(به نام خدا)

Subject: 1
year. Month. Day.

DEA: تکنیکی است بر مبنای برنامه ریزی ریاضی جهت ارزیابی عملکرد مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم گیرنده متجانس

برنامه ریزی ریاضی: به تمام مسائل بهینه سازی برنامه ریزی ریاضی میگوییم. لزوماً نباید op باشد می‌تواند چند هدفه باشد.

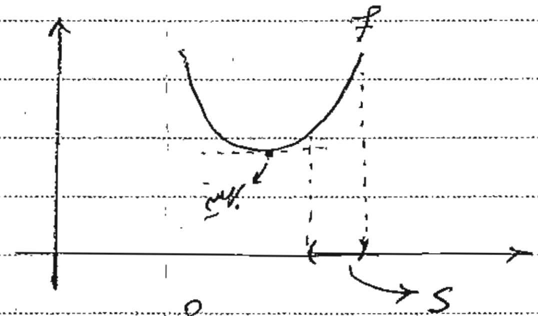
برنامه ریزی چند هدفی
$$\begin{cases} op & F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) \\ s.t. & x \in S \end{cases}$$

بین جوابها یک جواب ارجح یا بهتر تعریف میکنیم.

if $card\, S = 0 \Longrightarrow$ F نداریم

S با F رابطه ندارد ولی روی اعضای S تعریف می‌شود.

S مهمتر از F است. از S نمی‌توانیم رد شویم ولی از F چرا.



Min

در اینجا از f گذشتیم ولی از S نمی‌توانیم

اگر F یک تابع single باشد و S چندوجهی آنگاه مسئله برنامه ریزی خطی میباشد:

$$\left.\begin{matrix} Min & single \\ x \in S & \end{matrix}\right\} \longrightarrow$$ برنامه ریزی خطی

چندوجهی

جواب:
- شدنی
  - جواب بهینه موجود است
  - جواب بهینه موجود نیست ⟵ در LP به این unbounded میگوییم
- نشدنی ⟵ تمام

if $card\, S = 1 \longrightarrow$ F باید تعریف کنیم

اگر بهینه سازی می‌خواهیم باید $card\, S \geq 2$:

Page:

Subject : ۲
year. Month. Day.

ارزیابی عملکرد: در تمام جهات بررسی می‌کند - شناسایی نقاط ضعف و قوت سازمان.

واحد تصمیم گیرنده (DMU): واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $(x_1, \dots, x_m)$ بردار خروجی مانند $(y_1, \dots, y_s)$ را تولید می‌نماید.

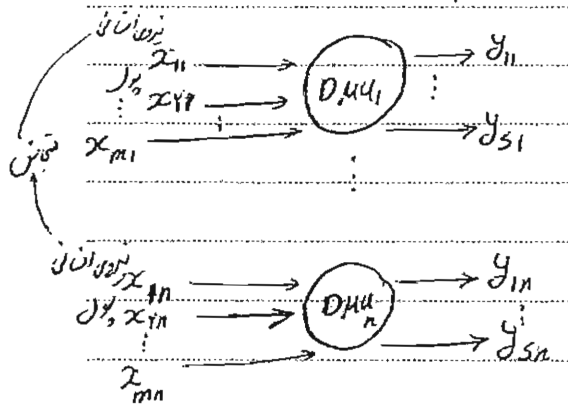
منظور از واحد تصمیم گیرنده متجانس (هم جنس) عبارت است از واحدهایی که عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های مشابه خروجی‌های مشابه تولید می‌کنند.

در DMU متجانس فاکتورها یکسان مشخص آنها یکی باشد نه مقدار آنها.

کارخانه (هزینه - درآمد - میزان رضایت)
دانشگاه (" " ")
هزینه‌ها با هم متفاوت - درآمدها با هم متفاوت - میزان رضایت افراد متفاوت است.

یک جنس یعنی:
هم واحد باشند (یکی دلار یکی یورو نباشد)
هم جنس: هزینه با هزینه و درآمد با درآمد باشند

ورودی‌ها خروجی‌ها

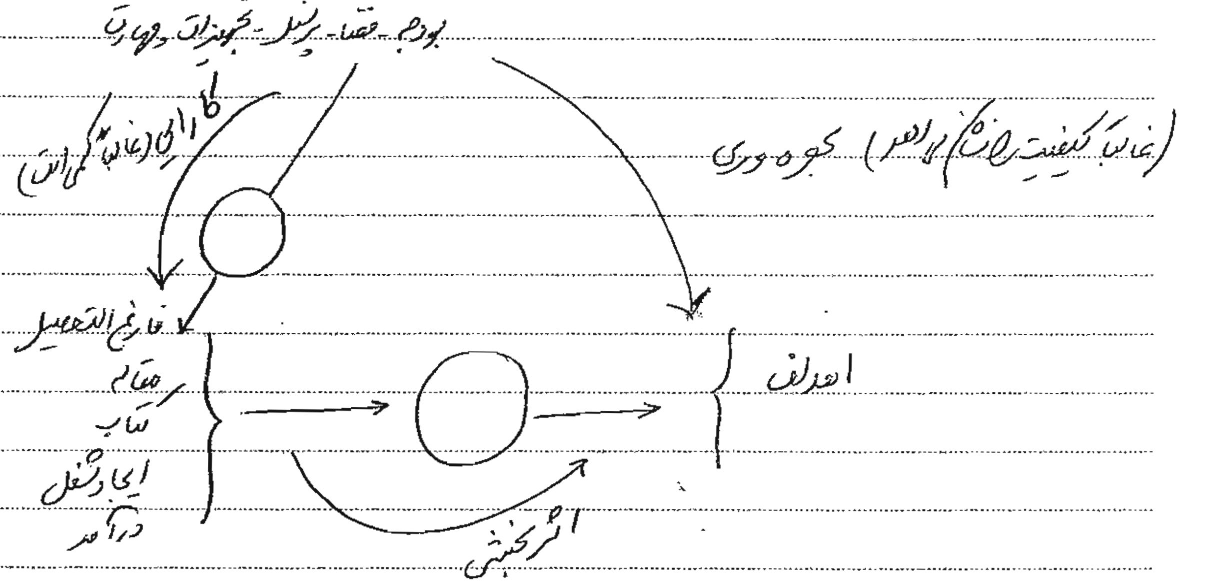


msتا

ارزیابی عملکرد منجر به: ۱) رتبه بندی
۲) بدست آوردن الگوی مرجع و یا نقاط ضعف و قوت
۳) کارایی

کارایی DMU:

فرض کنید DMU مورد نظر دانشگاه باشد. اهداف دانشگاه عبارتند از: ۱) رونق و رشد دانش و پژوهش در کشور
۲) افزایش سطح علمی جامعه
۳) مشکلات جامعه را علمی حل کند.
⋮



efficiency کارایی $= f$ (عوامل درون سازمانی)

effectivness اثربخشی $= g$ (عوامل برون سازمانی)

productivity بهره وری $= g \circ f = h$ (عوامل برون سازمانی و عوامل درون سازمانی) $h =$ (کارایی، اثربخشی)

بهره وری $\cong K \cdot$ (کارایی)$^{\alpha_1} \cdot$ (اثربخشی)$^{\alpha_2}$

scale (مقیاس تبدیل و ترتیب متفاوت)

بزرگی یا کوچکی α_1 و α_2 به مقدار تاثیر عوامل بستگی دارد.

بهره وری اگر براساس یکی از عوامل تعریف شود منطقی و قابل قبول نیست. به همین دلیل ضرب قرار داده‌ایم.

پس اگر تاثیر کارایی صفر باشد بهره وری تعریف نمی‌شود:

$0 \times$ (اثربخشی)$^{\alpha_2} = 0$

جمع عملگر جبرانی $\quad 1+9=10 \rightarrow 2+8$ (جبرانی)

ضرب عملگر غیرجبرانی $\quad 0 \times 10 = 0$

معمولاً در مدل تصمیم گیری تعریف می کنند:

کارایی = خوب کار کردن (از منابع بهینه)

اثربخشی = کار خوب کردن ← منفعت بر می گردد.

کارایی به اتومبیلها در مقابل ... (کمک، مدل ...)

