www.YasDL.com

۱۹. منشأ هر چند تا از منابع انرژی فعلی را که می‌توانید به‌خورشید مربوط کنید. فکر می‌کنید منبعی وجود دارد که نشود آن‌را به‌خورشید مربوط کرد؟

۲۰. با استفاده از مفاهیم کار و انرژی، توضیح بدهید که چگونه کودکان می‌توانند تاب را از حالت سکون به حالت حرکت با دامنه‌ای بزرگ برسانند.[۱]

۲۱. دو قرص با فنری سخت به هم متصل‌اند. آیا می‌توان قرص بالایی را آنقدر به پایین فشرد که پس از رها شدن، به بالا بجهد و قرص پایینی را هم با خودش از روی میز بلند کند (شکل ۲۲)؟ آیا در این مورد انرژی مکانیکی می‌تواند پایسته بماند؟

شکل ۲۲. پرسش ۲۱

۲۲. دربارهٔ "پایستگی انرژی" که (الف) در این فصل به‌کار رفته است و (ب) در ارتباط با "بحران انرژی" (مثلاً خاموش کردن چراغها) بحث کنید. این دو مورد چه تفاوتی دارند.

۲۳. توان الکتریکی یک شهر کوچک از یک نیروگاه هیدروالکتریکی تأمین می‌شود، که بر رودخانه‌ای نزدیک شهر قرار دارد. اگر یک چراغ روشنایی را در این سیستم انرژی ــ بسته خاموش کنید، از پایستگی انرژی نتیجه می‌شود که همین مقدار انرژی، البته شاید به شکلی دیگر، باید در نقطه‌ای دیگر از سیستم ظاهر شود. این انرژی کجا و به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۲۴. فنری را تا آنجا که می‌شود فشرده می‌کنیم و در همین حال آن‌را محکم می‌بندیم بعد آن‌را در اسید می‌گذاریم تا حل شود. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر چه می‌شود؟

۲۵. عبارت $E_0 = mc^2$ نشان می‌دهد که اجسام کاملاً معمولی، مثل سکه یا سنگریزه مقادیر عظیمی انرژی دارند. چرا تا به حال به این منابع عظیم انرژی توجه نشده است؟

۲۶. "در انفجارهای هسته‌ای ــ به‌ازای جرم یکسان ــ در حدود یک میلیون بار بیش از انفجار شیمیایی انرژی آزاد می‌شود، زیرا انفجارهای هسته‌ای براساس رابطهٔ $E_0 = mc^2$ عمل می‌کنند." دربارهٔ این گفته چه فکر می‌کنید؟

۲۷. چگونه جرم و انرژی می‌توانند "هم‌ارز" باشند، با وجودی که دو کمیت فیزیکی کاملاً متفاوت‌اند که به دو شکل متفاوت تعریف می‌شوند، و با دو یکای متفاوت سنجیده می‌شوند؟

۲۸. یک کرهٔ فلزی داغ را روی صفحهٔ یک ترازو می‌گذاریم، کره سرد می‌شود. آیا اگر ترازو به‌اندازهٔ کافی حساس می‌بود، تغییر جرمی نشان می‌داد؟

۲۹. آیا در فیزیک کلاسیک (یعنی غیرکوانتومی) هم کمیتهای کوانتیا موجود دارد؟ اگر دارد، مثالهایی بیاورید.

مسئله‌ها

بخش ۸ـ۳ سیستمهای پایستار یک‌بعدی

۱. برای از کار انداختن موشکهای بالیستیک در مراحل اولیهٔ پرواز، یک "تفنگ الکترومغناطیسی" طراحی شده است که در ماهواره‌های زمینی مدار پایین سوار می‌شود. این تفنگ باید بتواند پرتابه‌ای به جرم ۲٫۳۸kg را با سرعت ۱۰٫۰km/s پرتاب کند. انرژی جنبشی این پرتابه، حتی اگر مادهٔ منفجره هم نداشته باشد. برای اینکه موشک را در اثر برخورد از کار بیندازد کافی است. (چنین سلاحی را سلاح "انرژی جنبشی" می‌نامند.) پرتابه به‌وسیلهٔ نیروهای الکترومغناطیسی شتاب می‌گیرد و به‌سرعت پرتاب می‌رسد. حالا فرض کنید می‌خواستیم این پرتابه را با استفاده از یک فنر پرتاب کنیم (سلاح "فنری"). در این‌صورت، ثابت نیروی فنری که ۱٫۴۷m فشرده شده است چقدر باید باشد تا بتواند پرتابه را به سرعت مورد نظر برساند.

۲. گفته می‌شود که از درختان خیلی بزرگ در هر روز ممکن است تا حدود ۹۰۰ کیلوگرم آب تبخیر شود. این تبخیر در برگها صورت می‌گیرد. آب باید از ریشهٔ درخت به برگها برسد. (الف) با فرض اینکه آب به‌طور متوسط ۹٫۲۰m از سطح زمین صعود کند. هر روز چقدر انرژی صرف این کار می‌شود؟ (ب) اگر فرض کنیم که تبخیر طی ۱۲h روز انجام می‌شود، توان متوسط چقدر است؟

۳. ارتفاع قلهٔ اورست از سطح دریا ۸۸۵۰m است. (الف) کوهنوردی به جرم ۹۰kg، چقدر انرژی در مقابل گرانش مصرف می‌کند تا از سطح دریا به قله برسد؟ (ب) چند شکلات، هر یک با انرژی ۳۰۰kcal، برای تأمین این انرژی لازم است؟ نتیجهٔ شما باید نشان بدهد که کار لازم برای غلبه بر گرانش بخش بسیار کوچکی از انرژی‌ای است که در بالا رفتن از کوه مصرف می‌شود.

۴. مردی به وزن ۲۲۰lb از پنجره‌ای روی یک توری نجات می‌پرد که ۳۶ft پایین‌تر از او است. تور ۴٫۴ft کشیده می‌شود و به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد و بعد مرد را دوباره به هوا پرتاب می‌کند. با فرض اینکه هیچ انرژی‌ای در اثر نیروهای ناپایستار اتلاف نشود، انرژی پتانسیل تور کشیده شده چقدر است؟

۵. قطعه یخ بسیار کوچکی از لبهٔ داخلی یک ظرف بدون اصطکاک به شکل نیمکره‌ای به شعاع ۲۳٫۶cm رها می‌شود (شکل ۲۳). سرعت

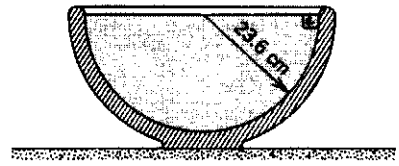
---

۱. نگاه کنید به

"How to Make a Swing Go," R. V. Hesheth, *Physics Education*, July 1975, p. 367.

www.YasDL.com

این قطعه یخ در پایین ظرف چقدر است؟

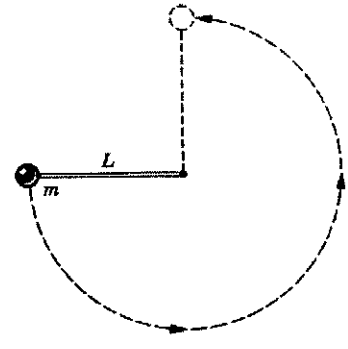


شکل ۲۳. مسئلهٔ ۵

۶. جریانی از گدازهٔ آتشفشانی روی یک سطح افقی در حال حرکت است که به یک سربالایی با شیب ۱۰° می‌رسد. مشاهده می‌شود که گدازه ۹۲۰m روی شیب به‌طرف بالا حرکت می‌کند و سپس متوقف می‌شود. گدازه شامل گازِ به‌دام افتاده است؛ بنابراین، اصطکاک آن با زمین آنقدر کم است که می‌شود از آن چشم پوشید. سرعت گدازه درست پیش از رسیدن به شیب، چقدر بوده است؟

۷. پرتابه‌ای به جرم ۲٫۴۰kg از بالای صخره‌ای به ارتفاع ۱۲۵m پرتاب می‌شود. سرعت اولیهٔ آن ۱۵۰m/s در جهت ۴۱٫۰° بالاتر از سطح افق است. (الف) انرژی جنبشی پرتابه در اولین لحظهٔ پس از پرتاب و (ب) انرژی پتانسیل آن در این لحظه چقدر است؟ (ج) سرعت پرتابه، درست پیش از برخورد آن به زمین، چقدر است؟ کدام یک از جوابها به جرم پرتابه بستگی دارد؟ اصطکاک هوا را ناچیز بگیرید.

