ج-
$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{x_1}^{x_2} 6\,dx_3 = 6(x_2-x_1) \qquad 0<x_1<x_2<1$$

بنابراین

$$P(2X_1<X_2)=\int_0^1\int_0^{\frac{x_2}{2}} 6(x_2-x_1)\,dx_1\,dx_2 = 6\int_0^1\left[x_1x_2-\frac{1}{2}x_1^2\right]_0^{\frac{x_2}{2}}dx_2$$
$$=6\left(\frac{3}{8}\right)\int_0^1 x_2^2\,dx=\frac{3}{4}x_2^3\,\Big|_0^1=\frac{3}{4}$$

د-
$$f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)=\int_0^{x_2} 6\,dx_1 = 6x_2 \qquad 0<x_2<x_3<1$$

$$f_{X_1|X_2,X_3}(x_1\,|\,x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)}=\frac{6}{6x_2}=\frac{1}{x_2} \qquad 0<x_1<x_2<x_3<1$$

۶.۳ مسائل حل شده

مثال ۱.۶.۳ تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است. مقدار k را پیدا کنید.

$$f_X(x)=\frac{k}{2^x} \qquad x=0,1,2,3,4$$

حل بایستی $k\geq 0$ و همچنین

$$1=\sum_{x=0}^{4} f_X(x)=\sum_{x=0}^{4}\frac{k}{2^x}=k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)=k\left(\frac{31}{16}\right)$$

بنابراین $k=\frac{16}{31}$.

مثال ۲.۶.۳ فروشگاهی ۶ دستگاه تلویزیون دارد که ۲ دستگاه آن معیوب است. هتلی ۳ دستگاه آن را به طور تصادفی خریداری می‌نماید. اگر X تعداد تلویزیونهای معیوب باشد که توسط هتل خریداری شده است. تابع احتمال X را به دست آورید.

حل در اینجا $S_X=\{0,1,2\}$ و بنابراین

$$f_X(0)=P(X=0)=\frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

$$f_X(1)=P(X=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$$f_X(2)=P(X=2)=\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

بنابراین تابع احتمال X برابر است با

x	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

مثال ۳.۶.۳ سکه‌ای به گونه‌ای طراحی شده است که احتمال شیر آمدن آن $\frac{3}{4}$ و احتمال خط آمدن آن $\frac{1}{4}$ است. سکه را ۳ مرتبه پرتاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد شیرهای مشاهده شده در ۳ پرتاب سکه در نظر می‌گیریم. تابع احتمال X را به دست آورید و سپس تابع توزیع X و را $P(X>1)$ بیابید.

حل در اینجا $S_X=\{0,1,2,3\}$ و بنابراین

$$f_X(0)=P(X=0)=P(\{TTT\})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$$

$$\begin{aligned}f_X(1)&=P(X=1)=P(\{TTH,THT,HTT\})=3P(\{TTH\})\\&=3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}\end{aligned}$$

با به دست آوردن احتمالات دیگر، تابع احتمال X به صورت زیر به دست می‌آید.

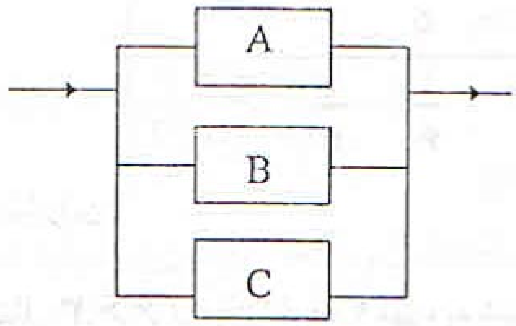
x	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

با استفاده از فرمول (۲.۳) تابع توزیع X به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{64} & 0\le x<1\\ \frac{10}{64} & 1\le x<2\\ \frac{37}{64} & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$

بنابراین $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F_X(1)=1-\frac{10}{64}=\frac{54}{64}$

مثال ۴.۶.۳ فرض کنید که در سیستم زیر اجزاء A و B و C مستقل از یکدیگر کار کنند.



احتمال اینکه A کارکند ۰/۹، B کار کند ۰/۸ و C کار کند ۰/۷ است. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد اجزائی باشد که در یک زمان معین کار می‌کنند، تابع احتمال X را به دست آورید.

حل اگر A، B و C به ترتیب پیشامد این باشند که اجزاء A، B و C در یک زمان معین کار کنند آنگاه A و B و C از یکدیگر مستقل هستند. در اینجا $S_X = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ بنابراین

$$f_X(۰) = P(X=۰) = P(A' \cap B' \cap C') = P(A')P(B')P(C')$$
$$= (۰/۱)(۰/۲)(۰/۳) = ۰/۰۰۶$$
$$f_X(۱) = P(X=۱) = P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) + P(A' \cap B \cap C')$$
$$= (۰/۹)(۰/۲)(۰/۳) + (۰/۱)(۰/۲)(۰/۷) + (۰/۱)(۰/۸)(۰/۳) = ۰/۰۹۲$$

به همین ترتیب تابع احتمال X به صورت زیر نتیجه می‌شود.

x	۰	۱	۲	۳
$f_X(x)$	۰/۰۰۶	۰/۰۹۲	۰/۳۹۸	۰/۵۰۴

مثال ۵.۶.۳ تحقیق کنید که تابع زیر یک تابع توزیع است و تابع احتمال برای W را تعیین کنید و با استفاده از آن $P(۳ < W \leq ۵)$ را محاسبه کنید.

$$F_W(w) = \begin{cases} ۰ & w < ۳ \\ \frac{۱}{۳} & ۳ \leq w < ۴ \\ \frac{۱}{۲} & ۴ \leq w < ۵ \\ \frac{۲}{۳} & ۵ \leq w < ۶ \\ ۱ & ۶ \leq w \end{cases}$$

