، مثلاً، تعدادروشهایی که برای انجام عمل‌ضرب آورده، ازهشت کمتر نیست. به‌حساب‌بازرگانی به‌طورکامل‌پرداخته شده وازطریق مسائل متعددی توضیح داده می‌شود؛ مطالعهٔ ارزشمندی از دفترداری دوبل نیز در این کتاب وجود دارد. قاعدهٔ امتحان و تصحیح موردبحث قرارگرفته و به‌کاربرده می‌شود. علی‌رغم اشتباهات عددی زیاد، قسمت حسابی اثر به‌صورت یک منبع موثق استاندارد در مشاغل آن زمان درآمده بود. جبر سوما در معادلات درجهٔ دوم بحث می‌کند ومشتمل بر مسائل بسیار زیادی است که منجر به چنین معادلاتی می‌شوند. این مباحث جبر با استفاده

---

1. Nicolas Chuquet 2. *Triparty en la science des nombres*
3. *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*
4. Luca Pacioli

از مخففهایی مانند p (از «بیشتر» *piu*) برای بعلاوه، m (از «کمتر» *meno*) برای منها، *co* (از «شیء» *cosa*) برای مجهول x، *ce* (از *censo*) برای x^2، *cu* (از *cuba*) برای x^3، و *coce* (از *censocenso*) برای x^4 تلخیص شده است. تساوی گاهی با *ae* (از *aequalis*) نشان داده می‌شود. اغلب خط‌تیره‌هایی روی علایم اختصاری ظاهر می‌شوند، ولی این رسم برای نشان دادن یك حذف بوده، مانند *Sūma* برای *Summa*. این اثر شامل مطالب چندان جالبی در هندسه نیست. آن‌گونه که معمول رگیومونتانوس بوده، جبر برای حل مسائل هندسی به‌کار می‌رود.

پاچولی سفرهای فراوانی کرد، درجاهای مختلف درس داد، و تعدادی آثار دیگر نوشت که همهٔ آنها چاپ نشدند. در ۱۵۰۹ وی کتاب نسبت‌الهی[1] [نسبت طلایی] خود را منتشر نمود، که شامل اشکالی از اجسام منتظم است که گویا توسط لئوناردوداوینچی رسم شده‌اند.

ظهور علامات + و − کنونی برای نخستین‌بار در صورت چاپ شده، در کتاب حسابی است که درسال ۱۴۸۹ در لایپزیگ توسط یوهان ویدمان[2] (متولد حدود ۱۴۶۰ در بوهم[3]) منتشر گردید. در اینجا علامتها نه به عنوان نمادهای اعمال و بلکه صرفاً برای نشان‌دادن زیادتی و نقصان به کار رفته‌اند. به احتمال زیاد علامت بعلاوه، شکل ادغام یافتهٔ کلمهٔ لاتینی *et* است که اغلب برای نشان دادن عمل جمع به کار می‌رفت، و علامت منها شاید شکل ادغام‌یافته‌ای از مخفف m به نشانهٔ منها باشد. توضیحات معقول دیگری نیز در این موارد ارائه شده‌اند. علامتهای + و − به عنوان نمادهای اعمال جبری درسال ۱۵۱۴ توسط ریاضیدان هلندی واندر هوك[4] به‌کار گرفته شدند ولی احتمالا قبل از آن هم به‌این منظور به‌کار رفته‌اند.*

۸-۶ حسابهای اولیه

با پیدایش علاقه به‌آموزش که با رنسانس همراه بود و با افزایش فوق‌العاده در فعالیت بازرگانی آن عهد، تعدادکثیری کتاب درسی درحساب منتشر شدند. از جمله سیصد جلد کتاب پیش از قرن هفدهم در اروپا به چاپ رسید. این‌کتابها عمدتاً بردونوع بودند، آنهایی‌که توسط فضلای کلاسیك که اغلب به مدارس کلیسایی وابسته بودند، به لاتین نوشته می‌شدند، و آنهایی که به زبانهای بومی توسط معلمین عملی که علاقه به آماده

1. *De diuina proportione* 2. Johann Widman
3. Bohemia 4. Vander Hoecke

* نگاه کنید به

J. W. L. Glaisher, "On the early history of the signs + and − and on the early German arithmeticians," *Messenger of Mathematics*. 51 (1921–1922), pp. 1–148.

نمودن اطفال بـرای پیشه‌های تجاری داشتند، به‌نگارش درمی‌آمدند. معلمین اخیر اغلب به عنوان مساحان شهری، سردفتران اسناد رسمی، مأمورین عوارض نیز خدمت می‌کردند، و شامل رشنمایستر[1] [حسابرس]های بانفوذی بودند که توسط هانزئاتیک‌لیگ[2]، اتحادیهٔ حفاظتی نیرومندی از شهرهای بازرگانی در ممالك توتنی[3]، حمایت می‌شدند.

قدیمیترین کتاب حساب چاپ شده، کتابی است بامؤلف گمنام و اکنون فوق‌العاده نادر به نام حساب ترویزو[4]، که در ۱۴۷۸ در شهر ترویزو، واقع برسر راه بازرگانیی که ونیز را باشمال مرتبط می‌کند، منتشرشد. این اثر عمدتاً یك کتاب حساب بازرگانی‌است که به شرح نوشتن ارقام، محاسبه با آنها، وکاربردهایی درمشارکت، و مبادلات پایاپای، اختصاص دارد. نظیر «الگوریسمها»ی قدیمیتر متعلق به‌قرن چهاردهم، این نیزشامل‌مسائل تفریحی چندی است.

درایتالیا کتابی در حساب بازرگانی نوشتهٔ پیروبورگی[5] بسیار پرنفوذتراز حساب ترویزو بود. این اثربسیار مفید در سال ۱۴۸۴ درونیزچاپ و حداقل ۱۷ بارتجدید چاپ شد، که آخرین آن در ۱۵۵۷ منتشرشد. درسال ۱۴۹۱ کتاب حسابی در فلورانس توسط فیلیپوکالاندری[6] عرضه شد، که کم‌اهمیت‌تر بود، اما به‌لحاظ اینکه شامل اولین نمونهٔ چاپی ازروش کنونی تقسیمهای طولانی و نیزاولین مسائل مصورچاپ شده در ایتالیا بود، برای ما جالب توجه است. قبلا دربارهٔ سومای پاچولی، منتشره در ۱۴۹۴، بحث کرده‌ایم که قسمت بزرگی از آن به‌حساب اختصاص دارد. اطلاعات زیادی راجع به‌رسوم بازرگانی آن زمان را می‌توان از مسائل این کتاب جمع آوری کرد.

درآلمان کتاب حساب ویدمان که در سال ۱۴۸۹ درلایپزیگ منتشرگردید، از اعتبار زیادی برخوردار بود. کتاب حساب مهم دیگردرآلمان، کتابی بود که توسط یاکوب کوبل[7] (۱۵۳۳ ـ ۱۴۷۰)، رشنمایستر هایدلبرگ، نوشته شده بود. محبوبیت این کتاب حساب، که در سال ۱۵۱۴ منتشرشد، ازاینجا پیداست که این‌اثر حداقل ۲۲ بار چاپ شد. اماشاید پرنفوذترین کتاب حساب بازرگانی در آلمان، کتاب حساب آدام‌ریز[8] (حدود ۱۴۸۹ـ ۱۵۵۹)، منتشره در۱۵۲۲ بود. این اثر آن‌قدر مشهوربودکه حتی امروزه درآلمان عبارت ناخ آدام‌ریز[9] [به گفتهٔ آدام‌ریز] برای اشاره به محاسبهٔ درست به‌کار می‌رود.

حکایت جالبی دربارهٔ آدام ریز گفته می‌شود. ظاهراً یك روز ریز و یك طراح وارد مسابقهٔ دوستانه‌ای شدند تا ببینند کدامیك ازآنها می‌تواند دریك دقیقه تعداد بیشتری زاویهٔ

---

1. Rechenmeister

۲. Hanseatic League اتحادیه‌ای قرون وسطایی از شهرهای تجاری آزاد آلمان شمالی و کشورهای وابسته، که به منظور ترفیع و حفظ منافع اقتصادی آنها تشکیل شد. ـ م.

۳. Teutonic توتنها قومی از ژرمانی قدیم بودند.ـ م.

4. *Treviso Arithmetic*
5. Piero Borghi
6. Filippo Calandri
7. Jacob Köbel
8. Adam Riese
9. nach Adam Riese

قائمه به‌کمك ستاره و پرگار رسم کند. طراح خط مستقیمی کشید، و سپس، مطابق با روش ترسیم متعارفی که امروزه در مدارس تدریس می‌شود، اقدام به برپا کردن عمودهایی برخط کرد. آدام‌ریز نیمدایره‌ای بریك خط مستقیم رسم کرد و سپس باسرعت زیاد به‌رسم تعداد بسیار زیادی زاویهٔ قائمهٔ محاطی پرداخت. بدین ترتیب وی به سهولت مسابقه را برد.

در انگلستان نیز، چند کتاب حساب مشهور به وجود آمد. اولین اثر منتشرشده در انگلستان که به طور انحصاری به ریاضیات اختصاص یافت، کتاب حسابی بود که‌توسط کاثبرت تونستال[1] (۱۴۷۴-۱۵۵۹) نوشته شد. این کتاب، که مبتنی بر سومهای پاچولی است، در۱۵۵۲ چاپ شد و به لاتین نوشته شده بود. تونستال درطول زندگی پرماجرایش چندین مقام روحانی و دیپلماتیك کسب کرد. توجه معاصرینش به فضیلت وی، از اینجا معلوم می‌شود که اولین نسخهٔ چاپی اصول اقلیدس به یونانی (۱۵۳۳) به وی اهدا شده است. امامعتبرترین نویسندهٔ انگلیسی کتابهای درسی قرن شانزدهم رابرت رکورد[2] (حدود ۱۵۱۰-۱۵۵۸) بود. رکورد به زبان‌انگلیسی می‌نوشت و آثار وی به‌صورت مناظره‌هایی بین استاد و دانشجو عرضه شده‌اند. وی حداقل پنج کتاب نوشت، که اولین اثر وی کتاب حسابی بود که خیال‌پردازانه به آن عنوان سرزمین هنرها[3] داده شد و درحدود سال۱۵۴۲ منتشر گردید. این‌کتاب حداقل به ۲۹ چاپ رسید. رکورد در آکسفورد درس‌خواند و سپس ازکیمبریج درجهٔ پزشکی‌گرفت. وی ریاضیات رادرکلاسهای خصوصی هردومؤسسهٔ فوق در زمانی‌که درآنجا رزیدنت بود، درس داد وپس از ترك کیمبریج به عنوان‌پزشك ادوارد ششم و ملکه مری به خدمت پرداخت. وی در اواخر زندگی بازرس معادن و مسکوکات[4] ایرلند گردید. آخرین سالهای عمرخود را، احتمالا به خاطر خلافی‌که درارتباط باکارش در ایرلند مرتکب شده بود، در زندان سپری کرد.

۷-۸ آغاز نمادگرایی در جبر

رابرت‌رکورد علاوه برکتاب حساب خود، که دربخش قبل ذکر شد، یك کتاب نجوم، یك کتاب هندسه، یك‌کتاب جبر، کتابی دربارهٔ طب، و احتمالا چند اثر دیگرکه اکنون مفقود شده، نوشت. کتاب وی دربارهٔ نجوم، که در سال ۱۵۵۱ چاپ شد، کاخ دانش[5] نامیده می‌شود و یکی از اولین اثرهایی بودکه دستگاه کپرنیکی را به خوانندگان انگلیسی معرفی نمود. کتاب هندسهٔ رکورد، راه دانش[6]، نیز درسال ۱۵۵۱ چاپ شد و شامل خلاصه‌ای از اصول اقلیدس است. آنچه از اهمیت تاریخی برخوردار است کتاب جبر

---

1. Cuthbert Tonstall 2. Robert Recorde
3. *The Grovnd of Artes*
4. Comptroller of the Mines and Monies
5. *The Castle of Knowledge* 6. *Pathewaie to Knowledge*

رکورد است، که هوش‌برانگیز[1] نامیده می‌شود و در سال ۱۵۵۷ منتشر شده، زیرا در این کتاب بود که نمادکنونی برای تساوی برای اولین‌بار به‌کار رفت. رکورد اختیار یك جفت پاره‌خط موازی برابردا برای نماد تساوی چنین توجیه نمود: «زیراهیچ دو شیئی نمی‌توانند مساویتر از اینها باشند».

یکی دیگر ازنمادهای جبرکنونی ما، علامت آشنای رادیکال (که شاید اختیار آن به جهت شباهت آن به یك r کوچك، به نشانهٔ *radix* [ریشه]، بوده)، در ۱۵۲۵ توسط کریستوف رودولف[2] در کتابش راجع به‌جبر تحت عنوان دی‌کوس[3] معرفی شد. این کتاب در آلمان اعتبار بسیاری داشت و نسخهٔ اصلاح شده‌ای ازاین اثر به وسیلهٔ میخائیل شتیفل[4] (۱۴۸۶–۱۵۶۷) در سال ۱۵۵۳ تهیه‌گردید. شتیفل به عنوان بزرگترین جبردان آلمانی قرن شانزدهم توصیف شده است. مشهورترین اثرریاضی وی آریثمتیکااینتگرا[5] ی‌اوست که درسال ۱۵۴۴ منتشرشده است. این کتاب بـه سه قسمت، که به ترتیب، به اعـداد گویا، اعـدادگنگ، وجبر اختصاص دارند، تقسیم شده است. در اولین قسمت، شتیفل مـزایای ارتباط دادن یك تصاعد حسابی را با یك تصاعد هندسی خاطرنشان می‌کند و بدین‌ترتیب منادی اختراع لگاریتم در یك قرن بعد می‌شود. وی همچنین، در این قسمت، ضـرایب دو جمله‌ای تا مرتبهٔ هفدهم را می‌دهـد. قسمت دوم کتاب اساساً یك بیان جبری ازمقالـهٔ دهم اقلیدس است، و قسمت سوم راجع به معادلات است. ریشه‌های منفی معادلات کنار گذاشته می‌شوند، اما علامات +، —، $\sqrt{}$ به کار می‌روند، و مجهول اغلب با یك حـرف نمایش داده می‌شود.

شتیفل یکی ازعجیبترین شخصیتها در تاریخ ریاضیات بود. وی در ابتدا یك‌راهب بود، توسط مارتین‌لوتر تغییر مذهب داد، و یك اصلاح‌طلب متعصب گردید. مغز آشفته‌اش وی را بر آن داشت که رازگرایی عددی [اعتقاد به خواص فوق طبیعی اعداد] در پیش گیرد. از تحلیـل نوشته‌های کتاب مقدس، وی آخر دنیا را در ۳ اکتبر ۱۵۳۳ پیش‌بینی کرد و بعدازخراب کردن زندگی عدهٔ بسیاری از دهقانان معتقد که کار و مایملك خود را ترك‌کرده بودند تا همراه او به بهشت بروند، مجبور شدکه به زندانی پناه برد. یك مثـال افراطی از استدلال رازگرایانهٔ شتیفل اثبات وی است، بـه‌کمك آریثموگرافی[6]، از اینکه پاپ لئـوی دهـم «جانوری» است که در کتاب مکاشفات یوحنا* ذکـر شده است. از LEO DECIMVS وی حروف L، D، C، I، M، V رانگاه داشت، چون این حروف

---

1. *The Whetstone of Witte* 2. Christoff Rudolff

3. *Die Coss* [کلمهٔ آلمانی که به نشانهٔ «مجهول» یا همان «شیء» عربی به‌کار می‌رفت]

4. Michael Stifel 5. *Arithmetica integra* 6. Arithmography

* «بگذارآنکه فهمی دارد عدد جانور را بشمارد، زیرا آن عدد مردی است؛ و عدد او ششصد و سه بیست و شش است». نگاه کنید به

W. F. White, *A Scrap-Book of Elementary Mathematics*, pp. 180–182.

as their workes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle vnto one other.* And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle vnto .2. other nombers.*

Alwaies willyng you to remember, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cosike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiō of *equations.* I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke vse, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

14.ze.—+—.15.ϕ.=====71.ϕ.

20.ze.———.18.ϕ.=====.102.ϕ.

26.ʒ.—+—10ze=====9.ʒ.——10ze—+—213.ϕ.

19.ze—+—192.ϕ.=====10ʒ—+—108ϕ——19ze.

18.ze—+—24.ϕ.=====8.ʒ.—+—2.ze.

34ʒ———12ze=====40ze—+—480ϕ——9.ʒ.

صفحه‌ای از هوش‌برانگیز رابرت رکورد (۱۵۵۷) که در آن وی علامت تساوی خود را معرفی کرده است.

در دستگاه شمار رومی دارای معنی هستند. وی سپس X را به‌خاطر لئوی دهم و به دلیل اینکه *Leo decimvs* دارای ده حرف است، اضافه و حرف M را، به دلیل اینکه نشانهٔ *mysterium* [رمز] است، حذف کرد. مرتب نمودن دوبارهٔ این حروف DCLXVI، یا ۶۶۶، را می‌دهد، که «عدد جانور» درکتاب مکاشفات است. این کشف چنان آرامشی به شتیفل داد که وی معتقد شد که تعبیر وی می‌بایست نتیجهٔ الهامی از جانب خداوند باشد.

چند سال بعد، نپر[1]، مخترع لگاریتم، نشان داد که ۶۶۶ مبین پاپ رم است، و پدر بونگوس[2] از یسوعیان معاصر وی اعلام کرد که این عدد مبین مارتین لوتر[3] می‌باشد. استدلال پدر بونگوس به‌صورت زیر بود. اگر از A تا I نمایشگر از ۱ تا ۹، از K تا S نمایشگر از ۱۰ تا ۹۰ (ده‌به‌ده)، و از T تا Z نمایشگر از ۱۰۰ تا ۱۵۰۰ (صدبه‌صد)* باشد، داریم

M	A	R	T	I	N	L	V	T	E	R	A
۳۰	۱	۸۰	۱۰۰	۹	۴۰	۲۰	۲۰۰	۱۰۰	۵	۸۰	۱

که عدد ۶۶۶ را به عنوان مجموع می‌دهد.

در طول جنگ جهانی اول آریثموگرافی برای نشان دادن اینکه ۶۶۶ باید به عنوان قیصر ویلهلم[4] تعبیر شود، به کار رفت، و بعداً نشان داده شد که این عدد معرف هیتلر است. نشان داده شده‌است که ۶۶۶ وقتی در نمادهای حرفی زبان آرامی که کتاب مکاشفات در اصل به آن زبان نوشته شده، بیان شود نرون[5] را تهجی می‌کند.

۸ـ۸ معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم

احتمالا جالبترین دستاورد ریاضی قرن شانزدهم کشف راه حل جبری معادلات درجهٔ سوم ودرجهٔ چهارم، توسط ریاضیدانان ایتالیایی بود. داستان این کشف، وقتی با آب‌وتاب نوشته شود، با هر صفحه از نوشته‌های بنونوتوچلینی[6] رقابت می‌کند. به طور خلاصه، واقعیات ظاهراً چنین بوده‌اند. درحدود ۱۵۱۵ شیپیونه‌دل‌فرو[7] (۱۴۶۵ـ۱۵۲۶) استاد ریاضی دانشگاه بولونیا[8]، معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+mx=n$ را به طریقهٔ جبری، احتمالا با تکیه برمنابع عربی قدیمیتر، حل کرد. وی نتیجه‌ای راکه یافته بود، منتشر نکرد ولی رازخود را برای شاگردش آنتونیو فیور[9] فاش کرد. اما در حدود سال ۱۵۳۵،

1. Napier 2. Father Bongus 3. Martin Luther

* الفبای لاتینی مثل انگلیسی است، جزآنکه فاقد j و w است. به علاوه، در حروف بزرگ جایی U به صورت V ظاهر می‌شود.

4. Kaiser Wilhelm 5. Nero

۶. Benvenuto Cellini، مجسمه‌ساز و جواهرساز ایتالیایی (۱۵۰۰ـ۱۵۷۱)، شهرت عمدهٔ وی به خاطر اتوبیوگرافی اوست.ـــ م.

7. Scipione del Ferro 8. Bologna 9. Antonio Fior

نیکولو برشایی[1]، که عموماً به خاطر آسیبی در دوران کودکی که برقدرت تکلم او تأثیر نهاده بود، تارتاگلیا[2] (الکن) نامیده می‌شد، مدعی گردید که حل جبری معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳+px^۲=n$ را کشف کرده است. با اعتقاد براینکه این ادعایی دروغین بیش‌نیست، فیور، تارتاگلیا را در مسابقه‌ای عمومی برای حل معادلات درجهٔ سوم به مبارزه دعوت کرد، درنتیجهٔ آن تارتاگلیا به‌کوشش پرداخت و تنها چندروز پیش از موعد مسابقه، حل جبری معادلاتی را که فاقد جملهٔ مربع بودند، پیدا کرد. تارتاگلیا که به راه حل دو نوع معادلهٔ درجهٔ سوم مجهز بود، وارد مسابقه شد و بر فیور که تنها می‌توانست یك نوع آن را حل کند، به طور کامل پیروز گردید. بعداً جیرولاموکاردانو[3] [کاردان] نابغهٔ بی‌مسلکی که درمیلان ریاضیات درس می‌داد و طبابت می‌کرد، بادادن این قول که حفظ راز کند و بااغواگری کلید حل معادلات درجهٔ سوم را ازتارتاگلیا به دست آورد. درسال ۱۵۴۵، کاردان آرس ماگنا[4] [فن کبیر]ی خود را، که رسالهٔ عظیمی در جبر بود، در نورمبرگ[5] آلمان، منتشر نمود. و در آن راه حل تارتاگلیا برای معادلات درجهٔ سوم ظاهر گردید. اعتراضات شدید تارتاگلیا با پاسخ لودوویکوفراری[6]، مستعدترین شاگرد کاردان، مواجه شد، که وی استدلال نمود که کاردان اطلاعات خود را از دل‌فرو از طریق شخص ثالثی دریافت کرده و تارتاگلیا را به دزدی ادبی ازهمان منبع متهم کرد. مشاجرهٔ شدیدی برپا شد که شاید بخت با تارتاگلیا یار بود که توانست از آن جان سالم بدربرد.

چون به نظر نمی‌رسد که بازیگران ماجرای بالا همیشه نهایت احترام را به‌صداقت قایل باشند، در جزئیات طرح اختلافاتی دیده می‌شود.