$e = f(x, y)$ کارایی

سرمایه   درآمد

$100 \rightarrow \boxed{\text{ک۱}} \rightarrow 110$ e_1

$100 \rightarrow \boxed{\text{ک۲}} \rightarrow 120$ e_2

$80 \rightarrow \boxed{\text{ک۳}} \rightarrow 110$ e_3

تعریف: DMU_k بهتر از DMU_l اگر و تنها اگر $\begin{pmatrix}-x_k\\ y_k\end{pmatrix} \gneq \begin{pmatrix}-x_l\\ y_l\end{pmatrix}$

خصوصیات تابع f (کارایی):

کارایی DMU j

1) $\forall r, \quad \frac{\partial e_j}{\partial y_{rj}} > 0$ کارایی با خروجی رابطه مستقیم دارد. $e_2 > e_1$

2) $\forall i, \quad \frac{\partial e_j}{\partial x_{ij}} < 0$ $e_3 > e_1$

پیش فرض:

$\forall j, \quad X_j \gneq 0, \quad Y_j \gneq 0$

$(X_1, Y_1) = (0, Y_1) \rightsquigarrow$ می تواند بینهایت باشد

$(X_1, Y_1) = (X_1, 0) \rightsquigarrow$ (امکان دارد صفر باشد) بی معنی است

در هر صورت هیچ کدام را قبول نمی کنیم

$e = f($شاخص‌ها$)$
$e = f($ورودی و خروجی$)$

Subject: ۵

year. Month. Day.

به ازای هر مقدار باید تعریف شود:

$$\begin{cases} x_j \gneq 0 \\ y_j \gneq 0 \end{cases} \quad , \quad f(x_j, y_j) \in \mathbb{R}$$

پیوسته باشد (مشتق دارد)

با توجه به خصوصیات تابع کارایی، می‌توان آن را به دو صورت تعریف کرد:

تکیه روی بخش خروجی

1) $e = f(x, y) = \alpha y - \beta x$ $\left(\frac{\partial e}{\partial y} > 0 , \frac{\partial e}{\partial x} < 0\right) \leftarrow \alpha > 0 , \beta > 0$

(f فقط یک تعریف است برای اصول موضوعه آن را اصلاح می‌کند - مستقیماً به اصل قرار نمی‌دهیم)

2) $e = f(x, y) = \frac{\alpha y}{\beta x}$

هر تابع کسری که غیرخطی است وقتی ثابت می‌شود تبدیل به خطی می‌شود. (ظاهراً غیرخطی)

کارایی هر واحد حاصل مقایسه شاخص کارایی آن واحد با استانداردها می‌باشد. $=$ بهره‌وری $= \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}}$: در مدیریت

از آنجایی که استاندارد شاخص‌ها می‌تواند از بیرون یا داخل جامعه باشد کارایی مطلق و نسبی تعریف می‌شود

کارایی: مطلق / نسبی

نمرات \ افراد	1	2	3	4
نمره (از بیست) جامعه [0,20]	1	4	5	8
کارایی مطلق در scale [0,1]	1/20	4/20	5/20	8/20
کارایی نسبی با scale خروجی بود	1/8	4/8	5/8	8/8 = 1

می‌تواند کارایی مطلق باشد ولی چون scale غیراستاندارد است تبدیل به پائینی می‌شود

۲۰ استاندارد جامعه

معایب مطلق: (مزایای نسبی)

با توجه به عدم در دسترس بودن استاندارد کل جامعه و یا عدم تطبیق استاندارد کل موجود جامعه و یا فاصله بسیار زیاد جامعه تحت ارزیابی با استاندارد کل موجود، از کارایی مطلق استفاده نمی‌شود و به جای آن از کارایی نسبی که ذیلاً تعریف می‌شود استفاده خواهیم نمود. در واقع کارایی مطلق مقایسه با استاندارد خارجی است، اما این استاندارد را از خارج به داخل جامعه تحمیل می‌کنیم.

به عبارت دیگر:

۱) عدم وجود الگوی حقیقی (Bench Mark)

۲) فاصله عملکرد در ایران با استاندارد جهانی (عملکرد واقعی DMU در اغلب کشورها با استاندارد جهانی فاصله زیادی دارد و مطابقت ندارد و عملاً نمی‌توان DMU ناکارا را کارا کرد.

Page:

کارایی نسبی = $\frac{\text{عملکرد}}{\text{بهترین عملکرد}}$

Subject : ۶/

year. Month. Day.

۳) عدم fit کردن با استاندارد جهانی یا نبودن استاندارد جهانی (ممکن است استاندارد جهانی است ولی ما قادر به fit کردن آن نیستیم مانند کارهای اعتباری)

حسن کارایی مطلق: عملکرد یا جایگاه واقعی واحدها را نشان می دهد.

به عنوان مثال در مثال قبلی کارایی مطلق DMU_4، $\frac{8}{20}$ و کارایی نسبی آن ۱ است. کارایی نسبی این شخص بهترین عملکرد را در این مجموعه نسبت به بقیه نشان می دهد ولی غافل از اینکه این فرد باید این درس را مجدداً انتخاب کند. اندازه این از کارایی مطلق نتیجه می شود: $\frac{8}{20} < \frac{10}{20}$

کارایی نسبی:

$$RE_k = \frac{e_k}{Max\{e_1, \dots, e_n\}}$$

چون تعداد DMU ها مشاهدات است از max دارد و منحصر بفرد هم است و لی اندیس ممکن است منحصر بفرد نباشد.

معیار (۱): $e = \alpha y - \beta x$ $\qquad \alpha > 0, \beta > 0$

معیار ۲: $e = \frac{\alpha y}{\beta x}$

یک ورودی $\qquad$ یک خروجی

$x_1 \longrightarrow DMU_1 \longrightarrow y_1$

$\vdots$

$x_n \longrightarrow DMU_n \longrightarrow y_n$

	DMU_1	...	DMU_n
م ۱ (کارایی مطلق)	$\alpha y_1 - \beta x_1$	...	$\alpha y_n - \beta x_n$
م ۲ (کارایی مطلق)	$\frac{\alpha y_1}{\beta x_1}$		$\frac{\alpha y_n}{\beta x_n}$
م ۱ (کارایی نسبی)	$\frac{\alpha y_1 - \beta x_1}{max\{\alpha y_j - \beta x_j; \forall j\}}$		$\frac{\alpha y_n - \beta x_n}{max\{\alpha y_j - \beta x_j; \forall j\}}$
م ۲ (کارایی نسبی)	$\frac{\alpha y_1 / \beta x_1}{max\{\frac{\alpha y_j}{\beta x_j}; \forall j\}}$	...	$\frac{\frac{\alpha y_n}{\beta x_n}}{max\{\frac{\alpha y_j}{\beta x_j}; \forall j\}}$

Page:

Subject: ۷۱

year. Month. Day.

$$RE_p = \frac{\dfrac{\alpha y_p}{\beta x_p}}{\max\left\{\dfrac{\alpha y_j}{\beta x_j} ; j=1,\dots,n\right\}} = \frac{\dfrac{\alpha y_p}{\beta x_p}}{\cancel{\dfrac{\alpha}{\beta}} \max\left\{\dfrac{y_j}{x_j} ; j=1,\dots,n\right\}}$$

$$\longrightarrow RE_p = \frac{y_p/x_p}{\max\left\{\dfrac{y_j}{x_j} ; j=1,\dots,n\right\}}$$

به همین دلیل در مدیریت تعریف می‌کنند:

$$\text{کارایی} = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}}$$

چند ورودی، چند خروجی

$$v_1 \leftarrow x_{1j} \longrightarrow \quad DMU_j \quad \longrightarrow y_{1j} \rightarrow u_1$$

$$\vdots$$

$$v_m \leftarrow x_{mj} \longrightarrow \quad \quad \longrightarrow y_{sj} \rightarrow u_s$$

کارایی:

(معیار ۱) $e = \cancel{y} - x \overset{?}{\in} \mathbb{R}$ (*) x دارای m مولفه و y دارای s مولفه ← خاطر e رو برابر نوشتیم

(معیار ۲) $e = \cancel{y/x} \overset{?}{\in} \mathbb{R}$ (*)

(*) برای اینکه بتوان در این حالت کارایی را تعریف نمود بایستی هر دوی y و x اسکالر باشند (چون می‌خواهیم رتبه‌بندی کنیم باید e اسکالر باشد)

$$f: \mathbb{R}^{m+s} \longrightarrow \mathbb{R}$$

بدین منظور آیتم‌ها را ارزش‌گذاری کنیم (x_{ij}ها و y_{rj}ها) $(i=1,\dots,m \; , \; r=1,\dots,s)$

تمام هدف DEA پیدا کردن ارزش‌هاست.