حل این تابع یک تابع غیرنزولی و از سمت راست پیوسته است و همچنین $۰ \leq F_W(w) \leq ۱$، $F_W(-\infty) = ۰$ و $F_W(+\infty) = ۱$ است. بنابراین $F_W(w)$ یک تابع توزیع است. با استفاده از فرمول (۳.۳) تابع احتمال W به صورت زیر به دست می‌آید.

w	۳	۴	۵	۶
$f_W(w)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$

و بنابراین
$$P(۳< W\leq ۵)=f_W(۴)+f_W(۵)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

مثال ۶.۶.۳ در یک ظرف ۴ مهره به شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد. از این ظرف دو مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر بزرگترین شماره روی دو مهره انتخابی در نظر می‌گیریم تابع احتمال X را به دست آورید.

حل در این مساله فضای نمونه به صورت
$$S=\left\{\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۱,۴\},\{۲,۳\},\{۲,۴\},\{۳,۴\}\right\}$$
می‌باشد و $S_X=\{۲,۳,۴\}$ بنابراین
$$f_X(۲)=P(X=۲)=P(\{\{۱,۲\}\})=\frac{۱}{۶}$$
$$f_X(۳)=P(X=۳)=P(\{\{۱,۳\},\{۲,۳\}\})=\frac{۲}{۶}$$
به همین ترتیب داریم که

x	۲	۳	۴
$f_X(x)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۳}{۶}$

مثال ۷.۶.۳ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر است
$$f_X(x)=\begin{cases} c(۱+x) & ۲<x<۵ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- تابع توزیع X را به دست آورید.

حل الف- بایستی $c\geq ۰$ و همچنین
$$۱=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_{۲}^{۵} c(۱+x)dx=c\left[x+\frac{۱}{۲}x^۲\right]_{۲}^{۵}$$
$$=c\left[(۵+\frac{۲۵}{۲})-(۲+۲)\right]=c(\frac{۲۷}{۲})$$
بنابراین $c=\frac{۲}{۲۷}$.

ب- اگر $x<۲$ آنگاه $F_X(x)=۰$ و اگر $x\geq ۵$ آنگاه $F_X(x)=۱$ و اگر $۲\leq x<۵$ آنگاه
$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=\int_{۲}^{x}\frac{۲}{۲۷}(۱+t)\,dt=\frac{۲}{۲۷}\left[t+\frac{۱}{۲}t^۲\right]_{۲}^{x}=\frac{۲}{۲۷}\left[x+\frac{۱}{۲}x^۲-۴\right]$$

بنابراین

$$F_X(x)=\begin{cases} \cdot & x<۲ \\ \frac{۲}{۲۷}\left[\frac{۱}{۲}x^{۲}+x-۴\right] & ۲\le x<۵ \\ ۱ & ۵\le x \end{cases}$$

مثال ۸.۶.۳ اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد، تابع توزیع X را به دست آورید و $P(\frac{۱}{۲}<X<\frac{۳}{۲})$ را محاسبه کنید.

$$f_X(x)=\begin{cases} x & \cdot<x<۱ \\ ۲-x & ۱\le x<۲ \\ \cdot & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

حل اگر $x<\cdot$ آنگاه $F_X(x)=\cdot$ و اگر $\cdot\le x<۱$ آنگاه

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt=\int_{\cdot}^{x} t\,dt=\frac{۱}{۲}t^{۲}\,\Big|_{\cdot}^{x}=\frac{۱}{۲}x^{۲}$$

و اگر $\cdot\le x<۲$ آنگاه

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt=\int_{\cdot}^{۱} t\,dt+\int_{۱}^{x}(۲-t)\,dt=\frac{۱}{۲}+\left[۲t-\frac{۱}{۲}t^{۲}\right]_{۱}^{x}=۲x-\frac{۱}{۲}x^{۲}-۱$$

بنابراین

$$F_X(x)=\begin{cases} \cdot & x<\cdot \\ \frac{۱}{۲}x^{۲} & \cdot\le x<۱ \\ ۲x-\frac{۱}{۲}x^{۲}-۱ & ۱\le x<۲ \\ ۱ & ۲\le x \end{cases}$$

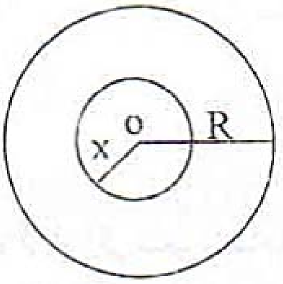
در نتیجه

$$P(\frac{۱}{۲}<X<\frac{۳}{۲})=F_X(\frac{۳}{۲})-F_X(\frac{۱}{۲})=\left[۲(\frac{۳}{۲})-\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲})^{۲}-۱\right]-\left[\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})^{۲}\right]=\frac{۳}{۴}$$

مثال ۹.۶.۳ نقطه‌ای به تصادف از داخل دایره‌ای به شعاع R انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره در نظر می‌گیریم.

الف- تابع توزیع X را به دست آورید.

ب- تابع احتمال X را به دست آورید و $P(\frac{R}{۳}<X<\frac{R}{۲})$ را محاسبه کنید.