راه حل معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳+mx=n$ که توسط کاردان در آرس‌ماگنای وی داده شده اساساً به صورت زیر است. اتحاد

$$(a-b)^۳+۳ab(a-b)=a^۳-b^۳$$

را درنظر بگیرید. اگر a و b را چنان اختیار کنیم که

$$۳ab=m ، a^۳-b^۳=n،$$

در این‌صورت x با $a-b$ برابر است. با حل دو معادلهٔ اخیر به طور همزمان برحسب a و b داریم

$$a=\sqrt[۳]{(n/۲)+\sqrt{(n/۲)^۲+(m/۳)^۳}}،$$

$$b=\sqrt[۳]{-(n/۲)+\sqrt{(n/۲)^۲+(m/۳)^۳}}.$$

و بدین ترتیب x معین می‌شود.

---

1. Nicolo of Brescia 2. Tartaglia 3. Girolamo Cardano
4. *Ars magna* 5. Neuremberg 6. Ludovico Ferrari

مدت زیادی از حل معادلهٔ درجهٔ سوم نگذشته بود که یك راه حل جبری برای معادلهٔ درجهٔ چهارم (یا دو مجذوری) کلی کشف شد. در ۱۵۴۰، ریاضیدان ایتالیایی زوانه دتونینی داکوی[1] مسئله‌ای را برای کاردان مطرح کرد که به یك معادلهٔ درجـهٔ چهارم منجر می‌شد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۵.۸)، گرچه کاردان قادر به حل معادله نشد، شاگرد وی فـراری موفق شد، و کاردان خشنودی چاپ این راه حل را نیز در آرس‌ماگنای خود پیدا کرد.

روش فراری برای حل معادلات درجهٔ چهارم، که با نمادگذاری امروزی تلخیص شود، به صورت زیـر است. تبـدیل ساده‌ای (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۴.۸ (الف)) معادلهٔ درجهٔ چهارم کامل را به معادلهٔ درجهٔ‌چهارمی به شکل

$$x^{4}+px^{2}+qx+r=0$$

تبدیل می‌کند. از آن به دست می‌آوریم

$$x^{4}+2px^{2}+p^{2}=xp^{2}-qx-r+p^{2}$$

یـا

$$(x^{2}+p)^{2}=px^{2}-qx+p^{2}-r$$

که از آن، به ازای y دلخواه خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}(x^{2}+p+y)^{2}&=px^{2}-qx+p^{2}-r+2y(x^{2}+p)+y^{2}\\&=(p+2y)x^{2}-qx+(p^{2}-r+2py+y^{2}).\end{aligned}$$

حال y راطـوری انتخاب می‌کنیم که سمت راست معادلهٔ بالا مربع کامل باشد. چنیـن چیزی وقتی ممکن است که*

$$4(p+2y)(p^{2}-r+2py+y^{2})-q^{2}=0.$$

اما این یك معادلـهٔ درجهٔ سوم برحسب y است، و با روشهای پیشین قابل حل می‌باشد. این مقدار y مسئلهٔ اصلـی را بـه مسئله‌ای تحویل می‌کند کـه کاری جز استخراج جذر ندارد.

راه حلهای جبری دیگری نیز برای معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم کلـی داده شده‌اند. در بخش بعد روشهای ابداع شده توسط ریاضیدان قرن شانزدهم فرانسه، فرانسوا ویت را بررسی نخواهیم کرد. راهی برای حل معادلات درجهٔ چهارم را که در سال ۱۶۳۷ توسط دکارت عرضه شده، می‌توان در بسیاری از کتابهای درسی متعارف کالجها در زمینهٔ نظریهٔ معادلات پیدا کرد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۴.۱۰ (ه) [جلد دوم]).

---

1. Zuanne de Tonini da Coi

* شرط لازم و کافی برای اینکه عبارت درجهٔ دوم $Ax^{2}+Bx+C$ مربع یك تابع خطی باشد، آن است که دترمینان، $B^{2}-4AC$، صفر شود.

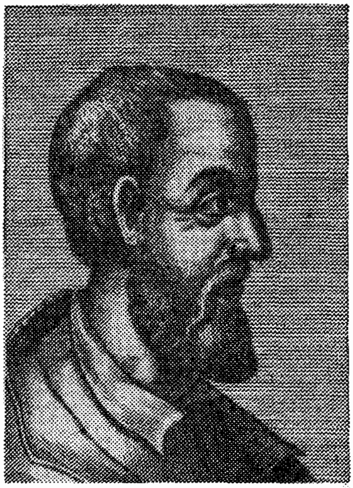
چون حل یك معادلهٔ درجـهٔ چهارم کلی را می‌توان به حل یك معادلـهٔ درجهٔ سوم وابسته به آن مربوط کرد، اویلر، درحدود ۱۷۵۰، سعی کرد به طورمشابه حل معادلهٔ درجهٔ پنجم کلی را به حـل یك معادلهٔ درجهٔ چهارم وابسته تحویل نماید. وی در این کوشش، همان‌طـور که برای لاگرانژ در سی سال بعد پیش آمـد، ناکام بود. یك پزشك ایتالیایی، پ. روفینی[1] (۱۸۲۲-۱۷۶۵)، درسالهای ۱۸۰۳، ۱۸۰۵، و۱۸۱۳ برهانی برای آنچه که اکنون صحت آن‌را می‌دانیم، تهیه کرد مبنی براینکه ریشه‌های یك معادلهٔ‌درجهٔ پنجم،یا بالاتر را درحالت کلی‌نمی‌توان به وسیلهٔ رادیکالهایی‌برحسب ضرایب معادله بیان کرد. این نتیجهٔ مهم بعداً به‌طور مستقل، درسال ۱۸۲۴، توسط ریاضیدان مشهور نروژی نیلس‌هنریك‌آبل[2] (۱۸۲۹-۱۸۰۲) اثبات شد. پیشرفتهای جدید درنظریهٔ معادلات بسیار جالب توجه، ولی پیشرفته‌تر از آن‌اند که دراینجا مورد بررسی قرار گیرند، و متضمن نامهایی هستند از قبیل برینگ[3]، جرارد[4]، چیرنهاوزن[5]، گالوا[6]، ژوردان[7]،و بسیاری دیگر.

جیرولاموکاردانو یکی از خارق‌العاده‌ترین شخصیتها درتاریخ ریاضیات است. وی در پاویا[8] در سال ۱۵۰۱ به عنوان فرزند نامشروع یك قاضی به دنیا آمـد وبه مردی با تضادهای عاطفی بدل گردید. وی زندگی شغلی متلاطم خود را به‌عنوان یك طبیب شروع کرد، درحالـی‌که ضمن استمرار این پیشه به مطالعه، تدریس، و نوشتن ریاضیات اشتغال داشت. او یك‌بار تااسکاتلند سفرکرد و در مراجعتش به ایتالیا کرسیهای مهمی رامتوالیـاً در دانشگاههای پاویا و بولونیا اشغال کرد. برای مدتی به خاطربدعتگذاری زندانی شد، چـون زایجه‌ای بـرای زندگانی مسیح منتشر ساخت. بااستعفا از پست خود در بولونیـا، به رم کوچ کرد و در احکام نجوم عالم برجسته‌ای شد و تحت این عنوان در دربار پاپی به دریافت مقرری نایل گردید. در سال ۱۵۷۶، بنابه روایتی به زندگـی خود خاتمه داد، زیراکه می‌خواست پیشگویی قبلی خود را از زمان مرگش که بنابر احکام نجوم به دست آورده بود، عملی نماید.از شرارت او داستانهای متعددی گفته شده است، مثـلا وقتی در خشم بوده گوشهای پسر کوچکترخودرا بریده‌است. بعضی‌ازداستانها می‌توانند اغراقگوییهای دشمنان وی باشند، وشاید هم بیش‌ازحد دربارهٔ وی بد گویی‌شده باشد. البته اتوبیوگرافی او این دیدگاه را تأیید می کند.

کاردان که یکـی از بااستعدادتـرین مردان زمان خود و در چندین فن جامع بود، آثاری دربارهٔ حساب، نجوم، فیزیك، طب و دیگر موضوعات نوشت. بزرگترین اثر وی، آرس‌ماگنا، اولین رسالهٔ عظیم‌به زبان لاتین است‌که صرفاً به جبراختصاص دارد. دراینجا به وجود ریشه‌های منفی یك معادله پی‌برده شده و به محاسبه بااعداد موهومی تاحدی‌توجه شده است. در این اثر همچنین روش خامی برای به دست آوردن یك مقدار تقریبی برای ریشهٔ معادله‌ای از درجـهٔ دلخواه وجود دارد. شواهدی در دست است کـه او با «قاعدهٔ

---

1. P. Ruffini 2. Niels Henrik Abel 3. Bring 4. Jerrard
5. Tschirnhausen 6. Galois 7. Jordan 8. Pavia



جیرولامو کاردانو
(مجموعهٔ کتابخانهٔ عمومی نیویورك)

علامات دکارت»، که در مطالعهٔ مسئله‌ای ۳.۱۰ [جلد دوم] توضیح داده شده، آشنا بوده است. کاردان، که قمارباز کهنه‌کاری بود، یك راهنمای قمار نوشت که در آن سؤالات جالبی در احتمالات بررسی شده‌اند.

تارتاگلیا کودکی سختی داشت. وی در حدود سال ۱۴۹۹ در برشا[1] از والدین فقیری به دنیا آمد و در زمان تسخیر برشا توسط فرانسه در ۱۵۱۲ حضور داشت. در جریان وحشیگریهایی که با این واقعه همراه بود، تارتاگلیا و پدرش (که یك نامه‌رسان پست در برشا بود) با عدهٔ بسیاری به کلیسای جامع پناه بردند، اما سربازان به تعقیب آنها پرداختند و قتل‌عامی درگرفت. پدر کشته شد، و پسر، باشکافی در جمجمه و زخم شمشیر سختی که آرواره وسق وی‌را شکافته بود، به‌حال مرگ رها شد. بعداً وقتی مادر تارتاگلیا در جستجوی خانوادهٔ خود به کلیسا رسید، پسرش را هنوز زنده یافت و توانست وی را بیرون برد. چون امکانات مالی برای مراجعه به پزشك نداشت، به خاطرش آمد که یك سگ مجروح همواره جای زخم خود را لیس می‌زند، و تارتاگلیا بعدها بهبودی خود را مدیون این درمان می‌دانست. آسیب وارده به سق وی سبب نقص مادام‌العمری در تکلم او شد، که وی از آن لقب «الکن» رایافت. مادرش پولی که برای ۱۵ روز به مدرسه‌فرستادن او کافی باشد، گردآورد، و او با دزدیدن یك کتابچهٔ خودآموز مشق بهترین استفاده را از فرصت کرد و از این طریق نوشتن و خواندن را پیش خود آموخت. گفته‌اند که به علت نداشتن امکانات برای خرید کاغذ، مجبور شد که از سنگ قبر به عنوان تخته استفاده کند. بعدها وی معاش خود را با تدریس علوم و ریاضیات در شهرهای مختلف ایتالیا تحصیل نمود. وی درسال ۱۵۵۷ در ونیز درگذشت.

تارتاگلیا ریاضیدان با استعدادی بود. ما قبلا کار او را دربارهٔ معادلات درجهٔ سوم

---

1. Brescia

نیکولو تارتاگلیا
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

ذکر کرده‌ایم. افتخار استفاده از ریاضیات در علم آتشباری توپخانه برای نخستین بار نیز به وی نسبت داده شده است. وی آنچه را که عموماً بهترین کتاب حساب ایتالیایی قرن شانزدهم تلقی می‌شود، نوشت که رساله‌ای در دو مجلد شامل بحث کامل اعمال عددی و رسوم بازرگانی آن عصر است. او همچنین نسخی از آثار اقلیدس و ارشمیدس را منتشر نمود.

در سال ۱۵۷۲، چندسال قبل از درگذشت کاردان، رافایل بومبلی[1] کتاب جبری منتشر نمود که سهم قابل ملاحظه‌ای درحل معادلهٔ درجهٔ سوم داشت. درکتابهای درسی دربارهٔ نظریهٔ معادلات نشان داده می‌شود که اگر $(n/۲)^۲+(m/۳)^۳$ منفی باشد، در این صورت معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳+mx=n$ دارای سه ریشهٔ حقیقی است. اما در این حالت، در فرمول کاردان ـ تارتاگلیا، این ریشه‌ها به صورت تفاضل دو ریشهٔ سوم اعداد مختلط بیان می‌شوند. این امر ظاهراً خلاف قاعده، به حالت تحویلناپذیر در معادلات درجهٔ سوم معروف است و به طور قابل ملاحظه‌ای جبریون قدیمی را به زحمت انداخت. بومبلی حقیقی بودن ریشه‌های بظاهر موهومی رادرحالت تحویلناپذیرخاطرنشان کرد. بومبلی همچنین نمادگذاری رایج زمان را اصلاح کرد. یك موردآن، استفادهٔ وی از علامت کروشه است. مثلا عبارت مرکب $\sqrt{۷+\sqrt{۱۴}}$ توسط پاچولی به صورت $RV۷pR۱۴$ نوشته می‌شده، که درآن RV، رادیکس اونیورسالیس[2]، مبین آن است که از همهٔ آنچه بعداز آن می‌آید جذر گرفته می‌شود؛ بومبلی این را به صورت $R\ ⌊۷pR۱۴⌋$ می‌نوشته است. بومبلی ریشه‌های دوم و سوم را با نوشتن Rq و Rc متمایز نمود، و $\sqrt{-۱۱}$ را با $dim\ Rq۱۱$ نشان داد.

---

1. Rafael Bombelli 2. radix universalis

فرانسوا ویت
(برادران براون)

۸-۹ فرانسوا ویت

بزرگترین ریاضیدان فرانسوی قرن شانزدهم فرانسوا ویت بود، که اغلب با نام نیمه‌لاتینی خود ویتا[1] خوانده می‌شود. او که یك حقوقدان و عضو پارلمان بود اغلب اوقات فراغت خود را وقف ریاضیات می‌کرد. وی در ۱۵۴۰ درفونتنه[2] متولد شد و در ۱۶۰۳ درپاریس درگذشت.

حکایات جالبی دربارهٔ ویت گفته شده است. مثلاً، داستان سفیری از ممالك سفلی که نزد شاه هنری چهارم به خود می‌بالیــد که درفرانسه ریاضیدانی نیست که قادر به حل مسئله‌ای باشدکه در ۱۵۹۳ به وسیلهٔ هموطن وی آدریانوس رومانوس (۱۶۱۵-۱۵۶۱) مطرح شده و مستلزم حل یك معادلهٔ درجهٔ ۴۵ام است. ویت احضار و معادله به وی نشان داده شد. باتشخیص یك رابطهٔ مثلثاتی دربطن مسئله، وی درعرض چند دقیقه توانست، دو جواب را پیداکند، و متعاقب آن، ۲۱ جواب دیگر را داد. ریشه‌های منفی مورد توجه او قرار نگرفتند. در مقابل، ویت، رومانوس را برای حل مسئلهٔ آپولـونیوس (نگاه کنید به بخش ۶-۴)، به مبارزه دعوت کرد، اما رومانوس قادر به به‌دست آوردن جوابی با استفاده از ابزارهای اقلیدسی نشد. وقتی حل زیبای پیشنهاد دهنده را به‌وی نشان دادند به فونتنه سفرکرد تا ویت را ملاقات کند. در نتیجهٔ آن دوستی گـرمی بین آن دو به‌وجود آمـد. داستان دیگری نیزهست مبنی براینکه چگونه ویت به طورموفقیت آمیزی یك رمزاسپانیایی راکه شامل چند صد علامت بود، گشود و فرانسه بدین‌وسیله به مدت دوسال درجنگ خود علیه اسپانیا سود برد. شاه فیلیپ[3] دوم آن‌چنان به ناگشودنی بودنی رمـز یقین داشت که به پاپ شکایت نمودکـه فرانسویان علیه کشور وی «برخلاف تعالیم دین مسیح» جادو بـه خدمت می گیرند. گفته‌اندکه وقتی ویـت غرق در ریـاضیات مـی‌شد خـود را روزهادر اتاق مطالعه‌اش حبس می کرد.

---

1. Vieta 2. Fontenay 3. King Philip

ویت آثاری در زمینهٔ مثلثات، جبر، وهندسه نوشت، که عمده‌ترین آنها کاربرد قوانین ریاضی در مثلثها[1] (۱۵۷۹)، مدخل فنون تحلیل[2] (۱۵۹۱)، متمم هندسه[3] (۱۵۹۳)، در باب حل عددی توانها[4] (۱۶۰۰)، در باب شناسایی و اصلاح معادلات[5] (که بعد از درگذشت وی در سال ۱۶۱۵ چاپ شد) می‌باشند. این آثار بجز آخری به خرج خود ویت چاپ و توزیع شد.

از آثار بالا، اولین آنها سهم قابل ذکری در پیشرفت مثلثات دارد. این اثر شاید اولین کتاب در اروپای غربی است که، به‌طور منظم، روشهایی را برای حل مثلثهای مسطحه و کروی به‌کمك هر شش تابع مثلثاتی بسط می‌دهد. به مثلثات تحلیلی توجه شایانی شده است (نگاه کنیدبه مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۷.۸). ویت عباراتی برای $\cos n\theta$ به عنوان تابعی‌از $\cos\theta$ به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots, ۹$ به دست آورد، و بعداً یك راه حل مثلثاتی برای حالت تحویلناپذیر در معادلات درجهٔ سوم را پیشنهاد کرد.

مشهورترین اثر ویت مدخل فنون تحلیل وی است، که سهم زیادی دربسط جبر علامتی دارد. در اینجا ویت رویهٔ استفاده از حروف مصوت را برای نمایش کمیتهای مجهول و حروف بی‌صدا را برای نمایش کمیتهای معلوم معرفی می‌کند. رسم کنونی ما در استفاده از حروف آخر الفبا برای مجهولها وحروف اول برای معلومها توسط دکارت در۱۶۳۷ معرفی شد. پیش از ویت، رسم رایج این بود که ازحروف یا نمادهای متفاوتی برای توانهای مختلف یك کمیت استفادهٔ شود. ویت از یك حرف، که به طرز مناسبی توصیف‌شود، استفاده‌کرد. مثلاً x، $x^۲$، $x^۳$ کنونی توسط ویت به‌صورت A، A *quadratum* [A به‌توان‌دو]، A *cubum* [A به‌توان سه]، وتوسط نویسندگان بعدی به‌اختصار به‌صورت A، Aq، Ac نوشته می‌شدند. ویت همچنین ضرایب یك معادلهٔ چند جمله‌ای را به‌گونه‌ای توصیف کرد که معادله به صورت همگن درآید. او از علامتهای $+$ و $-$ کنونی استفاده کرد، ولی هیچ نمادی برای تساوی نداشت. مثلا وی

$$۵BA^۲ - ۲CA + A^۳ = D$$

را به‌صورت

$$B\ 5 \text{ in } A \text{ quad} - C \text{ plano } 2 \text{ in } A + A \text{ cub aequatur } D \text{ solido}$$

می‌نوشته است. توجه کنیدکه C و D چگونه توصیف شده‌اند تا هر جملهٔ معادله سه‌بعدی شود. ویت نماد $=$ را بین دوکمیت، نه برای نشان دادن تساوی کمیتها، بلکه برای تفاضل آنها به‌کاربرد.

---

1. *Canon mathematicus seu ad triangula*
2. *In artem analyticam isagoge*
3. *Supplementum geometriae*
4. *De numerosa potestatum resolutione*
5. *De aequationum recognitione et emendatione*

در درباب حل عددی توانها، ویت یك فرایند منظم، که تا حدود سال ۱۶۸۰ مورد استفادهٔ همگانی داشته، برای تقریب متوالی ریشهٔ یك معادله‌ارائه می‌کند. این روش‌برای معادلات درجات بالا چنان پرزحمت می‌شود که یك ریاضیدان قرن هفدهم‌آن را به‌عنوان «کاری‌که برای یك‌مسیحی نامناسب است» توصیف نمود. این روش وقتی درمورد معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^2+mx=n$$

به‌کار رود، ازاین قراراست. فرض‌کنیدکه x_1 مقدار تقریبی معلومی برای یك‌ریشهٔ معادله باشد، به‌قسمی‌که ریشهٔ مطلوب را بتوان به‌صورت x_1+x_2 نوشت. جایگذاری درمعادلهٔ مفروض نتیجه می‌دهد که

$$(x_1+x_2)^2+m(x_1+x_2)=n,$$

یا

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+mx_1+mx_2=n.$$

با فرض اینکه x_2 آن‌قدر کوچك است که می‌توان از x_2^2 صرفنظر کرد، داریم

$$x_2=\frac{n-x_1^2-mx_1}{2x_1+m}.$$

حال از تقریب اصلاح شده، x_1+x_2، به همان طریق تقریب بهتری را، $x_1+x_2+x_3$، محاسبه می‌کنیم و همینطور الی آخر. ویت این روش را برای تقریب یك ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ ششم

$$x^6+6000x=191246976$$

به‌کاربرد.

رساله‌ای از ویت که بعد از وفات او منتشرشد، شامل مطالب قابل‌توجهی‌درنظریهٔ معادلات است. دراینجا تبدیلهای معمول برای افزودن یا ضرب ریشه‌های یك معادله در یك مقدار ثابت را می‌بینیم. ویت از روابط بین ضرایب و ریشه‌های چندجمله‌ایها، تا درجهٔ پنجم، به عنوان توابع متقارنی از ریشه‌ها مطلع بود، و درحالت‌کلی از تبدیلی که جملهٔ پس از بزرگترین جمله ازلحاظ توان را صفر می‌کند، آگاهی داشت. دراین رساله راه حل زیبای زیر از معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+3ax=2b$، شکلی که هرمعادلهٔ درجهٔ سوم قابل تحویل به‌آن است، دیده می‌شود. با قراردادن

$$x=\frac{a}{y}-y$$

معادلهٔ مفروض به صورت

$$y^6+2by^3=a^3,$$

یك معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب y^3، درمی‌آید. بدین‌ترتیب y^3، و سپس y، وسپس x را پیدا می‌کنیم. راه حل ویت برای معادلات درجهٔ چهارم شبیه به‌راه حل فراری است. معادلهٔ درجهٔ چهارم کلی ملخص

$$x^4+ax^2+bx=c,$$

را در نظر بگیرید که می‌توان آن را به‌صورت

$$x^4=c-ax^2-bx$$

نوشت. باافزودن $x^2y^2+y^4/4$ به هردوطرف، معادلهٔ

$$\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)^2=(y^2-a)x^2-bx+\left(\frac{y^4}{4}+c\right)$$

حاصل می‌شود. حال y را چنان انتخاب می‌کنیم که طرف راست مربع کامل شود. شرط این امر آن است که

$$y^6-ay^4+4cy^2=4ac+b^2,$$

که یك معادلهٔ درجهٔ سوم برحسب y^2 است. چنان yی را می‌توان یافت و حل مسئله با استخراج ریشه‌های دوم کامل می‌شود.