U = بردار قیمت خروجی‌ها

V = بردار هزینه ورودی‌ها

معلوم

نه همه ورودی‌ها و خروجی‌ها قابل ارزش‌گذاری هستند.

بعضی مواقع ارزش‌گذاری را نمی‌توانیم بکنیم (مانند رضایت مشتری) یعنی آیتمی است که قابل قیمت‌گذاری نیست.

اصلش ارزش ولی جایی که نمی‌توانیم به جای ارزش، قیمت می‌گذاریم (ممکن است قیمت نداشته باشد ولی ارزش داشته باشد (مثل عمر آدم))

Page:

Subject : ۸/

year. Month. Day.

کارایی مطلق DMU_j $= \dfrac{UY_j}{VX_j}$ ، $e_j = UY_j - VX_j$

کارایی نسبی DMU_j $= \dfrac{\dfrac{UY_j}{VX_j}}{\max\left\{ \dfrac{UY_k}{VX_k} \,\middle|\, k=1,\dots,n \right\}}$

(EE) کارایی اقتصادی

$(U,V) > 0 \;\; \left\{ \dfrac{\partial e}{\partial y} > 0 ,\; \dfrac{\partial e}{\partial x} < 0 \right.$

DMU_p بهتر از DMU_k است اگر و فقط اگر $\begin{pmatrix} -X_p \\ Y_p \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geqslant} \begin{pmatrix} -X_k \\ Y_k \end{pmatrix}$

$V=(v_1,\dots,v_m) \;,\; U=(u_1,\dots,u_s)$

(*) $v_1 x_{1p} \le x_{1k} v_1$ $\vdots$ $v_m x_{mp} \le x_{mk} v_m$

$V(X_p \le X_k)$, $U(Y_p \underset{\neq}{\geqslant} Y_k)$ $\Longrightarrow$ $VX_p \le VX_k$, $UY_p \underset{\neq}{\geqslant} UY_k$ $\quad v_1 x_{1p} \le v_1 x_{1k} \;\; v_1 x_{1p} + \dots + v_m x_{mp} \le v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{VX_p} \geqslant \dfrac{1}{VX_k}$, $UY_p \underset{\neq}{\geqslant} UY_k \Longrightarrow \dfrac{UY_p}{VX_p} > \dfrac{UY_k}{VX_k} \Rightarrow e(p) > e(k)$

نتیجه:

۱) DMU_p بهتر است از DMU_k $\Longleftarrow$

$\forall \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} > 0 \,,\; \dfrac{UY_p}{VX_p} > \dfrac{UY_k}{VX_k}$

عکس نقیض ۱):

DMU_p بهتر از DMU_k نیست $\Longleftarrow$ $\exists \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} > 0 \,,\; \dfrac{UY_p}{VX_p} \leqslant \dfrac{UY_k}{VX_k}$

۲/۵ < ۲ , ۵ < ۶ $\not\Leftarrow$ ۲/۵ + ۵ < ۲ + ۶

رابطه ۱) دو طرفه نیست و این به دلیل (*) است.

۲/۵ < ۳ , ۵ < ۶ $\longrightarrow$ ۲/۵ + ۵ < ۳ + ۶

Subject: ۹

year. Month. Day.

$$RE_p = \frac{UY_p / VX_p}{\max\left\{ \frac{UY_j}{VX_j} \middle| j=1,\dots,n \right\}} \in (0,1] \left\langle \begin{array}{l} =1 \\ <1 \end{array} \right.$$

کارا بودن: $RE_p = 1 \Longrightarrow \frac{UY_p}{VX_p} = \max\left\{ \frac{UY_j}{VX_j} \middle| j=1,\dots,n \right\} \Longrightarrow \forall j;\ \frac{UY_p}{VX_p} \geq \frac{UY_j}{VX_j}$

$RE_p < 1 \Longrightarrow \frac{UY_p}{VX_p} < \max\left\{ \frac{UY_j}{VX_j} \middle| j=1,\dots,n \right\} \Longrightarrow \exists q;\ \frac{UY_q}{VX_q} > \frac{UY_p}{VX_p}$

ناکارا بودن (نسبت به این وزن u و v ناکاراست)

$\exists q;\ \frac{UY_q}{VX_q} > \frac{UY_p}{VX_p} \longrightarrow$ DMU_q نسبت به وزن $\left(\frac{u}{v}\right)$ از DMU_p بهتر است.

حال اگر این طور بنویسیم:

۲) $\forall \left(\frac{U}{V}\right) > 0,\ \exists q;\ \frac{UY_q}{VX_q} > \frac{UY_p}{VX_p} \Longrightarrow$ DMU_q ~~بهتر از~~ DMU_p است

معادل: DMU_p ناکاراست. (چون می‌توانیم بگوییم DMU_p بهتر از همه است، لذا گفتیم DMU_p ناکاراست)

DMU_p کاراست اگر به ازای هر وزن $\left(\frac{u}{v}\right)$ بهتر از همه باشد.

نقیض ۲: $\exists \left(\frac{u}{v}\right) > 0,\ \forall q,\ \frac{UY_q}{VX_q} \leq \frac{UY_p}{VX_p} \Longleftrightarrow$ DMU_p ناکارا نیست. (*)

(هم p جزء این q هاست)

$\Downarrow$ معادل

$\exists \left(\frac{u}{v}\right) > 0;\ \max\left\{ \frac{UY_j}{VX_j} \middle| j=1,\dots,n \right\} = \frac{UY_p}{VX_p}$

$$\Longrightarrow \frac{\frac{UY_p}{VX_p}}{\max\left\{ \frac{UY_j}{VX_j} \middle| j=1,\dots,n \right\}} = 1$$ معادل حالت (*)

Page:

Subject: ۱۶

year. Month. Day.

فرض کنید تمام u ها و v ها را حک می‌کند:

$$\underset{(u,v)}{Max} \quad \frac{\dfrac{uy_p}{vx_p}}{max\left\{\dfrac{uy_j}{vx_j} \Big| j=1,\dots,n\right\}} \quad (1) \quad \begin{cases} =1 \rightarrow (**) \ \text{ناکارا نیست } DMU_p \\ <1 \rightarrow (*) \ \text{ناکارا است. } DMU_p \end{cases}$$

$$s.t \quad (u,v) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \underset{\text{کبردار}}{(u,v) \geq 1\varepsilon} \rightarrow \text{اسکالر}$$

چون $(u,v)>0$ باز است ولذا max در نامحدودی بدست می‌آید

$(*)$: DEA مزیت $(\forall (u,v)>0)$ اگر واحدی با DEA ناکارا باشد بنابراین همه جا ناکارا است.

$(**)$: DEA ضعف (فقط می‌گوییم ناکارا نیست، کارا است)

اگر بخواهیم بگوییم دقیقاً کارا است باید:

$$\forall \binom{u}{v} > 0, \forall q, \quad \frac{uy_q}{vx_q} \leq \frac{uy_p}{vx_p}$$

DMU_p را کارا گوییم هرگاه بهتر از آن موجود نباشد.

$$\sim \left(\exists q; \binom{-x_p}{y_p} \underset{\neq}{\leq} \binom{-x_q}{y_q}\right)$$

DMU_p را کارا ضعیف گوییم هرگاه:

$$\sim \left(\exists q; \binom{-x_p}{y_p} < \binom{-x_q}{y_q}\right)$$

$$RE_p = 1 \Rightarrow \exists \binom{u}{v} \ \forall j; \quad \frac{uy_j}{vx_j} \leq \frac{uy_p}{vx_p} \ * \quad \begin{cases} a) \ \binom{u}{v} > 0 \\ b) \ \binom{u}{v} \underset{\neq}{\geq} 0 \end{cases}$$

a) $\exists \binom{u}{v} > 0 \ \forall j \ \dfrac{uy_j}{vx_j} \leq \dfrac{uy_p}{vx_p} \Rightarrow$ DMU_p کارای قوی

بخ: D_mU_p کارای قوی نباشد $\Rightarrow$ DMU بهتر از آن وجود دارد $\Rightarrow \binom{-x_q}{y_q} \underset{\neq}{\geq} \binom{-x_p}{y_p}$

$$\Rightarrow \frac{uy_p}{vx_p} \ \cancel{\leq} \ \frac{uy_q}{vx_q} \quad \text{※} \quad \text{تناقض با } *$$

b) $\binom{u}{v} \underset{\neq}{\geq} 0 \Rightarrow$ DMU_p کارای ضعیف

بخ؛ $\Rightarrow \exists \ DMU_q, \ \binom{-x_q}{y_q} > \binom{-x_p}{y_p} \Rightarrow \dfrac{uy_p}{vx_p} < \dfrac{uy_q}{vx_q}$ ※

Subject: 11/

year. Month. Day.

