نام و نام خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۵/۲/۶**

وقت : **۷۵** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۴ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۵**- ۱۳۹۴

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱ - معادله مرتبه اول زیر را حل کنید. ۱۵ نمره

$$(x+۲y+۴)\,dx-(۲x-y+۳)\,dy=۰$$

سوال۲ - معادله دیفرانسیل با شرط اولیه زیر را حل کنید : ۱۵ نمره

$$\cos x(\,۲\sin y-\sin x)dx-(\sin x\cos y)dy=۰ \quad ; \quad y(\frac{\pi}{۲})=-\frac{\pi}{۲}$$

سوال۳ - تابع $y_۱=۲e^{x}$ یک جواب معادله $y'=e^{-x}y^{۲}+y-۴e^{x}$ است. تمام جوابهای آن را بیابید. ۱۵ نمره

سوال۴ - معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $y=\ln(a-x)+bx$ را بیابید. ۱۵ نمره

سوال۵ - معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را به کمک روش ضرایب نامعین حل کنید : ۲۰ نمره

$$y''-y'-۲y=۲e^{-x}+x$$

موفق باشید

جواب سوال۱ : معادله را به صورت $y'=\dfrac{x+2y+4}{2x-y+3}$ می‌نویسیم. اگر تغییر متغیر $\begin{cases}x=X+a\\ y=Y+b\end{cases}$ را اعمال کنیم داریم :

$$Y'=\frac{X+2Y+(a+2b+4)}{2X-Y+(2a-b+3)}$$

اگر $\begin{cases}a+2b+4=0\\ 2a-b+3=0\end{cases}$ آنگاه به یک معادله همگن خواهیم رسید. از حل دستگاه معادلات داریم : $\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}$

قرار می‌دهیم : $\begin{cases}x=X-2\\ y=Y-1\end{cases}$ اکنون معادله همگن $Y'=\dfrac{X+2Y}{2X-Y}$ را با تغییر متغیر $Y=Xu$ حل می کنیم.

داریم : $u+Xu'=\dfrac{X+2Xu}{2X-Xu}$ و در نتیجه $Xu'=\dfrac{1+2u}{2-u}-u=\dfrac{1+u^2}{2-u}$

این معادله ، یک معادله جدایی‌پذیر است و داریم $\dfrac{2-u}{1+u^2}du=\dfrac{dX}{X}$.

اکنون با انتگرالگیری از طرفین خواهیم داشت $\int\dfrac{2-u}{1+u^2}du=\int\dfrac{dX}{X}$ و یا

$$2\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln X+c \ \rightarrow\ 4\arctan u=\ln[X^2(1+u^2)]+2c$$

$$\rightarrow\ 4\arctan\frac{Y}{X}=\ln[X^2+Y^2)]+2c$$

و بالاخره داریم : $\boxed{4\arctan\dfrac{y+1}{x+2}=\ln[(x+2)^2+(y+1)^2)]+2c}$

جواب سوال۲ : داریم : $M=\cos x(\,2\sin y-\sin x),\ N=-(\sin x\cos y)$

در نتیجه

$M_y=2\cos x\cos y,\ N_x=-\cos x\cos y$. این معادله کامل نیست اما چون $\dfrac{M_y-N_x}{N}=\dfrac{3\cos x\cos y}{-\sin x\cos y}=\dfrac{-3\cos x}{\sin x}$

مستقل از y است ، بنابر این یک عامل انتگرالساز یک متغیره بر حسب x دارد. داریم : $\mu=e^{\int\frac{-3\cos x}{\sin x}dx}=e^{-3\ln\sin x}=\dfrac{1}{\sin^3 x}$

و با ضرب این عامل انتگرالساز در طرفین معادله داریم :

$$\frac{\cos x(\,2\sin y-\sin x)}{\sin^3 x}dx-\frac{\sin x\cos y}{\sin^3 x}dy=0 \quad\rightarrow\quad (\frac{2\cos x}{\sin^3 x}\sin y-\frac{\cos x}{\sin^2 x})dx-\frac{\cos y}{\sin^2 x}dy=0$$