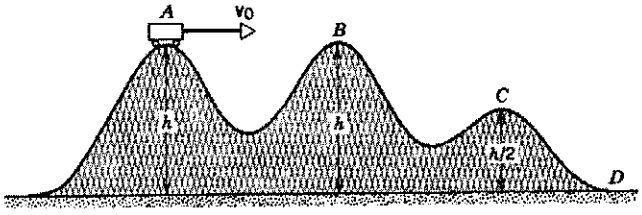
۸. گلوله‌ای به جرم m به یک سرِ میلهٔ بسیار سبکی به طول L متصل است. سر دیگر میله لولا شده است، چنانکه گلوله می‌تواند در صفحه‌ای قائم حرکت کند. میله را به حالت افقی درمی‌آوریم و به گلوله ضربه‌ای به طرف پایین می‌زنیم. میله تاب می‌خورد و درست تا حالت قائم خودش را بالا می‌کشد (شکل ۲۴). سرعت اولیهٔ گلوله چقدر بوده است؟



شکل ۲۴. مسئله‌های ۸ و ۳۸

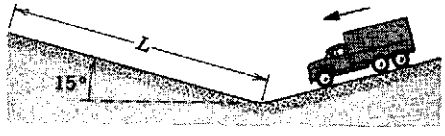
۹. توپی به جرم ۱۱۲g، با سرعت اولیهٔ ۸٫۱۶m/s با زاویهٔ ۳۴٫۰° بالاتر از سطح افقی، از پنجره‌ای پرتاب می‌شود. با استفاده از پایستگی انرژی، (الف) انرژی جنبشی توپ در نقطهٔ اوج مسیر و (ب) سرعت آن در ارتفاع ۲٫۸۷m پایین‌تر از پنجره را پیدا کنید. مقاومت هوا ناچیز است.

۱۰. یک ارابهٔ تفریحی که روی ریلهای بدون اصطکاک است، با سرعت v_0 از نقطهٔ A در شکل ۲۵ به‌راه می‌افتد. سرعت ارابه (الف) در نقطهٔ B، (ب) در نقطهٔ C، و (ج) در نقطهٔ D [illegible] مثل ذره در نظر بگیرید.



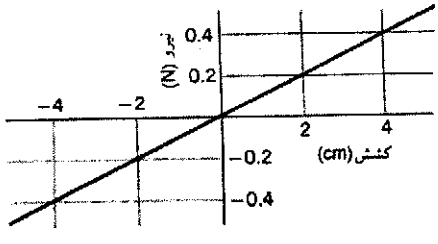
شکل ۲۵. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. کامیونی که ترمزش بریده است، با سرعت ۸۰mi/h از تپه‌ای پایین می‌آید. خوشبختانه در پایین تپه یک شیب فرار اضطراری وجود دارد. زاویهٔ این شیب ۱۵° است (شکل ۲۶). حداقل طول شیب، L، برای اینکه کامیون (لااقل به‌طور آنی) متوقف شود چقدر است؟



شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۱

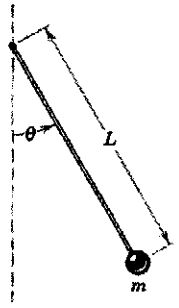
۱۲. شکل ۲۷ نیرو (برحسب نیوتون) را به‌صورت تابعی از مقدار کشیدگی یا فشردگی (برحسب سانتی‌متر) فنر یک تفنگ چوب پنبه‌ای نشان می‌دهد. فنر به‌اندازهٔ ۵٫۵۰cm فشرده می‌شود و چوب‌پنبه‌ای به جرم ۳٫۸۰g را از تفنگ پرتاب می‌کند. (الف) با فرض اینکه چوب‌پنبه در لحظه‌ای که فنر از حالت آزاد خودش می‌گذرد رها شود، سرعت آن چقدر خواهد بود؟ (ب) حالا فرض کنید که چوب‌پنبه به فنر گیر می‌کند و پس از آنکه فنر ۱٫۵۰cm از حالت آزاد خودش گذشت از آن جدا می‌شود. در این حالت سرعت چوب‌پنبه، هنگام رها شدن چقدر است؟



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۲

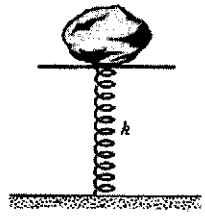
۱۳. میلهٔ نازکی به طول $L = 2٫13m$ و جرم قابل اغماض، از یک سرلولا شده است؛ چنانکه می‌تواند در صفحهٔ قائم دوران کند. میله را به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta = 35٫0°$ از حالت قائم منحرف، و سپس رها می‌کنیم (شکل ۲۸). سرعت گلولهٔ سربی سرآزاد میله، هنگام عبور [illegible] از [illegible] نقطهٔ [illegible] چقدر است؟

www.YasDL.com



شکل ۲۸. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. شکل ۲۹ سنگی به جرم ۷٫۹۴kg را نشان می‌دهد که روی فنری قرار دارد. فنر در اثر وزن سنگ به‌اندازهٔ ۱۰٫۲cm فشرده می‌شود. (الف) ثابت نیروی فنر را پیدا کنید. (ب) سنگ را ۲۸٫۶cm دیگر هم به پایین فشار می‌دهیم و بعد رها می‌کنیم. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر، درست پیش از برداشتن دست از روی سنگ، چقدر است؟ (ج) سنگ تا چه ارتفاعی، نسبت به این مکان جدید، بالا می‌رود؟



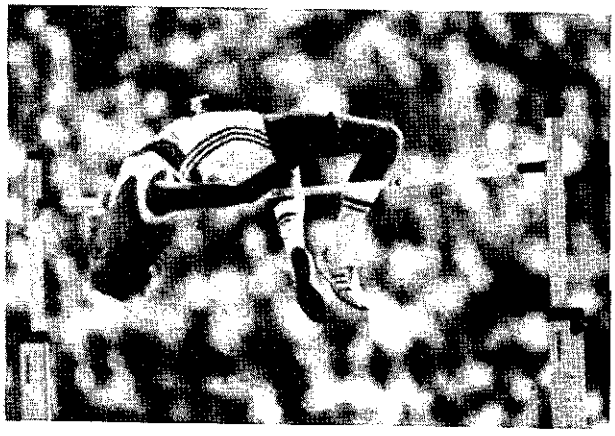
شکل ۲۹. مسئلهٔ ۱۴

۱۵. در آبشار نیاگارا، هر دقیقه تقریباً $۳٫۳ \times ۱۰^۵ m^۳$ آب از ارتفاع ۵۰m سقوط می‌کند. (الف) توان خروجی یک نیروگاه مولد برق، که بتواند ۴۸٪ انرژی پتانسیل این آب را به انرژی الکتریکی تبدیل کند، چقدر است؟ (ب) اگر انرژی تولید شده، به‌قیمت صنعتی ۱٫۲cent/kWh فروخته شود، درآمد سالانهٔ حاصل چقدر است؟ جرم یک مترمکعب ($۱m^۳$) آب ۱۰۰۰kg است.