مدل T.O.T:

$$Max \quad \frac{\dfrac{uy_p}{vx_p}}{Max\left\{\dfrac{uy_j}{vx_j} \,\middle|\, j=1,\dots,n\right\}} \qquad (1)$$

$$S.t \quad (u,v) \geq 1\varepsilon$$

* این فرمت قابل حل نیست. لذا تغییر متغیر انجام می‌دهیم:

$$\frac{1}{Max\left\{\dfrac{uy_j}{vx_j} \,\middle|\, j=1,\dots,n\right\}} = t > 0 \quad (\text{ارکان } t)$$

$$Max\left\{\frac{tuy_j}{vx_j} \,\middle|\, j=1,\dots,n\right\} = 1 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{tuy_j}{vx_j} \leq 1 \,,\; j=1,\dots,n \\ \dfrac{tuy_1}{vx_1} = 1 \text{ یا } \dots \text{ یا } \dfrac{tuy_n}{vx_n} = 1 \end{cases} \quad (**)$$

$$t > 0 \text{ یا } t \geq \varepsilon$$

$$^{*}tu := \bar{u} \implies Max \quad \frac{uy_p}{vx_p}$$

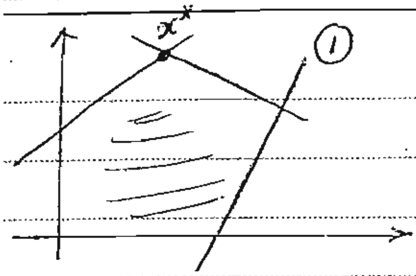
این u با u در (1) فرق می‌کند

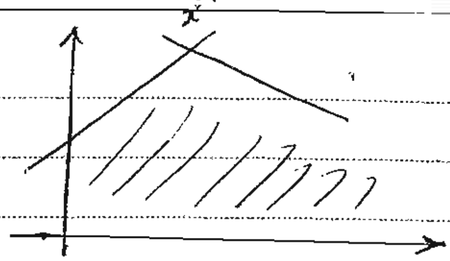
$$(2) \qquad S.t \quad \frac{uy_j}{vx_j} \leq 1 \,,\; j=1,\dots,n$$

$$(u,v) \geq 1\varepsilon$$

سوال: چرا در مدل (2) (**) را لحاظ نکردیم؟ در قضیه ۱، ثابت می‌کنیم در هر جواب بهین حتماً این شرط خود بخود برقرار است. لذا این قید را از اول حذف کردیم.

تذکر: اگر بدانیم قید یا متغیری در جواب بهین نقشش به چه شکل است از اول همان را لحاظ کنیم. یعنی اگر متغیر در جواب بهین صفر باشد، می‌توانیم از اول آنرا صفر قرار دهیم و اگر قیدی در جواب بهین نافذ بود، از اول نافذ می‌کنیم.





تبصره ① در جواب بهین نافذ نیست ولذا می‌توان از اول آنرا حذف کرد و مساله را حل نمود.

سوال: چرا در $\begin{matrix} Ax=b \\ x\geq 0 \end{matrix}$ از روش حذف گاوس استفاده نمی‌کنیم؟

۱) شدنی بودن مشکل دار می‌شود

$$x_1 + 5x_2 = 7$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1$$
$$x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

۲) اگر از قید اول x_1 را بدست آورده و در بقیه جایگذاری کنیم علاوه بر مساله قبلی می‌رسیم زیرا باید آنرا در شرط * نیز تکرار دهیم که با این کار به همان مساله اولیه می‌رسیم.

مهم **قضیه ۱**: اگر $\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}$ یک جواب بهین مساله ② باشد آنگاه:

$$\exists q \,;\ \frac{u^* y_q}{v^* x_q} = 1$$

برهان: مساله ② را در نظر بگیرید:

$$\text{Max} \quad \frac{u y_p}{v x_p}$$
$$\frac{u y_j}{v x_j} \leq 1 \,,\quad j = 1, \dots, n$$
$$(u, v) \geq 1\varepsilon.$$

Subject: ۱۴

year. Month. Day.

ح: فرض کنید در هر جواب کهینِ $\begin{pmatrix} U^* \\ V^* \end{pmatrix}$ این قید نامساوی مسئله ② ناقد نباشد. یعنی:

$$\exists \begin{pmatrix} U^* \\ V^* \end{pmatrix} ; \forall j \quad \frac{U^* y_j}{V^* x_j} < 1 \qquad (*)$$

$$\text{مقدار کهین به ازای } \begin{pmatrix} U^* \\ V^* \end{pmatrix} = \frac{u_1^* y_{1p} + u_2^* y_{2p} + \cdots + u_s^* y_{sp}}{v_1^* x_{1p} + \cdots + v_m^* x_{mp}}$$

$$Y_p \underset{\neq}{\geq} 0 \longrightarrow \exists t ; y_{tp} > 0 \xrightarrow[t=1]{\text{مثلاً فرض کنید}} y_{1p} > 0$$

$$(*) \to U^* y_j < V^* x_j \longrightarrow u_1^* y_{1j} < V^* x_j - \sum_{r=2}^{s} u_r^* y_{rj} := \alpha_j \quad (**) \quad \forall j$$

برای رسیدن به تناقض می‌خواهیم جواب کهتری از $\begin{pmatrix} U^* \\ V^* \end{pmatrix}$ بیابیم.

$$\text{if } u_1^* \xrightarrow{\Delta > 0} u_1^* + \Delta \longrightarrow (u_1^* + \Delta) y_{1j} < \alpha_j$$

می‌خواهیم این رابطه $\forall j$ برقرار باشد:

$$\longrightarrow u_1^* y_{1j} + \Delta y_{1j} < \alpha_j \longrightarrow \Delta y_{1j} < \alpha_j - u_1^* y_{1j} := \beta_j \overset{(**)}{>} 0$$

$$\longrightarrow \Delta y_{1j} < \beta_j \longrightarrow \Delta = \begin{cases} \in \mathbb{R}^{>0} & y_{1j} = 0 \\ < \dfrac{\beta_j}{y_{1j}} & y_{1j} > 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \beta_j > 0,\ y_{1j} > 0}}{\exists}\ \Delta^* = \min \left\{ \frac{\beta_j}{y_{1j}} \,\middle|\, y_{1j} > 0,\ j = 1, \ldots, n \right\} < \infty$$

چون $\{1, \ldots, n\} \ni p$ و $y_{1p} > 0$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix}^t = (u_1^* + \Delta^*, u_2^*, \ldots, u_s^*, v_1^*, \ldots, v_m^*) \in S_2$$

($\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$ جواب شدنی مسئله است) زیرا:

$$\bar{U} y_j = (u_1^* + \Delta^*) y_{1j} + \sum_{r=2}^{s} u_r^* y_{rj} < \alpha_j + \sum_{r=2}^{s} u_r^* y_{rj} = V^* x_j = \bar{V} x_j \Longrightarrow \bar{U} y_j < \bar{V} x_j$$

و $\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix} \geq 1\varepsilon$

$$\text{مقدار تابع هدف به ازای } \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \frac{(u_1^* + \Delta^*) y_{1p} + u_2^* y_{2p} + \cdots + u_s^* y_{sp}}{v_1^* x_{1p} + \cdots + v_m^* x_{mp}} > \frac{u_1^* y_{1p} + u_2^* y_{2p} + \cdots + u_s^* y_{sp}}{v_1^* x_{1p} + \cdots + v_m^* x_{mp}} = \text{مقدار کهین به ازای } \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{U} Y_p}{\bar{V} X_p} > \frac{U^* Y_p}{V^* X_p} \quad \times$$

با کهینگی $\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}$ به تناقض می‌رسیم.