ویت جبردان برجسته‌ای بود و اطلاع از این حقیقت که وی جبر و مثلثات را در هندسهٔ خود به‌کار برده، باعث شگفتی نمی‌شود. وی بانشان دادن اینکه هم مسئلهٔ تثلیث و هم مسئلهٔ تضعیف به حل معادلات درجهٔ سوم بستگی دارند، به سه مسئلهٔ باستانی ایفای سهم کرد. در بخش ۴ـ۸ محاسبهٔ ویت از مقدار π وحاصلضرب نامتناهی جالب توجه وی را که به $2/\pi$ همگراست، ذکر کرده‌ایم، و در بخش ۶ـ۴ ازکوشش وی دراحیای اثر مفقود آپولونیوس در تماسها یاد کرده‌ایم.

در ۱۵۹۴، ویت بادرگیری درمباحثهٔ تندی باکلاویوس دراصلاح تقویم گریگوری دچار رسوایی مصیبت‌باری شد. برخورد ویت نسبت به این موضوع کاملا غیرعلمی بود.

۸ـ۱۰ دیگرریاضیدانان قرن شانزدهم

تاریخچهٔ ریاضیات قرن شانزدهم بی‌آنکه حداقل از عدهٔ دیگری که در این راه سهمی داشتند، ذکر کوتاهی شود، کامل نخواهد بود. ریاضیدانانی چون کلاویوس، کاتالدی، و استوین، و نجوم ریاضیدانانی مانند کپرنیك، رائتیکوس، و پیتیسکوس از این جمله هستند.

کریستوفر کلاویوس[1] در سال ۱۵۳۷ در بامبرگ[2] آلمان متولد شد و در سال

1. Christopher Clavius 2. Bamberg

کریستوفر کلاویوس
(مجموعهٔ دیوید اسمیت)

۱۶۱۲ در رم درگذشت. وی از خود چیز زیادی به ریاضیات اضافه نکرد ولی احتمالا بیش‌از هر دانشمند آلمانی دیگر آن قرن به ارتقای این دانش کمك کرد. اومعلم بااستعدادی بود و کتابهـای بسیار معتبری را در حساب (۱۵۸۳) و جبر (۱۶۰۸) نوشت. در سال ۱۵۷۴ نسخه‌ای از اصـول اقلیدس را منتشر کرد که به خاطر یادداشتها و حواشی گستردهٔ آن واجد ارزش است. وی همچنین دربارهٔ مثلثات و نجوم مطالبی نگاشت، ونقش مهمی در اصلاح تقویم گریگوری ایفا نمود. به عنوان یك یسوعی، برای فرقهٔ خود افتخاراتی کسب کرد.

پیترو آنتونیو کاتالدی[1] در ۱۵۴۸ در بولونیا به دنیا آمد،در فلورانس،پروجا[2]، و بولونیا ریاضیات ونجوم تدریس کرد، و در شهر زادگاه خود در سال ۱۶۲۶ درگذشت. وی‌آثاری درریاضیات نگاشت که‌یك‌کتاب حساب، رساله‌ای دربارهٔ اعداد تام، نسخه‌ای از شش مقالـهٔ اول اصول، و رسالهٔ کوتاهی در جبـر ازآن جمله هستند. برداشتن اولین گامها درنظریهٔ کسرهای مسلسل به وی نسبت داده می‌شود.

مؤثرترین ریاضیدان ممالك سفلی درقرن شانزدهم سیمون‌استوین (۱۶۲۰-۱۵۴۸) بود. وی رئیس کل سررشته‌داری ارتش هلند شد و کارهای عام‌المنفعهٔ زیادی را سرپرستی کرد. درتاریخ ریاضیات، استوین بیشترین‌شهرت را به عنوان‌اولین کسی که نظریهٔ کسرهای اعشاری را تدوین کرد، دارد. درتاریخ فیزیك وی بیشتر به خاطر سهمی‌که دراستاتیك و ئیدروستاتیك دارد، مشهور است. برای دانشمندان همعصرش، شهرت وی بیشتر به دلیـل کارهای او دراستحکامات ومهندسی‌نظامی بود. برای تودهٔ‌عامی زمان خود شهرت عمدهٔ او به خاطراختراع درشکه‌ای بود که به‌کمك بادبانهایی به جلو رانده می‌شد واینکه‌درامتداد ساحل دریا درحالی که ۲۸ نفرراحمل می کرد، به‌حرکت درآمد ویك اسب درحال تاخت

1. Pietro Antonio Cataldi 2. Perugia

را پشت سر گذاشت.

علم نجوم سهم فراوانی در رشد ریاضیات داشت؛ درواقع، زمانی کلمهٔ «ریاضیدان» به مفهوم منجم به کار می‌رفت. از جملهٔ منجمان برجسته‌ای که سبب تحرکی در ریاضیات شد، نیکولاوس کوپرنیکوس[1] [کپرنیك] (۱۴۷۳-۱۵۴۳) لهستانی بود. وی در دانشگاه کراکو[2] تعلیم یافت و در پادوا و بولونیا به تحصیل حقوق، طب، و نجوم پرداخت. نظریهٔ کیهان او در سال ۱۵۳۰ کامل شد، اما تا سال مرگش در ۱۵۴۳ منتشر نشد. کار کوپرنیکوس اصلاحاتی در مثلثات را ضروری نمود، خود کوپرنیکوس رساله‌ای در این باب عرضه کرد.

گئورگ یوآخیم رائتیکوس[3] (۱۵۱۴-۱۵۷۶)، از منجمان برجستهٔ آلمانی درقرن شانزدهم و از مریدان کوپرنیکوس بود. او ۱۲ سال را به اتفاق محاسبان اجیرشده برای تهیهٔ دو جدول مثلثاتی قابل توجه، که هنوز هم قابل‌استفاده است، صرف کرد. یکی از آنها جدولی بود ۱۰ رقمی، از هرشش تابع مثلثاتی، به فواصل ″۱۰ کمانها، دیگری یك جدول ۱۵ رقمی سینوسها بود به فواصل ″۱۰ کمانها، همراه با تفاضلهای اول، دوم، و سوم. رائتیکوس اولین کسی بود که توابع مثلثاتی را به عنوان نسبت اضلاع یك مثلث قائمه تعریف نمود. به خاطر سماجتهای رائتیکوس بود که اثر بزرگ کوپرنیکوس فقط اندکی قبل از مرگ مؤلف منتشر شد.

جدول سینوسهای رائتیکوس در سال ۱۵۹۳ توسط بارتولومائوس پیتیسکوس[4]

نیکولاس کوپرنیکوس
(موزهٔ آمریکا)

---

1. Nicolas Copernicus 2. Cracow
3. Georg Joachim Rhaeticus 4. Bartholomaus Pitiscus

(۱۶۱۳-۱۵۶۱)، یك روحانی آلمانی که علاقه به ریاضیات داشت، ویرایش و کامل شد. رسالهٔ بسیار رضایتبخش وی در مثلثات اولین اثری در این موضوع بود که چنین عنوانی داشت.

به طور خلاصه، در مورد دستاوردهای ریاضی قرن شانزدهم، می‌توانیم بگوییم که آغازجبرعلامتی تقریباً دراین زمان بود، محاسبه باارقام هندی-عربی به صورت استانده‌ای درآمد، کسرهای اعشاری تکوین یافتند، و معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم حل شدند. نظریهٔ معادلات عموماً پیشرفت کرد، اعداد منفی مورد توجه قرار گرفتند، مثلثات به کمال رسید و به‌صورت منظم واصولی درآمد، و چندین جدول عالی محاسبه شدند. صحنه برای گامهای بلندی که باید درقرن بعد برداشته می‌شدند، آماده بود.

در اینجا ذکر این نکته جالب است که اولین اثر ریاضی چاپ شده در ینگه‌دنیا در سال ۱۵۵۶ در مکزیکوسیتی پدیدار شد، که یك خلاصهٔ اعمال بازرگانی کوچك توسط خوان‌دیز[1] بود.

مطالعهٔ مسئله‌ای

۱۰.۸ مسائلی ازعصر تاریکی

گردآورندهٔ مجموعه‌ای به‌زبان لاتین تحت عنوان مسائلی برای تقویت ذهن شاید آلکوین یورکی (حدود سال ۷۷۵) باشد. پنج مسئلهٔ زیر از این مجموعه را حل کنید.

(الف) اگر ۱۰۰ کیل ذرت بین ۱۰۰ نفر به چنان روالی توزیع شود که هر مرد ۳ کیل، هرزن ۲ کیل، و هر کودك ۱/۲ کیل دریافت کند، چند مرد، زن، و کودك وجود دارند؟

(ب) سی قمقمه، که ده‌تا یشان پر، ده‌تا نیم خالی، و ده‌تا خالی هستند، باید بین سه پسر تقسیم شوند به طوری که قمقمه‌ها و محتویات آنها به طور مساوی تصاحب شوند. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

(ج) سگی خرگوشی را دنبال می‌کند، که ۱۵۰ پا جلوتر است، هربار که خرگوش جهشی به طول ۷ پا انجام می‌دهد، سگ ۹ پا می‌جهد. سگ در چند خیز به خرگوش می‌رسد؟

(د) یك گرگ، یك بز، و یك کلم را باید از عرض رودخانه‌ای به وسیلهٔ یك قایق که تنها یکی از آنها را علاوه برقایقران می‌تواند در خود جادهد، عبور داد. چگونه باید آنها را حمل کرد به طوری که نه بز کلم را بخورد و نه گرگ بز را؟

(ه) مردی درحال احتضار وصیت می‌کندکه اگرزنش، که آبستن‌است، پسری به‌دنیا آورد، پسر ۳/۴ و بیوه ۱/۴ دارایی را به ارث برند؛ اما اگر دختری زاده شود، وی ۷/۱۲ و بیوه ۵/۱۲ دارایی را ارث ببرند. دارایی وی را درصورتی که هم یك پسر

---

1. Juan Diez

و هم یك دختر متولد شوند، چگونه باید قسمت کرد؟ (این مسئله منشأ رومی دارد. راه حلی که درمجموعهٔ آلکوین داده شده قابل قبول نیست.)

(و) ژربر درکتاب هندسهٔ خود، مسئلهٔ تعیین ساقهای یك مثلث قائم‌الزاویه باوتر و مساحت معلوم را، که در آن زمان بسیار مشکل به نظر می‌رسید، حل کرد. این مسئله را حل کنید.

(ز) ژربر مساحت یك مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به صورت $(a/۲)(a-a/۷)$ بیان کرد. نشان دهید که این معادل با اختیار $\sqrt{۳}=۱٫۷۱۴$ است.

۲۰۸ دنبالهٔ فیبوناتچی

(الف) نشان دهید که مسئلهٔ زیر، که در لیبر آباکی آمده، دنبالهٔ فیبوناتچی ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ...، x، y، $x+y$، ... را پدید می‌آورد.

چند زوج خرگوش از یك زوج در سال می‌تواند تولید شود درصورتی که هر زوج در هر ماه یك زوج جدید را به وجود می‌آورند که خود از ماه دوم به تولیدمثل می‌پردازند.

(ب) اگر u_n معرف جملهٔ nام دنبالهٔ فیبوناتچی باشد نشان دهید که

۱. $u_{n+۱}u_{n-۱}=u_n^۲+(-۱)^n$، $n\geqq ۲$

۲. $u_n=[(۱+\sqrt{۵})^n-(۱-\sqrt{۵})^n]/۲^n\sqrt{۵}$

۳. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n/u_{n+۱})=(\sqrt{۵}-۱)/۲$

۴. u_n و $u_{n+۱}$ متباین هستند.

نوشتجات زیادی راجع به دنبالهٔ فیبوناتچی وجود دارد. برای کاربردهای بسیار خاص در معماهای تقطیع، هنرها، آرایش برگها، و مارپیچ لگاریتمی، مثلا، نگاه کنید به ا. پ. نورتروپ، معماهای ریاضی[1].

۳۰۸ مسائلی از «لیبر آباکی»

مسائل زیر راکه در لیبر آباکی (۱۲۰۲) آمده، حل کنید. اولین مسئله را یك مدرس مدارس کلیسایی در قسطنطنیه برای فیبوناتچی مطرح کرد، دومی برای توضیح قاعدهٔ سه طرح شده؛ سومی مثالی از یك مسئلهٔ ارث است که در آثار بعدی توسط شوکه و اویلر دوباره ظاهر شدند.

1. E. P. Northrop, *Riddles in Mathematics*

(الف) اگر A از B، ۷ دناریوس[1] [دینار] بگیرد، آنگاه پول A پنج برابر پول B می‌شود؛ اگر B از A، ۵ دناریوس بگیرد؛ آنگاه پول B هفت برابر A می‌شود. هر کدام چقدر پول دارند؟

(ب) پادشاهی ۳۰ مرد را برای کاشتن درخت به باغ خود فرستاد. اگر آنها بتوانند ۱۰۰۰ درخت را در ۹ روز بنشانند، ۳۶ مرد در چند روز خواهند توانست ۴۴۰۰ درخت را بنشانند؟

(ج) مردی برای پسر ارشدش یك سولیدوس[2] و یك‌هفتم باقیماندهٔ ثروتش را به ارث گذاشت، از باقیمانده، وی برای پسر دیگرش دو سولیدوس و یك‌هفتم باقیماندهٔ ثروتش را باقی گذاشت، سپس از باقیماندهٔ جدید، برای پسر سومش سه سولیدوس و یك‌هفتم باقیمانده را به ارث نهاد. وی به همین ترتیب ادامه داد، به هر پسر یك سولیدوس بیش از پسر قبلی و یك‌هفتم باقیماندهٔ ثروتش را باقی گذاشت. با چنین تقسیمی نتیجه آن شد که آخرین پسر هرچه را که باقی‌مانده بود دریافت کرد و سهم همهٔ پسرها یکی شد. این مرد چند پسر داشت و ماترك او چقدر بود؟

۴۰۸ مسائل دیگری از فیبوناتچی

(الف) نشان دهید که مربعات اعداد $a^2-2ab-b^2$، a^2+b^2، $a^2+2ab-b^2$ تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. اگر $a=5$ و $b=4$، قدرنسبت ۷۲۰ است، و اولین و سومین مربع $31^2=41^2-720$ و $49^2=41^2+720$ هستند. از تقسیم بر 12^2، جواب فیبوناتچی به اولین مسئلهٔ مسابقه، یعنی یافتن عدد گویایی مانند x را به طوری که x^2+5 و x^2-5 هردو مربع اعداد گویا باشند، به دست می‌آوریم (نگاه کنید به بخش ۸-۳). مسئله در صورتی که به‌جای ۵ اعداد ۱، ۲، ۳، یا ۴ گذاشته شود، غیرقابل حل است. فیبوناتچی نشان داد که اگر x و h اعداد صحیحی باشند به طوری که x^2-h و x^2+h مربعهای کامل باشند، آنگاه h باید بر ۲۴ قابل قسمت باشد. به‌عنوان مثالهایی $5^2+24=7^2$، $5^2-24=1^2$ و $10^2+96=14^2$، $10^2-96=2^2$ را داریم.

(ب) راه‌حلی برای مسئلهٔ زیر پیدا کنید، که سومین مسئله از مسائل مسابقه است که توسط فیبوناتچی حل شد: سه مرد کپه‌ای پول دارند، سهم آنها ۱/۲، ۱/۳، ۱/۶ است. هرمرد مقداری پول از کپه برمی‌دارد تا اینکه چیزی باقی نماند. اولین مرد ۱/۲ آنچه را که برداشته، دومی ۱/۳، و سومی ۱/۶ آن را برمی‌گردانند. وقتی که مجموع پول برگردانده شده به طور مساوی بین سه مرد تقسیم شود، دیده می‌شود که هر یك صاحب حصهٔ خود می‌شوند. در کپهٔ اصلی چقدر پول وجود داشت، و هرمرد چقدر از کپه برداشته بود؟

(ج) مسئلهٔ زیر را که توسط فیبوناتچی در لیبر آباکی داده شده، حل کنید. این مسئله به دفعات زیادی در صورتهای مختلف دوباره مطرح شد و اساس اندیشهٔ مندرج در مسائل

---

1. denarius

2. solidus [سکه‌یی که در بیزانتین ضرب می‌شد]

قسطا السنین است.

مردی از هفت دروازه داخل باغی شد، و تعداد معینی سیب برداشت. وقتی باغ را ترك کـرد به نگهبان اول نصف سیبهایی راکه داشت به اضافـهٔ یك سیب دیگر داد. به نگهبان دوم نصف سیبهای باقیمانده و یك سیب دیگـر داد. وی در مورد پنـج نگهبان باقیمانده نیز چنین کـرد، و باغ را با یك سیب ترك نمود. او چنـد سیب از باغ جمع کرده بود؟

۵.۸ چند ضلعیهای ستاره‌ای

یك چنـد ضلعی ستاره‌ای منتظم، شکلی است که از وصل کـردن n نقطه‌ای که محیط یك دایره را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، به a امین نقطه و با شروع ازنقطهٔ مفروضی، تشکیل می‌شود، که در آن n و a متباین هستند و $n > ۲$. چنین چند ضلعی ستاره‌ای با نماد $\{n/a\}$ نمایش داده می‌شود، وگاهی یك **n-گرام** منتظم نامیده می‌شود. وقتی $a = ۱$، یك چند ضلعی منتظم را خواهیم داشت. چند ضلعیهای ستاره‌ای درمدارس باستانی فیثاغورسی پدیدار شدند، که در آنجا چند ضلعی ستاره‌ای $\{۵/۲\}$، یا پنتاگرام، به عنوان یك نشان شناسایی به کار می‌رفت. چند ضلعیهای ستاره‌ای همچنین درهندسهٔ بوئتیوس وترجمه‌های اقلیدس توسط آدلارد و کمپانوس از عربی ظاهر می‌شونـد. برادواردین بعضی خواص هندسی آنها را بسط داد. آنها همچنین توسط رگیومونتانوس، شارل دوبوئل[1] (۱۴۷۰- ۱۵۳۳)، ویوهان کپلر (۱۵۷۱-۱۶۳۰) تحت مطالعه قرار گرفتند.

(الف) به کمك یك نقالـه، چنـدضلعیهای ستاره‌ای $\{۵/۲\}$، $\{۷/۲\}$، $\{۷/۳\}$، $\{۸/۳\}$، $\{۹/۲\}$، $\{۹/۴\}$، $\{۱۰/۳\}$ را بسازید.

(ب) فرض‌کنید $\phi(n)$، که **تابع ϕ اویلر** نامیده می‌شود، تعداد اعدادکوچکتراز n و اول نسبت به آن را نشان دهد. نشان دهیدکه $[\phi(n)]/۲$ تا n-گرام منتظم وجوددارد.

(ج) نشان دهیدکه اگر n اول باشد، $(n-۱)/۲$ تا n-گرام منتظم وجود دارد.

(د) نشان دهید کـه مجموع زوایای «رئوس» چند ضلعی ستاره‌ای منتظم $\{n/a\}$ برابر با $۱۸۰^\circ(n-۲a)$ است. (این حکم توسط برادواردین داده شده است.)

۶.۸ یوردانوس و کوزا

(الف) کمپانوس در آخرمقالهٔ چهارم ترجمه‌اش ازکتاب «اصول» اقلیدس یك مسئلهٔ تثلیث زاویه را شرح می‌دهدکه دقیقاً همانی‌است که توسط یوردانوس در «دترپانگولیس» داده شده است، که اثری است در هندسه در چهار مقاله و شامل ۷۲ قضیهٔ استانده همراه با قضایای دیگری در مباحثی از قبیل مرکز ثقل مثلث، سطوح خمیده، و کمانهای متشابه.

---

1. Charles de Bouelles

این تثلیث، که اصل درج را به‌کار می‌برد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۶.۴)، از این‌قرار است: فرض کنید $\measuredangle AOB$، که به صورت یك زاویهٔ مرکزی در دایره‌ای داده می‌شود، زاویه‌ای باشد که می‌خواهیم آن را ثلث کنیم، بر A وتر AD را رسم کنید تا قطر عمود بر OB را در E چنان قطع کند که $ED=OA$، در این صورت خط OF که موازی با DA است $\measuredangle AOB$ را ثلث می‌کند. درستی این ساختمان را ثابت کنید.

(ب) یوردانوس در ترکتاتوس دنومریس داتیس[1] [رسالهٔ اعداد مفروض] مسائلی دارد که در آن عدد مفروضی باید به‌روالی که بیان شده تقسیم شود. مثلا یکی از مسائل آغازین در این اثر چنین است: عدد مفروضی را به دو قسمت چنان تجزیه کنید که مجموع مربعات قسمتها برابر با عدد مفروض دیگری شود. این مسئله را وقتی که دو عدد مفروض به ترتیب ۱۰ و ۵۸ باشند، حل کنید.

(ج) کوزا راههایی را برای تقریب محیط دایرهٔ مفروض ارائه کرد. بهترین روش وی آن است که در زیر می‌آید: فرض کنید M مرکز یك مثلث متساوی‌الاضلاع مانند ABC و D وسط ضلع AB باشد. فرض کنید E وسط DB باشد. کوزا مدعی شد که در این صورت $(5/4)ME$ شعاع دایره‌ای است که محیطش برابر با محیط مثلث متساوی‌الاضلاع است. حال مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ساقهای $RS=(5/4)ME$ و $RT=(3/2)AB$ رسم کنید، و زاویه‌ای مانند α «از برنز یا چوب» برابر با زاویهٔ RST بسازید. برای راستیدن محیط دایرهٔ مفروضی، دو قطر متعامد UOV و XOY را رسم کنید؛ زاویهٔ α را طوری قرار دهید که رأس آن در U و یکی از اضلاع آن در امتداد UOV باشد؛ آنگاه ضلع دیگر زاویه، امتداد XOY را در Z چنان قطع می‌کند که OZ نصف محیط مورد نظر است. نشان دهید که روش کوزا π را با $\cdots 3{,}142337 = (24/35)\sqrt{21}$ تقریب می‌کند.

۷.۸ دورر و مربعهای جادویی از مرتبهٔ زوج مضاعف

در اثر حکاکی مشهور آلبرشت دورر، مالیخولیا[2] مربع جادویی مرتبهٔ چهارمی که در شکل ۶۸

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

شکل ۶۸

1. *Tractatus de numeris datis*
2. *Melancholia*

تصویر شده، ظاهر می‌شود، که در آنجا تاریخ، یعنی سال ۱۵۱۴ که حکاکی در آن انجام شده، در دوخانهٔ وسطی سطر پایین ظاهر می‌شود. علاوه بر خواص «جادویی» معمول، نشان دهید که

(الف) مجموع مربعات اعداد واقع در دوسطر بالایی برابر است با مجموع مربعات اعداد واقع در دو سطر زیرین.

