$$= \frac{۲}{۳} \left[(-\frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}) e^{-۲x} \right]_{۰}^{+\infty} = \frac{۱}{۶}$$

بنابراین $Var(Y) = \frac{۱}{۶} - (\frac{۱}{۴})^{۲} = \frac{۵}{۴۸}$. همچنین

$$f_X(x) = \int_{۰}^{x} \frac{۲}{x} e^{-۲x} dy = ۲e^{-۲x} \qquad x > ۰$$

بنابراین $E(X) = \int_{۰}^{+\infty} ۲xe^{-۲x} dx = \frac{۱}{۲}$ و $E(X^{۲}) = \int_{۰}^{+\infty} ۲x^{۲} e^{-۲x} dx = \frac{۱}{۲}$

و در نتیجه $Var(X) = \frac{۱}{۲} - (\frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۴}$. از طرفی

$$E(XY) = \int_{۰}^{+\infty} \int_{۰}^{x} xy \left(\frac{۲}{x} e^{-۲x} \right) dy dx = \int_{۰}^{+\infty} x^{۲} e^{-۲x} dx = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین $COV(X,Y) = \frac{۱}{۴} - (\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۸}$ و در نتیجه

$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{۱}{۸}}{\sqrt{\frac{۱}{۴} \times \frac{۵}{۴۸}}} = \sqrt{\frac{۳}{۵}}$$

همچنین

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{۲}{x} e^{-۲x}}{۲e^{-۲x}} = \frac{۱}{x} \qquad ۰ < y < x < +\infty$$

بنابراین

$$E(Y \mid X = x) = \int_{۰}^{x} y (\frac{۱}{x}) dy = \frac{۱}{۲} x$$

$$E(Y^{۲} \mid X = x) = \int_{۰}^{x} y^{۲} (\frac{۱}{x}) dy = \frac{۱}{۳} x^{۲}$$

و در نتیجه

$$Var(Y \mid X = x) = \frac{۱}{۳} x^{۲} - (\frac{۱}{۲} x)^{۲} = \frac{۱}{۱۲} x^{۲}$$

۷.۴ تمرینات

۱ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & x = ۲, ۴, ۸, ۱۶ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ $E(X)$، $E(\frac{۱}{X})$، $E(۲^{X})$ و $Var(X)$.

۲ اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} k(۲-x) & ۰ < x < ۲ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار k را تعیین کنید و $E(X)$ و $Var(X)$ را محاسبه کنید.

۳ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیعی (تجمعی) زیر باشد

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۱ \\ k(x^۲ - ۱) & ۱ \le x < ۴ \\ ۱ & ۴ \le x \end{cases}$$

مقدار k را تعیین کنید و واریانس X را بدست آورید.

۴ شخصی می‌خواهد اتومبیل خود را به مبلغ ۱۰۰۰۰ تومان بیمه کند، شرکت بیمه تخمین می‌زند که کل مبلغ را با احتمال ۰/۰۰۲ و نصف آن را با احتمال ۰/۰۱ و ۲۵٪ آن را با احتمال ۰/۱ باید بپردازد. شرکت بیمه چه حق بیمه‌ای باید در نظر بگیرد تا سودی معادل ۱۰۰ تومان داشته باشد.

۵ اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین $\frac{۱}{۳}$ و تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} ax + b & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقادیر a و b را تعیین کنید و واریانس X را محاسبه کنید.

۶ اگر X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد، در صورت وجود E(X) را محاسبه کنید.

الف-

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴} x e^{-\frac{x}{۲}} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

ب-

$$f_X(x) = \begin{cases} c(۱ - x^۲) & -۱ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

ج-

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۵}{x^۲} & x > ۵ \\ ۰ & x \le ۵ \end{cases}$$

۷ اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال زیر باشد

x	-۳	۶	۹
$P(X=x)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$

ابتدا $E(X)$ و $E(X^۲)$ را به دست آورید و با استفاده از قوانین امید ریاضی $E\left[(۲X+۱)^۲\right]$ را محاسبه کنید.

۸ اگر برای یک متغیر تصادفی X داشته باشیم که

$$E\left[(X-۲)^۲\right]=۶ \quad , \quad E\left[(X-۱)^۲\right]=۱۰$$

در این صورت مقادیر μ و $\sigma^۲$ را محاسبه کنید.

۹ از جعبه‌ای که شامل ۴ توپ سیاه و ۲ توپ سبز می‌باشد ۳ توپ به طور متوالی انتخاب می‌گردد و هر توپ قبل از انتخاب توپ دیگر در جعبه قرار می‌گیرد. امید ریاضی تعداد توپهای سبز انتخاب شده را به دست آورید.

۱۰ اگر θ یک مقدار ثابت معلوم باشد و

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}\theta & ۰<x<۱\\ \frac{۱}{۲} & ۱\le x\le ۲\\ \frac{۱}{۲}(۱-\theta) & ۲<x<۳\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

تابع توزیع X و میانگین و واریانس X را به دست آورید.