NOURI نوری

Page:

Subject: ۱۴/
year. Month. Day.

مجدداً مسائل ① و ② را در نظر می‌گیریم:

$$RE_p = Max \frac{\frac{uy_p}{vx_p}}{Max\left\{\frac{uy_j}{vx_j} \,\middle|\, j=1,\dots,n\right\}} \qquad ① \quad \underline{T.D.T}$$

$$s.t. \quad (u,v) \geq 1\varepsilon$$

ε در خاصیت ارشمیدسی صدق می‌کند یعنی باید حقیقی مثبت و کوچک باشد.

$$RE_p = Max \frac{uy_p}{vx_p} \qquad ② \quad \underline{F.P}$$

مدل خارج قسمتی (خطی - کسری)

$$s.t. \quad \frac{uy_j}{vx_j} \leq 1 \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$(u,v) \geq 1\varepsilon$$

جواب بهین ① و ② یکی است چون فقط تغییر متغیر انجام داده‌ایم.

$$\frac{1}{vx_p} := t$$

$$RE_p = Max \quad uy_p$$

$$s.t. \quad uy_j - vx_j \leq 0 \quad , \quad j=1,\dots,n \qquad ③ \quad \underline{CCR}$$

مدل خطی یا مضربی

$$vx_p = 1$$

$$(u,v) \geq 1\varepsilon$$

(چون این مدل به خاطر u و v ها که ضرب شده هم مضربی گویند)

تذکر ۱: جواب‌های مدل ① و ② و ③ با هم فرق می‌کند.

تذکر ۲: در مدل ③ اگر $vx_p=5$ بود مشکلی ندارد، در نهایت کارایی تمام DMU ها بین $[0,5]$ بدست می‌آید. مثلاً اگر $RE_p=2.5$ باشد باید ببینیم این مقدار چند درصد از ۵ است و چون کمی مشکل است لذا $vx_p=1$ قرار می‌دهیم.

مقایسه فضای شدنی مدل‌های فوق:

اگر (u,v) جواب مدل ① (T.D.T) باشد $\Longrightarrow$ $(\alpha u, \beta v)$ هم جواب مدل T.D.T می‌باشد. $(\alpha>0, \beta>0)$

$$Max \frac{\frac{\alpha uy_p}{\beta vx_p}}{Max\left\{\frac{\alpha uy_j}{\beta vx_j} \,\middle|\, j=1,\dots,n\right\}} \qquad \alpha>0, \beta>0$$

Page:

- اگر (u,v) جواب مدل ② باشد $\Longleftarrow$ $(\alpha u, \alpha v)$ جواب مدل ② می‌باشد ($\alpha>0$) ($\alpha=\beta$)

- اگر (u,v) جواب مدل ③ باشد $\Longleftarrow$ فقط (u,v) جواب مدل ③ می‌باشد. ($\alpha=\beta=1$)

بوضوح داریم:

$$\underset{\forall \alpha,\beta>0}{\text{مجموعه جواب T.D.T}} \subseteq \underset{\alpha=\beta>0}{\text{مجموعه جواب کسری}} \subseteq \underset{\alpha=\beta=1}{\text{مجموعه جواب CCR}}$$

تذکر ۳: مجموعه جوابهای ③ کلاسی از جوابهای ② است که محدبش یک است.

سوال: LP مدل مضربی CCR ③ کارایی نسبی را به ما می‌دهد. چرا؟

برای جواب دادن به این سوال ابتدا قضیه زیر را ثابت می‌کنیم. یعنی ثابت می‌کنیم در جواب بهین حداقل یکی از قیود نامساوی مدل ③ نافذ است.

قضیه: فرض کنید (u^*, v^*) جواب بهین مدل ③ باشد. اگر

$$\exists t;\ u^*y_t - v^*x_t = 0$$

آنگاه DMU_t کارا است.

برهان: می‌خواهیم ثابت کنیم DMU_t کارا است. یعنی در ارزیابی DMU_t با مدل ③ جواب بهینه 1 است.

Ⓘ $\text{Max}\quad uy_t$

$$uy_j - vx_j \leqslant 0,\quad j=1,\dots,n$$

$$vx_t = 1$$

$$(u,v) \geqslant 1\varepsilon$$

③ جواب بهین $(u^*,v^*) \Longrightarrow v^*x_p = 1,\quad \forall j,\ u^*y_j - v^*x_j \leqslant 0$ و $u^* \geqslant 1\varepsilon, v^* \geqslant 1\varepsilon$

$$v^*x_t = \alpha > 0 \longrightarrow \frac{v^*}{\alpha}x_t = 1$$

$$\longrightarrow \forall j,\ \frac{u^*}{\alpha}y_j - \frac{v^*}{\alpha}x_j \leqslant 0,\quad \frac{u^*}{\alpha} \geqslant 1\varepsilon,\ \frac{v^*}{\alpha} \geqslant 1\varepsilon \Longrightarrow \left(\frac{u^*}{\alpha}, \frac{v^*}{\alpha}\right) \in S_{Ⓘ}$$

بنابراین ثابت کردیم که $(\frac{u^*}{\alpha}, \frac{v^*}{\alpha})$ یک جواب شدنی مسئله (I) می‌باشد. از طرفی:

مقدار تابع هدف (I) به ازای $(\frac{u^*}{\alpha}, \frac{v^*}{\alpha})$ $= \frac{u^*}{\alpha}y_t = \frac{v^*}{\alpha}x_t = 1 \Longrightarrow \frac{u}{\alpha}y_t = 1$

بنابه فرض مسئله

بنابراین DMU_t کارا است.

نتیجه: چون در جواب بهینه حداقل یک قید مدل (۲) ناقد است و DMUای که به ازای آن این قید ناقد می‌شود، طبق قضیه قبل ثابت شد که کارا است، لذا به همین دلیل گفته می‌شود که مدل (۲) کارایی را نشان می‌دهد.

تمرین ۱: ثابت کنید مسئله (۲) همواره شدنی است.

حل:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & uy_p \\
\text{s.t.} \quad & uy_j - vx_j \leqslant 0 \quad j = 1, \dots, n \\
& vx_p = 1 \\
& (u, v) \geqslant 1\varepsilon
\end{aligned}$$

$x_p \underset{\neq}{\geqslant} 0 \longrightarrow \exists t \,;\, x_{tp} > 0$

$\forall j, \ y_j \underset{\neq}{\geqslant} 0 \longrightarrow \forall j, \exists k \in \{1, \dots, s\} \,;\, y_{kj} > 0$

$$\longrightarrow \begin{cases} v_i = 0, \ i = 1, \dots, m, \ i \neq t, \quad v_t = \dfrac{1}{x_{tp}} \Longrightarrow vx_p = 1 \\ u_r = 0, \ r = 1, \dots, s, \ r \neq k \longrightarrow u_k y_{kj} - v_t \cdot x_{tj} \leqslant 0 \end{cases}$$

می‌خواهیم این برقرار شود:

$$\Downarrow$$

$$u_k y_{kj} \leqslant v_t x_{tj} \longrightarrow u_k \leqslant \frac{v_t x_{tj}}{y_{kj}} \quad j = 1, \dots, n$$

$y_{kj} > 0$

$$\longrightarrow \bar{u}_k = \text{Min}\left\{ \frac{x_{tj}}{x_{tp}\, y_{kj}} \;\middle|\; j = 1, \dots, n \right\}$$

بنابراین با قرار دادن $u_k = \bar{u}_k$ نامساوی $uy_j - vx_j \leqslant 0$ نیز برقرار می‌باشد. از طرفی به وضوح داریم:

$u \geqslant 1\varepsilon$

$v \geqslant 1\varepsilon$

اثبات شدنی بودن :