مالیخولیا اثر آلبرشت دورر. (موزهٔ بریتانیا)

(ب) مجموع مربعات اعداد واقع درسطراول و سوم برابراست بامجموع مربعات اعداد واقع در سطرهای دوم و چهارم.
(ج) مجموع اعداد واقع درقطرها برابر است بامجموع اعدادی که برقطرهاواقع نیستند.
(د) مجموع مربعات اعداد واقع برقطرها برابراست با مجموع مربعات اعداد غیر واقع برقطرها.
(ه) مجموع مکعبات اعداد واقع برقطرها برابر است با مجموع مکعبات اعداد غیرواقع برقطرها.

راه سادهای برای ساختن مربعهای جادویی از مرتبهٔ زوج مضاعف، یعنی مربعهای جادویی که مرتبهٔ آنها مضربی از ۴ است، وجود دارد. قبل از همه، مربعی از مرتبهٔ۴را درنظر بگیرید و قطرهای آنرا رسم شده تصورکنید (نگاه کنید به شکل ۶۹). با شروع از گوشهٔ فوقانی سمتچپ، درامتداد سطرها ازچپ به راست به ترتیب نزولی بشمارید، درحالیکه اعداد را تنها در خانههایی درج میکنید که توسط قطری قطع نشدهاند، حال،

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

	۲	۳	
۵			۸
۹			۱۲
	۱۴	۱۵	

شکل ۶۹

۶۴	۲	۳	۶۱	۶۰	۶	۷	۵۷
۹	۵۵	۵۴	۱۲	۱۳	۵۱	۵۰	۱۶
۱۷	۴۷	۴۶	۲۰	۲۱	۴۳	۴۲	۲۴
۴۰	۲۶	۲۷	۳۷	۳۶	۳۰	۳۱	۳۳
۳۲	۳۴	۳۵	۲۹	۲۸	۳۸	۳۹	۲۵
۴۱	۲۳	۲۲	۴۴	۴۵	۱۹	۱۸	۴۸
۴۹	۱۵	۱۴	۵۲	۵۳	۱۱	۱۰	۵۶
۸	۵۸	۵۹	۵	۴	۶۲	۶۳	۱

	۲	۳			۶	۷	
۹			۱۲	۱۳			۱۶
۱۷			۲۰	۲۱			۲۴
	۲۶	۲۷			۳۰	۳۱	
	۳۴	۳۵			۳۸	۳۹	
۴۱			۴۴	۴۵			۴۸
۴۹			۵۲	۵۳			۵۶
	۵۸	۵۹			۶۲	۶۳	

شکل ۷۰

با شروع از گوشهٔ تحتانی سمت راست، در امتداد سطرها از راست به چپ به ترتیب صعودی بشمارید، درحالی‌که اعداد را تنها درخانه‌هایی‌که به وسیلهٔ یك قطرقطع شده‌اند درج می‌کنید، مربع جادویی حاصل فرق چندانی بامربع دورر ندارد. همان قاعده را می‌توان درمورد هرمربع جادویی از مرتبهٔ $4n$، درصورتی که کلیهٔ قطرهای n^2 زیر بلوك چهاردرچهار اصلی را رسم شده تصور کنیم، به کار برد. شکل ۷۰ ساختمان یك مربع جادویی ۸×۸ با این قاعده را نشان می‌دهد.

(و) یك مربع جادویی از مرتبهٔ ۱۲ رسم کنید.

۸.۸ مسائلی از رگیومونتانوس

سه مسئلهٔ زیر را، که دوتای اول آنها را در د تریانگولیس ا‌ومنیموديس رگیومونتانوس (۱۴۶۴) دیده می‌شوند، حل کنید:

(الف) مطلوب است تعیین مثلثی‌که تفاضل دو ضلع، ارتفاع وارد برضلع سوم، و تفاضل قطعاتی‌که این ارتفاع روی ضلع سوم جدا می‌کند، معلوم باشند. (مقادیر عددی که توسط رگیومونتانوس داده می‌شوند عبارت‌اند از ۳، ۱۰، و ۱۲.)

(ب) مطلوب است تعیین مثلثی که یك ضلع، ارتفاع وارد برآن، و نسبت دوضلع دیگر معلوم باشند. (مقادیر عددی داده شده توسط رگیومونتانوس ۲۰، ۵، و ۳/۵ هستند.)

(ج) یك چهارضلعی محاطی را با چهارضلع معلوم بسازید.

۹.۸ مسائلی از شوکه

مسائل زیررا که از سه قسمت در علم اعداد شوکه (۱۴۸۴) اقتباس شده‌اند، حل کنید:

(الف) بازرگانی ازسه‌بازار مکاره دیدن‌کرد. دراولی پول خودرا دوبرابر نمود و ۳۰ دلار خرج کرد، در دومی پول خود را سه برابر کرد و ۵۴ دلار خرج نمود، درسومی پول خود را چهار برابر کرد و ۷۲ دلار خرج نمود و بعد ۴۸ دلار برایش باقی ماند. وی بدواً چقدر پول داشته است؟

(ب) نجاری موافقت می‌کند تحت‌این شرایط کار کندکه به‌ازای هرروزکاره ۵٫۵۰ دلار دریافت‌کند، درحالی‌که به ازای هرروزی‌که کار نمی‌کند باید ۶٫۶۰ دلار بپردازد. درپایان ۳۰ روز متوجه می‌شودکه به اندازهٔ دریافتی‌اش، پول پرداخت کرده است. وی چند روز کار کرده؟

(ج) دوتاجرشراب وارد پاریس می‌شوند، یکی‌ازآنها با۶۴ قمقمهٔ شراب ودیگری با ۲۰ قمقمه. چون به‌اندازهٔ کافی پول ندارندکه عوارض بپردازند، اولی ۵ قمقمهٔ شراب و ۴۰ فرانك می‌دهد، و دومی ۲ قمقمهٔ شراب می‌دهد و۴۰ فرانك پس می‌گیرد. قیمت یك قمقمهٔ شراب و عوارض آن چیست؟

(د) شوکه قاعدهٔ **کمیتهای متوسط**[1] را ارائه داد، که می گوید اگر a،b،c،d اعداد مثبتی باشند آنگاه $(a+b)/(c+d)$ بین a/c و b/d قرار می گیرد. این را ثابت کنید.

۱۰.۸ مسائلی از پاچولی

دو مسئلهٔ زیر را که در سومای پاچولی (سال ۱۴۹۴) یافت می‌شوند، حل کنید. مسئلهٔ دوم تفصیلی از «مسئلهٔ قورباغه در چاه»[2] معروف است وصورتهای متعددی دارد.

(الف) شعاع دایرهٔ محاطی یك مثلث ۴ است و طول قطعاتی از یك ضلع که توسط نقطهٔ تماس دایره با این ضلع جدا می‌شوند، ۶ و ۸ است. دوضلع دیگر را تعیین کنید.

(ب) موشی در بالای یك درخت تبریزی است که ۶۰ پا ارتفاع دارد و گربه‌ای روی زمین درپای درخت است. موش هر روز ۱/۲ پا پایین می‌آید و هر شب ۱/۶ پا به بالا برمی گردد. گربه هرروزیك‌پا بالا می‌رود و هرشب ۱/۴ پا به‌پایین می‌لغزد. درخت درقسمت بین گربه و موش هرروز ۱/۴ پا رشد می کند و هرشب ۱/۸ پا کوتاه می‌شود. چه مدت طول خواهد کشیدکه گربه به موش برسد؟

۱۱.۸ مسائل بازرگانی قدیم

مسائل زیر را که درکتب حساب اروپایی قدیم یافت می‌شود، حل کنید.

(الف) این‌مسئله، ازحساب بوتئو[3] مربوط به‌سال ۱۵۵۹، برپایهٔ مشکلات دریانوردان رومی قدیم است.

دوکشتی که ۲۰۰۰۰ استاد از هم فاصله دارند، لنگر برمی‌دارند تا به‌طور مستقیم به طرف یکدیگرحرکت کنند. اولین کشتی سپیده‌دم با وزش باد شمال بادبان برافراشت. نزدیك عصر، وقتی ۱۲۰۰ استاد راه پیموده بود، باد شمال ساکت شد و باد جنوب غربی برخاست. در این موقع، کشتی دیگـر به راه افتاد و ۱۴۰۰ استاد به هنگام شب دریا را درنوردید. ولی، اولین کشتی با باد مخالف ۷۰۰ استاد به‌عقب رانده شد، اما با باد شمال صبحگاهی با افراشتن بادبان به روال معمول به پیش‌برده شد در حالی که دیگـری ۶۰۰ استاد به‌عقب رانده شده بود. بنابراین، متناوباً شب‌وروز، کشتیها با باد مساعدپیش می رفتند، وسپس با باد نامساعد به‌عقب رانده می‌شدند. می‌پرسم وقتی کشتیها به‌هم رسیدند مجموعاً چند استاد راه پیموده بودند و چه مدت در راه بودند؟

(ب) مسئلهٔ زیر توسط تارتاگلیـا برای توضیح یك مطلب مهم در مبادلات داده شده است.

اگر ۱۰۰ لیر پول مودون[4] معادل ۱۱۵ لیر در ونیز باشد، واگر ۱۸۰ لیر در ونیز

---

1. regle des nombres moyens 2. frog in the well problem
3. Buteo 4. Modon

هم‌ارز ۱۵۰ لیر در کورفو[1] باشد، و اگر ۲۴۰ لیر پول کورفو به اندازهٔ ۳۶۰ لیر در نگروپونت[2] ارزش داشته باشد، ارزش ۶۶۶ لیر پول نگروپونت با مسکوکات مودون چیست؟

(ج) کتابهای حساب قدیم دارای مسائل زیادی راجع به عوارض گمرکی هستند. آنچه درزیرمی‌آید مسئله‌ای است از این‌قبیل که ازکتاب حساب کلاویوس مربوط به‌سال ۱۵۸۳ اقتباس شده است.

تاجری ۵۰٫۰۰۰ پوند فلفل را در پرتغال به ۱۰۰۰۰ اسکودو[3] خرید و ۵۰۰ اسکودو عوارض پرداخت. آن را با هزینهٔ ۳۰۰ اسکودو به ایتالیا حمل کرد و در آنجا عوارض دیگری به مبلغ ۲۰۰ اسکودو پرداخت. انتقال آن از ساحل به فلورانس ۱۰۰ اسکودو خرج برداشت و وی مجبور شد تا یك گمرك ورودی به میزان ۱۰۰ اسکودو به آن‌شهر بپردازد. سرانجام، حکومت مالیاتی به میزان ۱۰۰۰ اسکودو از هرتاجرمطالبه کرد. وی اینك متحیر است که، بعداز این همه مخارج، هرپوند را به چه قیمتی بفروشدتا در هرپوند یك‌دهم اسکودو سودببرد.

(د) در یك راهنمای عملی برای بازرگانان که توسط فلورنتین گالیگای[4] درسال ۱۵۲۱ نوشته شده، مسئلهٔ زیرراجع به سود وزیان دیده می‌شود.

مردی تعدادی عدل پشم در لندن خرید، که هر عدل ۲۰۰ پوند، مقیاس انگلیسی، وزن داشت، و هرعدل ۲۴ فلورین[5] برای او هزینه برداشت. وی‌پشم را به‌فلورانس‌فرستاد و هزینهٔ حمل و نقل و مخارج دیگری، معادل با ۱۰ فلورین برای هر عدل پرداخت. او می‌خواهدکه پشم را در فلورانس به چنان قیمتی بفروشد که ۲۰ درصد سرمایه‌اش سود ببرد. هرهاندردویت[6] (۱۰۰ پوند) آن را چندباید بفروشد درصورتی‌که ۱۰۰ پوند لندن معادل۱۳۳ پوند فلورانس باشد.

(ه) مسائل مرابحه بسیار رایج بودند. در اینجا یکی را از لیبر آباکی فیبوناتچی مربوط به سال ۱۲۰۲ می‌آوریم.

مردی یك دناریوس را با چنان نرخی به مرابحه می‌گذاردکه در پنج سال صاحب دو دناریوس می‌شود، و پنج سال بعد ازآن پول دوبرابر می‌شود. می‌پرسم که از این یك دناریوس وی بعد از ۱۰۰ سال چند دناریوس بهره خواهد برد.

(و) مسئلهٔ زیر از سرچشمهٔ علوم[7] هامفری‌بیکر[8] (۱۵۶۸) است وراجع به مشارکت می‌باشد.

دو بازرگان با هم شریك شده‌اند، اولی در اول ژانویه، ۶۴۰ لی[9] سرمایه‌گذاری کرد. دومی تا اول آوریل قادر به‌سرمایه‌گذاری نیست. مقدار سرمایه‌گذاری او را

---

1. Corfu 2. Negroponte 3. Scudi [از واحدهای پول ایتالیایی قدیم]
4. Florentine Ghaligai 5. Florin 6. hundredweight
7. *The Well Spring of Sciences* 8. Humphrey Baker 9. li

می‌خواهم، بدین‌منظور که وی بتواند صاحب نصف عایدی شود. (فرض کنید که مشارکت از تاریخ سرمایه‌گذاری اولی به مدت یك سال دوام خواهد آورد.)

(ز) در زیر مسئله‌ای از رسالهٔ عمومی[1] تارتاگلیا مربوط به سال ۱۵۵۶ آورده می‌شود که اساساً یك مسئلهٔ قسط‌السنین است. باید به‌خاطرداشت که این مسئله قبل‌ازابداع لگاریتم مطرح شده است.

بازرگانی ۲۸۱۴ دوکات[2] به دانشگاهی برمبنای این توافق داد که به مدت نه‌سال ۶۱۸ دوکات در هر سال به وی بازپرداخت، و در پایان نه سال ۲۸۱۴ دوکات پرداخت شده تلقی شود. وی چه ربح مرکبی برای پول خود دریافت می‌کند؟

۱۲.۸ الگوریتمهای جلوزیا وگالی

(الف) کتابهای حساب قرنهای پانزدهم وشانزدهم‌شامل‌توصیفاتی ازالگوریتمهایی برای اعمال اصلی هستند. ازروشهای متعددی که برای انجام یك ضرب طولانی‌تدبیرشده، روش موسوم به **روش جلوزیا**[3]، یا **روش مشبکه**[4] شاید از همه مقبولتر بوده است. این روش که در شکل ۷۱ با ضرب ۹۸۷۶ در ۶۷۸۹ برای به دست آوردن ۶۷۰۴۸۱۶۴ توضیح داده شده، بسیار قدیمی است. این روش احتمالا برای اولین‌بار درهندوستان‌پدید آمده است (نگاه‌کنیدبه بخش ۷-۵)، زیرا که در شرحی بر لیلاوتی و سایر آثار هندی ظاهرشده و ازهندوستان راه خود را به‌آثار چینی، عربی، و ایرانی بازکرده است. این روش برای مدتی طولانی در بین اعراب محبوبیت داشت و ازطریق‌آنها به اروپای غربی منتقل شد. به دلیل سادگی درکاربرد آن، در صورتی که مشکل چاپ، یاحتی رسم شبکهٔ خطوط لازم وجود نمی‌داشت، این روش شاید هنوز هم کماکان مورد استفاده بود. این الگو به مشبکه، یا شبکه، که دربعضی از پنجره‌ها به کار می‌رود، شباهت دارد. اینها به «جلوزیا» موسوم بودند که نهایتاً بدل به «Jalousie» (به معنی «کرکره» در زبان فرانسه) شدند.

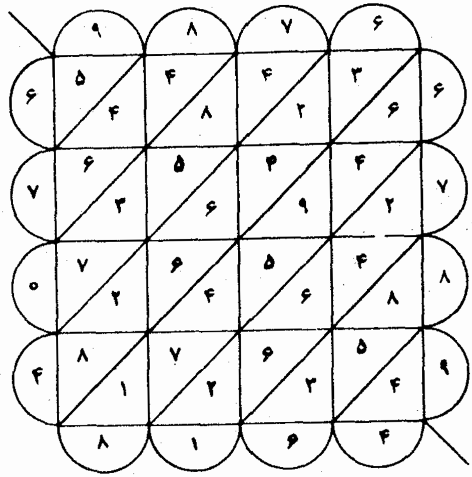
حاصلضرب ۸۰۳۴۲ و ۷۳۱۸ را به روش جلوزیا پیداکنید.

(ب) الگوریتمی‌که قبل از سال ۱۶۰۰ برای تقسیمات طولانی به‌مراتب بیش از دیگرروشهامورد استفاده‌بود، به‌اصطلاح روش‌گالی[5]، یاروش خطازدن[6]، است که‌به‌احتمال قوی ریشهٔ هندی داشته است. برای روشن شدن این روش، گامهای زیر را درتقسیم۹۴۱۳ بر ۳۷ درنظر بگیرید.

۱. مقسوم‌علیه، ۳۷، را همان‌طور که نشان داده شده، زیر مقسوم بنویسید. اولین رقم خارج‌قسمت، ۲، را به‌روال عادی

---

1. *General trattato* 2. ducat 3. gelosie 4. grating
5. galley 6. scratch



شکل ۷۱

۹۴۱۳ | ۲
۳۷
۲
~~۲~~۰
~~۹~~~~۴~~۱۳ | ۲
~~۳~~~~۷~~
۱
~~۲~~~~۵~~
~~۳~~~~۰~~۶
~~۹~~~~۴~~~~۱~~۳ | ۲۵
~~۳~~~~۷~~~~۷~~
~~۳~~
۱~~۲~~
~~۲~~~~۵~~~~۴~~
~~۳~~~~۰~~~~۶~~۵
~~۹~~~~۴~~~~۱~~~~۳~~ | ۲۵۴ — ۱۵
~~۳~~~~۷~~~~۷~~~~۷~~
~~۳~~~~۳~~

به دست آورید، و آن را در طرف راست مقسوم بنویسید.

۲. فکر کنید: ۶ = ۳ × ۲، ۳ = ۶ — ۹. ۹ و ۳ را خط بزنید و ۳ را بالای ۹ بنویسید. فکر کنید: ۱۴ = ۷ × ۲، ۲۰ = ۱۴ — ۳۴. ۷، ۳، ۴ را خط بزنید و ۲ را بالای ۳ و ۰ را بالای ۴ بنویسید.

۳. مقسوم‌علیه، ۳۷، را قطرواری، به اندازهٔ یك رقم در طرف راست بنویسید. مقسوم حاصل بعد از گام دوم ۲۰۱۳ است. رقم بعدی خارج قسمت را به دست آورید. فکر کنید: ۱۵ = ۳ × ۵، ۵ = ۱۵ — ۲۰. ۳، ۲، ۰ را خط بزنید و ۵ را بالای ۰ بنویسید. فکر کنید: ۳۵ = ۷ × ۵، ۱۶ = ۳۵ — ۵۱. ۷، ۵، ۱ را خط بزنید و ۱ را بالای ۵، و ۶ را بالای ۱ بنویسید.

۴. مقسوم‌علیه، ۳۷، را به اندازهٔ یك رقم دیگر به‌طرف راست به طور قطری بنویسید. مقسوم‌حاصل پس‌ازگام‌سوم ۱۶۳ است. رقم بعدی خارج قسمت را به‌دست آورید، ۴. فکر کنید: ۱۲ = ۳ × ۴، ۴ = ۱۲ — ۱۶، ۳، ۱، ۶ را خط بزنید و ۴ را در بالای ۶ بنویسید. فکر کنید: ۲۸ = ۷ × ۴، ۱۵ = ۲۸ — ۴۳. ۷، ۴، ۳ را خط بزنید و ۱ را در بالای ۴، و ۵ را در بالای ۳ بنویسید.

۵. خارج‌قسمت ۲۵۴ است با باقیماندهٔ ۱۵.

بعدازکمی تمرین، معلوم می‌شود که روش گالی آن اندازه‌که به نظر می‌رسد، مشکل

نیست. محبوبیت آن معلول سهولت انجام آن برروی چرتکهٔ شنی بود، که در آن خط‌زدن در واقع پاك‌کردنی است که یك جایگزینی احتمالی پس‌از آن انجام می‌شود. نام «گالی» به قایقی اطلاق می‌شد، که تصور می‌شد ظاهر مسئله پس از اتمام به‌آن شباهت پیدا می‌کند. این شباهت یا با نظر کردن به‌کار از ته صفحه، که در آن خارج قسمت مثل یك دیرك کناری بادبان کشتی به‌نظر می‌رسد، ویا بانظر کردن به‌کار از طرف چپ صفحه، که در آن خارج قسمت مثل یك دیرك به‌نظر می‌رسد، نتیجه می‌شود. از نقطهٔ نظر دوم، باقیمانده اغلب (همچنان‌که در بالا نشان داده شده) طوری نوشته می‌شد که مثل پرچمی برفراز دیرك باشد.

۶۵۲۸۴ را بر۵۹۴، با استفاده از روش گالـی، تقسیم کنید. (این مسئله، با حلی به روش بالا، درحساب ترویزو مربوط به سال ۱۴۷۸ ظاهر می‌شود.)

۱۳.۸ جمتریا یا آریثموگرافی

چون اغلب دستگاههای شمار باستانی دستگاههای الفبایی بودنـد، طبیعی بودکه به جای حروف یك‌اسم مقادیرعددی قرارداده شود. این‌کار منجربه‌پیدایش شبه‌دانشی رمزی موسوم به **جمتریـا**[1] یا **آریثموگرافی** شد، که دربین عبریان قدیم و سایـرین بسیار مورد توجه بود، و در قرون وسطی ازنو احیا گردید.

(الف) کلمهٔ «amen»[آمین] وقتی که به‌یونانی نوشته شود به‌صورت $\alpha\mu\eta\nu$ است. براین مبنی توضیح دهید که چرا، دربعضی دستنوشته‌های وابسته به مسیحیت، عدد ۹۹ در پایان دعا ظاهر می‌شود.

(ب) با استفاده از جمتـریا و با استفاده از کلید زبـان انگلیسی «ثابت کنید» که دربین‌سه‌شخصیت Roosevelt، Churchill و Stalin، Roosevelt بزرگترین شخصیت سیاسی بود.

(ج) اسامی زیر را به اسامی «جانور» بدل کنید (همه جز آخـری رومی هستند، آخـری یونانـی است): LUDOVICUS (ظاهراً لوئی شانزدهم)، SILVESTER SECUNDUS (ژربر، کـه به عنوان پاپ سیلوستر دوم حکـومت کرد)؛ PAULO V، VICE-DEO FILII DEI DOCTOR ET REX VICARIUS؛ VICARIUS GENERALIS DEI IN TERRIS LATINUS DUX CLERI؛ GLADSTONE.