حـــــــل الف- اگـــــــر $x < \circ$ آنگـــــاه $F_X(x) = P(X \le x) = \circ$ و اگر $\circ \le x < R$ آنگاه با توجه به شکل مقابل داریم که

$$F_X(x) = P(X \le x) = \frac{\text{مساحت دایره به شعاع } x}{\text{مساحت دایره به شعاع } R} = \frac{\pi x^{۲}}{\pi R^{۲}} = \left(\frac{x}{R}\right)^{۲}$$

و اگر $x \ge R$ آنگاه $F_X(x) = P(X \le x) = ۱$ و بنابراین

$$F_X(x) = \begin{cases} \circ & x < \circ \\ \left(\frac{x}{R}\right)^{۲} & \circ \le x < R \\ ۱ & R \le x \end{cases}$$

ب- با توجه به رابطه (۵.۳) داریم که

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{۲x}{R^{۲}} & \circ < x < R \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

و در نتیجه

$$P\left(\frac{R}{۳} < X < \frac{R}{۲}\right) = \int_{\frac{R}{۳}}^{\frac{R}{۲}} \frac{۲x}{R^{۲}} dx = \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{۲}\right]_{\frac{R}{۳}}^{\frac{R}{۲}} = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۹} = \frac{۵}{۳۶}$$

مثال ۱۰.۶.۳ میانه متغیر تصادفی X عددی است مانند m که در روابـط $P(X \le m) \ge \frac{۱}{۲}$ و $P(X \ge m) \ge \frac{۱}{۲}$ صدق کند. اگر X یک متغیر تـصادفی پـیوسته بـاشد آنگـاه مـیانه در رابـطه $F_X(m) = \int_{-\infty}^{m} f_X(x)\,dx = \frac{۱}{۲}$ صدق می‌کند. در هر یک از موارد زیر میانه متغیر تصادفی X که دارای تابع احتمال و یا چگالی احتمال زیر است را پیدا کنید.

الف- $f_X(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}} \qquad -\infty < x < +\infty$

ب- $f_X(x) = \binom{۴}{x} \left(\frac{۲}{۳}\right)^{x} \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴-x} \qquad x = \circ, ۱, ۲, ۳, ۴$

حل الف- متغیر تصادفی X از نوع پیوسته است. بنابراین بایستی $\int_{-\infty}^{m} e^{-x} e^{-e^{-x}} dx = \frac{۱}{۲}$ باشد. با تغییر متغیر $y = e^{-x}$ داریم که

$$\int_{e^{-m}}^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -e^{-y} \Big|_{e^{-m}}^{+\infty} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow e^{-e^{-m}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = -Ln(Ln ۲)$$

ب- متغیر تصادفی X از نوع گسسته با تابع احتمال زیر است

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f_X(x)$	$\frac{۱}{۸۱}$	$\frac{۸}{۸۱}$	$\frac{۲۴}{۸۱}$	$\frac{۳۲}{۸۱}$	$\frac{۱۶}{۸۱}$

بنابراین

$$P(X \leq ۳) = ۱ - P(X = ۴) = ۱ - \frac{۱۶}{۸۱} = \frac{۶۵}{۸۱} \geq \frac{۱}{۲}$$
$$P(X \geq ۳) = \frac{۳۲}{۸۱} + \frac{۱۶}{۸۱} = \frac{۴۸}{۸۱} \geq \frac{۱}{۲}$$

و در نتیجه m=۳ است.

مثال ۱۱.۶.۳ اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع زیر باشد، تابع چگالی احتمال و $P(X > ۳)$ را محاسبه کنید

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ - (۱ + x)e^{-x} & x \geq ۰ \end{cases}$$

حل با توجه به رابطه (۵.۳) داریم که

$$f_X(x) = F'_X(x) = -e^{-x} + (۱ + x)e^{-x} = xe^{-x}$$

در نتیجه

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

و همچنین

$$P(X > ۳) = \int_۳^{+\infty} xe^{-x}\,dx = (-x - ۱)e^{-x} \Big|_۳^{+\infty} = ۴e^{-۳}$$

مثال ۱۲.۶.۳ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-۲x}(۱ - e^{-۲x}) & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار k را تعیین کنید.

ب- تابع توزیع X را به دست آورید و $P(X > ۱)$ را محاسبه کنید.

حل الف- بایستی $k \geq ۰$ و همچنین

$$۱ = \int_۰^{+\infty} ke^{-۲x}(۱ - e^{-۲x})\,dx = k\int_۰^{+\infty} (e^{-۲x} - e^{-۴x})\,dx$$
$$= k\left[-\frac{۱}{۲}e^{-۲x} + \frac{۱}{۴}e^{-۴x}\right]_۰^{+\infty} = k\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}\right) = k\left(\frac{۱}{۴}\right)$$

بنابراین $k=4$.

ب- اگر $x<0$ آنگاه $F_X(x)=0$ و اگر $x\geq 0$ آنگاه

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=\int_{0}^{x} 4e^{-2t}(1-e^{-2t})dt$$

$$=4\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_{0}^{x}$$

$$=4\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-4x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]=1-e^{-2x}(2-e^{-2x})$$

بنابراین

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-2x}(2-e^{-2x}) & x\geq 0\end{cases}$$

و در نتیجه

$$P(X>1)=1-F_X(1)=e^{-2}(2-e^{-2})=0/252$$

مثال ۱۳.۶.۳ اگر متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}k(x^2+y^2) & x=1,2\ ,\ y=0,1,2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف- مقدار k را پیدا کنید.

ب- $P(Y<2\mid X=1)$ را محاسبه کنید.

ج- آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

حل الف-

$$1=\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=0}^{2}k(x^2+y^2)=k(1+2+5+4+5+8)=k(25)$$

بنابراین $k=\frac{1}{25}$ و در نتیجه جدول توزیع احتمالات توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید.