$\max\ uY_p$

$uY_j - vX_j \leq 0 \ ; j=1,\dots,n$

$vX_p = 1$

$(u,v) \geq 1\varepsilon$

$A = \{i \mid x_{ip} \neq 0\}$ و $|A| = m_1$ و $\begin{cases} x_{ip} \neq 0 & \bar{v}_i = \frac{1}{m x_{ip}} \\ x_{ip} = 0 & \bar{v}_i = \alpha \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{v} X_p = \sum_{i \in A} \frac{1}{m_1 x_{ip}} x_{ip} + \sum_{i \in A^c} \alpha \times 0 = 1$

$\forall j \ ; \ Y_j \underset{\neq}{\geq} 0 \Rightarrow B = \{i \mid y_{ij} \neq 0\}$ و $|B| = m_j$

$\forall i \in B \ ; \ u_i y_{ij} \leq \bar{v} x_j \Rightarrow$ و $m' = \max\{m_j \mid j=1,\dots,n\}$

$\bar{u}_i = \min\left\{\frac{\bar{v} x_j}{m' y_{ij}} \mid j=1,\dots,n\right\}$

$\Rightarrow \bar{u}_i y_{ij} - \bar{v} x_j \leq 0$

$(\bar{u}, \bar{v}) \geq 1\varepsilon$

- لزومی ندارد که مدل DEA تکی LP باشد.

Subject: ۱۷

year. Month. Day.

تمرین ۲: ثابت کنید مسئله (۳) نامحدود نیست.

حل:

$vx_p=1 \xrightarrow{\text{چون}} p\in j=\{1,\dots,n\} \Rightarrow uy_p \leq vx_p=1 \longrightarrow uy_p\leq 1$

تمرین ۳: مدل زیر را ارائه دهید که تخمین پایینی را بدهد (بهترین کران نسبی پایینی را بدهد)

$$\operatorname{Min}\ \frac{\frac{uy_p}{vx_p}}{\operatorname{Max}\left\{\frac{uy_j}{vx_j}\,\middle|\, j=1,\dots,n\right\}}$$

$$\text{s.t}\quad (u,v)\geq 1\varepsilon$$

$$\frac{1}{\max\left\{\frac{uy_j}{vx_j}\,\middle|\, j=1,\dots,n\right\}}=t \longrightarrow \frac{uy_j}{vx_j}\leq 1 \ ,\ j=1,\dots,n \ \text{و}\ \begin{cases}\frac{uy_1}{vx_1}=1\\ \vdots\\ \frac{uy_n}{vx_n}=1\end{cases}$$

$$\longrightarrow \operatorname{Min}\ \frac{uy_p}{vx_p}$$

$$\frac{uy_j}{vx_j}\leq 1$$

$$u\geq 1\varepsilon,\ v\geq 1\varepsilon$$

$$\sum \frac{uy_j}{vx_j}\cdot z_j=1$$

$$\sum z_j=1$$

$$z_j\in\{0,1\}$$

$$\rightarrow \max\ \delta_p \quad\quad \max\ \Big(\delta_p-\sum_{j\neq p}\delta_j\Big)$$

s.t

$$\frac{uy_j}{vx_j}+\delta_j=1 \quad\quad \frac{uy_j}{vx_j}+\delta_j=1$$

$$\delta_1\cdot\delta_2\cdots\delta_n=0 \quad\quad u,v,\delta_j\geq 0$$

$$u,v,\delta_j\geq 0$$

مدل جمع برای تخمین کارایی بدبینانه

$$\delta^*\leq\delta' \Rightarrow \frac{u'y_p}{v'x_p}\leq\frac{u^*y_p}{v^*x_p}$$

Page:

Subject : ۱۷

year. Month. Day.

درجه تبهگنی مدل مضربی CCR زیاد است زیرا از $n+1$ قید فقط یک قید $vx_p=1$ غیر صفر است و احتمال اینکه ستون n ام نسبت صفر باشد زیاد می باشد و امکان به وجود افتادن LP مدل مضربی زیاد است. پس تا جایی که امکان دارد این مسئله را حل نمی کنیم.

$$(u,v) \in \mathbb{R}^{m+s}$$

$n+1 =$ تعداد قیود

$$(\text{تعداد DMU}) \; n \longrightarrow \begin{cases} n+1 \\ n-1 \end{cases}$$

$$n \rightarrow n+1 \xrightarrow{\text{افزایش قید}} S'_3 \subseteq S_3 \xrightarrow{max} RE'_p \leq RE_p$$ کارایی افزایش می یابد

$$n \rightarrow n-1 \xrightarrow{\text{کاهش قید}} S'_3 \supseteq S_3 \longrightarrow RE'_p \geq RE_p$$

پس کم شدن تولید DMU ها کارایی را بالاتر می برد.

تعبیر دیگر: اگر DMU اضافه شود، اگر آن DMU از شما و بقیه بهتر بود کارایی شما را کاهش می دهد زیرا استاندارد را بالا می رود.

$$m+s \longrightarrow m+s+1$$ افزایش شاخص ورودی یا خروجی

$$\Longrightarrow \mathbb{R}^{m+s} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+s+1}$$ ناحیه شدنی یک بعد زیاد می شود.

مقدار بهینه تابع هدف بدتر نمی شود، چون مسئله max است پس:

$$RE'_p \geq RE_p$$

اگر یک شاخص به شاخص های موجود بیفزاییم، اگر شاخص افزوده شده، شاخصی باشد که من در آن قوی هستم با افزودن به مدل، سبب افزایش کارایی من می شود.

اگر یک شاخص از شاخص کم کنیم، ممکن است شاخصی باشد که من در آن خوب بودم و با این کار کارایی من کاهش می یابد.

NOURI

Page:

Subject: ۱۹

year. Month. / Day.

یکی از نقاط قوت DEA اینست که علت ناکارایی (منبع) را درصورت وجود مشخص می‌کند و میزان آن را نیز به مدیر هدیه می‌گوید که در کدام شاخص ورودی یا خروجی ضعف داریم و به چه میزان.

تذکر: اگر در جامعه کارایی همه به سمت یک میل کند می‌گوییم اریب داریم بلکه می‌گوییم نتایج قابل تحلیل نیست زیرا اریب (خطا) وقتی داریم که مقالی از جامعه انتخاب کنیم ولی در DEA کل جامعه است.

$$\left.\begin{array}{l} n \downarrow \\ m+s \uparrow \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{کارایی افزایش می‌یابد}]{\text{در هر دو صورت}} RE \longrightarrow 1 \rightarrow$$ یعنی نمی‌توانیم تحلیل کنیم

برای اینکه نتایج قابل قبول و قابل تحلیل باشد باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$n \geq 3(m+s)$$

تعداد DMU ها $\geq$ ۳ (تعداد کل شاخص‌ها)

تعداد محدودیت‌ها $\geq$ ۳ (تعداد کل متغیرها)

مثال) $n=4$, $m+s=25$ $\longrightarrow$ با مدل‌های کلاسیک جواب نمی‌دهند

برای اینکه بتوان رابطه را برقرار کرد بایستی n را افزایش دهیم. لذا DMU های مجازی به مدل اضافه می‌کنیم. DMU های مجازی در مدل محدودیت‌های وزنی نامیده می‌شوند.

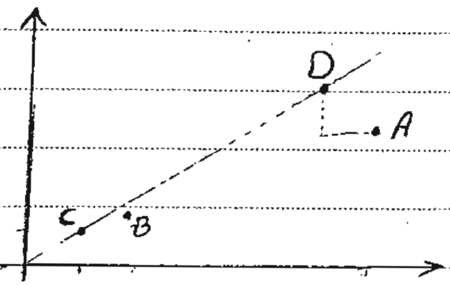
Page:

در ذیل روش دیگری که مقدار ضعف DMU ها را در واحدهای ناکارا می دهد ارائه می کنیم (روش اصول موضوعه)

مثال: سه تولید در ۳ پروژه سرمایه گذاری می کنند. تو اول در پروژه A، تو دوم در پروژه B و تو سوم در پروژه C

می خواهیم بدانیم کدام طرح بهتره؟

طرح	سرمایه	درآمد
فروشگاه A	۱,۰۰۰	۱,۵۰۰
بورس B	۲,۰۰۰	۲,۲۰۰
فروش زمین C	۱,۰۰۰	۲,۰۰۰



$$C\begin{pmatrix}-1{,}000\\ 2{,}000\end{pmatrix} \not\succ \begin{pmatrix}-1{,}000\\ 1{,}500\end{pmatrix}A$$

D بهتر از A است و از آنجایی که C و D هم ارزش اند پس C بهتر از A هست.