۱۶. مساحت ایالات متحده امریکا در حدود $۸ \times ۱۰^۶ km^۲$، و ارتفاع متوسط آن از سطح دریا در حدود ۵۰۰m است. میزان بارش متوسط سالانه، ۷۵cm است. دوسوم این آب باران، در اثر تبخیر، به جو بازمی‌گردد، اما باقی‌ماندهٔ آن سرانجام به اقیانوسها می‌ریزد. اگر همهٔ این آب را می‌شد برای تولید برق در نیروگاههای هیدروالکتریکی به‌کار برد، چه توان متوسطی به‌دست می‌آمد؟

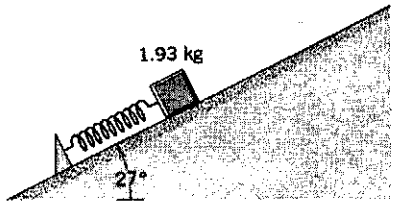
۱۷. جسمی از حالت سکون، از ارتفاع h، سقوط می‌کند. انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل را به‌صورت توابعی از (الف) زمان و (ب) ارتفاع تعیین کنید. این توابع را رسم کنید و نشان بدهید که مجموع آنها ــ انرژی کل ــ در هر دو مورد ثابت است.

۱۸. در بازیهای المپیک ۱۹۸۴، پرندهٔ آلمانی، اولریکه مایفارت، با پرش ۲٫۰۲m، یک رکورد المپیک برای پرش ارتفاع زنان برجای گذاشت (شکل ۳۰). با فرض یکسان بودن شرایط دیگر، این پرنده در کرهٔ ماه چقدر می‌توانست بپرد؟ شتاب گرانش در سطح ماه فقط $۱٫۶۷ m/s^۲$ است. (راهنمایی: ارتفاعی که "به‌حساب می‌آید"، مسافت قائمی است که مرکز ثقل پرنده، پس از جدا شدن پاهایش از زمین، بالا می‌رود. فرض کنید که در لحظهٔ جدا شدن پرنده از زمین، مرکز ثقل او ۱۱۰cm بالاتر از سطح زمین باشد. همچنین فرض کنید که هنگام گذشتن پرنده از میله، مرکز ثقلش در همان ارتفاع میله باشد.)



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۱۸

۱۹. جسمی به جرم ۱٫۹۳kg روی سطح شیبدار بی‌اصطکاکی به زاویهٔ شیب ۲۷٫۰°، به فنری تکیه دارد (شکل ۳۱). فنر را، که ثابت نیروی آن ۲۰٫۸N/cm است، به‌اندازهٔ ۱۸٫۷cm می‌فشاریم، و جسم را رها می‌کنیم. جسم حداکثر به اندازهٔ چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟ مکان نهایی را نسبت به مکان جسم، درست پیش از رها شدن، حساب کنید.

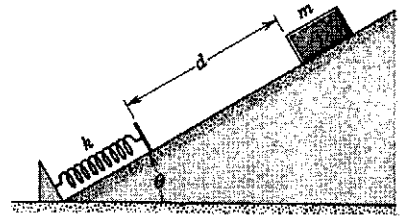


شکل ۳۱. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. فنر ایده‌آل بدون جرمی در اثر نیروی ۲۶۸N به‌اندازهٔ ۲٫۳۳cm فشرده می‌شود. جسمی به جرم $m = ۳٫۱۸kg$ از بالای سطح شیبدار، از حالت سکون، رها می‌شود (شکل ۳۲). زاویهٔ شیب سطح

www.YasDL.com

°۳۲٫۰۰ است. جسم، در لحظه‌ای که فنر را به‌اندازهٔ ۵٫۴۸cm فشرده است، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. (الف) در این لحظه جسم چه مسافتی روی سطح شیبدار حرکت کرده است؟ (ب) سرعت جسم، در لحظه‌ای که به فنر می‌رسد، چقدر است؟

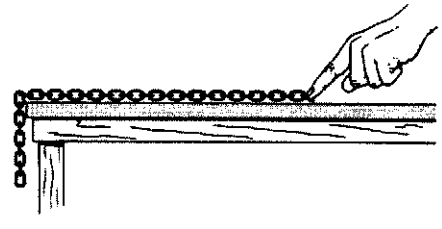


شکل ۳۲. مسئله‌های ۲۰ و ۳۵

۲۱. ثابت نیروی فنر یک تفنگ فنری ۴٫۱۵lb/in است. تفنگ با زاویهٔ °۳۶٫۰۰ بالاتر از سطح افقی واقع شده است. گلوله‌ای به وزن ۲٫۸۰oz از آن شلیک می‌شود و به ارتفاع ۶٫۳۳ft بالاتر از دهانهٔ لوله می‌رسد. (الف) سرعت گلوله موقع خروج از لوله چقدر است؟ (ب) فنر در ابتدا چقدر فشرده شده بوده است؟

۲۲. آونگی متشکل است از سنگی به جرم ۱٫۳۳kg که به ریسمانی به طول ۳٫۸۲m متصل است. در حالتی که زاویهٔ ریسمان با راستای قائم °۵۸٫۰۰ است، به سنگ ضربه‌ای در جهت عمود بر ریسمان به طرف بالا می‌زنیم. مشاهده می‌شود که سرعت سنگ، هنگام عبور از پایین‌ترین نقطهٔ مسیرش، ۸٫۱۲m/s است. (الف) سرعت سنگ، درست پس از ضربه خوردن، چقدر بوده است؟ (ب) طی حرکت آونگ، بزرگترین زاویه‌ای که ریسمان با راستای قائم می‌سازد چقدر است؟ (ج) پایین‌ترین نقطهٔ مسیر سنگ را صفر انرژی پتانسیل گرانشی بگیرید و انرژی مکانیکی کل سیستم را حساب کنید.

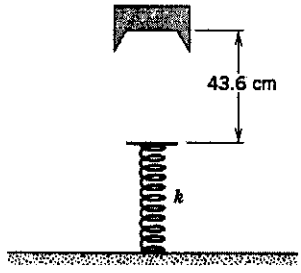
۲۳. زنجیری روی میز بدون اصطکاکی نگه داشته شده است، چنانکه یک چهارم طول آن از لبهٔ میز آویزان است (شکل ۳۳). اگر طول زنجیر L و جرم آن m باشد، چقدر کار لازم است تا بخش آویزان زنجیر روی میز کشیده شود؟



شکل ۳۳. مسئلهٔ ۲۳

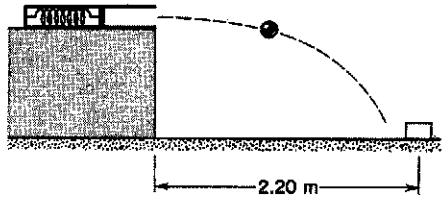
۲۴. یک سر فنر قائمی به سقف متصل است. وزنه‌ای به سر دیگر آن می‌بندیم و آن‌را آرام پایین می‌آوریم تا به وضعیت تعادل برسد. نشان بدهید که مقدار کاهش انرژی پتانسیل وزنه، دو برابر مقدار افزایش انرژی پتانسیل فنر است. (چرا این دو کمیت با هم برابر نیستند؟)

۲۵. جسمی به جرم ۲٫۱۴kg از ارتفاع ۴۳٫۶cm روی فنری، با ثابت نیروی $k = 18{,}6\text{N/cm}$، سقوط می‌کند (شکل ۳۴). این فنر حداکثر چقدر فشرده می‌شود؟



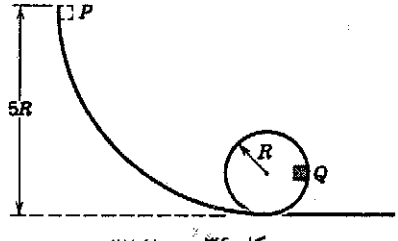
شکل ۳۴. مسئلهٔ ۲۵

۲۶. دو کودک با هم بازی می‌کنند و می‌خواهند جعبهٔ کوچکی را که روی زمین است با تیله‌ای که از یک تفنگ فنری شلیک می‌شود بزنند؛ تفنگ روی میز قرار دارد. فاصلهٔ افقی جعبهٔ هدف با لبهٔ میز ۲٫۲۰m است (شکل ۳۵). اولی فنر را ۱٫۱۰cm می‌فشارد، اما جسم به هدف نمی‌رسد و ۲۷٫۰cm جلوتر از آن به زمین می‌افتد. دومی چقدر فنر را بفشارد تا جسم به هدف بخورد؟



