x	۲	۳	۴
$f_{X\mid Y}(x\mid ۳)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$

بنابراین

$$E(X^{۲}\mid Y=۳)=\sum_{x=۲}^{۴}x^{۲}f_{X\mid Y}(x\mid ۳)=(۲^{۲})(\frac{۱}{۴})+(۳^{۲})(\frac{۲}{۴})+(۴^{۲})(\frac{۱}{۴})=\frac{۳۸}{۴}=۹/۵$$

مثال ۲.۵.۴ در مثال ۶.۴.۴، $Var(X\mid Y=y)$ را محاسبه کنید.

حل در مثال ۶.۴.۴ داشتیم که

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & ۰<x<y<+\infty\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}\quad,\quad f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y} & y>۰\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{۱}{y}\qquad ۰<x<y<+\infty$$

در نتیجه

$$E(X\mid Y=y)=\int_{۰}^{y}x(\frac{۱}{y})dx=\frac{۱}{y}\left[\frac{۱}{۲}x^{۲}\right]_{۰}^{y}=\frac{y}{۲}$$

$$E(X^{۲}\mid Y=y)=\int_{۰}^{y}x^{۲}(\frac{۱}{y})dx=\frac{۱}{y}\left[\frac{۱}{۳}x^{۳}\right]_{۰}^{y}=\frac{y^{۲}}{۳}$$

و بنابراین

$$Var(X\mid Y=y)=\frac{y^{۲}}{۳}-(\frac{y}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۱۲}y^{۲}\qquad y>۰$$

۶.۴ مسائل حل شده

مثال ۱.۶.۴ از جعبه‌ای محتوی ۸ لامپ که ۲ تای آنها سوخته است ۳ لامپ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر X نشان دهندهٔ تعداد لامپهای سوخته باشد، امید ریاضی X را به دست آورید.

حل تابع احتمال X به صورت زیر به دست می‌آید

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{۲}{x}\binom{۶}{۳-x}}{\binom{۸}{۳}}\quad,\quad x=۰,۱,۲$$

بنابراین

x	۰	۱	۲
$f_X(x)$	$\frac{۱۰}{۲۸}$	$\frac{۱۵}{۲۸}$	$\frac{۳}{۲۸}$

و در نتیجه

$$E(X)=\sum_{x=۰}^{۲}xf_X(x)=(۰\times\frac{۱۰}{۲۸})+(۱\times\frac{۱۵}{۲۸})+(۲\times\frac{۳}{۲۸})=\frac{۲۱}{۲۸}=\frac{۳}{۴}$$

مثال ۲.۶.۴ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases} a+bx^{۲} & ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

اگر $E(X)=\frac{۳}{۵}$ باشد، مقادیر a و b و تابع توزیع X را به دست آورید.

حل برای اینکه مقادیر a و b را به دست آوریم، دو شرط داریم. شرط اول این است که

$$۱=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=\int_{۰}^{۱}(a+bx^{۲})\,dx=\left[ax+\frac{b}{۳}x^{۳}\right]_{۰}^{۱}=a+\frac{b}{۳}$$

و شرط دوم این است که

$$\frac{۳}{۵}=E(X)=\int_{۰}^{۱} x\,(a+bx^{۲})\,dx=\left[\frac{a}{۲}x^{۲}+\frac{b}{۴}x^{۴}\right]_{۰}^{۱}=\frac{a}{۲}+\frac{b}{۴}$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول بالا مقادیر $a=\frac{۳}{۵}$ و $b=\frac{۶}{۵}$ به دست می‌آید. همچنین برای مقادیر $۱>x\geq ۰$ داریم که

$$F_X(x)=\int_{۰}^{x}\left(\frac{۳}{۵}+\frac{۶}{۵}t^{۲}\right)dt=\frac{۳}{۵}t+\frac{۲}{۵}t^{۳}\Big|_{۰}^{x}=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲}{۵}x^{۳}$$

بنابراین تابع توزیع X برابر است با

$$F_X(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ \frac{۳}{۵}x+\frac{۲}{۵}x^{۳} & ۰\leq x<۱ \\ ۱ & ۱\leq x \end{cases}$$

مثال ۳.۶.۴ نشان دهید که تابع زیر یک تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته X است. آیا E(X) وجود دارد؟

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{۱}{x(x+۱)} & x=۱,۲,۳,\dots \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

حل برای اینکه این تابع یک تابع احتمال باشد بایستی مجموع آن یک شود یعنی

$$\sum_{x=۱}^{+\infty}\frac{۱}{x(x+۱)}=\sum_{x=۱}^{+\infty}\left[\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۱}\right]=\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\right)+\dots=۱$$

زیرا این سری یک سری تلسکوپی با مجموع یک است. اما E(X) وجود ندارد زیرا

$$E(X)=\sum_{x=۱}^{+\infty}\frac{x}{x(x+۱)}=\sum_{x=۱}^{+\infty}\frac{۱}{x+۱}=+\infty$$

که در مقایسه با سری هارمونیک $\sum_{x=۱}^{+\infty}\frac{۱}{۲x}$، یک سری واگرا است.