این مطلب برای همه توابع برقرار نیست: ← $\quad$ ۱,۰۰۰ ⟶ ۲,۰۰۰

۱,۰۰۰,۰۰۰ ⟶ ۲,۰۰۰,۰۰۰

(فقط برای توابع با بازده به مقیاس ثابت برقرار است)

(۲ تو ← ۳ تو تحویل
۴ تو ← ?? ۲۰ تو تحویل)

مجموعه امکان تولید (PPS): مجموعه تمام نقاطی که می توانستند در جامعه باشند مجموعه امکان تولید گوییم.

$$PPS = \left\{ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \;\middle|\; \text{y را بتوان از x تولید شود} \right\} = T$$

توجه داشته باشید که تکنولوژی تولید ایجاب می کند که PPS ما بدین صورت باشد. اگر تکنولوژی تغییر کند این مجموعه هم تغییر می کند.

اصول موضوعه:

اصول موضوعه باید در جامعه برقرار باشد ولی ما نمی توانیم اثبات کنیم. اصول موضوعه زیر را در تعریف T قبول می کنیم.

۱) اصل ناتهی بودن T (شمول مشاهدات):

همه مشاهدات باید در مجموعه باشند.

$$\begin{pmatrix}x_j\\ y_j\end{pmatrix} \in T \;,\; j = 1,\dots,n$$

با هر تکنولوژی قابل قبول است. تنها اصلی است که در مورد آن چیزی شده مشکلی ایجاد نمی کند.

1) Inclusion

*: $\binom{x}{y}$ ننوشتیم چون نمی‌دانیم چه مقدار است یا نه. اگر بود ثابت است و $\forall$ نمی‌خواهد.

Subject: ۲۱

year. Month. Day.

۲) اصل تحدب[1]

مجموعه T محدب است یعنی:

$$\forall \binom{x'}{y'}^{*}\ \forall \binom{x''}{y''},\ \forall \lambda \left[\binom{x'}{y'} \in T \ \& \ \binom{x''}{y''} \in T ,\ \lambda \in [0,1] \Longrightarrow \lambda \binom{x'}{y'} + (1-\lambda)\binom{x''}{y''} \in T \right]$$

یا

$$\begin{pmatrix} \lambda x' + (1-\lambda) x'' \\ \lambda y' + (1-\lambda) y'' \end{pmatrix} \in T$$

مثال:

		کارخانه A	کارخانه B
ورودی	نیروی انسانی	۷	۱۰
	بودجه	۲ میلیون	۳ میلیون
خروجی	محصول	۴ تن	۵ تن

می‌دانیم متعلق به T

یعنی اصل تحدب برقرار نیست؟ اگر ۷ و ۱۰ نفر بود اصل تحدب برقرار نیست

۳۰٪ از A با ۷۰٪ از B جمع کنیم ←

$$\begin{pmatrix} 0.3(7) + 0.7(10) \\ 0.3(2) + 0.7(3) \\ 0.3(4) + 0.7(5) \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \ p \\ \\ \Downarrow \text{اگر} \\ q \end{matrix}$$

if $p \Longrightarrow q \rightarrow$ اصل تحدب را پذیرفته‌ایم

(1) Convexity

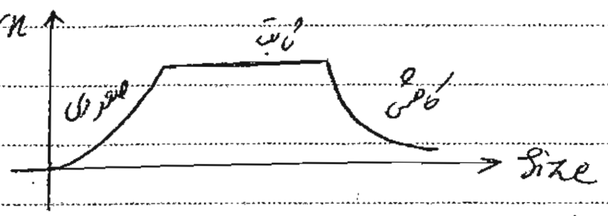
مقیاس یعنی: اندازه - بزرگی - سایز
بازده نسبت به مقیاس، در اینجا تراز است.

Subject: ۲۷
year. Month. Day.

۳) اصل بازده به مقیاس[1] : (در اقتصاد، بازده به مقیاس عبارت است از تأثیر عوامل تولید بر تولید.

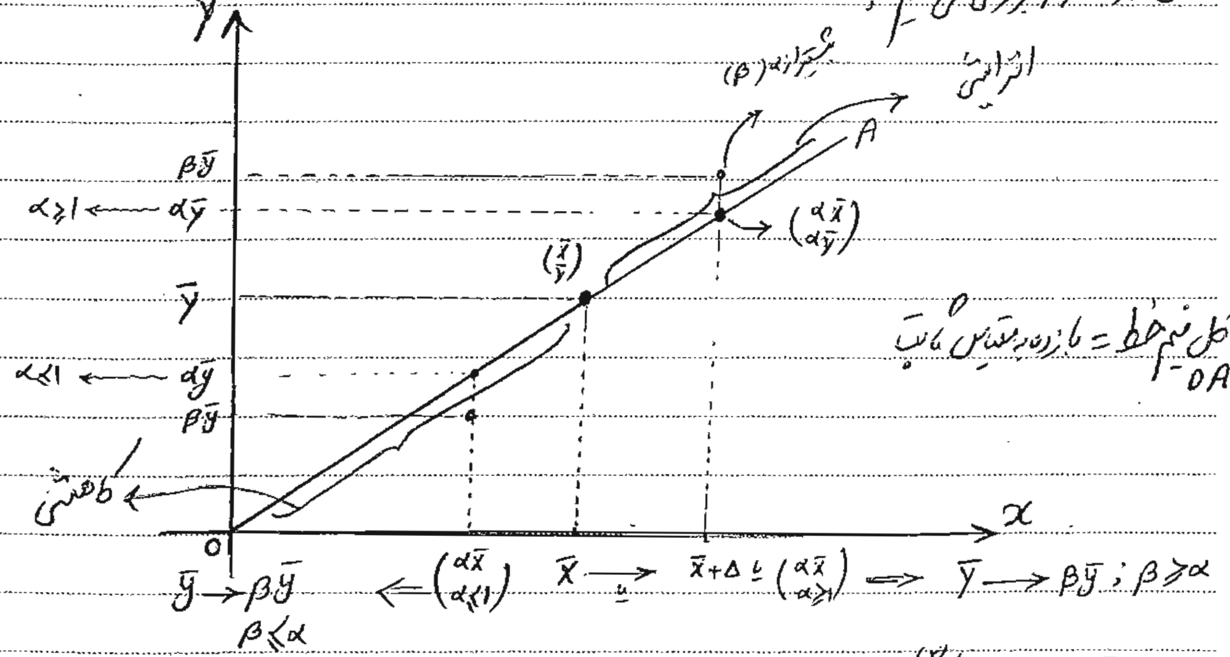
۳-۱) افزایشی
۳-۲) کاهشی
۳-۳) ثابت

مقدار x و y یعنی سایز. چون x دست من است و y محصول است لذا سایز x مدنظر است.



معمولاً در اکثر توابع بازده به مقیاس برقرار است و به این صورت است که اول صعودی بعد نزولی.

حال در PPS بررسی می‌کنیم.



کل نیم خط OA = بازده به مقیاس ثابت

بازده به مقیاس افزایشی[2] :

$$\forall\binom{x}{y}\in T,\ \forall\alpha\geq 1 \longrightarrow \binom{\alpha x}{\alpha y}\in T$$

در واقع: اگر افزایش تولید بیشتر از افزایش ورودی‌ها باشد گوییم بازده به مقیاس افزایشی (صعودی) است.

(1) Return to Scale
(2) Increasing Return to Scale

Subject: ۲۴
year. Month. Day.

بازده به مقیاس کاهشی (نزولی)[1]:

$$\forall \binom{x}{y}\in T,\ \forall \alpha\leq 1 \longrightarrow \binom{\alpha x}{\alpha y}\in T$$

اگر افزایش تولید کمتر از افزایش ورودی‌ها باشد، بازده به مقیاس کاهشی است.