$y \backslash x$	۱	۲	$f_Y(y)$
۰	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$
۱	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{7}{25}$
۲	$\frac{5}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{13}{25}$
$f_X(x)$	$\frac{8}{25}$	$\frac{17}{25}$	

ب- با توجه به رابطه (۱۳.۳) تابع احتمال شرطی $f_{Y|X}(y \mid ۱)$ به صورت زیر به دست می‌آید

y	۰	۱	۲
$f_{Y\|X}(y \mid ۱)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۵}{۸}$

بنابراین
$$P(Y<۲ \mid X=۱)=\sum_{y=۰}^{۱} f_{Y|X}(y \mid ۱)=\frac{۱}{۸}+\frac{۲}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

ج- چون $f_X(۱)=\frac{۸}{۲۵}$، $f_Y(۰)=\frac{۵}{۲۵}$ و $f_{X,Y}(۱,۰)=\frac{۱}{۲۵}$ در نتیجه

$$f_{X,Y}(۱,۰)\neq f_X(۱)f_Y(۰)$$

بنابراین X و Y از یکدیگر مستقل نیستند.

مثال ۱۴.۶.۳ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cy\,e^{-y(x+۱)} & x>۰ \;,\; y>۰ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- $P(XY>۱)$ و $P(X<۲ \mid Y=۳)$ را محاسبه کنید.

حل الف-
$$۱=\int_۰^{+\infty}\int_۰^{+\infty} cye^{-y(x+۱)}dx\,dy=c\int_۰^{+\infty} ye^{-y}\left[\int_۰^{+\infty} e^{-yx}dx\right]dy$$
$$=c\int_۰^{+\infty} ye^{-y}(\frac{۱}{y})dy=c\int_۰^{+\infty} e^{-y}dy=c\left[-e^{-y}\right]_۰^{+\infty}=c(۱)=c$$

بنابراین c=۱.

ب-
$$P(XY>۱)=P(X>\frac{۱}{Y})=\int_۰^{+\infty}\int_{\frac{۱}{y}}^{+\infty} ye^{-y(x+۱)}dx\,dy$$
$$=\int_۰^{+\infty} ye^{-y}\left[\int_{\frac{۱}{y}}^{+\infty} e^{-yx}dx\right]dy=\int_۰^{+\infty} ye^{-y}(\frac{۱}{y}e^{-۱})dy$$
$$=e^{-۱}\int_۰^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-۱}$$

برای محاسبه $P(X<۲ \mid Y=۳)$ بایستی ابتدا تابع $f_{X|Y}(x \mid y)$ را به دست آوریم.

$$f_Y(y)=\int_۰^{+\infty} ye^{-y(x+۱)}dx=ye^{-y}\left[\int_۰^{+\infty} e^{-yx}dx\right]=ye^{-y}(\frac{۱}{y})=e^{-y}\quad y>۰$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{ye^{-y(x+1)}}{e^{-y}}=ye^{-yx}$$

بنابراین

$$P(X<۲|Y=۳)=\int_۰^۲ f_{X|Y}(x|۳)\,dx=\int_۰^۲ ۳e^{-۳x}\,dx=-e^{-۳x}\,|_۰^۲=۱-e^{-۶}$$

مثال ۱۵.۶.۳ بر یک طرف یک سکه سالم عدد ۱ و بر طرف دیگر آن عدد ۲ نقاشی شده است. این سکه ۳ بار پرتاب می‌شود. اگر متغیر تصادفی X برابر مجموع دو عدد حاصل از دو پرتاب اول و متغیر تصادفی Y برابر مجموع دو عدد حاصل از دو پرتاب آخر باشد، تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید و $P(X+Y>۶)$ را محاسبه کنید. آیا X=Y است؟ آیا $f_X(x)=f_Y(y)$ است؟

حل در اینجا $S_X=S_Y=\{۲,۳,۴\}$ و همچنین

$$f_{X,Y}(۲,۲)=P(X=۲,Y=۲)=P(\{۱,۱,۱\})=\frac{۱}{۸}$$
$$f_{X,Y}(۲,۳)=P(X=۲,Y=۳)=P(\{۱,۱,۲\})=\frac{۱}{۸}$$

با انجام محاسبات مربوط به نقاط دیگر، جدول زیر را به دست می‌آوریم.

$y \backslash x$	۲	۳	۴	$f_Y(y)$
۲	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	۰	$\frac{۲}{۸}$
۳	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۴}{۸}$
۴	۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$
$f_X(x)$	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۴}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$	

بنابراین

$$P(X+Y>۶)=f_{X,Y}(۳,۴)+f_{X,Y}(۴,۳)+f_{X,Y}(۴,۴)=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

با توجه به جدول توزیع احتمالات توأم X و Y دیده می‌شود که $f_X(x)=f_Y(y)$ اما X برابر Y نیست. در این حالت گویند که متغیرهای تصادفی X و Y هم توزیع هستند.

مثال ۱۶.۶.۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{c}{y} & ۰<x<y \ , \ ۰<y<۱\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

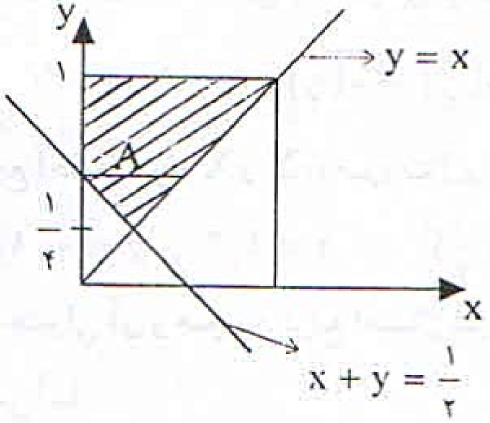
ب- $P(X+Y>\frac{۱}{۲})$ را محاسبه کنید.

ج- آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

حل الف- $۱=\int_۰^۱\int_۰^y \frac{c}{y}dx\,dy=\int_۰^۱\frac{c}{y}[x]_۰^y dy=\int_۰^۱ c\,dy=cy\,|_۰^۱=c$

بنابراین c=۱.