۱۱ اگر X دارای تابع احتمالی به صورت زیر باشد

x	۰	۱	۲
$P(X=x)$	p	$۱-۲p$	p

به ازای چه مقداری از p واریانس X ماکزیمم می‌شود؟

۱۲ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases}x^۲ & ۰<x\le ۱\\ c & ۱<x<a\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

اگر $E(X)=\frac{۵}{۴}$ باشد مقادیر a و c را تعیین کنید و $Var(۲X+۳)$ را محاسبه کنید.

۱۳ با فرض اینکه متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases}k(۱-|x|) & |x|<۱\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

مقدار k و $P(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2})$ و $E(X)$ را به دست آورید.

۱۴ یک کلاس آمار ۱۰ شاگرد دارد که ۵ نفر آنها ۱۹ ساله، ۳ نفر آنها ۲۰ ساله و ۲ نفر آنها ۲۱ ساله هستند. از این کلاس ۲ شاگرد به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X میانگین سن دو شاگرد انتخابی باشد. تابع احتمال متغیر تصادفی X را به دست آورید و واریانس X را محاسبه کنید.

۱۵ میانگین و واریانس متغیر تصادفی X که دارای تابع چگالی احتمال زیر می‌باشد را به دست آورید .

الف- $x>0$, $f_X(x)=\frac{\lambda^3}{2}x^2e^{-\lambda x}$ ، $\lambda>0$ مقداری ثابت

ب- $-\infty<x<+\infty$ $\quad f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$

ج- $-\infty<x<+\infty$ $\quad f_X(x)=\frac{1}{2\beta}e^{-\frac{|x|}{\beta}}$ ، $\beta>0$ مقداری ثابت

۱۶ میانگین متغیر تصادفی X که دارای تابع احتمال زیر می‌باشد را به دست آورید.

الف- $x=0,1,\ldots,n$ $\quad f_X(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

n عدد صحیح نامنفی و $0<p<1$ مقداری ثابت

ب- $x=0,1,2,\ldots$ $\quad f_X(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ ، $\lambda>0$ مقداری ثابت

ج- $x=0,1,2,\ldots$ $\quad f_X(x)=p(1-p)^x$ ، $0<p<1$ مقداری ثابت

۱۷ سکه سالمی را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم، اگر X برابر تعداد شیرهای مشاهده شده در ۳ مرتبه پرتاب سکه و Y برابر تعداد شیرهای مشاهده شده در ۲ پرتاب اول باشند، تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورده و ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

۱۸ اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{5}x(x+y) & 0<x<1\ ,\ 0<y<2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ $E(X)$ ، $E(Y)$ ، $E(X+Y)$ و $E(XY)$.

۱۹ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع احتمال توأم زیر باشند. نشان دهید که $\rho(X,Y)=\circ$ اما X و Y از یکدیگر مستقل نیستند.

y \ x	−۱	۰	۱
−۱	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۲}{۱۶}$	$\frac{۲}{۱۶}$
۰	$\frac{۲}{۱۶}$	$\frac{۲}{۱۶}$	$\frac{۲}{۱۶}$
۱	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۲}{۱۶}$	$\frac{۲}{۱۶}$

۲۰ اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x\geq \circ \ , \ y\geq \circ \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

ضریب همبستگی X و Y و $Var\ (۲X-۱)$ و $Var\ (۴X+۳Y-۲)$ را محاسبه کنید.

۲۱ توزیع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر می‌باشد

y \ x	۱	۳	۹
۲	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۲۴}$	$\frac{۱}{۱۲}$
۴	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۰
۶	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۲۴}$	$\frac{۱}{۱۲}$

الف- امید ریاضی X و امید ریاضی Y را به دست آورید.

ب- $COV(X,Y)$ را محاسبه کنید، آیا X و Y از یکدیگر مستقل هستند؟

۲۲ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases} ۱ & \circ < x < ۱ \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

اگر $Y=X^{۲}$ باشد $\rho(X,Y)$ و $\rho(X+۱,۲Y-۱)$ را محاسبه کنید.

۲۳ اگر متغیرهای تصادفی X و Y از یکدیگر مستقل بوده و به ترتیب دارای میانگینهای ۲ و ۳ و واریانسهای ۴ و ۵ باشند، امید ریاضی XY و $(X+Y)(X-Y)$ را حساب کنید.

۲۴ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توابع چگالی احتمال $x > ۲$ $f_X(x) = \frac{۸}{x^۳}$ و $۰ < y < ۱$ $f_Y(y) = ۲y$ باشند. امید ریاضی تابع Z=XY را به دست آورید.

۲۵ الف- اگر X و Y دارای میانگینهای ۱ و ۲ و واریانسهای ۳ و ۴ و کواریانس ۱- باشند، اولاً میانگین و واریانس Z=۲X-Y+۱ را محاسبه کنید و ثانیاً مقدار m را به گونه‌ای تعیین کنید که U=mX+Y و V=X-mY ناهمبسته باشند.