مثال ۴.۶.۴ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=c\left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1} \qquad x>1\,,\ \theta>1$$

مقدار c را تعیین کنید و امید ریاضی X را به دست آورید.

حل

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=c\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1}dx=\frac{-c}{\theta x^{\theta}}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{c}{\theta}$$

بنابراین $c=\theta$ و در نتیجه

$$E(X)=\int_{1}^{+\infty}\theta x\left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1}dx=\frac{-\theta}{(\theta-1)x^{\theta-1}}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{\theta}{\theta-1}$$

مثال ۵.۶.۴ جعبه‌ای دارای ۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. از داخل جعبه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم و آن را با دو مهرهٔ دیگر از همان رنگ به جعبه بازمی‌گردانیم. سپس دو مهرهٔ دیگر بدون جایگذاری و به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد مهره‌های سفید مشاهده شده در این دو مهره انتخابی در نظر می‌گیریم. تابع احتمال X و واریانس X را به دست آورید.

حل در این مثال $S_X=\{0,1,2\}$ و اگر W و B را به ترتیب پیشامد انتخاب مهرهٔ سفید و سیاه از جعبه دربار اول در نظر بگیریم در این صورت

$$P(X=0)=P(W)P(X=0\mid W)+P(B)P(X=0\mid B)$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}+\frac{3}{5}\times\frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=1)=P(W)P(X=1\mid W)+P(B)P(X=1\mid B)$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}}+\frac{3}{5}\times\frac{\binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{7}{2}}=\frac{18}{35}$$

به همین ترتیب با محاسبه $P(X=2)$ داریم که

x	۰	۱	۲
$f_X(x)$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{5}{35}$

و بنابراین

$$E(X)=\left(0\times\frac{12}{35}\right)+\left(1\times\frac{18}{35}\right)+\left(2\times\frac{5}{35}\right)=\frac{28}{35}$$

$$E(X^{۲}) = (۰\times\frac{۱۲}{۳۵}) + (۱\times\frac{۱۸}{۳۵}) + (۴\times\frac{۵}{۳۵}) = \frac{۳۸}{۳۵}$$

$$Var(X) = \frac{۳۸}{۳۵} - (\frac{۲۸}{۳۵})^{۲} = \frac{۵۴۶}{۱۲۲۵} = \frac{۷۸}{۱۷۵}$$

مثال ۶.۶.۴ یک متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی احتمال زیر است.

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

امید ریاضی تابع $g(X) = e^{-۲X-۳}$ را محاسبه کنید.

حل $E(e^{-۲X-۳}) = \int_{۰}^{+\infty} e^{-۲x-۳}(e^{-x})dx = \int_{۰}^{+\infty} e^{-۳x-۳}dx = -\frac{۱}{۳}e^{-۳x-۳}\Big|_{۰}^{+\infty} = \frac{۱}{۳}e^{-۳}$

مثال ۷.۶.۴ ظرفی دارای ۳ گوی با شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ می‌باشد. ابتدا یک گوی از ظرف خارج می‌شود، سپس یک سکهٔ سالم به تعداد دفعات شمارهٔ گوی خارج شده پرتاب می‌شود.

الف- امید ریاضی تعداد شیرهای مشاهده شده را بدست آورید.

ب- اگر بدانیم حداقل یک شیر مشاهده شده، احتمال اینکه حداکثر ۲ شیر مشاهده شود چقدر است.