ب- با توجه به نمودار زیر داریم که



$$P(X+Y>\frac{۱}{۲})=\iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_{\frac{۱}{۴}}^{\frac{۱}{۲}}\int_{\frac{۱}{۲}-y}^{y}\frac{۱}{y}dx\,dy+\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}\int_۰^y\frac{۱}{y}dx\,dy$$

$$=\int_{\frac{۱}{۴}}^{\frac{۱}{۲}}(۲-\frac{۱}{۲y})dy+\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}dy=\left[۲y-\frac{۱}{۲}Lny\right]_{\frac{۱}{۴}}^{\frac{۱}{۲}}+[y]_{\frac{۱}{۲}}^{۱}$$

$$=(۱+\frac{۱}{۲}Ln۲)-(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}Ln۴)+\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}Ln۲=۰/۶۵۳$$

ج- با توجه به اینکه $f_X(x)=\int_x^۱\frac{۱}{y}dy=Lny\,|_x^۱=-Lnx \qquad ۰<x<۱$

$$f_Y(y)=\int_۰^y\frac{۱}{y}dx=\frac{x}{y}\,|_۰^y=۱ \qquad ۰<y<۱$$

بنابراین $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ پس X و Y از یکدیگر مستقل نیستند.

مثال ۱۷.۶.۳ فرض کنید برای متغیرهای تصادفی X و Y داشته باشیم که

$$f_X(x)=\begin{cases}c_۱x & x=۱,۲\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases} c_2\binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^x & x=1,2\ ,\ y=0,1,\dots,x \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف- مقدار c_1 و c_2 را تعیین کنید.

ب- $P(Y<2\mid X=2)$ و $P(X>1\mid Y=1)$ را محاسبه کنید.

حل الف- $f_X(x)$ یک تابع احتمال است بنابراین

$$1=\sum_{x=1}^{2} f_X(x)=c_1+2c_1=3c_1 \ \Rightarrow\ c_1=\frac{1}{3}$$

و برای هر مقدار ثابت x تابع $f_{Y|X}(y\mid x)$ یک تابع احتمال است بنابراین برای x=1 داریم که

$$1=\sum_{y=0}^{1} f_{Y|X}(y\mid 1)=\sum_{y=0}^{1} c_2\binom{1}{y}\left(\frac{1}{2}\right)=c_2\left(\frac{1}{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\right)=c_2\ \Rightarrow\ c_2=1$$

ب- تابع احتمال توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{1}{3}x\binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad x=1,2\ ,\ y=0,1,\dots,x$$

که فرم جدولی آن و همچنین توابع احتمال شرطی $f_{Y|X}(y\mid 2)$ و $f_{X|Y}(x\mid 1)$ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$y \backslash x$	۱	۲	$f_Y(y)$
۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
۱	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
۲	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$f_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	

y	۰	۱	۲
$f_{Y\mid X}(y\mid 2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

x	۱	۲
$f_{X\mid Y}(x\mid 1)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

بنابراین

$$P(Y<2\mid X=2)=\sum_{y=0}^{1} f_{Y|X}(y\mid 2)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P(X>1\mid Y=1)=f_{X|Y}(2\mid 1)=\frac{2}{3}$$

مثال ۱۸.۶.۳ فرض کنید که متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند که در آن $\lambda>0$ مقداری ثابت است.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx\,e^{-\lambda(x+y)} & x>0\ ,\ y>0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- $P(X>2)$ را محاسبه کنید.

ج- آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

حل الف- با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء داریم که

$$1=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} cxe^{-\lambda(x+y)}dxdy=c\left[\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx\right]\left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}dy\right]$$

$$=c\left[(-\frac{x}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2})e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda y}\right]_0^{+\infty}=c(\frac{1}{\lambda^2})(\frac{1}{\lambda})=\frac{c}{\lambda^3}$$

بنابراین $c=\lambda^3$

ب- برای محاسبه احتمال، ابتدا $f_X(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$f_X(x)=\int_0^{+\infty}\lambda^3 xe^{-\lambda(x+y)}dy=\lambda^2 xe^{-\lambda x}\left[\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy\right]=\lambda^2 xe^{-\lambda x}\quad x>0$$

بنابراین

$$P(X>2)=\int_2^{+\infty}\lambda^2 xe^{-\lambda x}dx=\left[(-\lambda x-1)e^{-\lambda x}\right]_2^{+\infty}=(2\lambda+1)e^{-2\lambda}$$

ج- با توجه به اینکه $f_X(x)=\lambda^2 xe^{-\lambda x}\ \ x>0$ و همچنین

$$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}\lambda^3 xe^{-\lambda(x+y)}dx=\lambda e^{-\lambda y}\left[(-\lambda x-1)e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}=\lambda e^{-\lambda y}\quad y>0$$

پس $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ و در نتیجه X و Y از یکدیگر مستقل هستند.

مثال ۱۹.۶.۳ جعبه‌ای شامل ۴ ترانزیستور است و می‌دانیم ۲ عدد از آنها معیوب هستند. ترانزیستورها را یک به یک آزمایش نموده تا هر دو معیوب مشخص شوند و سپس توقف می‌کنیم. اگر X برابر تعداد آزمایشهای لازم تا مشخص شدن اولین معیوب و Y برابر تعداد آزمایشهای اضافی تا مشخص شدن دومین معیوب باشند، تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید و $P(X\le 2\mid Y=1)$ را محاسبه کنید.