(د) صحت آنچه را که درزیر می‌آید، ودر مجموعهٔ پارادوکسها[2]ی دمورگن یافت می‌شود، تحقیق کنید:

۱. آقای James Dunlop نامی، داشت با یك تفنگ ۶۶۶ خان به هواخواهان پاپ تیر می‌انداخت، که دکتر چالمرز[3] به آهستگی به او گفت، «چرا، دنلوپ، خودت این کاررا می‌کنی، و به وی کاغذی‌داد که‌در آن‌اعداد واقع در IACOBVS DVNLOPVS

---

1. gematria 2. *A Budget of Paradoxes* 3. Dr. Chalmers

به‌هم اضافه شده بودند.»

۲. «آقای دیویس تام[1] آقای جوانی به‌نام St.Claire را سرگرم کار با «عدد جانور» یافت: وی بی‌درنگ حروف $\sigma\tau\ \kappa\lambda\alpha\iota\rho\varepsilon$ را به هم افزود و ۶۶۶ را یافت.»

(هـ) جان. ف. بوبالك[2] عبارت زیر را مطابق حروف انگلیسی رمزگشایی کرد:

HOWARD W. EVES, A PROFESSOR OF MATHEMATICS AND DOCTOR OF PHILOSOPHY.

اکتشافات ترس‌آور بوبالك را پیدا کنید.

۱۴۰۸ معادلات درجهٔ سوم

(الف) نشان دهید که تبدیل $x=z-a_1/na_0$ معادلهٔ درجهٔ nام

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=0$$

را به معادله‌ای برحسب z که فاقد جملهٔ درجهٔ $(n-1)$ام است، بدل می‌کند.

(ب) بنابر (الف) تبدیل $x=z-b/3a$ معادلهٔ درجهٔ سوم

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

را به معادلهٔ درجهٔ سومی به‌شکل $z^3+3Hz+G=0$ بدل می‌کند. H و G را برحسب a، b، c و d بیابید.

(ج) فرمول کاردان ـ تارتاگلیا

$$x=\sqrt[3]{(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}}-\sqrt[3]{-(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}}$$

را برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+mx=n$ استخراج کنید (نگاه کنید به بخش ۸ـ۸).

(د) $x^3+63x=316$ را، هم با فرمول کاردان-تارتاگلیا و هم با روش ویت، برای یافتن یك ریشه حل کنید.

(هـ) به‌عنوان مثالی از حالت تحویلناپذیر درمعادلات درجهٔ سوم، $x^3-63x=162$ را با فرمول کاردان ـ تارتاگلیا حل کنید. سپس نشان دهید که $(-3+2\sqrt{-3})^3=81+30\sqrt{-3}$ و $(-3-2\sqrt{-3})^3=81-30\sqrt{-3}$ که بنابرآن ریشه‌ای که با فرمول داده می‌شود -6 است که تغییر ظاهرداده است.

۱۵۰۸ معادلات درجهٔ چهارم

(الف) کاردان معادلهٔ درجهٔ چهارم خاص $13x^2=x^4+2x^3+2x+1$ را با افزودن $3x^2$ به دو طرف حل کرد. این کار را انجام دهید و معادله را برای یافتن هر چهار ریشه حل کنید.

---

1. Davis Thom 2. John F. Bobalek

(ب) داکوی درسال ۱۵۴۰ مسئلهٔ زیر را برای کاردان مطرح کرد:«۱۰ را به سه‌قسمت چنان تقسیم کنید که این قسمتها تناسب مسلسل تشکیل‌دهند وحاصلضرب دوتای اول ۶ باشد». اگر سه قسمت با a، b، c نشان داده شوند، داریم

$$a+b+c=۱۰,\ \ ac=b^{۲},\ \ ab=۶.$$

نشان دهیدکه وقتی a و c حذف شوند معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$b^{۴}+۶b^{۲}+۳۶=۶۰b$$

را به دست می‌آوریم. در تلاش برای حل این مسئله بود که فراری شاگرد کاردان روش کلی خود را پیداکرد.

(ج) هم باروش فراری و هم با روش ویت، معادله‌های درجهٔسوم وابسته به معادلهٔ درجهٔ چهارم (ب) را به‌دست آورید.

۱۶.۸ نمادگذاری قرن شانزدهم

(الف) با نمادگذاری بومبلی، عبارت

$$\sqrt{[\sqrt[۳]{(\sqrt{۶۸}+۲)}-\sqrt[۳]{(\sqrt{۶۸}-۲)}]}$$

را بنویسید.

(ب) با نمادگذاری کنونی، عبارت زیر را که در آثار بومبلی ظاهر می‌شود، بنویسید:

$$Rc\ \lfloor 4\ \ p\ di\ m\ R\ \ q\ \ \underline{11}\rfloor \quad p\ R\ c\ \ \lfloor \underline{4}\ \ m\ di\ \ m\ \ R\ \ q\ \ \underline{11}\rfloor$$

(ج) با نمادگذاری ویت

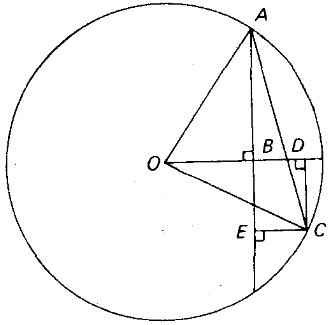
$$A^{۳}-۳BA^{۲}+۴CA-۲D.$$

را بنویسید.

۱۷.۸ مسائلی از ویت

(الف) اتحادهای زیر را که توسط ویت در کاربرد قوانین ریاضی در مثلثها (۱۵۷۹) داده شده، ثابت کنید:

$$\sin\alpha=\sin(۶۰^{\circ}+\alpha)-\sin(۶۰^{\circ}-\alpha)،$$



شکل ۷۲

$$\csc\alpha+\cot\alpha=\cot\frac{\alpha}{۲},$$

$$\csc\alpha-\cot\alpha=\tan\frac{\alpha}{۲}.$$

(ب) $\cos ۵\theta$ را به‌صورت تابعی از $\cos\theta$ بیان کنید.

(ج) با شروع از $x_۱=۲۰۰$، با روش ویت، یک ریشهٔ $x^۲+۷x=۶۰۷۵۰$ را تقریب کنید.

(د) $x_۲$ را، در روش ویت در تقریبات متوالی، برای معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳+px^۲+qx=r$ (نگاه کنید به بخش ۸-۹) پیدا کنید.

(ه) ویت فرمول

$$\sin x+\sin y=۲\sin\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}$$

را از نمودار شکل ۷۲ پیدا کرد، که در آن زوایای $x=DOA$ و $y=COD$ به عنوان زوایای مرکزی یک دایرهٔ واحد ظاهر می‌شوند. جزئیات طرح زیر از اثبات ویت را کامل کنید:

$$\sin x+\sin y=AB+CD=AE=AC\cos\frac{x-y}{۲}$$

$$=۲\sin\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}.$$

۱۸.۸ مسائلی از کلاویوس

مسائل تفریحی زیر از کتاب جبر کلاویوس مربوط به سال ۱۶۰۸ را حل کنید.

(الف) برای تشویق پسرش به مطالعهٔ حساب، پدری موافقت می‌کند تا برای هرمسئله که به طور صحیح حل شود ۸ سنت بپردازد و وی را به ازای هرجواب نادرست ۵سنت جریمه نماید. درپایان ۲۶ مسئله کسی به دیگری بدهکار نیست. پسر چند مسئله را درست حل کرده بود؟

(ب) اگر می‌خواستم به‌هرگدایی که جلو در خانهٔ من ایستاده‌است ۷ سنت بپردازم، ازپولم ۲۴ سنت باقی می‌ماند. من‌برای دادن ۹سنت به‌هر کدام ۳۲ سنت کم دارم. چندگدا جلو در خانه هستند، و من چقدر پول دارم؟

(ج) به خدمتکاری قول پرداخت ۱۰۰ دلار و یك ردا به عنوان مزد سالانهٔ او داده می‌شود. بعد از ۷ ماه وی از خدمت کناره می‌گیرد و ردا و ۲۰ دلار به عنوان حق خود می‌گیرد. ارزش ردا چقدر است؟

۱۹.۸ کمی هندسه

(الف) مقاله‌های IV و VI جبر بومبلی شامل تعدادی مسائل هندسه است که به‌طریقهٔجبری حل شده‌اند. دریکی از مسائل، بومبلی ضلع مربعی محاط درمثلث ABC را می‌خواهد که درآن $AB = ۱۳$، $BC = ۱۴$، $CA = ۱۵$، به‌طوری که یك ضلع مربع برامتداد BC قرار دارد. این مسئله را حل کنید.

(ب) یوهانس ورنر[1] (۱۴۶۸–۱۵۲۸) اثری به زبان لاتین در ۲۲ مقاله دربارهٔ اصول مقاطع مخروطی[2] نوشت که درسال ۱۵۲۲ در نورنبرگ به چاپ رسید. ورنر در این اثر روش زیر را برای پیداکردن نقاط یك سهمی، به‌کمك ستاره و پرگار، با رأس معلوم V، محور VW، و ضلع قائم p ارائه می‌دهد. $VA = p$ را برامتداد WV جدا کنید. دایرهٔ دلخواهی باشعاعی بزرگتر از $p/۲$ رسم کنید که مرکز آن بر AW واقع باشد و از A بگذرد. فرض کنید که این دایره، AW را در B و عمود بر AW در V را در C و C' قطع کند. بر روی عمود وارد بر AW در B، طولهای $BP = BP' = VC$ را جدا کنید. در این صورت P وP' نقاطی از سهمی هستند. با رسم تعدادی کافی از دایره‌ها، می‌توان هرتعداد از نقاط سهمی را که موردنظر باشد، به دست‌آورد. ترسیم ورنر را ثابت کنید.

(ج) آلبرشت دورر ترسیم تقریبی زیر را برای یك نه‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مفروضی به مرکز O ارائه داد. دایره‌ای هم‌مرکز با دایرهٔ مفروض و به شعاعی سه‌برابر شعاع آن رسم و فرض کنید که $AC'BA'CB'$ شش ضلعی منتظمی محاط در دایرهٔ اخیر باشد. قوسهایی به‌مرکز B'وC' و به‌شعاعهای برابر OA که O و A را به هم وصل و دایرهٔ اصلی را درFوG قطع می‌کنند، رسم کنید. در این صورت FG تقریب بسیار خوبی‌برای

1. Johannes Werner 2. *Elements of Conics*

ضلع نه ضلعی منتظم‌مطلوب است. می‌توان نشان داد که اختلاف زاویهٔ FOG با 40° کمتر از 1° است. یك نه‌ضلعی منتظم را به روش تقریبی دورر در دایرهٔ مفروضی محاط کنید.

عنوان مقاله

۱/۸ موجبات پایین بودن سطح ریاضیات در اروپا در بخش اعظم قرون وسطی.
۲/۸ تفریحات ریاضی در قرون وسطی.
۳/۸ بازی عددی ریتموماچیا[1].
۴/۸ تأثیر خارج‌شدن تولیدو از دست مسلمانان در سال ۱۰۸۵ برریاضیات اروپایی.
۵/۸ دنبالهٔ همه‌جا حاضر فیبوناتچی.
۶/۸ عوامل مهم در گسترش ریاضیات دورهٔ رنسانس.
۷/۸ اهمیت حل معادلات درجهٔ سوم در گسترش اعداد موهومی.
۸/۸ ویت، واقعاً نخستین دانشمند در ریاضیات جدید.
۹/۸ تاریخچهٔ کسرهای اعشاری.
۱۰/۸ آثار ریاضی برجستهٔ چاپ‌شده در قرن پانزدهم.
۱۱/۸ دلایل اهمیت حسابهای بازرگانی در نیمهٔ دوم قرن پانزدهم.
۱۲/۸ رشنمایسترها.
۱۳/۸ لئوناردو داوینچی و ریاضیات.
۱۴/۸ سرگذشت و آثار رابرت رکورد.
۱۵/۸ ماتئوریچی[2] (۱۵۵۲–۱۶۱۰)
۱۶/۸ جمتریا.
۱۷/۸ الگوریتمهایی برای ضربهای طولانی.
۱۸/۸ الگوریتمهایی برای تقسیمهای طولانی.

کتابنامه

ARMITAGE, ANGUS, *The World of Copernicus*. New York: The New Library (a Mentor Book), 1947.

CAJORI, FLORIAN, *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. Chicago: Open Court, 1928–29.

CARDAN, JEROME, *The Book of My Life*. Translated from the Latin by Jean Stoner. New York: Dover, 1963.

CLAGETT, MARSHALL, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1959.

---

1. Rithmomachia
2. Matteo Ricci

———, *Archimedes in the Middle Ages.* The Arabo-Latin Tradition, vol. 1. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1964.

COOLIDGE, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs.* New York: Oxford University Press, 1949.

CROSBY, H. L., JR., *Thomas of Bradwardine His Tractatus de Proportionibus: Its Significance for the Development of Mathematical Physics.* Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1955.

CUNNINGTON, SUSAN, *The Story of Arithmetic, A Short History of Its Origin and Development.* London: Swan Sonnenschein, 1904.

DAVID, F. N., *Games, Gods and Gambling.* New York: Hafner, 1962.

DAY, M. S., *Scheubel as an Algebraist, Being a Study of Algebra in the Middle of the Sixteenth Century, Together with a Translation of and a Commentary upon an Unpublished Manuscript of Scheubel's Now in the Library of Columbia University.* New York: Teachers College, Columbia University, 1926.

DE MORGAN, AUGUSTUS, *A Budget of Paradoxes.* 2 vols. New York: Dover, 1954.

GRANT, EDWARD, ed., *Nicole Oresme: De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes.* Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1966.

HAMBRIDGE, JAY, *Dynamic Symmetry in Composition.* New Haven: Yale University Press, 1923.

———, *Practical Applications of Dynamic Symmetry.* Ed. Mary C. Hambridge. New Haven: Yale University Press, 1932.

HILL, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe.* New York: Oxford University Press, 1915.

HOGGATT, V. E., JR., *Fibonacci and Lucas Numbers.* Boston: Houghton Mifflin, 1969.

HUGHES, BARNABAS, *Regiomontanus on Triangles.* Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1964.

INFELD, LEOPOLD, *Whom the Gods Love, The Story of Evariste Galois.* New York: McGraw-Hill, 1948.

JOHNSON, R. A., *Modern Geometry.* Boston: Houghton Mifflin Company, 1929.

KARPINSKI, L. C., *The History of Arithmetic.* New York: Russell & Russell, 1965.

KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations.* New York: W. W. Norton, 1942.

MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians.* San Francisco: Holden-Day, 1964.

MOODY, E. A., and MARSHALL CLAGETT, *The Medieval Science of Weights.* Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1952.

MORLEY, HENRY, *Jerome Cardan, The Life of Girolamo Cardano of Milan, Physician.* 2 vols. London: Chapman & Hall, 1854.

NICOMACHUS OF GERASA, *Introduction to Arithmetic.* Translated by M. L. D'Ooge, with Studies in Greek Arithmetic, by F. E. Robbins and L. C. Karpinski. Ann Arbor, Mich.: University of Michigan Press, 1938.

NORTHROP, E. P., *Riddles in Mathematics.* Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1944.

ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History.* New York: McGraw-Hill, 1948.

———, *Cardano, The Gambling Scholar.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1953.

———, *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary.* Minneapolis: University of Minnesota Press, 1957.

ORESME, NICOLE, *An Abstract of Nicholas Orême's Treatise on the Breadths of Forms.* Translated by C. G. Wallis. Annapolis, Md.: St. John's Book Store, 1941.

SMITH, D. E., *Rara Arithmetica.* Boston: Ginn, 1908.

———, *A Source Book in Mathematics.* New York: McGraw-Hill, 1929.

———, and L. C. KARPINSKI, *The Hindu-Arabic Numerals.* Boston: Ginn, 1911.

SULLIVAN, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe, from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour.* New York: Oxford University Press, 1925.

TAYLOR, R. EMMETT, *No Royal Road. Luca Pacioli and His Time.* Chapel Hill, N.C.: University of North Carolina Press, 1942.

WATERS, W. G., *Jerome Cardan, a Biographical Study.* London: Lawrence & Bullen, 1898.

WHITE, W. F., *A Scrap-Book of Elementary Mathematics.* Chicago: Open Court, 1927.

WILSON, CURTIS, *William Heytesbury, Medieval Logic and the Rise of Mathematical Physics* Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1956.
YATES, R. C., *The Trisection Problem*. Ann Arbor, Mich.: Edwards Bros., 1947.
ZELLER, SISTER MARY CLAUDIA, *The Development of Trigonometry from Regiomontanu to Pitiscus*. Ann Arbor, Mich.: University of Michigan, Ph.D. thesis, 1944.

جوابها و راهنماییهایی برای حل مطالعه‌های مسئله‌ای

۱.۱ (الف) «یك مـرد» = ۲۰ (۱۰ انگشت دست به عـلاوهٔ ۱۰ انگشت پـا)، و قس‌علی‌هذا.

(ب) اگر شخص به کمك انگشتان دست درحالی‌که دستش «باز» است به شمارش بپردازد و بعد از هرشمارش انگشتش را تا کند، وقتی به ۵ می‌رسد همهٔ انگشتها تا شده‌اند و دست «به‌پایان رسیده» یا به‌اصطلاح «درگذشته است».

(ج) «انگشت قلـه» انگشت وسط است، که در موقع شمارش باانگشتان، وقتی از انگشت‌کوچك شروع کنیم، به نشانهٔ ۳ خواهد بود.

(د) دراینجا نامهای عددی از وضعیتهای بدن‌که برای نمایش اعداد به‌کار می‌رفت، نشأت گرفته‌اند.

(ه) زن و شوهر از یك تشك استفاده می‌کنند.

(و) این یکی اشاره به ۹ ماه حاملگی دارد.

۳.۱ (الف) ۲۷، ۳، ۲.

(ب) $\varepsilon'\psi\pi = ۵۷۸۰$ ، $\zeta M\beta'\omega\gamma = ۷۲۸۰۳$ ، $\mu M\varepsilon M\pi\beta = ۴۵۰۰۸۲$، $\tau M\kappa M\varepsilon M\zeta'\omega\pi\eta = ۳۲۵۷۸۸۸$.

۴.۱ (د) $((\,))))^{**} = ۲(۵)^۳+۴(۵)^۲+۲(۵) = ۳۶۰$،

$((// = ۲(۵)^۳)+۲(۱) = ۲۵۲$

$)))/// = ۳(۵)^۲+۳(۱) = ۷۸$

$)^{*}/// = ۱(۵)^۲+۱(۵)+۳(۱) = ۳۳$

(ه) $\#(^{*}\,^{*} = ۳۶۰$، $^{*}\#^{*} = ۲۵۲$، $(\#) = ۷۸$، $(// = ۳۳$.

۵.۱ (الف) توجه‌کنید که $(۱۰-b)(۱۰-a)+۱۰\,[(b-۵)+(a-۵)] = ab$.

۶.۱ (ب) کسر اعشاری را در b ضرب کنید، سپس جزء اعشاری این حاصلضرب را در b ضرب کنید و همین‌طور الی آخر ادامه دهید.

(ج) $0.7734375=99/128=(0.3012)_4$.

۸۰۱ (الف) اول در مبنای ۱۰، و سپس در مبنای ۸ بیان کنید.
(ب) ۹، ۸، ۷.
(ج) نه، بلی، بلی، نه.
(د) درحالت اول داریم $79=b^2+4b+2$.
(ه) بانشان دادن ارقام با a، b، c داریم $49a+7b+c=81c+9b+a$، که در آن a، b، c کوچکتر از ۷ هستند.
(و) باید داشته باشیم $3b^2+1=t^2$، t و b اعداد صحیح مثبت، و $b>3$.

۹۰۱ (الف) w را درپایهٔ ثنایی بیان کنید.

۱۰۰۱ (الف) فرض کنید t رقم دهگان و u رقم یکان باشد. به پیروی از دستورالعملها، تساوی

$$2(5t+7)+u=(10t+u)+14$$

را بــه عنوان نتیجهٔ اعلام شدهٔ نهایــی به دست می‌آوریم. اکنون ماهیت حیله روشن می‌شود.

۱۰۲ (الف) فرض کنید n منظم باشد. آنگاه، مثلاً

$$\frac{1}{n}=a_0+\frac{a_1}{60}+\dots+\frac{a_r}{60^r}$$

$$=\frac{a_0 60^r+a_1 60^{r-1}+\dots+a_r}{60^r}$$

$$=\frac{m}{60^r}\,.$$

ازاینجا نتیجه می‌شود $mn=60^r$ و n نمی‌تواند هیچ عامل اولی جــز عوامل اول ۶۰ داشته باشد.
(ه) سه.

۲۰۲ (الف) داریم $2=(1.2)^x$، وبنابراین $x=(\log 2)/(\log 1.2)$.

۴۰۲ (الف) داریم $x^2+y^2=1000$، $y=2x/3-10$.
(د) ۲۰، ۱۲.
(ه) ارتفاع ذوزنقه = ۲۴.
(و) ۱۸؛ ۰.
(ز) بلی.

۵.۲ (ج) ۱۵؛ ۳۱.
(د) اگر عضوهای طرف راست معادلات مفروض را به‌ترتیب با a و b نشان دهیم، چنین به‌دست می‌آوریم $x^8+a^2x^4=b^2$.

۶.۲ (ب) قرار دهید $x=2y$.
(ج) باحذف x و y معادله‌ای درجهٔ سوم برحسب z به دست می‌آید.
(د) معادلهٔ درجهٔ سومی برحسب x راکه ضریب جملهٔ پیشروآن یك باشد، اختیار کنید و تبدیل خطی $x=y+m$ را در آن به عمل آورید. m را طوری تعیین کنیدکه معادلهٔ درجهٔ سوم حاصل برحسب y، فاقد جملهٔ خطی باشد.

۸.۲ (ب) عاملی راکه مرتباً نصف می‌شود، درپایهٔ ثنایی بیان کنید.

۹.۲ (ج) p را به نوبت ۱، ۳، ۹ اختیار کنید.
(ه) اگر $n=3a$، کسر واحد دیگر $1/2a$ است.
(و) اگر $n=5a$، کسرواحد دیگر $1/3a$ است.
ح) رابطه‌ای راکه در (د) داده شده به‌کار برید.

۱۰.۲ (الف) $2/7=1/4+1/28$.
(ب) $2/97=1/49+1/4753$.
(ج) کسر مفروض را با a/b نشان دهید که $a<b$، و فرض کنید $b/a=x+r/a$، $r<a$. پس $0<r/a<1$، $a/b=1/(x+r/a)$.
اما $1/x>1/(x+r/a)>1/(x+1)$.

۱۱.۲ (ب) بلی.
(ج) $5\frac{1}{2}$
(د) $(35)^2/13$ ذراع.