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۲۶

۲۷. جسمی به جرم m روی مسیر حلقوی بدون اصطکاکی می‌لغزد (شکل ۳۶). (الف) جسم از نقطهٔ P، از حالت سکون، رها می‌شود. نیروی خالص وارد بر آن، در نقطهٔ Q چقدر است؟ (ب) جسم باید از چه ارتفاعی نسبت به پایین حلقه رها شود تا در بالای دایره در آستانهٔ جدا شدن از مسیر باشد؟

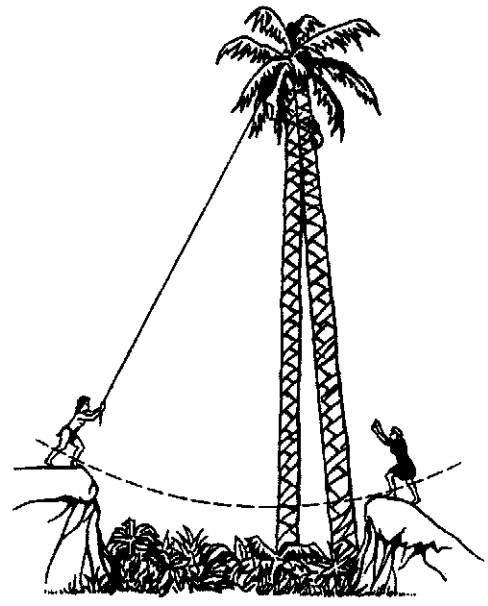


شکل ۳۶. مسئلهٔ ۲۷

۲۸. تارزان، به وزن ۱۸۰lb، به کمک پیچکی به طول ۵۰ft، از بالای صخره‌ای تاب می‌خورد و پایین می‌آید (شکل ۳۷). مقدار سقوط او، از بالای صخره تا پایین مسیر تاب، ۸٫۵ft است. پیچک تحمل کشش

www.YasDL.com

بیشتر از ۲۵۰lb را ندارد. آیا پیچک پاره می‌شود؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۲۸

۲۹. اندازهٔ نیروی جاذبهٔ گرانشی میان ذره‌ای به جرم m_1 و ذره‌ای به جرم m_2

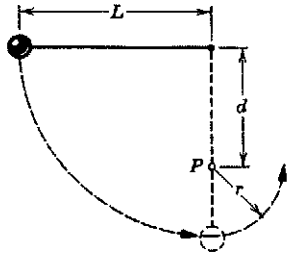
$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2}$$

است؛ که در آن G ثابت و x فاصلهٔ بین دو ذره است. (الف) تابع انرژی پتانسیل، $U(x)$، را پیدا کنید؟ فرض کنید در $x \to \infty$، $U(x) \to 0$. (ب) چقدر کار لازم است تا فاصلهٔ دو ذره را از $x = x_1$ به $x = x_1 + d$ افزایش بدهیم؟

۳۰. جسمی به جرم ۱٫۱۸kg تحت اثر نیروی خالص پایستاری است که دقیقاً از رابطهٔ $F = -3x - 5x^2$ به‌دست می‌آید؛ F برحسب نیوتون و x برحسب m است. (الف) انرژی پتانسیل جسم در $x = 2.26\text{m}$ چقدر است؟ فرض کنید $U(0) = 0$ است. (ب) سرعت جسم، در $x = 4.91\text{m}$ برابر با 4.13m/s و در جهت منفی x است. سرعت آن، هنگامی که از $x = 1.77\text{m}$ می‌گذرد، چقدر است؟

۳۱. فنری داریم که از قانون هوک پیروی نمی‌کند. نیرویی که این فنر وارد می‌کند (برحسب نیوتون) $52.8x + 38.4x^2$ در جهت مخالف کشش است؛ x مقدار کشیدگی فنر برحسب متر است. (الف) کار لازم برای کشیدن فنر از $x = 0.522\text{m}$ به $x = 1.34\text{m}$ چقدر است؟ (ب) یک سر فنر را به‌جایی می‌بندیم و ذره‌ای به جرم ۲٫۱۷kg به سر دیگر آن وصل می‌کنیم. فنر را 1.34m می‌کشیم و بعد ذره را از حالت سکون رها می‌کنیم. این ذره، هنگامی که مقدار کشیدگی فنر $x = 0.522\text{m}$ است، چه سرعتی دارد؟ (ج) آیا نیروی این فنر پایستار است یا ناپایستار؟ توضیح بدهید.

۳۲. در شکل ۳۸ طول ریسمان برابر با $L = 120\text{cm}$، و فاصلهٔ نقطهٔ آویز ریسمان تا میخ برابر با 75.0cm است. گلوله را از حالت سکون، از وضعیتی که در شکل مشخص است، رها می‌کنیم. گلوله روی مسیر خط‌چین حرکت می‌کند. سرعت گلوله (الف) در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر و (ب) در بالاترین نقطهٔ مسیر، پس از اینکه ریسمان دور میخ می‌پیچد، چقدر است؟



شکل ۳۸. مسئله‌های ۳۲ و ۳۳

۳۳. در شکل ۳۸، نشان بدهید که شرط اینکه وزنهٔ آونگ یک دور کامل حول میخ بزند، و ریسمان شل نشود، آن است که $d > 3L/5$ باشد. (راهنمایی: وزنه در نقطهٔ اوج مسیر باید در حال حرکت باشد، در غیر این‌صورت ریسمان شل می‌شود.)

۳۴. جسمی به جرم m، که به یک سرریسمانی بسته شده است، روی دایره‌ای به شعاع R در صفحهٔ قائم حرکت می‌کند. حداقل سرعت جسم در بالاترین نقطهٔ مسیر چقدر باشد تا ریسمان همچنان کشیده بماند؟

۳۵. جسمی به جرم ۳٫۲۲kg، از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، به‌اندازهٔ مسافت d روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی پایین می‌آید، و در آنجا به فنری با جرم ناچیز می‌رسد (شکل ۳۲). زاویهٔ شیب سطح ۲۸٫۰° است. جسم ۲۱٫۴cm دیگر هم پایین می‌آید و درآنجا، در اثر فشرده شدن فنر، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. ثابت نیروی فنر 427N/m است. (الف) d چقدر است؟ (ب) سرعت جسم پس از رسیدن به فنر همچنان، تا مدتی، افزایش می‌یابد. جسم چه مسافتی، از لحظهٔ رسیدن به فنر، می‌پیماید تا به بیشینهٔ سرعتش برسد؟

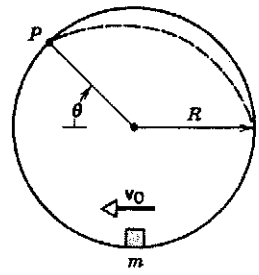
۳۶. کودکی در بالای قطعهٔ یخی به شکل نیمکره نشسته است (شکل ۳۹). در اثر ضربهٔ بسیار کوچکی که به او زده می‌شود شروع به لغزیدن می‌کند. نشان بدهید که، اگر یخ بدون اصطکاک باشد، کودک در ارتفاع $2R/3$ از یخ جدا می‌شود. (راهنمایی: هنگام جدا شدن کودک از یخ، نیروی عمودی سطح صفر می‌شود.)