حل در اینجا $S_X=S_Y=\{1,2,3\}$ اگر مشاهده ترانزیستور سالم را با S و خراب را با D نمایش دهیم در این صورت

$$f_{X,Y}(۱,۱) = P(DD) = \frac{۲}{۴} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶} \qquad f_{X,Y}(۱,۲) = P(DSD) = \frac{۲}{۴} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶}$$

$$f_{X,Y}(۱,۳) = P(DSSD) = \frac{۲}{۴} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times ۱ = \frac{۱}{۶}$$

با محاسبه احتمالات مربوط به نقاط دیگر، جدول توزیع احتمالات توأم و تابع احتمال $f_{X|Y}(x \mid ۱)$ به صورت زیر به دست می‌آیند.

x	۱	۲	۳
$f_{X\mid Y}(x \mid ۱)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$

$y \backslash x$	۱	۲	۳	$f_Y(y)$
۱	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۳}{۶}$
۲	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۲}{۶}$
۳	$\frac{۱}{۶}$	۰	۰	$\frac{۱}{۶}$
$f_X(x)$	$\frac{۳}{۶}$	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	

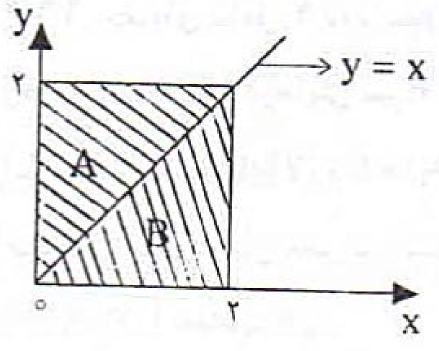
بنابراین
$$P(X \leq ۲ \mid Y = ۱) = \sum_{x=۱}^{۲} f_{X|Y}(x \mid ۱) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۳.۶.۲۰ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y}(۱-e^{-x}) & ۰ < x < y < +\infty \\ e^{-x}(۱-e^{-y}) & ۰ < y < x < +\infty \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه احتمال $P(X \leq ۲, Y \leq ۲)$ و $P(X \leq ۲ \mid Y = ۳)$.

حل با توجه به نمودار زیر داریم که



$$P(X \leq ۲, Y \leq ۲) = \iint_A e^{-y}(۱-e^{-x})\,dx\,dy + \iint_B e^{-x}(۱-e^{-y})\,dx\,dy$$

$$= \int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{y} e^{-y}(۱-e^{-x})\,dx\,dy + \int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{x} e^{-x}(۱-e^{-y})\,dy\,dx$$

$$= ۲\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{y} e^{-y}(۱-e^{-x})\,dx\,dy = ۲\int_{۰}^{۲} e^{-y}[x+e^{-x}]_{۰}^{y}\,dy$$

$$= ۲\int_{۰}^{۲} e^{-y}(y+e^{-y}-۱)\,dy = ۲\left[-ye^{-y}-\frac{۱}{۲}e^{-۲y}\right]_{۰}^{۲}$$

$$= ۲\left[-۲e^{-۲}-\frac{۱}{۲}e^{-۴}+\frac{۱}{۲}\right] = ۱-۴e^{-۲}-e^{-۴} = ۰/۴۴$$

برای محاسبه $P(X \le ۲ \mid Y=۳)$ ابتدا تابع $f_{X\mid Y}(x\mid y)$ را به دست می‌آوریم.

$$f_Y(y) = \int_{۰}^{y} e^{-y}(۱-e^{-x})\,dx + \int_{y}^{+\infty} e^{-x}(۱-e^{-y})\,dx$$

$$= e^{-y}[x+e^{-x}]_{۰}^{y} + (۱-e^{-y})[-e^{-x}]_{y}^{+\infty}$$

$$= e^{-y}(y+e^{-y}-۱)+(۱-e^{-y})e^{-y} = ye^{-y} \qquad ۰<y<+\infty$$

$$f_{X\mid Y}(x\mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{۱-e^{-x}}{y} & ۰<x<y<+\infty \\ \dfrac{e^{-x}(۱-e^{-y})}{ye^{-y}} & ۰<y<x<+\infty \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

بنابراین

$$P(X\le ۲\mid Y=۳) = \int_{۰}^{۲} f_{X\mid Y}(x\mid ۳)\,dx = \int_{۰}^{۲}\frac{۱-e^{-x}}{۳}\,dx = \frac{۱}{۳}[x+e^{-x}]_{۰}^{۲}$$

$$= \frac{۱+e^{-۲}}{۳} = ۰/۳۷۸$$

مثال ۲۱.۶.۳ جعبه A شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و جعبه B شامل ۱ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است. بدون جایگذاری ۲ مهره از جعبه A به جعبه B منتقل می‌کنیم و سپس از جعبه B بدون جایگذاری ۲ مهره خارج می‌کنیم. اگر X برابر تعداد مهره‌های سفید منتقل شده به جعبه B و Y برابر تعداد مهره‌های سفید خارج شده از جعبه B باشند، تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورده و $P(X+Y>۲)$ را محاسبه کنید.

حل در اینجا $S_X = S_Y = \{۰, ۱, ۲\}$ و همچنین

$$f_{X,Y}(۰,۰) = P(X=۰, Y=۰) = P(X=۰)P(Y=۰\mid X=۰)$$

$$=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=۰/۱۸$$

$$f_{X,Y}(۰,۱)=P(X=۰,Y=۱)=P(X=۰)P(Y=۱\mid X=۰)$$

$$=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}\times\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=۰/۱۲$$

$$f_{X,Y}(۱,۰)=P(X=۱,Y=۰)=P(X=۱)P(Y=۰\mid X=۱)$$

$$=\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۵}{۲}}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=۰/۱۸$$

با انجام محاسبات مشابه جدول توزیع احتمالات توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید.