۱۲.۲ (الف) منظور احمس از کسر، کسر واحد است. تنها مخرجهای کسر واحد نوشته شده‌اند.
(ج) فرض کنیدکه x بزرگترین سهم و d تفاضل مشترك در تصاعد حسابی باشد. در این صورت $5x-10d=100$ و $11x-46d=0$ را به دست می‌آوریم.

۱۳.۲ (الف) $256/81$، یا تقریباً ۳٫۱۶.
(ج) مثلث قائم‌الزاویهٔ T_1 را باساقهای a و b و یك مثلث دلخواه دیگر T_2 را با اضلاع a و b درنظر گیرید. T_2 را چنان برروی T_1 قرار دهیدکه یك‌جفت از اضلاع برابر برهم منطبق شوند. یاازفرمول $K=(1/2)ab\sin C$ استفاده کنید.
(د) قطر DB را رسم و از قسمت (ج) استفاده کنید.
(ه) $(a+c)(b+d)/4=[(ad+bc)/2+(ab+cd)/2]/2$. حال از

قسمت (د) استفاده کنید.

(ز) این نتیجه درست نیست.

۱۴.۲ (ب) با $\sqrt{m}-\sqrt{n}\geqslant ۰$ شروع کنید.

(ج) هرمی را که هرم ناقص بخشی از آن است کامل کنید و حجم هرم ناقص را به صورت تفاضل بین حجمهای هرم کامل‌شده و هرم اضافه‌شده بیان کنید.

۱۵.۲ (الف) ۳، ۴.

(ب) ۴، ۱۰.

۱۶.۲ چهار مثلث قائم‌الزاویه با ساقهایی به طول ۳و۴، همراه با مربع واحد کوچك، مربعی تشکیل می‌دهند که مساحت آن ۲۵ است. نتیجه می‌شود که وتر یك مثلث قائم‌الزاویه با ساقهای ۳ و ۴، برابر ۵ است. چون یك مثلث با سه ضلعش معین می‌شود، نتیجه می‌شود که یك مثلث به اضلاع ۳،۴،۵ مثلث قائم‌الزاویه است.

۲.۳ (الف) نشان دهید که $۲^{mn}-۱$ بر $۲^{m}-۱$ قابل قسمت است.

(ب) ۸۱۲۸.

(ج) اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n نمایش کلیهٔ مقسوم‌علیه‌های N باشد، آنگاه $N/a_۱$، $N/a_۲$،...،N/a_n نیز نمایش کلیهٔ مقسوم‌علیه‌های N است.

(د) مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی p^n عبارت است از $(p^n-۱)/(p-۱)$.

(ح) (۱) به ازای $n=۷$ داریم

$$۲^۶(۲^۷-۱)=۲^{۱۳}-۲^۶\approx ۲^{۱۳}\cdot \log ۲^{۱۳}=۱۳\log ۲=۴^+.$$

بنابراین، جواب ۴ است.

(ط) زنجیر اجتماعی پنج حلقه‌ای عبارت است از ۱۲۴۹۶، ۱۴۲۸۸، ۱۵۴۷۲، ۱۴۵۳۶، ۱۴۲۶۴.

۳.۳ (الف) ۱، ۶، ۱۵، ۲۸.

(ب) یك عدد مستطیلی به شکل $a(a+۱)$ است.

(د) به‌شکل ۷۳ نگاه کنید.

(ه) $۲^n(۲^n-۱)/۲=۲^{n-۱}(۲^n-۱)$.

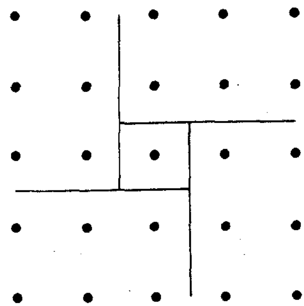
(و) $a=(m-۲)/۲$، $b=(۴-m)/۲$.

(ز) $a=۵/۲$،$b=-۳/۲$.

۴.۳ (الف) از این حقیقت که $(a-b)^۲\geqslant ۰$، استفاده کنید.

(ج) معادلهٔ اول را در b و دومی را در a ضرب و سپس ab/n را حذف کنید.

(ه) یك مکعب ۸ رأس، ۱۲ یال، و ۶ وجه دارد.



شکل ۷۳

(و) قرار دهید $m=a/(b+c)$ و $n=c/(a+b)$. با استفاده ازاین حقیقت که $b=۲ca/(c+a)$، نشان‌دهید که $۲mn/(m+n)=b/(c+a)$.

۶۰۳ (ج) اگر مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع صحیح وجود می‌داشت، دراین‌صورت $\sqrt{۲}$ گویا می‌شد.

(د) اگر اعداد صحیح مثبتی مانند a، b، c $(a\neq ۱)$ موجود باشند به‌قسمی که $a^۲+b^۲=c^۲$ و $b^۲=ac$، آنگاه a، b، c نمی‌توانند نسبت به‌هم اول باشند، اما اگر یك سه‌تایی فیثاغورسی موجود باشد که در آن یکی از اعداد صحیح واسطهٔ هندسی بین دوعدد دیگر باشد، باید یك سه تایی فیثاغورسی اولیه از این نوع موجود باشد.

(و) نشان دهید که اگر $a^۲+(a+۱)^۲=c^۲$ آنگاه،

$$(۳a+۲c+۱)^۲+(۳a+۲c+۲)^۲=(۴a+۳c+۲)^۲.$$

(ز) از قسمت (و) استفاده کنید.

(ح) در نمایش پارامتری سه‌تایی فیثاغورسی اولیه، که دربخش ۲ـ۶ داده‌شد، یا u باید زوج باشد یا v، که از آنجا ساق a مضرب ۴ است. اگر u یا v مضربی از ۳ باشد، آنگاه ساق a مضرب ۳ است. اگرنه u و نه v مضربی از ۳ باشند، آنگاه u به شکل $۳m\pm ۱$ و v به شکل $۳n\pm ۱$ است، و نتیجه می‌شود که $u^۲-v^۲$ مضرب ۳ است، و بنابراین‌ساق b مضرب ۳ است. اگر u یا v مضرب ۵ باشد، آنگاه a مضرب ۵ است. اگر نه u ونه v مضرب ۵ باشند، آنگاه u به‌شکل $۵m\pm ۱$ یا $۵m\pm ۲$ و v به‌شکل $۵n\pm ۱$ یا $۵n\pm ۲$ است، اگر $u=۵m\pm ۱$ و $v=۵n\pm ۱$؛ یا اگر $u=۵m\pm ۲$ و $v=۵n\pm ۲$، آنگاه $u^۲-v^۲$ مضرب ۵ است. اگر $u=۵m\pm ۱$ و $v=۵n\pm ۲$، یا اگر $u=۵m\pm ۲$ و $v=۵n\pm ۱$، آنگاه $u^۲+v^۲$ مضرب ۵ است. نتیجه می‌شود که یاساق b مضربی از ۵ است یا وتر c مضربی از ۵ است.

(ط) اگر n فرد و بزرگتر از ۲ باشد، $(n,(n^{۲}-۱)/۲\,,\,(n^{۲}+۱)/۲)$ یك سه‌تایی فیثاغورسی‌است. اگر n زوج و بزرگتر از ۲ باشد، $(n,n^{۲}/۴-۱\,,\,n^{۲}/۴+۱)$ یك‌سه‌تایی فیثاغورسی است.

(ی) چون $a^{۲}=(c-b)(c+b)$، نتیجه می‌شود که $b+c$ یك عامل $a^{۲}$ است. در نتیجه $b<a^{۲}$ و $c<a^{۲}$، و عدهٔ ترکیبهای چنین اعداد طبیعی bو c متناهی‌است.

۷۰۳ (الف) اگر خط از نقطهٔ (aوb) از شبکهٔ مختصات عبور کند، خواهیم‌داشت $\sqrt{۲}=b/a$ که عدد گویا یــی است.

(ج) فرض کنید $\sqrt{p}=a/b$، که در آن a و b متباین هستند.

(د) فرض کنید $\log_{۱۰}۲=a/b$، که در آن aو b اعداد صحیح هستند. دراین‌صورت باید داشته باشیم $۲^{b}=۱۰^{a}$، که غیرممکن است.

(و) فرض کنید (نگاه کنید به‌شکل ۷۴) AC و BC نسبت به AP متوافق باشد. نشان دهید که در ایــن صورت DE و DB نیز نسبت بــه AP متوافق‌اند، همین طور الی آخر.

۹۰۳ (الف) ab چهارمین جزء تناسب برای ۱، a، b است.

(ج) a/b چهارمین جزء تناسب برای b، ۱، a است.

(د) $\sqrt{a}$ واسطهٔ هندسی بین ۱ و a است.

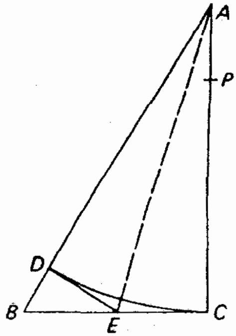
(ز) واسطهٔ هندسی بین a و na را بسازید.

(ح) ازاین‌حقیقت که $a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}+b^{۲}-ab)$، استفاده کنید.

(ط) ازاین حقیقت استفاده کنید که

$$a(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۱/۲}=[a(a+a\sqrt{۲}+a\sqrt{۳})]^{۱/۲}$$

(ی) ازاین حقیقت که $(abcd)^{۱/۴}=[(ab)^{۱/۲}(cd)^{۱/۲}]^{۱/۲}$، استفاده کنید.



شکل ۷۴

(ك) 60°.

۱۰.۳ (الف) $\sqrt{12}$ را مانند ۹.۳(د) به دست آورید.

(ج) اجزاء را با x، $a-x$ نشان دهید، آنگاه $x^2-(a-x)^2=x(a-x)$، یا $x^2+ax-a^2=0$.

(ه) نشان دهید که $OM+ON=g$ و $(OM)(ON)=h$.

(ز) فرض کنید که A نقطه (۰و۲) باشد و RS محورxها را در L و مماس بر دایره در A را در T قطع کند. معادلات زیر را داریم

$$\text{دایره: } x^2+y(y-2)=0$$

$$\text{خط } AR: 2x+r(y-2)=0$$

$$\text{خط } AS: 2x+s(y-2)=0$$

بنابراین از $0=$(دایره)۴ $-$ (خط AC)(خط AR) نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود

$$(y-2)[2x(r+s)+rs(y-2)-4y]=0$$

که یك زوج خط مار بر محلهای تلاقی دایره با خطهای AR و AS مـی‌باشند. نتیجه می‌شود که از صفر قرار دادن عامل دوم خط RS حاصل می‌شود. با قرار دادن $y=0$، داریم $OL=rs/(r+s)=h/g$. با قراردادن $y=2$، داریم $AT=4/(r+s)=4/g$.

۱۱.۳ (ب) ابتدا قطر BD را توسط نقاط E و F به‌سه‌قسمت مساوی تقسیم کنید. دراین صورت خطوط شکسته AEC و AFC، شکل را به‌سه‌جزء معادل تقسیم می کنند. این‌اجزاء را طوری تبدیل کنید که‌شرایط را با رسم خطوطی به‌موازات AC از E و F برآورده کنند.

(د) از B خط BD را به‌موازات MN رسم کنید تا AC را در D قطع کند. آنگاه، اگرمثلث مطلوب $AB'C'$ باشد، AC' واسطهٔ هندسی بین AC و AD است.

(ه) فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد. خط AB' را رسم کنید تا با AC زاویهٔ رأس مفروض را بسازد و خطی به موازات AC و مرسوم از B را در B' قطع کند. اینك از(د) استفاده کنید.

۱۲.۳ (الف) یك کنج محدب باید حداقل‌شامل سه‌وجه باشد، و مجموع زوایای وجوه آن کنج باید کمتراز 360° باشد.

(ب) $V=e^3\sqrt{2}/3$، $A=2e^2\sqrt{3}$.

۱۳.۳ این مطالعهٔ مسئله‌ای، پروژهٔ تحقیقی مقدماتی ولی خوبی برای دانشجویان آماده‌تری است که می‌توانند به‌فرمولهای محاسبهٔ سطح چند وجهیهای منتظم هم‌به‌صورتی که،

مثلا، در جداول ریاضی استاندهٔ CRC [مرکز تحقیق کامپیوتری] داده شده، رجوع کنند.

۱۴۰۳ (الف) قطعهٔ بزرگتر را با y وقطعهٔ کوچکتر را با x نشان دهید. در این صورت $x+y:y=y:x$، یا $x^2+xy-y^2=0$، یا $(x/y)^2+x/y-1=0$، یا $x/y=(\sqrt{5}-1)/2$.

(ب) درشکل ۷۵، مثلثهای متساوی‌الساقین DAC و DGC متشابه‌اند. بنابراین $AD:DG=DC:GC$، که‌از آنجا $DB:DG=DG:GB$.

(ج)

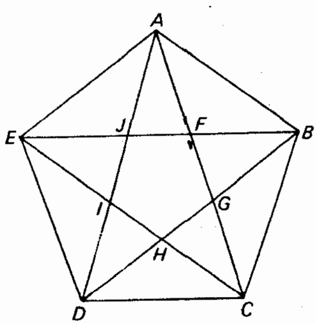
$$AG:AH=AG:GB=AB:AG=AB-AG:AG-AH=GB:HG = AH:HG.$$

(د) فرض کنید HG درشکل ۷۵ ضلع مفروض باشد. مثلث قائم‌الزاویهٔ PQR را با ساقهای PR و QR به‌ترتیب برابر با HG و $HG/2$ رسم کنید. برامتداد PQ، $QT=QR$ را جدا کنید. در این‌صورت $PT=GB=GC=HC$، والخ.

(ه) فرض کنید‌که DB درشکل ۷۵ قطرمفروض باشد. مثلث قائم‌الزاویه‌ای مانند PQR که ساقهای PR و QR آن به‌ترتیب برابر DB و $DB/2$ باشند، رسم کنید. بر PQ طول PT را برابر PR جدا کنید در این صورت $TQ=DG=DC$، و قس‌علی‌هذا.

۱۵۰۳ نگاه کنید به گاردنر ریاضی[1].

۱۰۴ (ب) فرض کنید A نقطهٔ مفروض و BC قطعه‌خط مفروض باشد. بنا بر قضیهٔ ۱، مثلث



شکل ۷۵

1. *The Mathematical Gardner* (Prindle, Weber & Schmidt, 1980), pp. 276, 277.

متساوی‌الاضلاع ABD را بسازید. دایرهٔ $B(C)$ را رسم و فرض کنید امتداد DB این دایره را در G قطع کند. حال دایرهٔ $D(G)$ را رسم کنید تا امتداد DA را در L قطع کند. دراین‌صورت AL قطعه‌خط مطلوب است.
(ج) ازقضیهٔ ۲ مقالهٔ I [اصول اقلیدس] استفاده کنید.

۲۰۴ (الف) نگاه کنید به ت. ل. هیث، کتاب دستی ریاضیات یونانی[1].
(ب) (۱) معادلات سهمیها را می‌توان به صورت $x^2=sy$، $y^2=2sx$ اختیار کرد که درآن s و $2s$ ضلعهای قائم سهمیها هستند. (۲) معادلات سهمی و هذلولی را می‌توان به‌صورت $x^2=sy$ و $xy=2s^2$ اختیار کرد.

۳۰۴ (الف) فرض کنید که M وسط OA و E مرکز مستطیل $OADB$ باشد. در این صورت، بنابرقضیهٔ ۶، مقاله II (نگاه کنید به بخش ۳ــ۶)، $(OA')(AA')+(MA)^2=(MA')^2$. با اضافه کردن $(ME)^2$ به‌طرفین داریم

$$(OA')(AA')+(EA)^2=(EA')^2.$$

به‌همین نحو، $(OB')(BB')+(EB)^2=(EB')^2$. بنابراین

$$(OA')(AA')=(OB')(BB')\ .$$

۴۰۴ (الف) داریم $r=P_1P_2=AP_1\tan\theta=2a\sin\theta\tan\theta$. نتیجه می‌شود که

$$r^2x=2ay^2 \text{ یا } r=2a(y/r)(y/x).$$

(ب) مختصات P را با (x,y) نشان‌دهید. دراین‌صورت

$$(AQ)^3/(OA)^3=y^3/x^3=y/(2a-x)=RP/RA=OD/OA=n$$

که درآن R پای عمود وارد از P بر OA است.
(ج) فرض کنید S پای عمود وارد از R بر MN و T وسط RS باشد. دایرهٔ $S(T)$ را رسم کنید تا TP را در U قطع کند. دراین صورت $SCPU$ یک متوازی‌الاضلاع است. فرض کنید TP خط MN را در V و مماس بر $S(T)$ در نقطهٔ Q را که متقاطر T است در W قطع می‌کند. مثلثهای SUV و APV متساوی‌اند،و $UV=VP$. اکنون به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که $TP=UW$. بنابراین P برسیسوئید $S(T)$ و QW به قطب T قراردارد.

۵۰۴ (الف) معادلهٔ هذلولی، که مجانبهای آن محورهای مختصات باشند، به‌صورت $xy=ab$ است که درآن $(b/2, a/2)$ مرکز مستطیل است. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مستطیل $x^2+y^2-ay-bx=0$ است. محل تلاقی هذلولی و دایره،

---

1. T.L.Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, pp. 155–570.

غیر از نقطهٔ$(b،a)$، نقطهٔ$(\sqrt[3]{a^{2}b}, \sqrt[3]{ab^{2}})$ است. اما $\sqrt[3]{a^{2}b}$ و $\sqrt[3]{ab^{2}}$ واسطه‌های هندسی بین a و b هستند.

۶.۴ (الف) AB را با a،AC را با b،BC را با c و زاویهٔ ADB را باθنشان‌دهید. در این‌صورت، بنابردستور سینوسها، که ابتدا درمورد مثلثBCDوسپس‌مثلثABD به‌کاربرده می‌شود، $\sin ۳۰^\circ/\sin\theta = a/c$ ،$\sin\theta/\sin ۱۲۰^\circ = a/(b+a)$. درنتیجه$\tan ۳۰^\circ = a^{۲}/c(b+a) = ۱/\sqrt{۳}$.ازمجذورکردن‌طرفین‌ویادآوری اینکــه $c^{۲} = b^{۲} - a^{۲}$، داریم $۲a^{۳}(۲a+b) = b^{۳}(۲a+b)$، یا $b^{۳} = ۲a^{۳}$.
(ب) CO را رسم وازاین حقیقت استفاده کنیدکه زاویهٔ خارجی یك مثلث برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است.

۷.۴ (الف) فرض کنید R پای عمود وارد از Q برمحور xها باشدوRQ خط c رادر S قطع کند. دراین‌صورت $OQ/RQ = PQ/SQ$.
(ب) نگاه کنید به۶.۴ (الف).
(ج) نگاه کنیدبه ۶.۴(ب).
(د) نگاه‌کنید به۴.۴.

۸.۴ (الف) فرض کنید QوN پاهای عمودهای وارد از PوM برOA باشند وQP، OM را در S قطع کند. چون PوR برهذلولی قراردارند، داریم

$$(OQ)(QP) = (ON)(NR)$$

یا

$$NR = (OQ)(NM)/ON .$$

بنابراین $SP = RM$. اما ازمثلثهای متشابه OQS و ONM داریم

$$QS = (OQ)(NM)/ON .$$

در نتیجه $SRMP$ مستطیل است. اگر T مرکزاین مستطیل باشد،

$$OP = PT = TM .$$

(ب) شعاع OA رابرابر۱ اختیارکنید و زاویهٔ AOB را با۳θ نشان‌دهید. P را بر کمان ABطوری اختیارکنیدکه (زاویهٔ AOB) $\frac{۱}{۳}$ = (زاویهٔ AOP)، و فــرض کنیدکه Q پای عمود وارد از P برOC باشد. دراین صورت

$$AP = ۲\sin(\theta/۲) = ۲PQ .$$

۹.۴ (الف) از ایــن حقیقت استفــاده‌کنید کــه مــجمــوع تصاعد هــندسی نــامتناهی

$\cdots + ۱/۱۶ - ۱/۸ + ۱/۴ - ۱/۲ - ۱$ برابر ۱/۳ است. برای حل اقلیدسی مجانبی مسئلهٔ تثلیث، نگاه کنید به ماهنامهٔ آمریکایی ریاضی[1]، دسامبر ۱۹۴۵، مسئلهٔ ۴۱۳۴، صفحات ۵۸۷–۵۸۹.

۱۰۰۴ (الف) داریم، (زاویهٔ $AOP) = k\pi/۲$ درصورتی که $OM = k(OA) = k$. بنابراین، اگر مختصات P را با $(x،y)$ نشان دهیم،

$$y = k = x\tan(k\pi/۲) = x\tan(\pi y/۲).$$

(ج) فرض کنید مربع ساز، OA را در Q قطع کند، دراین‌صورت بنابر قاعدهٔ هوپیتال درحسابان،

$$OQ = \lim_{y\longrightarrow ۰} \frac{y}{\tan\frac{\pi y}{۲}} = \frac{۲}{\pi}.$$

اکنون به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که

$$\widehat{AC}:OA = OA:OQ.$$

۱۱۰۴ (الف) ۳٫۱۴۱۴.

(ب) ۳٫۱۴۱۵۳.

(ج) $GB/BA = EF/FA = (DE)^۲/(DA)^۲ = (DE)^۲/[(BA)^۲ + (BC)^۲]$

بنابراین... $GB = ۴^۲/(۷^۲+۸^۲) = ۱۶/۱۱۳ = ۰٫۱۴۱۵۹۲۹$. این، به‌عدد ۳۵۵/۱۱۳ به‌عنوان تقریب π منجر می‌شود.

۱۲۰۴ (الف) فرض کنید $\alpha = \tan^{-۱}(۱/۵)$ و $\beta = \tan^{-۱}(۱/۲۳۹)$. آنگاه با نشان‌دادن اینکه $\tan(۴\alpha - \beta) = ۱$، نشان‌دهید که $۴\alpha - \beta = \pi/۴$.

(ب) دایره‌ای به شعاع واحد درنظر بگیرید. دراین‌صورت ضلع یک مربع محاطی $\sec\theta$ خواهد شد که در آن $\theta = ۴۵°$. مجموع ۲ضلع یک هشت ضلعی منتظم محاطی با $\sec\theta\sec\theta/۲$ داده‌می‌شود؛ مجموع ۴ضلع یک ۱۶ضلعی منتظم محاطی با $\sec\theta\sec\theta/۲\sec\theta/۴$ داده می‌شود والخ. نتیجه می‌شود که

$$\sec\theta\sec\frac{\theta}{۲}\sec\frac{\theta}{۴}\cdots\longrightarrow\frac{\pi}{۲}$$

که طول ربع محیط دایره است. درنتیجه

---

1. *American Mathematical Monthly*

$$\frac{2}{\pi}=\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdots .$$

حال از این حقیقت استفاده کنید که

$$\cos\theta=\sqrt{2}/2 \text{ و } \cos\theta/2=[(1+\cos\theta)/2]^{1/2}،$$
$$\cos\theta/4=[(1+\cos\theta/2)/2]^{1/2}$$

والخ.