شکل ۳۹. مسئلهٔ ۳۶

۳۷. ذرهٔ m در شکل ۴۰ روی ریلی در داخل دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. اصطکاکی درکار نیست. سرعت جسم، در پایین‌ترین

www.YasDL.com

نقطهٔ مسیر v_0 است. (الف) حداقل مقدار v_0، یعنی v_m، برای اینکه m بتواند یک دورکامل بزند و از ریل جدا نشود چقدر است؟ (ب) فرض کنید $v_0 = 0.775 v_m$ است. ذره تا نقطهٔ P بر ریل حرکت می‌کند و در آنجا از ریل جدا می‌شود و روی مسیری که با خط‌چین مشخص شده است حرکت می‌کند. مکان زاویه‌ای (θ) نقطهٔ P را پیدا کنید.

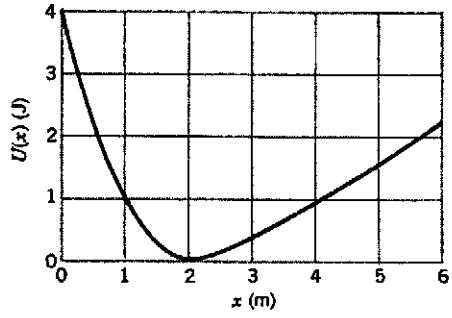


شکل ۴۰. مسئلهٔ ۳۷

۳۸. فرض کنید که به جای میلهٔ شکل ۲۴، ریسمانی بسیار کشسان، مثلاً از جنس لاستیک بگذاریم. هنگامی که گلوله رها می‌شود، ریسمان هنوز کشیده نشده و طول آن L است. (الف) توضیح بدهید که چرا انتظار دارید گلوله به نقطه‌ای پایین‌تر از مسافت L زیر نقطهٔ ثابت ریسمان برسد. (ب) با استفاده از مفاهیم دینامیکی و انرژی، نشان بدهید که اگر ΔL نسبت به L کوچک باشد، ریسمان به‌اندازهٔ $\Delta L = 3mg/k$ کشیده می‌شود؛ k ثابت نیروی ریسمان است. توجه کنید که هر چه k بزرگتر باشد ΔL کوچکتر است و تقریب $\Delta L \ll L$ بهتر می‌شود. (ج) نشان بدهید که در این شرایط سرعت گلوله در پایین مسیر $v = \sqrt{2g(L - 3mg/2k)}$ است، یعنی کمتر از مقداری که در حالت ناکشسان ($k = \infty$) بود. با استفاده از پایستگی انرژی، یک توضیح فیزیکی برای این نتیجه ارائه کنید.

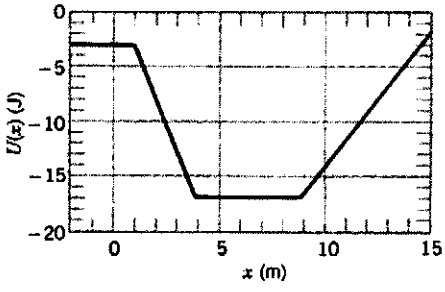
بخش ۸ـ۴ سیستمهای پایستار یک‌بعدی: حل کامل

۳۹. ذره‌ای در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل $U(x)$ در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند به‌صورت شکل ۴۱ است. (الف) نمودار نیروی $F(x)$ وارد بر ذره را به‌طورکمی رسم کنید؛ مقیاس x را همان مقیاس شکل ۴۱ بگیرید. (ب) انرژی مکانیکی (ثابت) ذره، E، برابر با $4.0\,J$ است. نمودار انرژی جنبشی ذره، $K(x)$، را مستقیماً روی همان شکل ۴۱ رسم کنید.



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۳۹

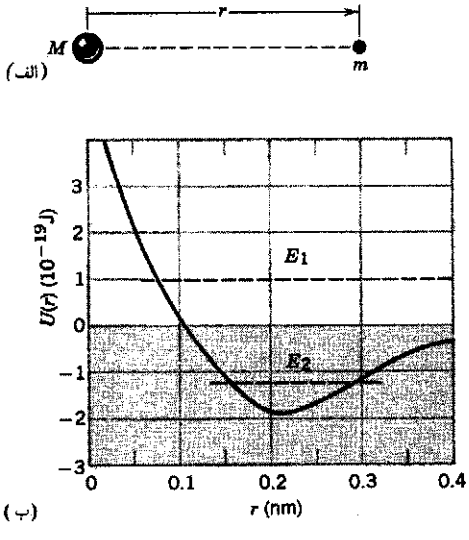
۴۰. ذره‌ای به جرم $2.0\,kg$ در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل $U(x)$ در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند به صورت شکل ۴۲ است. در $x = 2.0\,m$ سرعت ذره $-2.0\,m/s$ است.



شکل ۴۲. مسئلهٔ ۴۰

(الف) نیروی وارد بر ذره در این نقطه چقدر است؟ (ب) ذره در چه محدوده‌ای از x حرکت می‌کند. (ج) سرعت ذره در $x = 7.0\,m$ چقدر است؟

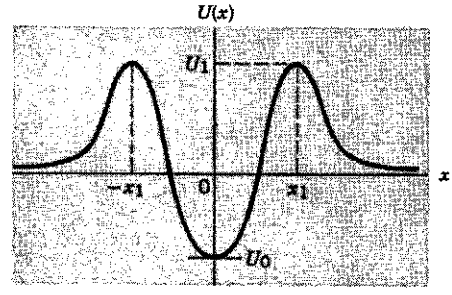
۴۱. شکل ۴۳الف اتمی به جرم m را در فاصلهٔ r از اتم ساکنی به جرم m نشان می‌دهد؛ $m \ll M$ است. شکل ۴۳ب تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ برحسب مکان اتم سبکتر را نشان می‌دهد. حرکت این اتم را (الف) اگر انرژی مکانیکی کل از صفر بزرگتر، مثلاً E_1، باشد، و (ب) اگر این انرژی از صفر کوچکتر، مثلاً E_2 باشد، توصیف کنید. به‌ازای $E_1 = 1.0 \times 10^{-19}\,J$، و در $r = 0.30\,nm$ (ج) انرژی پتانسیل، (د) انرژی جنبشی، و (هـ) (اندازه و جهت) نیروی وارد بر ذرهٔ متحرک را به‌دست بیاورید.



شکل ۴۳. مسئلهٔ ۴۱

www.YasDL.com

۴۲. یک ذرهٔ آلفا (هستهٔ هلیم)، با انرژی پتانسیلی به‌صورت شکل ۴۴، داخل هستهٔ بزرگی مقید است. (الف) تابعی از x بسازید که به این شکل کلی باشد: یک کمینه به مقدار U_0 در $x = 0$ و یک بیشینه به مقدار U_1 در $x = x_1$ و $x = -x_1$ داشته باشد. (ب) نیروی بین ذرهٔ آلفا و هسته را به‌صورت تابعی از x رسم کنید. (ج) انواع حرکتهای ممکن را توصیف کنید.



شکل ۴۴. مسئلهٔ ۴۲

بخش ۸ـ۵ سیستمهای پایستار دو و سه‌بعدی

۴۳. نشان بدهید که، به‌ازای سرعتهای اولیهٔ یکسان v_0، سرعت v همهٔ پرتابه‌ها، در ارتفاع یکسان، یکسان است و به زاویهٔ پرتاب بستگی ندارد. مقاومت هوا را به‌حساب نیاورید.

۴۴. انرژی پتانسیل متناظر با نیروی دوبعدی معینی $U(x,y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ است. (الف) F_x و F_y را به‌دست بیاورید. بردار نیرو را در هر نقطه، برحسب مختصات x و y آن نقطه، بیان کنید. (ب) F_r و F_θ را به‌دست بیاورید و بردار نیرو را در هر نقطه، برحسب مختصات قطبی r و θی آن نقطه، بیان کنید. (ج) آیا مدل فیزیکی‌ای برای چنین نیرویی به‌نظرتان می‌رسد؟

۴۵. انرژی پتانسیل یوکاوا

$$U(r) = -\frac{r_0}{r}U_0 e^{-r/r_0}$$

توصیف نسبتاً دقیقی از برهم‌کنش بین هستکها (یعنی نوترونها و پروتونها که اجزای سازندهٔ هسته‌اند) به‌دست می‌دهد. ثابت r_0 در حدود $1.5 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$، و ثابت U_0 در حدود $50\,\mathrm{MeV}$ است. (الف) عبارت نیروی جاذبهٔ متناظر با این پتانسیل را پیدا کنید. (ب) نشان بدهید که این نیرو کوتاه‌برد است؛ به این منظور، نسبت مقادیر نیرو در هر یک از فواصل $r = 2r_0$، $r = 4r_0$، و $r = 10r_0$ را به مقدار آن در $r = r_0$ حساب کنید.