ب- اگر بین X و Y رابطهٔ خطی X+۲Y-۱=۰ برقرار باشد و $Var(X) = ۴$، مقادیر $COV(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$ را محاسبه کنید.

۲۶ فرض کنید که

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ۶(۱-x-y) & ۰ < x < ۱ \ , \ ۰ < y < ۱-x \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

کواریانس X و Y و $Var(Y \mid X=x)$ را به دست آورید.

۲۷ فرض کنید که

$$f_X(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_{Y \mid X}(y \mid x) = \binom{n}{y} x^y (۱-x)^{n-y} \quad y = ۰, ۱, \ldots, n$$

تابع احتمال Y را به دست آورده و E(Y) را محاسبه کنید.

۲۸ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k & x^۲ < y < ۱ \ , \ ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار k را تعیین کنید و $E(X \mid Y=y)$ و $\rho(X,Y)$ را محاسبه کنید.

۲۹ اگر $X_۱$، $X_۲$، ... و X_n و همچنین $Y_۱$، $Y_۲$، ... و Y_m متغیرهای تصادفی باشند، نشان دهید که

الف-
$$COV\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i X_i, \sum_{j=۱}^{m} b_j Y_j\right) = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m} a_i b_j \, COV(X_i, Y_j)$$

ب-

$$Var(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j COV(X_i, X_j)$$

۳۰ تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر می‌باشد

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & 0 < x+y < 1 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار k را تعیین کرده و $COV(X,Y)$ و $Var(Y \mid X=x)$ را محاسبه کنید.

۳۱ فرض کنید که

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2} & 0 < x < 1 \quad -(x-1)^2 < y < (x-1)^2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

نشان دهید که X و Y از یکدیگر مستقل نیستند و $E(X \mid Y=y)$ و $E(Y \mid X=x)$ را محاسبه کنید.

۳۲ جعبه‌ای شامل ۳ توپ سفید، ۲ توپ قرمز و ۲ توپ سیاه است. از این جعبه به تصادف ۲ توپ یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب کرده و قرار می‌دهیم

X = تعداد توپهای سفید مشاهده شده

Y = تعداد توپهای قرمز مشاهده شده

الف- تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید.

ب- ضریب همبستگی X و Y و $E(Y \mid X=x)$ را محاسبه کنید.

۳۳ فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(y-x)^a & 0 < x < y < 1 \ , \ a > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار c را تعیین کرده و $P(0 < X < \frac{1}{4} \mid Y = \frac{1}{2})$ و $Var(X \mid Y=y)$ را محاسبه کنید.

۳۴ جعبه‌ای دارای ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سفید است و سکه‌ای وجود دارد که شانس مشاهدهٔ شیر در آن دو برابر خط است. ابتدا سکه را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم اگر شیر مشاهده شد ۲ مهرهٔ قرمز و اگر خط مشاهده شد ۲ مهرهٔ سفید به جعبه اضافه می‌کنیم و سپس ۳ مهره از جعبه خارج می‌کنیم و قرار می‌دهیم

تعداد مهره‌های سفید مشاهده شده در این ۳ مهره $= X$

تعداد مهره‌های قرمز مشاهده شده در این ۳ مهره $= Y$

تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورده و $\rho(X,Y)$ را محاسبه کنید.

۳۵ تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر است

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cxye^{-(x^{۲}+y^{۲})} & x>۰\ ,\ y>۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار c را تعیین کنید و $P\ (X<Y<۲X)$ و $COV(X\,,Y)$ را محاسبه کنید.

۳۶ اگر تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر باشد

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} kxy & x>۰\ ,\ y>۰\ ,\ x^{۲}+y^{۲}\le ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار k را تعیین کنید و $P(X\le Y)$ و $Var(X\mid Y=y)$ را محاسبه کنید.

۳۷ اگر

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\begin{cases} \dfrac{k+a}{y} & ۰<x<y \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}\ ,\quad f_Y(y)=\begin{cases} ۲y & ۰<y<k-a \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقادیر a و k را تعیین کنید و $E\ (Y\mid X=x)$ و ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

۳۸ ظرف A شامل ۱ گلولهٔ سفید و ۱ گلولهٔ سیاه، ظرف B شامل ۲ گلولهٔ سفید و ۲ گلولهٔ سیاه است. به تصادف و با جایگذاری ۲ گلوله از A خارج می‌کنیم، اگر هم رنگ باشند ۱ گلوله سفید و اگر هم رنگ نباشند یک گلولهٔ سیاه به ظرف B اضافه می‌کنیم و سپس به تصادف از B یک گلوله خارج می‌کنیم. فرض کنید X و Y به ترتیب تعداد گلوله‌های سفید خارج شده از A و B باشند. تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورده و $P\ (X+Y\le ۱)$، $Var(Y\mid X=۰)$ و $Var(X+Y-۲)$ را محاسبه کنید.

۳۹ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} ۱ & ۰<x<۱\ ,\ x<y<x+۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$E\ (X\mid Y=y)$ و ضریب همبستگی X و Y را به دست آورید.