y \ x	۰	۱	۲
۰	۰/۱۸	۰/۱۸	۰/۰۱
۱	۰/۱۲	۰/۳۶	۰/۰۶
۲	۰	۰/۰۶	۰/۰۳

بنابراین
$$P(X+Y>۲)=f_{X,Y}(۲,۱)+f_{X,Y}(۱,۲)+f_{X,Y}(۲,۲)$$

$$=۰/۰۶+۰/۰۶+۰/۰۳=۰/۱۵$$

مثال ۲۲.۶.۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx(x-y) & -x<y<x \quad , \quad ۰<x<۲ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

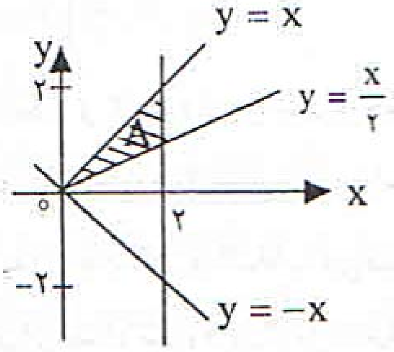
الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- $f_Y(y)$ و $P(۲Y>X)$ و $P(Y<\frac{۱}{۲}\mid X=۱)$ را محاسبه کنید.

حل الف-
$$۱=c\int_۰^۲\int_{-x}^{x}x(x-y)\,dy\,dx=c\int_۰^۲\left[x^۲y-\frac{x}{۲}y^۲\right]_{-x}^{x}dx$$

$$=c\int_۰^۲ ۲x^۳dx=\frac{c}{۲}x^۴\mid_۰^۲=۸c \quad\Rightarrow\quad c=\frac{۱}{۸}$$

ب- با توجه به نمودار زیر داریم که



$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^{۲}\frac{۱}{۸}x(x-y)\,dx & ۰<y<۲\\ \int_{-y}^{۲}\frac{۱}{۸}x(x-y)\,dx & -۲<y<۰\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{۱}{۸}\left[\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{y}{۲}x^{۲}\right]_y^{۲} & ۰<y<۲\\ \frac{۱}{۸}\left[\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{y}{۲}x^{۲}\right]_{-y}^{۲} & -۲<y<۰\end{cases}$$

بنابراین

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{۱}{۸}\left[\frac{۵}{۶}y^{۳}-۲y+\frac{۸}{۳}\right] & -۲<y<۰\\ \frac{۱}{۸}\left[\frac{۱}{۶}y^{۳}-۲y+\frac{۸}{۳}\right] & ۰<y<۲\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

با توجه به نمودار بالا داریم که

$$P(۲Y>X)=\int_۰^{۲}\int_{\frac{x}{۲}}^{x}\frac{۱}{۸}x(x-y)\,dy\,dx=\int_۰^{۲}\frac{۱}{۸}\left[x^{۲}y-\frac{x}{۲}y^{۲}\right]_{\frac{x}{۲}}^{x}dx$$
$$=\frac{۱}{۶۴}\int_۰^{۲}x^{۳}dx=\frac{۱}{۶۴}\left[\frac{۱}{۴}x^{۴}\right]_۰^{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

برای محاسبه $P(Y<\frac{۱}{۲}\mid X=۱)$ بایستی ابتدا $f_{Y\mid X}(y\mid x)$ را محاسبه کنیم.

$$f_X(x)=\int_{-x}^{x}\frac{۱}{۸}x(x-y)\,dy=\frac{۱}{۸}\left[x^{۲}y-\frac{x}{۲}y^{۲}\right]_{-x}^{x}=\frac{۱}{۴}x^{۳} \qquad ۰<x<۲$$

$$f_{Y\mid X}(y\mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{۱}{۸}x(x-y)}{\frac{۱}{۴}x^{۳}}=\frac{۱}{۲}\,\frac{x-y}{x^{۲}} \qquad ۰<x<۲,\quad -x<y<x$$

بنابراین

$$P(Y<\frac{۱}{۲}\mid X=۱)=\int_{-۱}^{\frac{۱}{۲}}f_{Y\mid X}(y\mid ۱)\,dy=\int_{-۱}^{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲}(۱-y)\,dy$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[y - \frac{۱}{۲}y^{۲}\right]_{-۱}^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

مثال ۲۳.۶.۳ دو جعبه وجود دارند که جعبه اول دارای ۳ مهره سفید و ۲ مهره قرمز است و جعبه دوم دارای ۲ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. از جعبه اول یک مهره به تصادف انتخاب و در داخل جعبه دوم قرار می‌دهیم و سپس از جعبه دوم ۲ مهره یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. اگر X برابر تعداد مهره‌های سفید انتخاب شده از جعبه دوم و Y برابر تعداد مهره‌های قرمز انتخاب شده از جعبه دوم باشند، تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید.

حل در اینجا $S_X = S_Y = \{۰, ۱, ۲\}$ و همواره داریم که $X+Y=۲$، چون از جعبه دوم یا مهره سفید و یا مهره قرمز خارج می‌شود. اگر $W_۱$ و $R_۱$ به ترتیب پیشامد انتخاب مهره سفید و مهره قرمز از جعبه اول و $WW_۲$، $RR_۲$ و $WR_۲$ به ترتیب پیشامد انتخاب دو مهره سفید، دو مهره قرمز و انتخاب یک مهره سفید و یک مهره قرمز از جعبه دوم باشند در این صورت

$$f_{X,Y}(۰,۲) = P(RR_۲) = P(W_۱ \cap RR_۲) + P(R_۱ \cap RR_۲)$$
$$= \frac{۳}{۵} \times \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۲}} + \frac{۲}{۵} \times \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۲۱}{۷۵}$$

$$f_{X,Y}(۱,۱) = P(WR_۲) = P(W_۱ \cap WR_۲) + P(R_۱ \cap WR_۲)$$
$$= \frac{۳}{۵} \times \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۲}} + \frac{۲}{۵} \times \frac{\binom{۲}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۴۳}{۷۵}$$

و به همین ترتیب $f_{X,Y}(۲,۰) = P(WW_۲) = \frac{۱۱}{۷۵}$ و در نتیجه تابع احتمال توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید.

y \ x	۰	۱	۲
۰	۰	۰	$\frac{۱۱}{۷۵}$
۱	۰	$\frac{۴۳}{۷۵}$	۰
۲	$\frac{۲۱}{۷۵}$	۰	۰

مثال ۲۴.۶.۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X، Y و Z دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\begin{cases}k(x+y)e^{-z} & ۰<x<۱\ ,\ ۰<y<۲\ ,\ z>۰\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف- مقدار k را تعیین کنید و $P(X<Y,Z>۱)$ را محاسبه کنید.