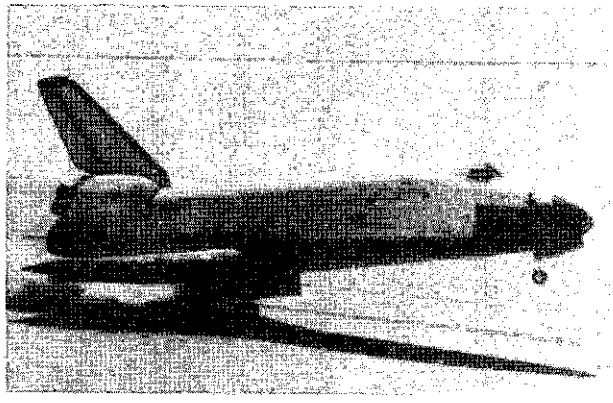
۴۶. با انتگرال‌گیری در روی همان سه مسیر مثال ۵، نشان بدهید که نیروی $\mathbf{F} = -k_1 y\mathbf{i} - k_2 x\mathbf{j}$، اگر $k_1 \neq k_2$ باشد ناپایستار است.

بخش ۸ـ۶ پایستگی انرژی در سیستمهای ذرات

۴۷. توله خرسی به جرم $25.3\,\mathrm{kg}$ از حالت سکون روی تنهٔ درخت کاجی می‌لغزد و $12.2\,\mathrm{m}$ پایین می‌آید؛ سرعت او در پایین مسیر $5.56\,\mathrm{m/s}$ است. (الف) انرژی پتانسیل اولیهٔ [illegible]

(ب) انرژی جنبشی‌اش در پایین درخت چقدر است؟ (ج) تغییر انرژی مکانیکی توله خرس، در اثر نیروهای اصطکاک، چقدر است؟

۴۸. فضاپیمای شاتل (به جرم $79000\,\mathrm{kg}$)، هنگام بازگشت از مدار



شکل ۴۵. مسئلهٔ ۴۸

به زمین، با سرعت $18000\,\mathrm{mi/h}$ وارد جو می‌شود؟ این سرعت به تدریج کم می‌شود تا شاتل به‌سرعت فرود ۱۹۰ گره (یعنی $220\,\mathrm{mi/h}$) برسد. انرژی جنبشی فضاپیما (الف) هنگام ورود به جو و (ب) هنگام فرود چقدر است (شکل ۴۵)؟ (ج) چه بر سر انرژی "از دست رفته" می‌آید؟

۴۹. شخصی به جرم $68\,\mathrm{kg}$ در حال سقوط آزاد با سرعت حد ثابت $59\,\mathrm{m/s}$ است. آهنگ افزایش انرژی داخلی این شخص و هوای اطراف او چقدر است؟

۵۰. رودخانه‌ای طی عبور از تنداب در مسیرش $15\,\mathrm{m}$ ارتفاع از دست می‌دهد. سرعت آب، هنگام ورود به تنداب $3.2\,\mathrm{m/s}$، و هنگام خروج $13\,\mathrm{m/s}$ است. چند درصد از انرژی پتانسیل که آب، در گذشتن از تنداب، از دست می‌دهد به شکل انرژی جنبشی آب در پایین رود ظاهر می‌شود؟ چه بر سر بقیهٔ انرژی می‌آید؟

۵۱. سنگی به جرم $524\,\mathrm{kg}$ از حالت سکون روی شیب تپه‌ای شروع به لغزش می‌کند. طول شیب $488\,\mathrm{m}$ و ارتفاع آن $292\,\mathrm{m}$ است. سرعت سنگ در پایین تپه $62.6\,\mathrm{m/s}$ است. این سنگ طی لغزش، در اثر اصطکاک، چقدر انرژی مکانیکی از دست داده است؟

۵۲. پرتابه‌ای به جرم $9.4\,\mathrm{kg}$ در راستای قائم به بالا پرتاب می‌شود. طی مدتی که پرتابه به بالا می‌رود، $68\,\mathrm{kJ}$ از انرژی مکانیکی آن در اثر اصطکاک با هوا تلف می‌شود. اگر مقاومت هوا ناچیز بود، پرتابه چقدر بالاتر می‌رفت؟

۵۳. جسمی به جرم $4.26\,\mathrm{kg}$، با سرعت $7.81\,\mathrm{m/s}$ روی شیبی به‌زاویهٔ $33.0°$ شروع به بالا رفتن می‌کند. این جسم، با فرض اینکه $34.6\,\mathrm{J}$ از انرژی مکانیکی‌اش صرف مقابله با اصطکاک شود، تا چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟

۵۴. سنگی به وزن w در امتداد قائم با سرعت اولیهٔ v_0 به بالا پرتاب می‌شود. فرض کنید که نیروی مقاومت هوا، f، در مسافت y که سنگ طی می‌کند، به‌اندازهٔ fy از انرژی مکانیکی آن می‌کاهد. (الف) نشان

www.YasDL.com

بدهید که بیشترین ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد

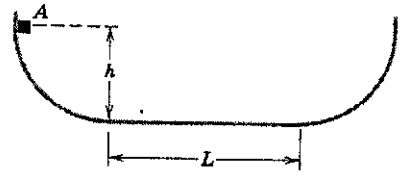
$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}$$

است. (ب) نشان بدهید که سرعت سنگ، هنگام برخورد با زمین برابر است با

$$v = v_0 \left(\frac{w - f}{w + f}\right)^{1/2}$$

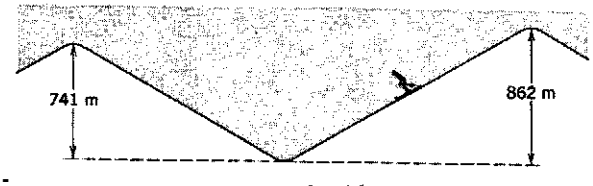
۵۵. جسمی به جرم ۱٫۳۴kg، که روی سطحی افقی در حال لغزش است، به فنری با ثابت نیروی ۱٫۹۳N/cm برمی‌خورد. جسم فنر را به‌اندازهٔ ۴٫۱۶cm، نسبت به حالت آزاد آن، فشرده می‌کند. از زمانی که جسم به فنر می‌خورد تا زمانی که ساکن می‌شود، در اثر اصطکاک میان جسم و سطح ۱۱۷mJ انرژی مکانیکی اتلاف می‌شود. سرعت جسم در لحظهٔ برخورد با فنر چقدر بوده است؟

۵۶. جسم کوچکی به جرم $m = 234\text{g}$ در مسیری که در شکل ۴۶ نشان داده شده است می‌لغزد؛ دو انتهای مسیر به طرف بالا شیب دارند و بخش میانی آن تخت است. طول بخش میانی $L = 2{,}16\text{m}$ است. بخشهای خمیدهٔ مسیر بدون اصطکاک‌اند. جسم، هنگام گذشتن از بخش تخت مسیر، در اثر اصطکاک ۶۸۸mJ انرژی مکانیکی از دست می‌دهد. اگر این جسم از نقطهٔ A به ارتفاع $h = 1{,}05\text{m}$ نسبت به قسمت تخت مسیر، رها شود، سرانجام، در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟



