فصل ۱۸

انتگرالهای چندگانه

صفحه ۱۹۳

درمسائل ۱۷–۲۲، ناحیه‌ای را رسم کنید که انتگرال‌گیری روی آن صورت می‌گیرد و انتگرال معادلی را بیابید که ترتیب انتگرال‌گیری در آن، معکوس ترتیب انتگرال مفروض باشد. هر دو انتگرال را محاسبه کنید.

۲۲. $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 dx\,dy$

۲۳. $\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\,dx\,dy$

۲۴. $\int_0^1\int_0^{4-x^2} dy\,dx$

صفحه ۱۹۴

انتگرالهای مسائل ۳۱–۳۶ را به این ترتیب محاسبه کنید که با معکوس کردن ترتیب انتگرال‌گیری انتگرال معادلی بیابید و سپس از آن انتگرال بگیرید.

۳۵. $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

۳۶. $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

صفحه ۱۹۸

در مسائل ۱–۸، مساحت ناحیهٔ محدود به خمها و خطوط مفروض را به کمك انتگرال‌گیری دوگانه بیابید.

۸. از بالا به $y=x^2$، از پایین به $y=-1$، از چپ به $x=-2$، و از راست به $y=2x-1$

صفحه ۱۹۹

انتگرالهای مسائل ۹–۱۴، مساحت نواحیی از صفحهٔ xy را مشخص می‌کنند. در هر مورد، ناحیهٔ را رسم کنید، خمهای محدودکنندهٔ آن را با معادلاتشان مشخص کنید. مختصات نقاط مرزی یعنی محل تقاطع خمها را بیابید. سپس مساحت ناحیه را تعیین کنید.

۱۳. $\int_{-1}^0\int_{-2x}^{1-x}dy\,dx+\int_0^2\int_{-x/2}^{1-x}dy\,dx$

۱۴. $\int_0^2\int_{x^2-4}^0 dy\,dx+\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}}dy\,dx$

صفحه ۲۰۸

۱۰. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$

۱۳. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy\,dx$

۱۵. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که خم $r=(2-\sin 2\theta)^{1/2}$ از ربع اول جدا می‌کند.

۲۲. از تابع $f(x,y)=(\ln(x^2+y^2))/(x^2+y^2)$ روی ناحیهٔ بین دوایر $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=e^2$ انتگرال بگیرید.

صفحه ۲۰۹

۳۵. فرض کنید R ناحیه‌ای واقع در ربع اول صفحهٔ xy و محدود به هذلولیهای $xy=1$ و $xy=9$ و خطوط $y=x$ و $y=4x$ باشد (شکل ۳۱.۱۸). با استفاده از تبدیل $x=u/v$، $y=uv$ با ضوابط $u>0$ و $v>0$، انتگرال

$$\iint_R\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dx\,dy$$

را به صورت انتگرالی روی ناحیهٔ مناسبی چون G واقع در صفحهٔ uv بنویسید. سپس این انتگرال را روی G محاسبه کنید.

۳۸. انتگرال

$$\int_0^2\int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\,dx\,dy$$

را با استفاده از تبدیل $x=u+1/2v$، $y=v$ و تبدیل این انتگرال به یك انتگرال روی ناحیه‌ای چون G در صفحهٔ uv، محاسبه کنید.

صفحه ۲۱۴

درمسائل ۵–۱۸، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱۸. $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{4x^2}^{5-x^2}(x-y+1)\,dz\,dy\,dx$

درمسائل ۲۳–۳۸، حجم اشکال و نواحی را بیابید.

۲۸. ناحیهٔ واقع در یك هشتم اول و محدود به صفحات مختصات، استوانهٔ $x^2+y^2=4$، و صفحهٔ $x+z=3$.

۲۹. ناحیهٔ واقع در یك هشتم اول که به صفحات مختصات، و از بالا به استوانهٔ $x^2+z=1$ و از راست به سهمیوار $y=x^2+z^2$ محدود است. (راهنمایی: نخست نسبت به y انتگرال بگیرید.)

۳۷. ناحیهٔ محصور در بیضیوار

$$(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1$$

۳۹. دامنهٔ انتگرالگیری انتگرال زیر را رسم کنید

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} dz\,dy\,dx.$$

سپس این انتگرال را به‌صورت یک انتگرال مکرر معادل با ترتیبهای زیر بنویسید.

الف) $dy\,dz\,dx$ ب) $dy\,dx\,dz$

پ) $dx\,dy\,dz$ ت) $dx\,dz\,dy$

ث) $dz\,dx\,dy$

صفحه ۲۲۶

۱۳. مطلوب‌است تشکیل یك انتگرال سه گانهٔ مکرر برای حجم کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ در مختصات (الف) کروی، (ب) استوانه‌ای، و (پ) قائم.