حل الف- اگر قرار دهیم تعداد شیرهای مشاهده شده در پرتاب سکه $= X$

$B_i =$ پیشامد اینکه گوی شمارهٔ i از ظرف خارج شود ، $i=۱,۲,۳$

در این صورت $S_X = \{۰,۱,۲,۳\}$ و بنابراین

$$P(X=۰) = \sum_{i=۱}^{۳} P(X=۰ \mid B_i)P(B_i) = \frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}) = \frac{۷}{۲۴}$$

$$P(X=۱) = \sum_{i=۱}^{۳} P(X=۱ \mid B_i)P(B_i) = \frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۸}) = \frac{۱۱}{۲۴}$$

به همین ترتیب تابع احتمال X به صورت زیر به دست می‌آید

x	۰	۱	۲	۳
$f_X(x)$	$\frac{۷}{۲۴}$	$\frac{۱۱}{۲۴}$	$\frac{۵}{۲۴}$	$\frac{۱}{۲۴}$

و در نتیجه $E(X) = \frac{۱۱}{۲۴} + \frac{۱۰}{۲۴} + \frac{۳}{۲۴} = ۱$

ب- $$P(X \le ۲ \mid X \ge ۱) = \frac{P(۱ \le X \le ۲)}{P(X \ge ۱)} = \frac{f_X(۱) + f_X(۲)}{۱ - f_X(۰)} = \frac{\frac{۱۶}{۲۴}}{\frac{۱۷}{۲۴}} = \frac{۱۶}{۱۷}$$

مثال ۸.۶.۴ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است

$$f_X(x)=\begin{cases} k_1 x & 0<x<1 \\ k_2(2-x) & 1\leq x<2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- اگر $E(X)=1$ باشد مقدار k_1 و k_2 را تعیین کنید.

ب- اگر $X>\frac{1}{2}$ باشد احتمال آنکه X از $\frac{3}{2}$ کمتر باشد را بیابید.

حل الف- برای تعیین مقادیر k_1 و k_2 دو شرط زیر را داریم

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_0^1 k_1 x dx+\int_1^2 k_2(2-x)dx=\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}$$

$$1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx=\int_0^1 k_1 x^2 dx+\int_1^2 k_2 x(2-x)dx=\frac{k_1}{3}+\frac{2k_2}{3}$$

با حل دو معادله و دو مجهول بالا مقادیر $k_1=k_2=1$ را به دست می‌آوریم.

ب- $$P(X<\frac{3}{2}\mid X>\frac{1}{2})=\frac{P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})}{P(X>\frac{1}{2})}=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x dx+\int_1^{\frac{3}{2}}(2-x)dx}{1-\int_0^{\frac{1}{2}} x dx}=\frac{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{6}{7}$$

مثال ۹.۶.۴ امید ریاضی متغیر تصادفی X که دارای تابع احتمال زیر است را پیدا کنید.

$$f_X(x)=(\frac{1}{2})^x \qquad x=1,2,3,...$$

حل قرار می‌دهیم $S=E(X)$ بنابراین

$$S=E(X)=\sum_{x=1}^{+\infty} x(\frac{1}{2})^x=\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2})^2+3(\frac{1}{2})^3+...$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{2}S=(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})^3+3(\frac{1}{2})^4+...$$

با تفاضل این دو رابطه داریم که

$$S-\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+...=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

بنابراین $\frac{1}{2}S=1$ و یا $S=2$.

مثال ۱۰.۶.۴ مقدار k را بگونه‌ای تعیین کنید که تابع زیر یک تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی

X باشد و واریانس X را بیابید.

$$f_X(x)=\frac{k}{\beta}\left\{1-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right\}\qquad \alpha-\beta<x<\alpha+\beta\qquad -\infty<\alpha<+\infty,\beta>0$$

حل

$$1=\int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}\frac{k}{\beta}\left\{1-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right\}dx=k\left\{\left[\frac{x}{\beta}-\frac{1}{3}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^3\right]_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}\right\}=k\{2-\frac{2}{3}\}=\frac{4k}{3}$$

بنابراین $k=\frac{3}{4}$ و در نتیجه با تغییر متغیر $y=\frac{x-\alpha}{\beta}$ داریم که

$$E(X)=\frac{3}{4}\int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}\frac{x}{\beta}\left\{1-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right\}dx=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(\alpha+\beta y)(1-y^2)dy$$

$$=\frac{3}{4}\left[\alpha y+\frac{\beta}{2}y^2-\frac{\alpha}{3}y^3-\frac{\beta}{4}y^4\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{3}\alpha\right)=\alpha$$

$$E(X^2)=\frac{3}{4}\int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}\frac{x^2}{\beta}\left\{1-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right\}dx=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(\alpha+\beta y)^2(1-y^2)dy$$

$$=\frac{3}{4}\left[\alpha^2 y+\alpha\beta y^2+\frac{\beta^2-\alpha^2}{3}y^3-\frac{\alpha\beta}{2}y^4-\frac{\beta^2}{5}y^5\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{4\alpha^2}{3}+\frac{4\beta^2}{15}\right)=\alpha^2+\frac{1}{5}\beta^2$$