شکل ۴۶. مسئلهٔ ۵۶

۵۷. ارتفاع دو قلهٔ پوشیده از برف، ۸۶۲m و ۷۴۱m است. از قلهٔ بلندتر تا قلهٔ کوتاهتر یک پیست اسکی هست (شکل ۴۷). (الف) اسکی‌بازی اسکی‌بازی از قلهٔ بلندتر، از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند. اگر این اسکی‌باز از میله‌های اسکی خود استفاده نکند و فقط سربخورد، با چه سرعتی به قلهٔ کوتاهتر می‌رسد؟ فرض کنید که مسیر یخبندان است و عملاً اصطکاکی در کار نیست. (ب) پس از بارش برف، اسکی‌بازی به جرم 54٫4kg با همین شرایط، بدون استفاده از میله‌هایش، شروع به حرکت می‌کند؛ این اسکی‌باز فقط می‌تواند (با سرعت نهایی صفر) خودش را به قلهٔ کوتاهتر برساند. انرژی داخلی چوبهای اسکی و برفِ مسیر چقدر افزایش یافته است؟

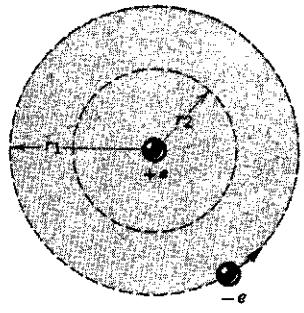


شکل ۴۷. مسئلهٔ ۵۷

۵۸. اندازهٔ نیروی جاذبهٔ بین پروتون با بار مثبت و الکترون با بار منفی در اتم هیدروژن

$$F = k\frac{e^2}{r^2}$$

است، که در آن e بار الکترون، k ثابت، و r فاصلهٔ میان الکترون و پروتون است. فرض کنید که پروتون ساکن است. تصور کنید که الکترون در ابتدا در حال حرکت بر دایره‌ای به شعاع r_1 حول پروتون است و ناگهان به مداری دایره‌ای با شعاع r_2، کوچکتر از r_1، می‌جهد (شکل ۴۸). (الف) با استفاده از قانون دوم نیوتون، تغییر انرژی جنبشی الکترون را حساب کنید. (ب) با استفاده از رابطهٔ نیرو با انرژی پتانسیل، تغییر انرژی پتانسیل اتم را حساب کنید. (ج) در این فرایند، انرژی کل اتم چقدر تغییر کرده است؟ (این انرژی معمولاً به شکل تابش از اتم خارج می‌شود).

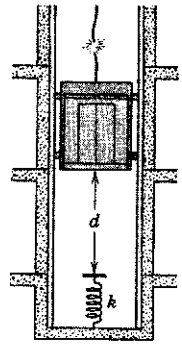


شکل ۴۸. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. آسانسوری به وزن 4000lb در طبقهٔ اول ساختمان ساکن است، چنانکه کف آن به فاصلهٔ $d = 12{,}0\text{ft}$ بالاتر از فنر بازدارندهٔ زیر آسانسور (هم سطح با طبقهٔ همکف) واقع شده است؛ ثابت نیروی این فنر 10000lb/ft است. در این حالت کابل نگهدارندهٔ آسانسور پاره می‌شود (شکل ۴۹). در این لحظه یک ترمز ایمنی به کار می‌افتد و باعث می‌شود که آسانسور با ریلهای مسیر درگیر شود؛ در نتیجه، به‌ازای هر 1٫00ft که آسانسور حرکت می‌کند، 1000ftlb انرژی مکانیکی از سیستم گرفته می‌شود. (الف) سرعت آسانسور، درست پیش از برخورد به فنر، چقدر است؟ (ب) حداکثر فشردگی فنر را حساب کنید. (ج) حداکثر مسافتی را که آسانسور، نسبت به فنر، به بالا به‌طور تقریبی، کل مسافتی که آسانسور قبل

www.YasDL.com

از توقف کامل طی می‌کند چقدر است؟ چرا این جواب دقیق نیست؟



شکل ۴۹. مسئلهٔ ۵۹

۶۰. اتومبیلی به جرم ۱۷۰۰kg با سرعت ثابت ۱۵m/s حرکت می‌کند. در این حالت، موتور آن ۱۶kW توان تولید می‌کند که صرف غلبه بر اصطکاک، مقاومت باد، و غیره می‌شود. (الف) نیروی بازدارندهٔ مؤثر ناشی از مجموعهٔ همهٔ نیروهای اصطکاک چقدر است؟ (ب) اگر اتومبیل بخواهد با سرعت ۱۵m/s از یک شیب ۸٫۰٪ بالا برود، باید چقدر توان از موتور بگیرد؟ (شیب ۸٫۰m ارتفاع به‌ازای ۱۰۰m مسافت افقی.) (ج) اتومبیل در چه شیبی (به‌درصد بیان کنید) با موتور خاموش می‌تواند با سرعت ۱۵m/s پایین بیاید؟

بخش ۸ـ۷ جرم و انرژی

۶۱. (الف) چند ژول انرژی معادل با ۱۲۰ گرم جرم است؟ (ب) این انرژی چند سال نیاز انرژی یک خانه، با مصرف متوسط ۱٫۳۰kW، را تأمین می‌کند؟

۶۲. رابطهٔ "شدت" زلزله در مقیاس ریشتر، M، با انرژی آزاد شده، E، برحسب ژول، چنین است

$$\log E = ۱٫۴۴M + ۵٫۲۴$$

(الف) شدت زلزلهٔ سال ۱۹۸۹ در منطقهٔ سان‌فرانسیسکو (شکل ۵۰) ۷٫۱ بود. در این زلزله چقدر انرژی آزاد شده بود؟ (ب) مقدار کاهش جرم متناظر با این انرژی آزاد شده چقدر است؟

۶۳. یک نیروگاه هسته‌ای در اورگون، طی یک سال به‌طور پیوسته ۱۰۳۰MW توان مفید تحویل می‌دهد. علاوه بر این، ۲۱۰۰MW توان هم به شکل انرژی گرمایی به رود کلمبیا منتقل می‌کند. تغییر جرم سوخت هسته‌ای، پس از یک سال کار نیروگاه، چقدر است؟

۶۴. در سال ۱۹۸۳، ایالات متحده در حدود $۲٫۳۱ \times ۱۰^{۱۲}$kWh انرژی الکتریکی تولید کرد. فرض کنید که این انرژی در نیروگاههای هسته‌ای تولید شده باشد. مقدار کاهش جرم سوخت هسته‌ای این نیروگاهها، برای تولید این انرژی چقدر بوده است؟

۶۵. جرم یک قرص آسپیرین ۳۲۰mg است. انرژی متناظر با این جرم (به شکل بنزین) تا چند مایل توان یک اتومبیل را تأمین می‌کند؟ فرض کنید اتومبیل با هر گالن بنزین ۳۰ مایل حرکت می‌کند و گرمای احتراق بنزین ۱۳۰MJ/gal است. جواب خودتان را برحسب محیط استوایی زمین بیان کنید.

۶۶. توان فضاپیمایی از نابودی ماده‌ـپادماده تأمین می‌شود. چقدر ماده و پادماده باید نابود شود تا فضاپیمایی به جرم ۱۸۲۰ton را از سکون به یک دهم سرعت نور برساند؟ رابطهٔ غیرنسبیتی انرژی جنبشی را به‌کار ببرید.

۶۷. خورشید با آهنگ ۴×۱۰^{۲۶}W انرژی تابش می‌کند. هر روز "چند تن آفتاب" به زمین می‌رسد؟

شکل ۵۰. مسئلهٔ ۶۲

www.YasDL.com

۶۸. انرژی بستگی هستهٔ یک اتم برابر است با تفاضل مجموع انرژیهای سکون پروتونها و نوترونهای سازندهٔ آن هسته، و انرژی سکون خود هسته. هستهٔ اتم طلا ۷۹ پروتون و ۱۱۸ نوترون دارد و جرم آن ۱۹۶٫۹۲۳۲u است. انرژی بستگی این هسته را حساب کنید. (جرم پروتون ۱٫۰۰۷۲۸u، و جرم نوترون ۱٫۰۰۸۶۷u است؛ انرژی سکون یک یکای جرم اتمی برابر با ۹۳۱٫۵MeV است.)