که یک معادله کامل است. قرار می‌دهیم : $f(x,y)=\int(\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}\sin y-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x})dx=\dfrac{-\sin y}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\sin x}$

و چون $f_y=-\dfrac{\cos y}{\sin^2 x}$ بنابر این جواب عمومی معادله عبارت است از : $\dfrac{-\sin y}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\sin x}=c$

با توجه به شرط اولیه $y(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}$ داریم $c=2$ و جواب معادله با شرط اولیه عبارت است از : $\boxed{\sin x-\sin y=2\sin^2 x}$

جواب سوال۳ : این معادله ، یک معادله ریکاتی است. با تغییر متغیر $y=2e^x+\frac{1}{v}$ آن را حل می‌کنیم.

داریم : $2e^x-\frac{v'}{v^2}=e^{-x}(4e^{2x}+\frac{4e^x}{v}+\frac{1}{v^2})+(2e^x+\frac{1}{v})-4e^x$ و در نتیجه : $-\frac{v'}{v^2}=\frac{5}{v}+\frac{e^{-x}}{v^2}$ و یا $v'+5v=-e^{-x}$

که یک معادله خطی مرتبه اول است :

$$v=e^{-\int 5dx}[c+\int(-e^{-x})e^{\int 5dx}dx]=e^{-5x}(c-\int e^{4x}dx)=e^{-5x}(c-\frac{1}{4}e^{4x})=\frac{4ce^{-5x}-e^{-x}}{4}\ \to v=\frac{4c-e^{4x}}{4e^{5x}}$$

و بالاخره داریم $y=2e^x+\frac{4e^{5x}}{4c-e^{4x}}$ و یا : $\boxed{y=2e^x\times\frac{a+e^{4x}}{a-e^{4x}}}$

جواب سوال۴ : از معادله $y=\ln(a-x)+bx$ داریم $y'=\frac{-1}{a-x}+b$ و $y''=\frac{-1}{(a-x)^2}$ بنابر این $\sqrt{-y''}=\frac{1}{a-x}$

و در نتیجه : $b=y'+\sqrt{-y''}$ بنابر این معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای داده شده عبارت است از

$y'=\ln\frac{1}{\sqrt{-y''}}+(y'+\sqrt{-y''})x$ و یا : $\boxed{y'=-\ln\sqrt{-y''}+(y'+\sqrt{-y''})x}$

جواب سوال۵ : ابتدا معادله همگن نظیر آن را حل می‌کنیم یعنی $y''-y'-2y=0$ معادله مشخصه آن ، $m^2-m-2=0$

دو ریشه حقیقی $m_1=-1$ و $m_2=2$ دارد و جواب همگن عبارت است از : $y_h=Ae^{-x}+Be^{2x}$

جواب خصوصی معادله را در دو مرحله محاسبه می‌کنیم.

به ازای $h_1(x)=2e^{-x}$ جواب خصوصی را با توجه به جواب همگن ، به صورت $y_{p_1}=axe^{-x}$ در نظر می‌گیریم.

داریم $y''_{p_2}=(ax-2a)e^{-2x}$, $y'_{p_1}=(-ax+a)e^{-x}$ و $y''_{p_1}-y'_{p_1}-2y_{p_1}=-3ae^{-x}=2e^{-x}$ که نتیجه می‌دهد $a=-\frac{2}{3}$

یعنی $y_{p_1}=-\frac{2}{3}xe^{-x}$

به ازای $h_2(x)=x$ و ، جواب خصوصی را به صورت $y_{p_2}=bx+c$ در نظر می‌گیریم. داریم : $y''_{p_2}=0$ $y'_{p_2}=b$

و $y''_{p_2}-y'_{p_2}-2y_{p_2}=-2bx-(b+2c)=x$ که نتیجه می‌دهد $-2b=1$, $b+2c=0$ یعنی $b=\frac{-1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$

و در نتیجه $y_{p_2}=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{4}$

و بالاخره جواب عمومی معادله عبارت است از : $\boxed{y_g=Ae^{-x}+Be^{2x}-\frac{2}{3}xe^{-x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$