بنابراین $Var(X)=(\alpha^2+\frac{1}{5}\beta^2)-\alpha^2=\frac{1}{5}\beta^2$

مثال ۱۱.۶.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}x+y & 0<x<1\ ,\ 0<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

حل ابتدا توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y را به دست می‌آوریم

$$f_X(x)=\int_0^1(x+y)dy=\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=x+\frac{1}{2}\qquad 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_0^1(x+y)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+xy\right]_0^1=\frac{1}{2}+y\qquad 0<y<1$$

بنابراین X و Y دارای توزیع یکسان هستند.

$$E(X)=\int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

بنابراین

$$Var(X)=\frac{5}{12}-(\frac{7}{12})^2=\frac{11}{144}$$

و در نتیجه $E(Y)=\frac{7}{12}$ و $Var(Y)=\frac{11}{144}$. همچنین

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy=\int_0^1 y\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y\right]_0^1 dy$$

$$=\int_0^1 y(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}y)dy=\left[\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{6}y^3\right]_0^1=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

بنابراین

$$COV(X,Y)=\frac{1}{3}-(\frac{7}{12}\times\frac{7}{12})=\frac{-1}{144}$$

و در نتیجه

$$\rho=\frac{\frac{-1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}\times\frac{11}{144}}}=\frac{-1}{11}$$

مثال ۱۲.۶.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع احتمال توأم زیر باشند.

(x,y)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$f_{X,Y}(x,y)$	$\frac{1}{6}$	b	$\frac{1}{6}$	a	$\frac{2}{6}$	0

اگر $E(XY)=\frac{7}{6}$ باشد مقادیر a و b را تعیین کنید و $E(Y^2\mid X=1)$ را محاسبه کنید.

حل برای تعیین a و b دو شرط زیر را داریم

$$1=\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=0}^{2}f_{X,Y}(x,y)=\frac{4}{6}+a+b$$

$$\frac{7}{6}=E(XY)=\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=0}^{2}xyf_{X,Y}(x,y)=0+b+\frac{2}{6}+0+\frac{4}{6}+0=b+1$$

با حل دو معادلهٔ بالا $a=\frac{1}{6}$ و $b=\frac{1}{6}$ به دست می‌آیند. با توجه به رابطهٔ

$$f_{Y\mid X}(y\mid 1)=\frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)}\qquad y=0,1,2$$

از جدول فوق به دست می‌آوریم که

$$f_X(1)=\sum_{y=0}^{2}f_{X,Y}(1,y)=\frac{3}{6}$$

و در نتیجه

y	۰	۱	۲
$f_{Y\mid X}(y \mid ۱)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$

و بنابراین $E(Y^{۲} \mid X=۱) = (۰\times\frac{۱}{۳}) + (۱\times\frac{۱}{۳}) + (۴\times\frac{۱}{۳}) = \frac{۵}{۳}$

مثال ۱۳.۶.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ۸xy & ۰ < x < y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$COV(X,Y)$ و $Var(X \mid Y=y)$ را محاسبه کنید.

حل ابتدا توابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را به دست می آوریم

$$f_X(x) = \int_x^{۱} ۸xy\,dy = ۴xy^{۲} \Big|_x^{۱} = ۴x(۱-x^{۲}) \qquad ۰<x<۱$$

$$f_Y(y) = \int_{۰}^{y} ۸xy\,dx = ۴x^{۲}y \Big|_{۰}^{y} = ۴y^{۳} \qquad ۰<y<۱$$

بنابراین

$$E(X) = \int_{۰}^{۱} ۴x^{۲}(۱-x^{۲})dx = \left[\frac{۴}{۳}x^{۳} - \frac{۴}{۵}x^{۵}\right]_{۰}^{۱} = \frac{۴}{۳} - \frac{۴}{۵} = \frac{۸}{۱۵}$$

$$E(Y) = \int_{۰}^{۱} ۴y^{۴}dy = \frac{۴}{۵}y^{۵} \Big|_{۰}^{۱} = \frac{۴}{۵}$$

$$E(XY) = \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{y} ۸x^{۲}y^{۲}dxdy = \int_{۰}^{۱} \frac{۸}{۳}y^{۲}\left[x^{۳}\right]_{۰}^{y} dy = \int_{۰}^{۱} \frac{۸}{۳}y^{۵}dy = \frac{۴}{۹}y^{۶} \Big|_{۰}^{۱} = \frac{۴}{۹}$$