بخش ۸ـ۸ کوانتش انرژی

۶۹. انرژی یک اتم چقدر باید تغییر کند تا نوری با بسامد $\times$ ۵٫۳۴ $10^{14}\,s^{-1}$ از آن گسیل شود؟

۷۰. (الف) انرژی اتم هیدروژنی $-3{,}4\,eV$ است. اگر این انرژی به $-13{,}6\,eV$ تغییر کند، فرکانس نور چقدر خواهد بود؟ (ب) آیا این نور گسیل می‌شود یا جذب؟

پروژه‌های کامپیوتری

۷۱. فرض کنید نیروی وارد بر ذره‌ای $\mathbf{F} = 8xy^3\mathbf{i} + 12x^2y^2\mathbf{j}$ باشد. این نیرو پایستار، و پتانسیل متناظر با آن $U = -4x^2y^3$ است. با استفاده از این تابع می‌توانید بعضی از ویژگیهای مهم نیروهای پایستار را نشان بدهید. اولاً، انرژی پتانسیل ذره فقط به مختصات آن بستگی دارد. روی یک کاغذ دستگاه مختصاتی رسم کنید که در آن، x و y هر دو بین $-5\,m$ تا $+5\,m$ باشند. اکنون با استفاده از یک برنامهٔ کامپیوتری یا الگوریتم، مقادیر انرژی پتانسیل را به‌ازای همهٔ مقادیر صحیح x و y (برحسب متر)، بین دو حد بالا، به‌دست بیاورید. و این مقادیر را، در نقاط متناظر، به نمودار منتقل کنید. با استفاده از این نمودار، به پرسشهای زیر جواب بدهید. (الف) طی حرکت ذره از $x = -5\,m$، $y = -5\,m$ به مبدأ، این نیرو چقدر کارانجام می‌دهد؟ (ب) طی حرکت ذره از مبدأ به $x = +5\,m$، $y = +3\,m$ چطور؟ (ج) طی حرکت ذره از $x = -5\,m$، $y = -5\,m$ به $x = +5\,m$، $y = +3\,m$ چطور؟ جواب شما باید برابر با مجموع جوابهای قسمتهای (الف) و (ب) باشد. (د) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی $900\,J$ شروع می‌کند و به نقطهٔ $x = +5\,m$، $y = +2\,m$ می‌رسد. اگر این نیرو تنها نیروی وارد بر آن باشد، انرژی جنبشی ذره در نقطهٔ اخیر چقدر است؟ (ه) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی $900\,J$ شروع می‌کند و به $x = +5\,m$، $y = -2\,m$ می‌رسد. اگر این نیرو تنها نیروی وارد بر آن باشد، انرژی جنبشی ذره در نقطهٔ اخیر چقدر است؟ (و) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی $600\,J$ شروع می‌کند و در راستای خط $x = -y$ به‌طرف $x = +5\,m$، $y = -5\,m$ حرکت می‌کند. نیروی دیگری هم لازم است تا ذره دراین مسیر بماند اما فرض کنید که این نیرو همواره بر مسیر عمود است. ذره در کجا می‌ایستد؟

۷۲. روبوتی صندوقی به جرم $20\,kg$ را با سرعت ثابت، از $x = 0$ تا $x = 5{,}0\,m$، روی زمین هل می‌دهد. شرایط سطح زمین تغییر می‌کند، و روبوت هم صندوق را با نیروی افقی متغیری هل می‌دهد تا سرعت آن ثابت بماند. معلوم می‌شود که رابطهٔ $F(x) = 0{,}30mg\sqrt{x}e^{-0{,}20x}$ توصیف خوبی برای این نیروست؛ در این رابطه، x برحسب متر و F برحسب نیوتون است. کاری را که روبوت بین $x = 0$ و $x = 5\,m$ انجام می‌دهد حساب کنید.

کار انجام شده از رابطهٔ $W = \int_0^5 F\,dx$ به‌دست می‌آید. این انتگرال را نمی‌شود به‌طور تحلیلی محاسبه کرد، اما می‌شود مقدار آن‌را با روشهای عددی، به کمک کامپیوتر، تخمین زد. ناحیهٔ انتگرال‌گیری را N بازه، هر یک به اندازهٔ Δx، تقسیم کنید، و F_i را مقدار نیرو در مرکز بازهٔ iام بگیرید. در این صورت خواهیم داشت $\int_0^5 F\,dx \approx \Delta x\Sigma_{i=1}^{N} F_i$. هر چه Δx کوچکتر شود، براورد دقیقتر می‌شود. اما Δx را خیلی هم نمی‌شود کوچک کرد چون در این‌صورت در محاسبهٔ مجموع، ارقام بامعنی از دست می‌روند. (شاید بخواهید از روش سیمسون استفاده کنید، که براورد بهتری می‌دهد. برای آشنایی با جزئیات این روش به کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال رجوع کنید.)

برنامه‌ای برای کامپیوتر بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که کار این نیرو را محاسبه کند. در این برنامه باید بتوانید مقادیر x_0، x_f، و N را وارد کنید. جمع را می‌توانید با یک حلقهٔ تکرار انجام بدهید. در هر بار تکرار حلقه، نیرو در مرکز بازه حساب می‌شود و به مجموعی که قبلاً حساب شده است افزوده می‌شود. در اجرای اول بگیرید $N = 20$؛ سپس برنامه را چند بار دیگر هم اجرا کنید و هر بار N را دو برابرکنید. هنگامی که نتیجهٔ دو اجرای متوالی، تا سه رقم بامعنی، یکسان شد کار را متوقف کنید.

۷۳. نیروی پایستار $\mathbf{F}$ با مؤلفه‌های $F_x = y(1-x)e^{-x}$، $F_y = xe^{-x}$، و $F_z = 0$، بر ذره‌ای وارد می‌شود. (الف) فرض کنید ذره از مبدأ، در راستای محور x، حرکت می‌کند و به $x = 2{,}0\,m$ می‌رسد؛ سپس در راستای خطی موازی با محور y حرکت می‌کند و به $x = 2{,}0\,m$، $y = 2{,}0\,m$ می‌رسد. کار انجام شده توسط این نیرو را، به‌راحتی می‌توان به‌طور تحلیلی محاسبه کرد. این محاسبه را انجام بدهید. حالا فرض کنید که ذره از مبدأ در راستای محور y حرکت می‌کند. به $y = 2{,}0\,m$ می‌رسد؛ سپس در راستای خطی موازی با محور x حرکت می‌کند و به $x = 2{,}0\,m$، $y = 2{,}0\,m$ می‌رسد. کارنیرو را در این مسیر هم حساب کنید، اما این بار با استفاده از انتگرال‌گیری عددی. برای جزئیات روش کار به مسئلهٔ قبلی رجوع کنید. سرانجام، یک برنامهٔ انتگرال‌گیری عددی به‌کار ببرید که کار این نیرو را، در حرکت جسم از مبدأ به نقطهٔ $x = 2{,}0\,m$، $y = 2{,}0\,m$ روی خط $x = y$، محاسبه کند. چون نیرو پایستار است، جواب حاصل از هر سه مسیر (در محدودهٔ دقت محاسبه) باید یکسان باشد. (ب) نیروی $\mathbf{F}$، با مؤلفه‌های $F_x = y^2(1-x)e^{-x}$، $F_y = xe^{-x}$ و $F_z = 0$، ناپایستار است. کار این نیرو را طی حرکت ذره از مبدأ به نقطهٔ $x = 2{,}0\,m$، $y = 2{,}0\,m$، در هر یک از سه مسیر قسمت (الف) حساب کنید. توجه کنید که نتایج حاصل برای مسیرهای مختلف یکسان نخواهد بود.