ب- نشان دهید که هر سه متغیر X، Y و Z از یکدیگر مستقل نیستند اما Z از X و Z از Y مستقل می‌باشند و X از Y مستقل نمی‌باشد.

حل الف-
$$۱=\int_۰^۱\int_۰^۲\int_۰^{+\infty}k(x+y)e^{-z}\,dz\,dy\,dx=k\int_۰^۱\int_۰^۲(x+y)\,[-e^{-z}]_۰^{+\infty}\,dy\,dx$$

$$=k\int_۰^۱\int_۰^۲(x+y)\,dy\,dx=k\int_۰^۱[xy+\frac{۱}{۲}y^۲]_۰^۲\,dx=k\int_۰^۱[۲x+۲]dx$$

$$=k[x^۲+۲x]_۰^۱=k(۳)$$

بنابراین $k=\frac{۱}{۳}$.

$$P(X<Y,Z>۱)=\int_۰^۱\int_x^۲\int_۱^{+\infty}\frac{۱}{۳}(x+y)e^{-z}\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_۰^۱\int_x^۲\frac{۱}{۳}(x+y)\,[-e^{-z}]_۱^{+\infty}\,dy\,dx$$

$$=\frac{۱}{۳}e^{-۱}\int_۰^۱\int_x^۲(x+y)\,dy\,dx=\frac{۱}{۳}e^{-۱}\int_۰^۱\left[xy+\frac{۱}{۲}y^۲\right]_x^۲dx$$

$$=\frac{۱}{۳}e^{-۱}\int_۰^۱(۲x+۲-\frac{۳}{۲}x^۲)\,dx=\frac{۱}{۳}e^{-۱}(\frac{۵}{۲})=\frac{۵}{۶}e^{-۱}=۰/۳۰۷$$

ب-
$$f_{X,Z}(x,z)=\int_۰^۲\frac{۱}{۳}(x+y)e^{-z}\,dy=\frac{۱}{۳}e^{-z}\left[xy+\frac{۱}{۲}y^۲\right]_۰^۲=\frac{۲x+۲}{۳}e^{-z}$$
$۰<x<۱\ ,\ z>۰$

$$f_X(x)=\int_۰^{+\infty}\frac{۲x+۲}{۳}e^{-z}\,dz=\frac{۲x+۲}{۳}\qquad ۰<x<۱$$

$$f_Z(z)=\int_۰^۱\frac{۲x+۲}{۳}e^{-z}\,dx=e^{-z}\left[\frac{x^۲+۲x}{۳}\right]_۰^۱=e^{-z}\qquad z>۰$$

به همین ترتیب به سادگی به دست می‌آوریم که

$$f_{Y,Z}(y,z)=\frac{۲y+۱}{۶}e^{-z}\qquad ۰<y<۲\ ,\ z>۰$$

$$f_Y(y)=\frac{2y+1}{6} \qquad 0<y<2$$

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{x+y}{3} \qquad 0<x<1\,,\ 0<y<2$$

بنابراین $f_{X,Y,Z}(x,y,z)\neq f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$ پس X و Y و Z از یکدیگر مستقل نیستند اما $f_{X,Z}(x,z)=f_X(x)f_Z(z)$ و $f_{Y,Z}(y,z)=f_Y(y)f_Z(z)$ پس X و Z و همچنین Y و Z از یکدیگر مستقل هستند و $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ یعنی X و Y از یکدیگر مستقل نیستند.

۷.۳ تمرینات

۱ یک تاس سالم را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار عدد ۶ بیاید

الف- اگر A پیشامد مشاهدهٔ عدد ۶ و B پیشامد مشاهدهٔ عدد غیر از ۶ باشد، فضای نمونه و احتمال هر پیشامد ساده را پیدا کنید.

ب- فرض کنید X شمارهٔ پرتابهای لازم برای مشاهدهٔ اولین ۶ باشد. S_X را پیدا کنید. آیا X گسسته است؟

ج- تابع احتمال و تابع توزیع X را به دست آورید و احتمال اینکه X مضرب ۳ باشد را بیابید.

۲ سکه سالمی را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X را برابر تفاضل تعداد خطهای به دست آمده از تعداد شیرها در نظر بگیریم، تابع احتمال X را به دست آورید و $P(X>-1)$ را محاسبه کنید.

۳ محموله‌ای شامل ۵ پروژکتور است که دوتای آن آسیب دیده است. به طور تصادفی ۳ پروژکتور این محموله خریداری می‌شود. اگر تعداد پروژکتورهای آسیب دیده که خریداری شده‌اند را با متغیر تصادفی X نشان دهیم، تابع احتمال و تابع توزیع X را به دست آورید.

۴ کدامیک از توابع زیر می‌توانند تابع احتمال یک متغیر تصادفی گسسته X باشند؟ چرا؟

الف- $f_X(x)=\frac{x}{15} \qquad x=0,1,2,3,4,5$