در نتیجه

$$COV(X,Y) = \frac{۴}{۹} - \left(\frac{۸}{۱۵} \times \frac{۴}{۵}\right) = \frac{۴}{۲۲۵}$$

همچنین

$$f_{X\mid Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{۸xy}{۴y^{۳}} = \frac{۲x}{y^{۲}} \qquad ۰<x<y<۱$$

بنابراین

$$E(X \mid Y=y) = \int_{۰}^{y} \frac{۲x^{۲}}{y^{۲}}dx = \frac{۲x^{۳}}{۳y^{۲}} \Big|_{۰}^{y} = \frac{۲}{۳}y$$

$$E(X^{۲} \mid Y=y) = \int_{۰}^{y} \frac{۲x^{۳}}{y^{۲}}dx = \frac{x^{۴}}{۲y^{۲}} \Big|_{۰}^{y} = \frac{۱}{۲}y^{۲}$$

در نتیجه
$$Var(X \mid Y=y)=\frac{1}{2}y^2-(\frac{2}{3}y)^2=\frac{1}{18}y^2$$

مثال ۱۴.۶.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل بوده و هر یک دارای واریانس یکسان ۴ باشند. مطلوب است محاسبهٔ

$$Var(2X-3Y+1)\ ,\ COV(X+2Y+3,X-2Y+3)\ ,\ COV(X+Y,X-Y)$$

حل با استفاده از خواص واریانس و کواریانس داریم که

$$COV(X+Y,X-Y)=COV(X,X)-COV(X,Y)+COV(Y,X)-COV(Y,Y)$$
$$=Var(X)-Var(Y)=4-4=0$$

$$COV(X+2Y+3,X-2Y+3)=COV(X+2Y,X-2Y)$$
$$=Var(X)-2COV(X,Y)+2COV(Y,X)-4Var(Y)$$
$$=Var(X)-4Var(Y)=4-16=-12$$

$$Var(2X-3Y+1)=4Var(X)+9Var(Y)-12COV(X,Y)$$
$$=4(4)+9(4)-12(0)=52$$

مثال ۱۵.۶.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{k}{y}y^2e^{-y}x^{y-1} & 0<x<1\ ,\ 0<y\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

مقدار k را تعیین کرده و $P(X<\frac{1}{2}\mid Y=2)$ و $Var(X\mid Y=y)$ را محاسبه کنید.

حل ابتدا مقدار k را به دست می‌آوریم

$$1=\int_0^{+\infty}\int_0^1\frac{k}{2}y^2e^{-y}x^{y-1}dxdy=\frac{k}{2}\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}\left[\frac{x^y}{y}\right]_0^1dy=\frac{k}{2}\int_0^{+\infty}ye^{-y}dy$$
$$=\frac{k}{2}\left[(-y-1)e^{-y}\right]_0^{+\infty}=\frac{k}{2}(0-(-1))=\frac{k}{2}$$

بنابراین k=۲. برای محاسبهٔ احتمال و واریانس شرطی بایستی ابتدا $f_{X\mid Y}(x\mid y)$ را به دست آورد.

$$f_Y(y)=\int_0^1 y^2e^{-y}x^{y-1}dx=y^2e^{-y}\left[\frac{x^y}{y}\right]_0^1=ye^{-y}\qquad y>0$$

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{y^2e^{-y}x^{y-1}}{ye^{-y}}=yx^{y-1}\qquad 0<x<1\ ,\ 0<y$$

بنابراین
$$P(X<\frac{1}{2}\mid Y=2)=\int_0^{\frac{1}{2}} f_{X\mid Y}(x\mid 2)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

و
$$E(X\mid Y=y)=\int_0^1 yx^y dx=\frac{y}{y+1}\left[x^{y+1}\right]_0^1=\frac{y}{y+1}$$

$$E(X^2\mid Y=y)=\int_0^1 yx^{y+1}dx=\frac{y}{y+2}\left[x^{y+2}\right]_0^1=\frac{y}{y+2}$$

و در نتیجه
$$Var(X\mid Y=y)=\frac{y}{y+2}-\left(\frac{y}{y+1}\right)^2=\frac{y}{(y+2)(y+1)^2}$$

مثال ۱۶.۶.۴ ظرفی حاوی ۷ مهره است که دو تا از آنها با ۱، سه تا از آنها با ۲ و دو تا از آنها با ۳ شماره گذاری شده‌اند. دو مهره بدون جایگذاری از این ظرف خارج می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر شمارهٔ کوچکتر و متغیر تصادفی Y را برابر شمارهٔ بزرگتر در دو مهرهٔ انتخابی در نظر می‌گیریم. کواریانس X و Y را به دست آورید.