۲۲. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از پایین به سهمیوار $z=x^2+y^2$، از اطراف به‌استوانهٔ $x^2+y^2=1$، و از بالا به‌سهمیوار $z=x^2+y^2+1$ محدود است.

۲۹. درکاسه‌ای که به‌شکل نیمکره‌ای به‌شعاع ۵ سانتیمتراست، تا ارتفاع ۳ سانتیمتری آب‌ریخته‌ایم. حجم آب درون‌کاسه را بیابید.

۴۸. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از درون به رویهٔ $\rho=1+\cos\phi$ و از بیرون به کرهٔ $\rho=2$ محدود است.

صفحه ۲۳۲

۲۹. انتگرال

$$\iint \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

را روی ناحیهٔ محصور در یك طوق از پروانهٔ

$$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$$

۴۰. مطلوب‌است حجم ناحیهٔ محدود به‌صفحهٔ $z=0$، استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$، و استوانهٔ $az=a^2-x^2$.

۴۴. مطلوب‌است حجم ناحیهٔ محصور در رویهٔ $\rho=a\sin\phi$ درمختصات کروی.

فصل ۱۹

میدانهای برداری و انتگرالگیری

صفحه ۲۴۰

درمسائل ۹-۲۰، انتگرال $f(x,y,z)$ را روی خم مفروض محاسبه کنید.

۱۷. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$

$\mathbf{R}(t)=(t\sin t+\cos t)\mathbf{i}+(t\cos t-\sin t)\mathbf{j},\quad 0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$

۱۸. $f(x,y,z)=3z\sqrt{3x^2+y^2+z^2}$

$\mathbf{R}(t)=\mathbf{i}+t\mathbf{k},\quad -1\leqslant t\leqslant 1$

۱۹. $f(x,y,z)=\sqrt{3}/(x^2+y^2+z^2)$

$\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k},\quad 1\leqslant t\leqslant 2$

صفحه ۲۴۷

درمسائل ۹-۱۲، مطلوب‌است کاری‌که نیروی $\mathbf{F}(x,y,z)$ روی مسیرمفروض درجهت افزایش مقدار t انجام می‌دهد.

۱۰. $\mathbf{F}(x,y,z)=2y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$

$\mathbf{R}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+\frac{t}{6}\mathbf{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۱۲. $\mathbf{F}(x,y,z)=6z\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+12x\mathbf{k}$

$\mathbf{R}(t)=(\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}+\frac{t}{6}\mathbf{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

درمسائل ۱۳-۱۶، انتگرال شارش میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z)$ را روی خم مفروض محاسبه‌کنید.

۱۴. $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$

$\mathbf{R}(t)=3t\mathbf{j}+4t\mathbf{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

۱۵. $\mathbf{F}(x,y,z)=(x-z)\mathbf{i}+x\mathbf{k}$

$\mathbf{R}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{k},\quad 0\leqslant t\leqslant\pi$

صفحه ۲۴۸

۲۴. مطلوب‌است شار میدانهای برداری

$\mathbf{F}_1(x,y)=2x\mathbf{i}-3y\mathbf{j}$ و $\mathbf{F}_2(x,y)=2x\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$

گذرنده از دایرهٔ

$\mathbf{R}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

صفحه ۲۵۹

درمسائل ۵-۱۰، با استفاده از قضیهٔ گرین، گردش درخلاف جهت ساعت و شار برونسو را درمورد میدان $\mathbf{F}$ و خم C بیابید.

۷. $\mathbf{F}(x,y)=(xy+x)\mathbf{i}+(xy-y)\mathbf{j}$

C: مربع محدود به $x=0$، $x=1$، $y=0$، $y=1$

۸. $\mathbf{F}(x,y)=(x^2-y)\mathbf{i}+(x+y^2)\mathbf{j}$

C: مثلث محدود به $y=0$، $x=1$، و $y=x$

با استفاده از یکی از دوصورت قضیهٔ گرین، انتگرالهای خمیده خطی درمسائل ۱۳-۱۸ را محاسبه کنید.

۱۵. $\oint_C (6y+x)\,dx+(y+2x)\,dy$

C عبارت است از دایرهٔ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$.

۱۷. $\oint_C 2xy^3\,dx+4x^2y^2\,dy$

C عبارت است از ناحیهٔ «مثلثی‌شکل» واقع در ربع اول که به‌محور x، خط $x=1$، و خم $y=x^3$ محدود است.