(ج) درسری گریگوری قرار دهید $x=\sqrt{1/3}$.

(و) فرض کنید θ معرف $\pi/2n$ باشد. دراین صورت $\sin\theta=s_{2n}/2R$، $\cos\theta=s_n/2s_{2n}$. حال از این حقیقت استفاده کنید که $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

(ز) فرض کنید θ معرف $\pi/2n$ باشد. در این صورت $\tan 2\theta=S_n/2r$، $\tan\theta=S_{2n}/2r$. حال از این حقیقت استفاده کنید که

$$\tan 2\theta=(2\tan\theta)/(1-\tan^2\theta).$$

(ح) ابتدانشان دهید که $p_n=2nR\sin(\pi/n)$، $P_n=2nR\tan(\pi/n)$.

(ی) ابتدانشان‌دهید که $a_n=nR^2\sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$، $A_n=nR^2\tan(\pi/n)$.

۱۴۰۴ (الف) $\text{arc } AR=\pi/2$، $AT=3/2$.

(ب) فرض کنید M پای عمود وارد از P بر OA باشد. در این صورت $PM=\sin\theta$، $OM=\cos\theta$، و از آنجا $\tan\phi=\sin\theta/(2+\cos\theta)$.

(ج) فرض کنید PS دایره را یك‌باردیگر در N قطع کند. دراین صورت، چون $ON<SN$، زاویهٔ $SON=\phi+\varepsilon$ که در آن $0<\varepsilon$. بنابراین زاویهٔ $ONP=2\phi+\varepsilon$، و $\theta=3\phi+\varepsilon$.

۱۵۰۴ (الف) سی‌ودومین رقم اعشاری در بسط π، صفر است.

۱۰۵ (ج) فرض کنید $a>b$. دراین‌صورت الگوریتم را می‌توان چنین خلاصه کرد:

$$\begin{array}{ll}
a=q_1b+r_1 & 0<r_1<b\\
b=q_2r_1+r_2 & 0<r_2<r_1\\
r_1=q_3r_2+r_3 & 0<r_3<r_2\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
r_{n-2}=q_nr_{n-1}+r_n & 0<r_n<r_{n-1}\\
r_{n-1}=q_{n+1}r_n &
\end{array}$$

حال، از آخرین مرحله دیده می‌شود که r_n، r_{n-1} را عاد می‌کند. از مرحلهٔ ماقبل آخر دیده می‌شود r_n، r_{n-2} را عاد می‌کند، چون r_n هر دو جملهٔ طرف راست را عاد می‌کند. به‌همین‌نحو r_n، r_{n-3} را عاد می‌کند، r_n متوالیاً هر r_i، وسرانجام a و b را عاد می‌کند.

ازطرف دیگر، ازاولین مرحله دیده می‌شود که‌هرمقسوم علیه مشترك a و b مانند c، r_1 را عاد می‌کند. ازمرحلهٔ دوم دیده می‌شود که دراین صورت c، r_2 را عاد می‌کند. c متوالیاً هر r_i را عاد می‌کند. بنابراین c، r_n را عاد می‌کند.

(د) باتوجه به‌مرحلهٔ ماقبل آخر در الگوریتم، می‌توانیم r_n را برحسب r_{n-1} و r_{n-2} بیان کنیم. دراین‌صورت باتوجه به‌مرحلهٔ قبلی‌می‌توانیم r_n را برحسب r_{n-2} و r_{n-3} بیان کنیم. با ادامهٔ کاربدین طریق سرانجام r_n را برحسب a و b به‌دست می‌آوریم.

۴.۵ (الف) اگر p، u را عاد نکند، دراین صورت اعداد صحیحی مانند P و Q وجود دارند به‌طوری که $Pp+Qu=1$، یا $Ppv+Quv=v$.

(ب) فرض کنید دوطریق تجزیه به‌عوامل اول برای عدد صحیح n موجود باشد. اگر p یکی از عوامل اول در اولین تجزیه باشد، باید، بنابرقسمت (الف)، یکی از عوامل تجزیهٔ دوم راعاد کند، یعنی بریکی ازعوامل منطبق باشد.

(ج) توجه می‌کنیم که $(21)(13)=273$. اعداد صحیح p و q را پیدا کنید (نگاه کنید به ۱.۵ (ه)) به‌قسمی که $13p+21q=1$. دراین‌صورت با تقسیم طرفین بر ۲۷۳ داریم $p/21+q/13=1/273$. به‌طور مشابه اعداد صحیحی مانند r و s پیدا می‌کنیم به‌قسمی که $1/21=r/3+s/7$.

۵.۵ (ج) زیرا هر b_i درقسمت (ب) می‌تواند a_i+1 مقدارداشته باشد.

(و) چون b، ac را عاد می‌کند، داریم $b_i\leqslant a_i+c_i$. همچنین چون a و b متباین هستند، داریم $a_i=0$ یا $b_i=0$. درهرحالت $b_i\leqslant c_i$.

(ح) فرض کنید $a/b=\sqrt{2}$، که‌در آن a و b اعدادصحیح‌مثبتی‌هستند. دراین‌صورت، چون $a^2=2b^2$، داریم $(1+2b_1,2b_2,\ldots)=(2a_1,2a_2,\ldots)$، که از آن نتیجه‌می‌شود $2a_1=1+2b_1$، که‌غیرممکن است.

۶.۵ (ج) فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد، و XY، که به‌موازات BC رسم‌شده، AB را در X و AC را در Y قطع کند. BY و CX را رسم کنید. نشان‌دهید که

$$\Delta BXY:\Delta AXY=\Delta CXY:\Delta AXY.$$

اما، بنابر ۱ VI،

$$\Delta BXY:\Delta AXY=BX:XA \text{ و } \Delta CXY:\Delta AXY=CY:YA$$

۷.۵ (ج) زیرا (نگاه کنید به ۱.۵(و)) اعداد صحیح مثبتی مانند p و q موجودند به‌طوری

که $pr-qs=\pm 1$.

دراین‌صورت تفاضل زاویهٔ مرکزی مقابل به p ضلع s ضلعی و زاویهٔ مرکزی به q ضلع r ضلعی برابر است با

$$p\left(\frac{360^\circ}{s}\right)-q\left(\frac{360^\circ}{r}\right)=(pr-qs)\frac{360^\circ}{rs}=\frac{\pm 360^\circ}{rs}.$$

(و) برای اینکه ببینید اقلیدس چگونه این قضیه را ثابت‌کرده است، رجوع کنید به هیث، سیزده مقالهٔ اصول اقلیدس[1]. برهان مثلثاتی زیبایی را می‌توان در قالب زیر فرمولبندی کرد. فرض کنید $u=18^\circ$. در این‌صورت $\sin 4u=\cos u$، $\cos 4u=\sin u$. نشان‌دهید که این روابط به‌ترتیب، رابطه‌های

$$-8\sin^4 u+4\sin^2 u=\sin u$$

و

$$8\sin^4 u-8\sin^2 u+1=\sin u$$

را ایجاب می‌کنند، که از آن رابطهٔ

$$-16\sin^4 u+12\sin^2 u=1$$

را به‌دست می‌آوریم. حال اگر p و d معرف اضلاع یک پنج ضلعی منتظم و یک ده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد باشند، نشان‌دهید که $p=2\sin 2u$ و $d=2\sin u$، که از آنجا

$$p^2-d^2=-16\sin^4 u+12\sin^2 u=1$$

که قضیه از آن ثابت می‌شود.

(ز) نشان دهید که $\tan(180^\circ/17)$ تقریباً برابر است با $3/16$.

۱۲۰۵ (ج) $h_c=b\sin A$.

(و) $h_a=t_a\cos[(B-C)/2]$.

(ز) $4h_a^2+(b_a-c_a)^2=4m_a^2$.

(ح) $b_a-c_a=2R\sin(B-C)$.

(ط) $4R(r_a-r)=(r_a-r)^2+a^2$. اگر M و N اوساط ضلع BC وقوس BC باشند، آنگاه $MN=(r_a-r)/2$؛ آشکار است که هردو کمیت ازسه کمیت R، a، MN، سومی را معین می‌کند.

(ی) $h_a=2rr_a/(r_a-r)$.

---

1. T.L. Heath *The Thirteen Books of Euclid's Elements.*

۱۳.۵ (ب) به‌مسئلهٔ ۳۳۳۶، ماهنامهٔ آمریکایی ریاضی، اوت ۱۹۲۹ نگاه کنید.
(ج) نگاه کنید به مسئلهٔ E۱۴۴۷، ماهنامهٔ آمریکایی ریاضی، سپتامبر ۱۹۶۱. جوابی که دراین مأخذ داده شده‌کاربرد به‌غایت زیبایی ازروش داده‌هاست.

۱۴.۵ (ب) فرض کنید M وسط BC باشد. خط شکستهٔ EMA مساحت را به دونیم می‌کند. از M، MN را به‌موازات AE رسم کنید تا ضلعی ازمثلث ABC را در N قطع کند. دراین‌صورت EN خط مطلوب است.
(ج) فرض کنید a،b،h معرف قاعده‌هـا و ارتفاع ذوزنقهٔ مفروض باشند. فرض کنید c خط موازی مطلوب باشد، فرض کنید p ارتفاع ذوزنقه باقاعده‌های c و a و q ارتفاع ذوزنقه باقاعده‌های c و b باشد دراین‌صورت داریم

$$(a+c)۲p=(a+b)h،p+q=h،(a+c)p=(c+b)q$$

با حذف p، q و حل برحسب c داریم $c=[(a^۲+b^۲)/۲]^{۱/۲}$، که جذر میانگین مربعات a و b است.

۱.۶ (الف) ۱۹٫۱۱ $=\sec ۸۷^\circ=\sec[(۲۹/۳۰)۹۰^\circ]$.

۲.۶ (د-۱) حجم قطعهٔ با یك‌قاعده، برابر با حجم قطاع کروی منهای حجم مخروط است. همچنین $a^۲=h(۲R-h)$.
(د-۲) این قطعه برابر با تفاضل دو قطعهٔ یك قاعده‌ای است، کـه قاعده‌های آنها، قاعده‌های این قطعه و ارتفاعهای آنها، مثلا u و v هستند. دراین صورت

$$V=\pi R(u^۲-v^۲)-\frac{\pi(u^۳-v^۳)}{۳}$$

$$=\pi h\left[(Ru+Rv)-\frac{u^۲+uv+v^۲}{۳}\right].$$

اما $u^۲+uv+v^۲=h^۲+۳uv$ و نیز $(۲R-u)u=a^۲$ و $(۲R-v)v=b^۲$. بنابراین

$$V=\pi h\left(\frac{a^۲+b^۲}{۲}+\frac{u^۲+v^۲}{۲}-\frac{h^۲}{۳}-uv\right)$$

$$=\pi h\left(\frac{a^۲+b^۲}{۲}+\frac{h^۲}{۲}+uv-\frac{h^۲}{۳}-uv\right)$$

والخ.
(و) از نقاطی که قطر کره را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند صفحاتی برآن عمود کنید.

۴.۶ (الف) $(GC)^2=(TW)^2=4r_1r_2$.

۵.۶ (الف) CB را تا E امتداد دهید به قسمی که $BE=BA$. ثابت کنید که مثلثهای MBA و MBE همنهشت‌اند. برای یك برهان مخصوصاً ظریف دیگر، راه‌حل اول مسئلهٔ ۴۶۶ را در کروکس ماتماتیکوروم[1] ببینید.

۷.۶ (ب) فرض کنید A و B دو نقطه و c یك خط مستقیم باشد. AB را امتداد دهید تا خط c را در S قطع کند. حال T را بر خط c چنان پیدا کنید که $(ST)^2=(SA)(SB)$. در حالت کلی دو جواب وجود دارد.

(ج) قرینهٔ نقطهٔ مفروض را نسبت به نیمساز زاویهٔ تشکیل شده از دوخط مفروض پیدا کنید.

(د) قرینهٔ کانون F را نسبت به خط m پیدا کنید تا نقطهٔ F' به‌دست آید. حال، بنا بر قسمت (ب)، مراکز دایره‌های مار بر F و F' و مماس برهادی مفروض را پیدا کنید.

۸.۶ (ب) برای مسئلهٔ (۱)، A و B را برمحور xها و قرینهٔ هریك را نسبت به مبدأ اختیار کنید.

(ج) ۱. فرض کنید نیمسازهای داخلی و خارجی APB، AB را در M و N قطع کنند. در این‌صورت M و N برمکان هندسی مطلوب قرار دارند و MPN یك زاویهٔ قائمه است.

۲. فرض کنید A و B نقاط ثابت، P نقطهٔ متحرك، و O وسط AB باشد. عبارتهایی که برای $(PA)^2$ و $(PB)^2$ از کاربرد قاعدهٔ کسینوسها درمثلثهای PAO و PBO حاصل می‌شود، به‌هم اضافه کنید.

۹.۶ (الف) فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی محاطی باشد. E را برقطر AC به‌قسمی پیدا کنید که $\angle ABE=\angle DBC$. از مثلثهای متشابه ABE و DBC به‌دست می‌آوریم $(AB)(DC)=(AE)(BD)$. از مثلثهای متشابه ABD و EBC به‌دست می‌آوریم $(AD)(BC)=(EC)(BD)$.

(ب-۱) در قسمت (الف) AC را به عنوان قطر، $BC=a$، و $CD=b$ اختیار کنید.

(ب-۲) در قسمت (الف) AB را به عنوان قطر، $BD=a$، و $BC=b$ اختیار کنید.

(ب-۳) در قسمت (الف) AC را به‌عنوان قطر، $BD=t$ را عمود بر AC اختیار کنید.

(د-۱) با انتخاب ضلع مثلث برابر بایك واحد، قضیهٔ بطلمیوس را در مورد چهار

---

1. *Crux Mathematicorum*, June–July, 1980, p. 189.

ضلعی $PACB$ به‌کار برید.

(د-۲) باانتخاب ضلع مربع برابر با یك واحد، قضیهٔ بطلمیوس را در مورد چهارضلعیهای $PBCD$ و $PCDA$ به‌کار برید.

(د-۳) باانتخاب ضلع پنج ضلعی برابر با یك واحد، قضیهٔ بطلمیوس را در مورد چهارضلعیهای $PCDE$، $PCDA$، $PBCD$ به‌کار برید.

(د-۴) باانتخاب ضلع شش ضلعی برابر بایك واحد، قضیهٔ بطلمیوس را درمورد چهارضلعیهای $PBCD$، $PEFA$، $PBCF$، $PCFA$ به‌کار برید.

۱۱.۶ (ب) فرض کنیدکه شعاع نوری که از نقطه‌ای مانند A ساطع می‌شود درنقطهٔ M با آیینه برخوردکند وبه‌طرف نقطه‌ای مانند B منعکس شود. اگر B' تصویر B در آیینه باشد، صفحهٔ آیینه عمود منصف BB' است، وباید AMB' یك خط راست باشد.

(ج) قسمت (ب) را به‌کار برید.

۱۲.۶ (ب) بااستفاده ازیك شکل، نشان‌دهیدکه $ab=۲rs$ و $a+b=r+s$، و سپس معادلات را توأماً حل کنید.

۱۳.۶ (الف) ۱۲۰ سیب.

(ب) ۶۰ ساله.

(ج) ۹۶۰ تالان.

(د) هرخارس $۴n$ سیب داشت، $۳n$ تارا بخشید، و n تابرایش باقی‌ماند.

۱۴.۶ (الف) ۲۵روز.

(ب) ۱۴۴/۳۷ ساعت.

(ج) ۵ر۳۰ میناطلا، ۵ر۹ مینا مس، ۵ر۱۴مینا قلع، و ۵ر۵ مینا آهن.

۱۵.۶ (الف) ۸۴ ساله.

(ب) ۷،۴،۱۱،۹.

(ج) قراردهید $CD=۳x$، $AC=۴x$، $AD=۵x$، $CB=۳y$. دراین صورت چون $AB/DB=AC/CD$، داریم $AB=۴(y-x)$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس به $۳۲x=۷y$ می‌رسیم، سرانجام به‌دست‌می‌آوریم $AB=۱۰۰$، $AD=۳۵$، $AC=۲۸$، $BD=۷۵$، $DC=۲۱$.

(د) ۱۸۰۶.

۱۶.۶ (الف) $۴۸۱=۲۰^۲+۹^۲=۱۶^۲+۱۵^۲$.

(ب) داریم $۵=۲^۲+۱^۲$، $۱۳=۳^۲+۲^۲$، $۱۷=۴^۲+۱^۲$، بااستفاده‌ازاتحادهای قسمت (الف) داریم

$$(۵)(۱۳)=۸^۲+۱^۲=۷^۲+۴^۲$$

$$(۵)(۱۷)=۹^۲+۲^۲=۷^۲+۶^۲$$

$$(۱۳)(۱۷)=۱۴^۲+۵^۲=۱۱^۲+۱۰^۲.$$

مجدداً، بنابراتحادهای قسمت (الف)، داریم

$$۱۱۰۵=۳۳^۲+۴^۲=۳۲^۲+۹^۲=۳۱^۲+۱۲^۲=۲۴^۲+۲۳^۲$$

۱۷.۶ (الف) از مثلثهای متشابه DFB، DBO، $FD/DB=DB/OD$. بنابراین $FD=(DB)^۲/OD=۲(AB)(BC)/(AB+BC)$.

(ب) از مثلثهای قائم‌الزاویه متشابه،

$$\frac{OA}{OB}=\frac{AF}{BD}=\frac{AF}{BE}=\frac{AC}{CB}=\frac{OC-OA}{OB-OC}$$

حال برحسب OC حل کنید.

(ج) فرض کنید HA، BC را در R و LM را در S قطع کند، و فرض کنید LB، DH را در U و MC، FH را در V قطع کند. دراین‌صورت

$$\square ABDE=\square ABUH=\square BRSL$$

و

$$\square ACFG=\square ACVH=\square RCMS$$

(ه) می‌توان یك راه‌حل تحلیلی را به‌آسانی پیداکرد در صورتی‌که به‌یاد آوریم که مختصات نقطه‌ای که پاره‌خط واصل بین (a,b) و (c,d) را به‌نسبت m/n تقسیم می‌کند عبارت‌اند از $(na+mc)/(m+n)$ و $(nb+md)/(m+n)$ و مختصات مرکز ثقل مثلثی که توسط نقاط (a,b)، (c,d)، (e,f) معین می‌شوند عبارت‌اند از

$$\left(\frac{a+c+e}{۳}\right) \text{ و } \left(\frac{b+d+f}{۳}\right)$$

یافتن یك حل ترکیبی چندان ساده نیست. یکی، منسوب به فوهرمان[1]، در ر. ا. جانسن، هندسهٔ جدید[2]، داده شده‌است.

۱۸.۶ (الف) $V=۲\pi^۲r^۲R$، $S=۴\pi^۲rR$.

(ب) مرکز ثقل قوس نیمدایره‌ای برشعاع منصف نیمدایره و درفاصلهٔ $۲r/\pi$ از

1. Fuhrmann 2. R.A. Johnson, *Modern Geometry*, Section 276. p. 175.

قطر نیمدایره قرار دارد؛ r شعاع نیمدایره است.
(ج) مرکز ثقل مساحت نیمدایره‌ای برشعاع منصف نیمدایره و به فاصلهٔ $4r/3\pi$ ازقطر نیمدایره قراردارد؛ r شعاع نیمدایره است.

۱۹.۶ (الف) فرض کنید P نقطهٔ (x,y) باشد. در این صورت، از مثلثهای متشابه، $x^2/a^2=(OB)^2/(AB)^2$ و $y^2/b^2=(OA)^2/(AB)^2$، که از آنجا

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 .$$

(ب) کمپانی کئوفل و اسر[1] بیضی‌نگاری برمبنای ساختمان پرگار بازودار ساخته است.

۲۰.۶ نگاه کنید به‌هاورد ایوز، بررسی هندسه[2]. جلداول، بخش ۲ـ۳[متن انگلیسی].

۲۱.۶ این مطالعهٔ مسئله‌ای همراه‌با مطالعه‌های مسئله‌ای ۱۴.۲، ۴.۳، ۱۳.۴(ح) و(ط)،و ۱۷.۶(الف)، و (ب)، موضوع پروژهٔ تحقیقی مقدماتی با دشواری متوسط را تشکیل می‌دهند.

۱.۷ (د) ۳۷/۴دوئو، ۱۷/۴دوئو، ۱۱/۴دوئو.

۲.۷ (الف) ارتفاع = ۹٫۶چی، عرض = ۲٫۸چی.
(ب) ۱۲فوت.

۳.۷ (الف) ثابت جادویی $=(1+2+3+\dots+n^2)/n$.
(ج) اعداد در مربع جادویی را باحروف‌نمایش دهیدوسپس حروف سطر وسط، ستون وسط، و دوقطر را به‌هم اضافه کنید.
(د) از قسمت (ج) وبرهان خلف استفاده کنید.

۴.۷ (الف) $x=hd/(2h+d)$.
(ب) ۸ ذراع و ۱۰ذراع.
(ج) ۴۰.

۵.۷ (الف) ۸روز.
(ب) ۱۸ انبه.
(ج) ۸ برای‌یك‌لیمو، ۵ برای یك سیب جنگلی.
(د) ۳۶ شتر.

۶.۷ (الف) ۷۲ زنبور عسل.

1. Keuffel and Esser Company 2. *A Survey of Geometry*

(ب) ۲۰ ذراع.
(ج) ۲۲/۷ یوجنه.
(د) !۱۰،!۴.
(ه) ۱۰۰ تیر.

۷.۷ (الف) فرض کنید $\sqrt{a}=b+\sqrt{c}$. دراین‌صورت $\sqrt{c}=(a-b^{2}-c)/2b$.
(ب) اگر $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$، آنگاه $\sqrt{b}=(c-a)+\sqrt{d}$. حال ازقسمت (الف) استفاده کنید.