حل در این مثال $S_X=\{1,2,3\}$ و $S_Y=\{1,2,3\}$ و همچنین

$$f_{X,Y}(1,1)=P(X=1,Y=1)=P(\{(1,1)\})=\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{21}$$

$$f_{X,Y}(1,2)=P(X=1,Y=2)=P(\{(1,2),(2,1)\})=2\left(\frac{2}{7}\times\frac{3}{6}\right)=\frac{6}{21}$$

به همین ترتیب تابع احتمال توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید

y \ x	۱	۲	۳	$f_Y(y)$
۱	$\frac{1}{21}$	۰	۰	$\frac{1}{21}$
۲	$\frac{6}{21}$	$\frac{3}{21}$	۰	$\frac{9}{21}$
۳	$\frac{4}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{11}{21}$
$f_X(x)$	$\frac{11}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{1}{21}$	

بنابراین
$$E(X)=\frac{11}{21}+\frac{18}{21}+\frac{3}{21}=\frac{32}{21}$$

$$E(Y)=\frac{1}{21}+\frac{18}{21}+\frac{33}{21}=\frac{52}{21}$$

$$E(XY)=\frac{۱}{۲۱}+\frac{۱۲}{۲۱}+\frac{۱۲}{۲۱}+\frac{۱۲}{۲۱}+\frac{۳۶}{۲۱}+\frac{۹}{۲۱}=\frac{۸۲}{۲۱}$$

در نتیجه

$$COV(X,Y)=\frac{۸۲}{۲۱}-(\frac{۳۲}{۲۱}\times\frac{۵۲}{۲۱})=\frac{۵۸}{۴۴۱}=۰/۱۳$$

مثال ۱۷.۶.۴ فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cxy & x>۰\ ,\ y>۰\ ,\ ۰<x+y<۱ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار c را تعیین کرده و $E\left(X^{۳}\mid Y=y\right)$ را محاسبه کنید.

حل ابتدا مقدار c را تعیین می‌کنیم.

$$۱=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-y}cxy\,dx\,dy=c\int_{۰}^{۱}y\left[\frac{۱}{۲}x^{۲}\right]_{۰}^{۱-y}dy=\frac{c}{۲}\int_{۰}^{۱}y(۱-y)^{۲}dy$$

$$=\frac{c}{۲}\left[\frac{۱}{۲}y^{۲}-\frac{۲}{۳}y^{۳}+\frac{۱}{۴}y^{۴}\right]_{۰}^{۱}=\frac{c}{۲}\left[\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}\right]=\frac{c}{۲۴}$$

بنابراین c=۲۴. همچنین

$$f_Y(y)=\int_{۰}^{۱-y}۲۴xy\,dx=۱۲x^{۲}y\,\Big|_{۰}^{۱-y}=۱۲y(۱-y)^{۲}\qquad ۰<y<۱$$

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{۲۴xy}{۱۲y(۱-y)^{۲}}=\frac{۲x}{(۱-y)^{۲}}\qquad ۰<x<۱-y\ ,\ ۰<y<۱$$

در نتیجه

$$E(X^{۳}\mid Y=y)=\int_{۰}^{۱-y}x^{۳}\left[\frac{۲x}{(۱-y)^{۲}}\right]dx=\left[\frac{۲x^{۵}}{۵(۱-y)^{۲}}\right]_{۰}^{۱-y}=\frac{۲(۱-y)^{۳}}{۵}$$

مثال ۱۸.۶.۴ جعبه‌ای شامل ۴ مهره به شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌باشد. از این جعبه دو مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر شمارهٔ اولین مهرهٔ انتخابی و متغیر تصادفی Y را برابر تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین شماره‌های انتخابی روی مهره‌ها در نظر می‌گیریم. ضریب همبستگی X و Y و $Var\,(۲X-۳Y+۴)$ را محاسبه کنید.