۱۸. $\oint_C (4x-2y)\,dx+(2x-4y)\,dy$

C عبارت‌است از دایرهٔ $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

صفحه ۲۶۷

۵. مطلوب‌است مساحت بخشی از رویهٔ $x^2-2y-2z=0$ که بالای‌مثلثی واقع درصفحهٔ xy ومحدود به‌خطوط $x=2$، $y=0$، و $y=3x$ قرار دارد.

۱۹. مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرال $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ بر رویه‌ای که صفحات $x=0$ و $x=h$ از استوانهٔ $y^2+z^2=a^2$ جدا می‌کنند. h را بزرگتر از ۰ اختیار کنید.

۲۰. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $g(x,y,z)=x^2+y^2$ بر نیمکرهٔ $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

صفحه ۲۶۸

درمسائل ۲۱–۲۶، مطلوب‌است شار میدان برداری **F** گذرنده‌از بخشی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ واقع در یک هشتم اول و در جهتی که ازمبدأ دور می‌شود.

۲۵. $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

صفحه ۲۶۹

۳۰. فرض‌کنید S آن بخش از استوانهٔ $y=\ln x$ واقع در یک‌هشتم اول باشدکه تصویر قائمش برصفحهٔ xz مستطیل $R_{xz}: 1\leqslant x\leqslant e,\ 0\leqslant z\leqslant 1$ است. نیز فرض‌کنید **n** بردار واحدی‌باشدکه بر S عمود ومتوجه بیرون‌صفحهٔ xz است. مطلوب است شار $\mathbf{F}=2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ گذرنده از S و درجهت **n**.

صفحه ۲۷۷

درمسائل ۱–۱۲، با استفاده ازقضیهٔ دیورژانس، شار برونسوی **F** گذرنده از مرز ناحیهٔ D را بیابید.

۵. $\mathbf{F}(x,y,z)=y\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

D: ناحیهٔ واقع در درون‌استوانهٔ توپر $x^2+y^2\leqslant 4$ و بین‌صفحهٔ $z=0$ و سهمیوار $z=x^2+y^2$

۷. $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2\mathbf{i}-2xy\mathbf{j}+3xz\mathbf{k}$

D: ناحیه‌ای که کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ از یک‌هشتم اول جدا می‌کند.

۹. $\mathbf{F}(x,y,z)=2xz\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$

D: گوه‌ای که‌صفحهٔ $z=y$ و استوانهٔ بیضوی $x^2+4y^2=16$ از یک‌هشتم‌اول جدا می‌کنند.

صفحه ۲۸۴

درمسائل ۱–۶، با استفاده از انتگرال رویه‌ای در قضیهٔ استوکس، گردش میدان **F** را روی خم C درجهت مشخص شده بیابید.

۶. $\mathbf{F}=x^2y^3\mathbf{i}+\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

C: مرز دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ واقع‌درصفحهٔ xy، درخلاف جهت ساعت هرگاه ازبالا نگاه‌کنیم.

۷. فرض‌کنید S ناحیهٔ محدود به بیضی $C: 4x^2+y^2=4$ و واقع درصفحهٔ $z=1$ باشد. نیز فرض‌کنید $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ و

$$\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}.$$

مطلوب‌است مقدار

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}.$$

صفحه ۲۹۲

درمسائل ۱۱–۲۵، انتگرالها را محاسبه‌کنید.

۱۹. $\int_{(0,1,1)}^{(2,2,1)} 3x^2\,dx+\frac{z^2}{y}\,dy+2z\ln y\,dz$

۲۰. $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y\cos x\,dx+\cos y\sin x\,dy+dz$

۲۳. انتگرال زیر را روی پاره‌خطی‌که (۰، ۰، ۰) را به (۰، ۳، ۴) وصل می‌کند محاسبه‌کنید

$$\int_C x^2\,dx+yz\,dy+y^2\,dz.$$

صفحه ۲۹۴

۱۴. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای بیضوی که استوانهٔ $x^2+y^2=1$ ازصفحهٔ $x+y+z=1$ جدا می‌کند.

۱۶. مطلوب‌است مساحت ناحیهٔ واقع در بالای صفحهٔ xy که استوانهٔ $x^2+y^2=2ax$ ازمخروط $x^2+y^2=z^2$ جدا می‌کند.

صفحه ۲۹۵

۱۸. سوراخی به‌مقطع مربع و به‌ضلع $2\sqrt{2}$ به‌صورت متقارن درکره‌ای به‌شعاع ۲ ایجاد می‌شود. نشان دهید که مساحت رویهٔ جدا شده برابر است با $16\pi(\sqrt{2}-1)$.