۸.۷ (ب) به‌آسانی نشان داده می‌شود که $x=x_1+mb$ و $y=y_1-ma$ یک جواب است. برعکس، فرض کنید x و y یک‌جواب باشد. دراین‌صورت

$$a(x-x_1)=b(y_1-y)\text{، یا } x-x_1=mb \text{ و } y_1-y=ma$$

(ج) با تقسیم بر ۷ داریم

$$x+2y+\frac{2}{7}y=29+\frac{6}{7}$$

بنابراین عدد صحیحی مانند z وجود دارد که

$$\frac{2}{7}y+z=\frac{6}{7}$$

یا

$$2y+7z=6.$$

می‌توان از طریق تجسس این معادله را حل کرد تا جوابهای $z_1=0$، $y_1=3$ از آن به‌دست آید. دراین‌صورت $x_1=23$. لذا جواب عمومی معادلهٔ اصلی، بنابر قسمت (ب)، عبارت است از

$$x=23+16m,\ y=3-7m.$$

چون، بنابرشرط $x>0$ و $y>0$، باید داشته باشیم $m\geqslant -1$ و $m\leqslant 0$. تنها مقادیرقابل قبول برای m عبارت‌اند از ۰ و ۱ـــ . بنابراین جوابهای زیر را به‌دست می‌آوریم

$$x=7,\ y=10 \quad \text{و} \quad x=23,\ y=3$$

یا، نظیر آنچه در ۱.۵(و) انجام شد، p و q را طوری پیدا کنید که $7p+16q=1$.

دراین‌صورت می‌توانیم $x_1 = ۲۰۹p$ و $y_1 = ۲۰۹q$ اختیار کنیم.

(د) چهارجواب موجود است: $x = ۱۲۴$، $y = ۴$؛ $x = ۸۷$، $y = ۲۷$؛ $x = ۵۰$، $y = ۵۰$؛ $x = ۱۳$، $y = ۷۳$.

(ه) فرض کنید که x معرف تعداد پنج ریالیها و y تعداد بیست ریالیها باشد. دراین صورت باید داشته باشیم $۱۰x + ۲۵y = ۵۰۰$.

(و) فرض کنید x معرف تعداد میوه‌ها در یك کپه و y تعداد میوه‌هایی باشد که هرمسافر دریافت می‌کند. در این‌صورت داریم $۶۳x + ۷ = ۲۳y$. کوچکترین مقدار قابل قبول برای x، ۵ است.

۹.۷ (الف) قطردایرهٔ محیطی ماد بر رأسی راکه ارتفاع بر آن می گذرد، رسم کنید. از مثلثهای متشابه استفاده کنید.

(ب) قسمت (الف) را در مورد مثلثهای DAB و DCB به‌کار برید.

(ج) نتیجهٔ قسمت (ب) را همراه بارابطهٔ بطلمیوس، یعنی $mn = ac + bd$ به‌کار برید.

(د) در اینجا $\theta = ۰°$ و $\cos\theta = ۱$. حال از قسمتهای (ب) و (ج) استفاده کنید.

۱۰.۷ (ب) چون‌چهارضلعی‌دارای‌یك‌دایرهٔ‌محاطی‌داخلی‌است،داریم $a + c = b + d = s$. بنابراین $s - a = c$، $s - b = d$، $s - c = a$ و $s - d = b$.

(ج) در شکل ۷۶ داریم

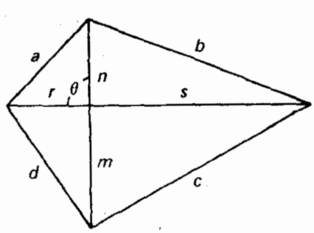
$$a^۲ + c^۲ = r^۲ + s^۲ + m^۲ + n^۲ - ۲(rn + sm)\cos\theta$$

$$b^۲ + d^۲ = r^۲ + s^۲ + m^۲ + n^۲ + ۲(sn + rm)\cos\theta$$

بنابراین $a^۲ + c^۲ = b^۲ + d^۲$ اگر و فقط اگر $\cos\theta = ۰$، $\theta = ۹۰°$.

(د) از قسمت (ج) استفاده کنید.

(ه) اضلاع متوالی چهارضلعی عبارت‌انداز ۳۹، ۶۰، ۵۲، ۲۵؛ اقطار عبارت‌اند از



شکل ۷۶

۶۳،۵۶، قطر دایره محیطی ۶۵ است؛ مساحت ۱۷۶۴ است.

۱۱۰۷ (ج) نگاه کنید به ت.ل.هیث، کتاب دستی ریاضیات یونانی، صفحات ۳۴۰ـ۳۴۲ [متن انگلیسی].

۱۲۰۷ (الف) ما برهان قضیه را برای عدد چهاررقمی N با a،b،c،d به‌عنوان ارقام هزارگان، صدگان، دهگان، یکان می‌آوریم؛ تعمیم آن آسان است. حال

$$N=1000a+100b+10c+d.$$

فرض کنید $S=a+b+c+d$. دراین‌صورت

$$N=999a+99b+9c+S=9(111a+11b+c)+S$$

والخ.

(ب) فرض کنید M و N دوعدد دلخواه با زیادتیهای e و f باشند. دراین‌صورت اعداد صحیحی مانند m و n وجوددارند به‌قسمی که

$$M=9m+e,\ N=9n+f.$$

اما

$$M+N=9(m+n)+(e+f)$$

و

$$MN=9(9mn+ne+mf)+ef$$

والخ.

(د) فرض کنید M عدد مفروض و N عددی باشد که ازجابگشت ارقام M حاصل شده است. دراین‌صورت، چون M و N متشکل ازارقام واحدی هستند، (بنابرقسمت (الف)) دارای زیادتی یکسان e هستند. بنابراین داریم

$$M=9m+e،\ N=9n+e$$

و

$$M-N=9(m-n).$$

(هـ) بنابرقسمت (د) حاصلضرب نهایی باید بر ۹ قابل‌قسمت باشد، که ازآنجا، بنابر (الف)، زیادتی برای مجموع ارقام حاصلضرب باید ۰ باشد.

(و) به‌جای ۹، $(b-1)$ قراردهید.

۱۴۰۷ (ب) $x=2,3696$.

(ج) $x = ۴٫۴۹۳۴$.

۱۵۰۷ (الف) z را طوری پیدا کنید که $b/a = a/z$، سپس m را طوری پیدا کنید که $n/z = a/m$.

(ج) ریشه‌های مثبت ۲ و ۴ هستند و ریشهٔ منفی ۱ — است.

۱۶۰۷ (الف) ریشه‌های حقیقی طولهای نقاط تلاقی خط $ay + bx + c = ۰$ با منحنی درجهٔ سوم $y = x^۳$ هستند.

(ب) $x = ۱٫۷^+$.

(ج) $x = -۳٫۵، ۱٫۲۵$.

(ه) $x = -۶، -۲، -۱$.

۱۷۰۷ (الف) دایرهٔ دلخواهی مانند Σ بر کره رسم کنید و سه نقطهٔ دلخواه A، B، C را بر محیط آن مشخص کنید. بر روی یك صفحه مثلثی بسازید که با مثلث ABC همنهشت باشد، دایرهٔ محیطی آن را پیدا کنید، و سپس شعاع Σ را به‌دست آورید. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که یك ساق آن شعاع Σ، و تر آن وتر قطبی Σ باشد. اکنون یافتن قطر کره آسان است.

(ب) اگر d قطر کره و e یال مکعب محاطی باشد، دراین‌صورت $e = (d\sqrt{۳})/۳$، و از آنجا e یك سوم ارتفاع مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $۲d$ است.

(ج) اگر d قطر کره و e یال چهاروجهی منتظم محاطی باشد، در این صورت $e = (d\sqrt{۶})/۳$، که از آنجا e وتر مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای است که ساق آن برابر با یال مکعب محاطی است. به‌قسمت (الف) نگاه کنید.

۱۰۸ (الف) فرض کنید x، y، z به‌ترتیب معرف تعداد مردان، زنان، و کودکان باشند. در این‌صورت باید داشته باشیم

$$x + y + z = ۱۰۰ \quad و \quad ۶x + ۴y + z = ۲۰۰$$

یا $۵x + ۳y = ۱۰۰$. نتیجه می‌شود که y باید مضربی از ۵، مثلا $۵n$، باشد. در این‌صورت $x = ۲۰ - ۳n$ و $z = ۸۰ - ۲n$. به‌آسانی می‌توان دید که تنها مقادیر قابل قبول برای n عبارت‌اند از ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶. جوابی که در مجموعهٔ الکوین داده‌شده به $n = ۳$ مربوط است؛ یعنی ۱۱ مرد، ۱۵ زن، ۷۴ کودك.

(ب) به‌آسانی می‌توان نشان داد که هر پسر باید همان تعداد قمقمه کاملا خالی دریافت کند که قمقمهٔ پر، جوابهای متعددی موجودند.

(ج) فرض کنید که x معرف تعداد جهشها باشد. دراین‌صورت $۹x - ۷x = ۱۵۰$.

(د) دوجواب پیدا کنید. برای مسائل دیگری ازاین قبیل، نگاه کنید به‌موریس

کرچیك[1]، تفریحات ریاضی[2]، صفحات ۲۱۴ـ۲۲۲ [متن انگلیسی].

(ه) ۵/۲۷ برای مادر، ۱۵/۲۷ برای پسر، و ۷/۲۷ برای دختر چطور است؟

(و) فرض کنید ساقها، وتر، و مساحت مثلث به ترتیب a، b، c، K، $a \geqslant b$ باشند. در این صورت

$$a^۲+b^۲=c^۲,\ ab=۲K.$$

ازحل این دو معادله برحسب a و b داریم

$$a=\frac{\sqrt{c^۲+۴K}+\sqrt{c^۲-۴K}}{۲},\quad b=\frac{\sqrt{c^۲+۴K}-\sqrt{c^۲-۴K}}{۲}$$

۲۰۸ (ب-۱) از استقرای ریاضی استفاده کنید. فرض کنید رابطه برای $n=k$ درست باشد. دراین‌صورت

$$\begin{aligned} u_{k+۲}u_k &= (u_{k+۱}+u_k)u_k \\ &= u_{k+۱}u_k+u_k^۲ \\ &= u_{k+۱}u_k+u_{k+۱}u_{k-۱}-(-۱)^k \\ &= u_{k+۱}(u_k+u_{k-۱})+(-۱)^{k+۱} \\ &= u_{k+۱}^۲+(-۱)^{k+۱} \end{aligned}$$

والخ. یاازعبارتی‌که برای u_n در(ب-۲) داده شده، استفاده کنید.

(ب-۲) قرار دهید $v_n=[(۱+\sqrt{۵})^n-(۱-\sqrt{۵})^n]/۲^n\sqrt{۵}$. نشان دهید که $v_n+v_{n+۱}=v_{n+۲}$ واینکه $v_۱=v_۲=۱$. دراین‌صورت $v_n=u_n$.

(ب-۳) ازعبارتی که برای u در (ب-۲) داده شده، استفاده کنید.

(ب-۴) از رابطه‌ای‌که در (ب-۱) داده شده، استفاده کنید.

۳۰۸ (الف) A، ۱۲۱/۱۷ دناریوس و B، ۱۶۷/۱۷ دناریوس دارد.

(ب) ۳۳ روز. این مسئله را می‌توان به‌عنوان مسئله‌ای در واریاسیون [تغییرات] حل کرد.

(ج) فرض کنید x نمایش مقداردارایی و y مقداری‌باشد که هرپسرمی‌گیرد. دراین صورت پسر اول $۱+(x-۱)/۷$، دومی

$$۲+\frac{x-\left(۱+\frac{x-۱}{۷}\right)-۲}{۷}$$

1. Maurice Kraitchik 2. *Mathematical Recreations*

را می‌گیرد. با برابر قراردادن اینها، مقادیر $x = ۳۶$، $y = ۶$ را پیدا می‌کنیم، و عدهٔ پسران $۳۶/۶ = ۶$ می‌شود.

۴۰۸ (ب) آنچه در زیر می‌آید، اساساً جواب فیبوناتچی به مسئله است. فرض کنید s معرف مبلغ اصلی و $۳x$ مبلغ کل برگردانده شده باشد. قبل از آنکه هرمرد ثلث مقدار برگردانده‌شده‌را دریافت کند، سه‌مرد دارای $x - s/۲$، $x - s/۳$، $x - s/۶$ بودند. چون اینهامبالغ دارایی بعداز برگرداندن ۱/۲، ۱/۳، ۱/۶ آنچه قبلا برداشته‌بودند، می‌باشد، مبالغی که اول برداشته‌بودندعبارت‌اند از $۲(s/۲ - x)$، $(۳/۲)(s/۳ - x)$، $(۶/۵)(s/۶ - x)$ و مجموع ایـن مـقـادیـر s است. بنابراین $۴۷x = ۷s$ و مسئلهٔ یک‌معادلهٔ سیاله است. فیبوناتچی $s = ۴۷$ و $x = ۷$ اختیارکرد. بنابراین مبالغی که این مردان از کپهٔ اصلی برداشته بودند، عبارت‌اند از ۳۳، ۱۳، ۱.

(ج) ۳۸۲ سیب.

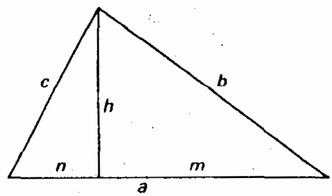
۶۰۸ (الف) زاویهٔ مفروض را با y وزاویهٔ AOF راباx نشان دهید. چون OF برابر و موازی DE است، $OFED$ یک متوازی‌الاضلاع است. نتیجه مـی‌شودکـه $FE = OD = FO$ و مثلث OFE متساوی‌الساقین است. حال،

$$x = (\text{زاویهٔ } OAE) = (\text{زاویهٔ } ODE) = (\text{زاویهٔ } OFE).$$

بنابراین، ازجمع کردن ۳زاویهٔ مثلث OFEداریم $۲(۹۰ - y + x) + x = ۱۸۰$، یا $x = ۲y/۳$.

(ب) با x و y نامیدن ۲ جزء، داریـم $x + y = ۱۰$، $x^۲ + y^۲ = ۵۸$. بنابراین اختیارمی‌کنیم $x = ۷$، $y = ۳$.

۸۰۸ (الف) آنچه درزیرمی‌آید، اساساً جوابی‌است که رگیومونتانوس داده‌است. مقادیر (نگاه کنید به‌شکل ۷۷) $p = b - c$، h، و $q = m - n$ به‌ماداده شده است. اما $b^۲ - m^۲ = h^۲ = c^۲ - n^۲$، یـا $b^۲ - c^۲ = m^۲ - n^۲$، یـا $b + c = qa/p$. دراین‌صورت



شکل۷۷

$$b=\frac{qa+p^{۲}}{۲p}\ ,\ m=\frac{a+q}{۲}.$$

ازقراردادن این‌عبارات دررابطهٔ $b^{۲}-m^{۲}=h^{۲}$، یك معادلهٔ درجه‌دوم برحسب a به دست می‌آوریم.

(ب) آنچه درزیرمی‌آید، جوابی است که توسط رگیومونتانوس داده شده‌است. دراینجا مقادیر(نگاه کنیدبه‌شکل ۷۷) a،h،$k=c/b$ به‌ما داده‌شده‌اند. قراردهید $۲x=m-n$، در این صورت

$$۴n^{۲}=(a-۲x)^{۲},\quad ۴c^{۲}=۴h^{۲}+(a-۲x)^{۲}$$

$$۴m^{۲}=(a+۲x)^{۲},\quad ۴b^{۲}=۴h^{۲}+(a+۲x)^{۲}.$$

بنابراین

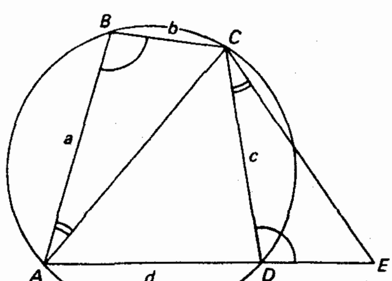
$$k^{۲}[۴h^{۲}+(a+۲x)^{۲}]=۴h^{۲}+(a-۲x)^{۲}.$$

از حل این معادلهٔ درجهٔ دوم، x و سپس b و c را به‌دست می‌آوریم.

این‌مثلث‌رامی‌توان بااستفاده‌ازیك‌دایرهٔ آپولونیوس به‌آسانی‌ساخت. به‌مطالعهٔ مسئله‌ای ۸.۶(ب) نگاه کنید.

(ج) برامتدادAD (نگاه کنید به‌شکل ۷۸) $DE=bc/a$، جزءچهارم تناسب نسبت به‌قطعه‌هایa،b،c، را اختیار کنید.دراین‌صورت‌مثلثهای DCEوBAC متشابه‌اند و $CA/CE=a/c$. بنابراین c در محل تلاقی دو مکان هندسی، یك دایرهٔ آپولونیوس و دایره‌ای به‌مرکز D و شعاع c واقع است.

۹.۸ (الف) ۲۹ دلار.
(ب) ۱۸۰/۱۱ روز.



(ج) قیمت هرقمقمه ۱۲۰ فرانك و عوارض هرقمقمه ۱۰ فرانك است.
(د) فرض کنید $a/c<b/d$. در این‌صورت $ad<bc$، $ac+ad<ac+bc$، $a(c+d)<c(a+b)$، $a/c<(a+b)/(c+d)$، و الخ.

۱۰.۸ (الف) با استفاده از نمادهای استانده، داریم

$$(rs)^۲=s(s-a)(s-b)(s-c),$$

یا

$$۱۶s^۲=s(s-۱۴)(۶)(۸)$$

و $s=۲۱$. در این صورت اضلاع مطلوب عبارت‌اند از $۲۱-۶=۱۵$ و $۲۱-۸=۱۳$. این روش پاچولی برای حل مسئله نیست؛ راه حل او به‌طور غیرلازمی پیچیده است.

۱۱.۸ (ب) $۴۶۳\frac{۷}{۲۳}$.
(و) عایدیها بازمانی‌که پول‌دراختیار شرکت است و نیز بامقدار پول متناسب است.
(ز) بیش از ۱۶ درصد.

۱۴.۸ (ب) $H=(۳ac-b^۲)/۹a^۲$، $G=(۲b^۳-۹abc+۲۷a^۲d)/۲۷a^۳$.
(د) $x=۴$. دو ریشهٔ دیگر موهومی‌اند.

۱۵.۸ (الف) $(۳\pm\sqrt{۵})/۲$، $(-۵\pm\sqrt{۲۱})/۲$
(ج) $y^۳+۱۵y^۲+۳۶y=۴۵۰$، $y^۶-۶y^۴-۱۴۴y^۲=۲۷۳۶$.

۱۶.۸ (الف) $\lfloor\ \lfloor\ \rfloor R\,q\,۶۸m۲\ \lfloor mRc\rfloor R\,q\,۶۸p۲\ \lfloor Rc \lfloor Rq$
(ب) $\sqrt[۳]{(۴+\sqrt{-۱۱})^{۱/۲}}+\sqrt[۳]{(۴-\sqrt{-۱۱})^{۱/۲}}$
(ج) Acub$-B$3 in Aquad$+C$ plano 4 in A aequatur D solido 2

۱۷.۸ (ب) $\cos ۵\theta=۱۶\cos^۵\theta-۲۰\cos^۳\theta+۵\cos\theta$.
(ج) $x=۲۴۳$.
(د) $x_۲=(r-qx-px^۲-x^۳)/(۳x^۲+۲px+q)$.

۱۸.۸ (الف) ۱۰.
(ب) ۲۸ گدا، ۲۰ر۲ دلار.
(ج) ۹۲ دلار.

واژه‌نامه

اصل درج	insertion principle
اصل متعارفی	axiom
اصل موضوع	postulate
بخش طلایی	golden section
برهان خلف	reductio ad absurdum
بیست بیستی	vigesimal
بیضی‌نگار	ellipsograph
پرگار	compasses
پرگار بازودار	trammel
پرگار فروریزنده	collapsing compasses
پنتاگرام	pentagram
پنج‌پنجی	quinary
پوش	envelope
تثلیث	trisection
تربیع	quadrature
ترسیم	construction
مت: ساختمان	
تصویر گنجنگاشتی	stereographic projection
تضعیف	duplication

dissection	تقطیع
proportion	تناسب
mediation	تنصیف
trisectrix	ثلث‌ساز
algebra	جبر
syncopated algebra	ـ تلخیصی
symbolic algebra	ـ علامتی
rhetorical algebra	ـ لفظی
solid	جسم صلب
abacus	چرتکه
torus	چنبره
star-polygon	چند ضلعی ستاره‌ای
polyhedron	چندوجهی
spiral curve	خم حلزونی
datum	داده
rod numeral system	دستگاه شمار میله‌ای
binary	دودویی مت: ثنایی
rectification	راستش
ciphered	رمزی
method of exhaustion	روش افنا
sociable chain	زنجیر اجتماعی
salinon	سالینون
straightedge	ستاره
triple	سه‌تایی
versed sine, apothem, sagitta	سهم

trapezium	شبه ذوزنقه
spheroid	شبه کره
conoid	شبه مخروط
sexagesimal	شصتگانی
casting out	طرح کردن
number	عدد
surd number	ـ اصم
perfect number	ـ تام
abundant number	ـ زاید
quasi perfect number	ـ شبه تام
weird number	ـ غریب
superabundant number	ـ فوق زاید
triangular number	ـ مثلثی
pentagonal number	ـ مخمسی
square number	ـ مربعی
oblong number	ـ مستطیلی
figurate number	ـ مصور
deficient number	ـ ناقص
semiperfect number	ـ نیم‌تام
finger numbers	ـ های انگشتی
amicable numbers	ـ های متحابه
written numbers	ـ های نوشتاری
spherical zone of one base	عرقچین کروی
rule of false position	قاعدهٔ امتحان و تصحیح
rule of double false position	قاعدهٔ خطأین
fundamental theorem of arithmetic	قضیهٔ اصلی علم حساب
sector	قطاع
radix fraction	کسر مبنایی
continued fraction	کسر مسلسل
polyhedral angle	کنج

گرایش	verging
گسترده	evolute
گنگ	irrational
گویا	rational
لاتوس رکتوم	latus rectum
مت : ضلع قائم	
لیماسون	limaçon
مبنا	radix
متوافق	commensurable
مجموعیابی	summation
مربع جادویی	magic square
مت: مربع وفقی	
مربع ساز	quadratrix
مرکز ثقل	centroid
مساوی	congruent
مت : همنهشت	
مساوی تفریقی	congruent by subtraction
مساوی جمعی	congruent by addition
مقطع مخروطی	conic section
منشورنما	prismatoid
منطقهٔ کروی	spherical zone
منظم	regular
مت : منتظم	
میانگین	mean
ـ توافقی، همساز	harmonic mean
مت : همساز	
ـ حسابی	arithmetic mean
ـ مخالف	contrary mean
ـ مرکز ثقلی	centroidal mean
ـ وزندار	weighted mean
ـ هرونی	heronian mean

simply normal	نرمال‌ساده
ratio	نسبت
cross ratio	ـ خاجی
extreme and mean ratio	ـ ذات وسط وطرفین
golden ratio	ـ طلایی
abharmonic ratio	ـ ناتوافقی
directrix	هادی
cuboctahedron	هشت‌وجهی مکعبی
lune	هلال
isoperimetry	هم‌محیطی

فهرست راهنما