حل فضای نمونه حاصل از این آزمایش شامل ۱۲ نقطهٔ هم شانس است و $S_X=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $S_Y=\{۱,۲,۳\}$ و همچنین

$$f_{X,Y}(۱,۱)=P(X=۱,Y=۱)=P\left(\{(۱,۲)\}\right)=\frac{۱}{۱۲}$$

$$f_{X,Y}(۲,۱)=P(X=۲,Y=۱)=P(\{(۲,۱),(۲,۳)\})=\frac{۲}{۱۲}$$

$$f_{X,Y}(۳,۱)=P(X=۳,Y=۱)=P(\{(۳,۲),(۳,۴)\})=\frac{۲}{۱۲}$$

با انجام محاسبات مربوط به نقاط دیگر، جدول توزیع احتمالات توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید

y \ x	۱	۲	۳	۴	$f_Y(y)$
۱	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۲}{۱۲}$	$\frac{۲}{۱۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۳}{۶}$
۲	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۲}{۶}$
۳	$\frac{۱}{۱۲}$	۰	۰	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۶}$
$f_X(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	

بنابراین

$$E(X)=\frac{۱}{۴}(۱+۲+۳+۴)=\frac{۵}{۲} \quad , \quad E(Y)=\frac{۳}{۶}+\frac{۴}{۶}+\frac{۳}{۶}=\frac{۵}{۳}$$

$$E(X^۲)=\frac{۱}{۴}(۱+۴+۹+۱۶)=\frac{۱۵}{۲} \quad , \quad E(Y^۲)=\frac{۳}{۶}+\frac{۸}{۶}+\frac{۹}{۶}=\frac{۱۰}{۳}$$

$$Var(X)=\frac{۱۵}{۲}-(\frac{۵}{۲})^۲=\frac{۵}{۴} \quad , \quad Var(Y)=\frac{۱۰}{۳}-(\frac{۵}{۳})^۲=\frac{۵}{۹}$$

همچنین

$$E(XY)=\frac{۱}{۱۲}[۱+۲+۳+۴+۴+۶+۶+۴+۸+۱۲]=\frac{۲۵}{۶}$$

$$COV(X,Y)=\frac{۲۵}{۶}-(\frac{۵}{۲}\times\frac{۵}{۳})=۰$$

بنابراین $\rho(X,Y)=۰$ اما توجه کنید که X و Y از یکدیگر مستقل نیستند زیرا

$$f_X(۱)f_Y(۱)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۶}\neq\frac{۱}{۱۲}=f_{X,Y}(۱,۱)$$

همچنین

$$Var(۲X-۳Y+۴)=۴Var(X)+۹Var(Y)-۱۲COV(X,Y)$$
$$=۴(\frac{۵}{۴})+۹(\frac{۵}{۹})-۱۲(۰)=۱۰$$

مثال ۱۹.۶.۴ تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})} & x>0\ ,\ y>0\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

مقادیر $E(X^2 \mid Y=y)$ و $COV(X,Y)$ را به دست آورید.

حل توجه کنید که تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $f_X(x)$ را نمی‌توان برای محاسبهٔ $E(X)$ به دست آورد. بنابراین با استفاده از رابطهٔ (۴.۴) داریم که

$$E(X)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x\left[\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})}\right]dxdy=\int_0^{+\infty} e^{-y}\left[(-x-y)e^{-\frac{x}{y}}\right]_0^{+\infty}dy$$

$$=\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy=(-y-1)e^{-y}\mid_0^{+\infty}=1$$

اما
$$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})}dx=e^{-y}\left[-e^{-\frac{x}{y}}\right]_0^{+\infty}=e^{-y}\qquad y>0$$

بنابراین
$$E(Y)=\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy=1$$

و همچنین
$$E(XY)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xy(\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})})dxdy=\int_0^{+\infty} ye^{-y}\left[\int_0^{+\infty}\frac{x}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx\right]dy$$

$$=\int_0^{+\infty} ye^{-y}(y)dy=\left[(-y^2-2y-2)e^{-y}\right]_0^{+\infty}=2$$

در نتیجه
$$COV(X,Y)=2-(1\times 1)=1$$

همچنین
$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})}}{e^{-y}}=\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}\qquad x>0\ ,\ y>0$$

بنابراین

$$E(X^2\mid Y=y)=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx=\left[(-x^2-2xy-2y^2)e^{-\frac{x}{y}}\right]_0^{+\infty}=2y^2$$

مثال ۲۰.۶.۴ نشان دهید که اگر X و Y مستقل باشند آنگاه $E(Y\mid X=x)$ ثابت است (به x بستگی ندارد) و آن مقدار ثابت را حساب کنید. اگر $E(Y\mid X=x)$ ثابت باشد آیا X و Y لزوماً مستقل هستند ؟اگر $E(Y\mid X=x)$ و $E(X\mid Y=y)$ هر دو ثابت باشند آیا X و Y لزوماً مستقل

هستند؟

حل اگر X و Y مستقل باشند آنگاه $f_{Y|X}(y \mid x) = f_Y(y)$ و در نتیجه

$$E(Y \mid X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y \mid x)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = E(Y)$$

پس $E(Y \mid X=x)$ بستگی به x ندارد (مقداری ثابت است) و مقدار آن برابر $E(Y)$ است. اما اگر متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع احتمال توأم زیر باشند

y \ x	۱-	۰	۱	$f_Y(y)$
۱-	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$
۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$
۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$
$f_X(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	

در این صورت طبق مثال ۴.۳.۴، X و Y از یکدیگر مستقل نیستند و همچنین به راحتی دیده می‌شود که

$$E(X \mid Y=y) = ۰ \quad y = -۱, ۰, ۱ \quad , \quad E(Y \mid X=x) = ۰ \quad x = -۱, ۰, ۱$$

یعنی $E(Y \mid X=x)$ و $E(X \mid Y=y)$ مقادیر ثابتی هستند ولی X و Y از یکدیگر مستقل نیستند.

مثال ۲۱.۶.۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{۲}{x} e^{-۲x} & ۰ < y < x < +\infty \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مقادیر $Var(Y \mid X=x)$ و $\rho(X,Y)$ را به دست آورید.

حل با توجه به رابطهٔ (۴.۴) و استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء داریم که

$$E(Y) = \int_{۰}^{+\infty} \int_{۰}^{x} y\left(\frac{۲}{x} e^{-۲x}\right) dy\,dx = \int_{۰}^{+\infty} x e^{-۲x} dx = \left[\left(-\frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\right)e^{-۲x}\right]_{۰}^{+\infty} = \frac{۱}{۴}$$

$$E(Y^۲) = \int_{۰}^{+\infty} \int_{۰}^{x} y^۲\left(\frac{۲}{x} e^{-۲x}\right) dy\,dx = \frac{۲}{۳}\int_{۰}^{+\infty} x^۲ e^{-۲x} dx$$

$$=\frac{۲}{۳}\left[(-\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴})e^{-۲x}\right]_{۰}^{+\infty}=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین $\frac{۵}{۴۸}=Var(Y)=\frac{۱}{۶}-(\frac{۱}{۴})^{۲}$. همچنین

$$f_X(x)=\int_{۰}^{x}\frac{۲}{x}e^{-۲x}dy=۲e^{-۲x}\qquad x>۰$$

بنابراین $E(X)=\int_{۰}^{+\infty}۲xe^{-۲x}dx=\frac{۱}{۲}$ و $E(X^{۲})=\int_{۰}^{+\infty}۲x^{۲}e^{-۲x}dx=\frac{۱}{۲}$

و در نتیجه $\frac{۱}{۴}=Var(X)=\frac{۱}{۲}-(\frac{۱}{۲})^{۲}$. از طرفی

$$E(XY)=\int_{۰}^{+\infty}\int_{۰}^{x}xy\left(\frac{۲}{x}e^{-۲x}\right)dydx=\int_{۰}^{+\infty}x^{۲}e^{-۲x}dx=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین $\frac{۱}{۸}=COV(X,Y)=\frac{۱}{۴}-(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴})$ و در نتیجه

$$\rho(X,Y)=\frac{\frac{۱}{۸}}{\sqrt{\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۴۸}}}=\sqrt{\frac{۳}{۵}}$$

همچنین

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{۲}{x}e^{-۲x}}{۲e^{-۲x}}=\frac{۱}{x}\qquad ۰<y<x<+\infty$$

بنابراین

$$E(Y|X=x)=\int_{۰}^{x}y(\frac{۱}{x})dy=\frac{۱}{۲}x$$

$$E(Y^{۲}|X=x)=\int_{۰}^{x}y^{۲}(\frac{۱}{x})dy=\frac{۱}{۳}x^{۲}$$

و در نتیجه

$$Var(Y|X=x)=\frac{۱}{۳}x^{۲}-(\frac{۱}{۲}x)^{۲}=\frac{۱}{۱۲}x^{۲}$$

۷.۴ تمرینات

۱ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & x=۲,۴,۸,۱۶\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ $E(X)$، $E(\frac{۱}{X})$، $E(۲^X)$ و $Var(X)$.

۲ اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases}k(۲-x) & ۰<x<۲\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$