بازده به مقیاس ثابت[2]: (بی‌کرانی اشعه[3])

$$\forall \binom{x}{y}\in T,\ \forall \alpha\geq 0 \longrightarrow \binom{\alpha x}{\alpha y}\in T \qquad \frac{\alpha y}{\alpha x}=\frac{y}{x}=cte$$

اگر α چون بازار
$\alpha\leq 1$ " " "

جاهایی ممکن است اصلاً نه ثابت، نه صعودی و نه کاهشی باشد.

✓ اصل بازده به مقیاس بیان می‌کند اگر $(x,y)\in T$ دارای کارایی نسبی θ باشند آنگاه $(\alpha x,\alpha y)\in T$ برای هر $\alpha\geq 0$ نیز برابر θ است. در واقع و اصلاً کل ابعاد بانک بزرگ شده ولی کارایی تغییر نکرده است.

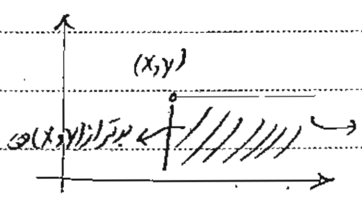
۴) اصل امکان‌پذیری[4]:

اصل امکان‌پذیری به ما می‌گوید اگر $(x,y)\in T$ یعنی x بتواند y را تولید کند آنگاه با هر ورودی بیشتر از x نیز می‌توان y را تولید کرد و از x هر خروجی کمتر از y را نیز می‌توان تولید کرد (به زبان ساده‌تر نقاط بدتر از (x,y) را هم داریم).

$$\begin{matrix}I\\O\end{matrix}\binom{10}{12}\longrightarrow\binom{10}{8}\ \text{خروجی}$$

$$\downarrow$$

$$\text{ورودی}\ \binom{15}{12}$$



امکان‌پذیری

به زبان ریاضی:

$$\forall (x,y),\ \forall \bar{x}\,\forall \bar{y}\left[\big((x,y)\in T,\ \bar{x}\geq x\ \&\ \bar{y}\leq y\big)\right]\Longrightarrow (\bar{x},\bar{y})\in T$$

در هر جا این اصل صادق نیست مانند جاهایی که تراکم داریم.

(1) Decreasing Return to Scale (2) Constant Return to Scale
(3) Unbounded Ray (4) Possibility

Page:

مثال: اگر جامعه‌ای اصول زیر برقرار باشد، مجموعه امکان تولید را بیابید:

اصول: ۱، ۲، ۳_۳، ۴

$$T^{1}=\left\{\begin{pmatrix}x_j\\ y_j\end{pmatrix} \,\middle|\, j=1,\dots,n\right\}$$

$$T^{1,2}=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\begin{pmatrix}x_j\\ y_j\end{pmatrix} \;\&\; \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\ \lambda_j\geq 0\right\}$$

$$T^{1,2,3-3}=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\alpha\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\begin{pmatrix}x_j\\ y_j\end{pmatrix} \;\&\; \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\ \lambda_j\geq 0,\ \alpha\geq 0\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \,\middle|\, x=\sum_{j=1}^{n}(\alpha\lambda_j)x_j,\ y=\sum_{j=1}^{n}(\alpha\lambda_j)y_j,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\ \lambda_j\geq 0,\ \alpha\geq 0\right\}$$

$$T^{1,2,3-3,4}=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \,\middle|\, x\geq\sum_{j=1}^{n}(\alpha\lambda_j)x_j,\ y\leq\sum_{j=1}^{n}(\alpha\lambda_j)y_j,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\ \lambda_j\geq 0,\ \alpha\geq 0\right\}$$

$$\alpha\lambda_j=\mu_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{n}\mu_j=\alpha,\ \mu_j\geq 0 \longrightarrow$$ چون این رابطه برایمان اهمیتی ندارد فرض می‌کنیم

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{constant}}}{T_c}=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \,\middle|\, x\geq\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j,\ y\leq\sum_{j=1}^{n}\mu_j y_j,\ \mu_j\geq 0\ \ {\scriptstyle j=1,\dots,n}\right\}$$

بنابراین:

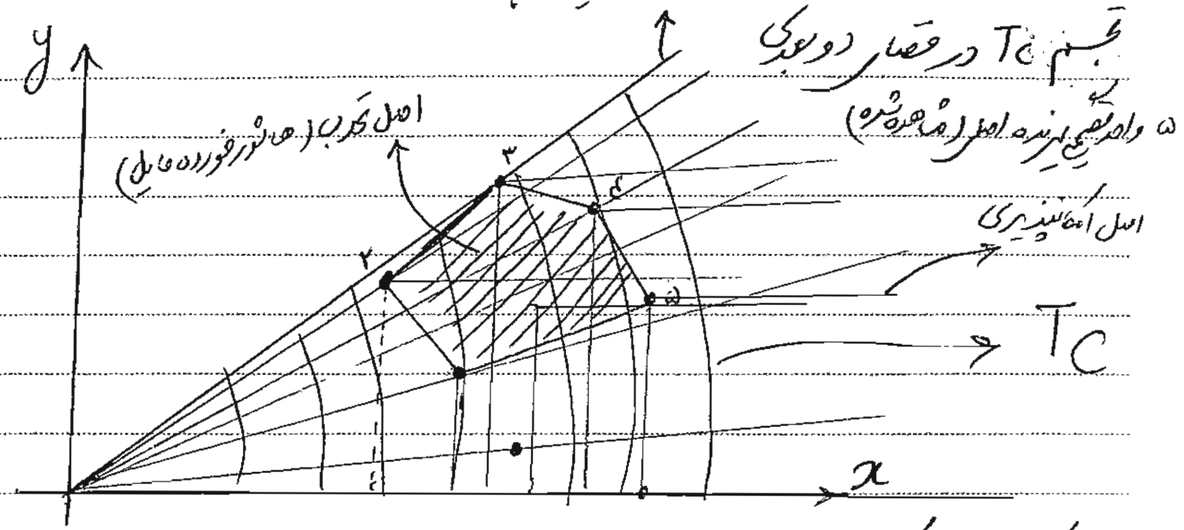
$$T_c=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \,\middle|\, x\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j \;\&\; y\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j,\ \lambda\geq 0\right\}$$

Subject : ۲۵/

year. Month. Day.

بازده به مقیاس ثابت

تجسم T_c در فضای دو بعدی



تمرین ۴: ثابت کنید T_c یک مخروط است؟

حکم: $\forall \binom{x}{y}, \forall \alpha \left(\left(\binom{x}{y} \in T_c , \alpha \geq 0 \right) \longrightarrow \alpha \binom{x}{y} \in T_c \right)$

اثبات: فرض کنید $\binom{x}{y}$ نقطه‌ای دلخواه از T_c باشد پس،

$$x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \xrightarrow{\times \alpha \geq 0} \alpha x \geq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\alpha \lambda_j)}_{\bar{\lambda}_j} x_j = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_j$$

$$y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \xrightarrow{\times \alpha \geq 0} \alpha y \leq \sum_{j=1}^{n} (\alpha \lambda_j) y_j = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j y_j$$

$\bar{\lambda}_j \geq 0 \Rightarrow$

$\binom{\alpha x}{\alpha y} \in T_c$

Page:

مثال:

دو ورودی - دو خروجی

$$\begin{array}{r} \text{مواد اولیه} \\ \text{نیروی انسانی} \\ \text{تولید } A \\ \text{تولید } B \end{array}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

DMU ها کارایی می‌گیرد کار کن. یعنی دلیل خروجی را ۲ برابر کنیم.

$$\begin{array}{r} \text{چغندر قند} \leftarrow \\ \text{نیروی انسانی} \leftarrow \end{array}\begin{pmatrix} ۵ \\ ۴ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{۲ برابر}} \begin{pmatrix} ۵ \\ ۴ \\ ۴ \\ ۲ \end{pmatrix} \rightarrow \text{درست نیست زیرا:}$$

۵ تن چغندر

از ۵ تن چغندر نمی‌توان ۶ تن خروجی بدست آورد. بنابراین بایستی شرطی به مسأله اضافه شود تا بتوان روی مسأله حقیقی fit کرد.

$$y_1 + y_2 \leq x_1$$

مثال:

میزان خرید

$$\begin{pmatrix} 0 \\ ۰/۱ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{تبدیل}} \begin{pmatrix} ۰/۱۵ \end{pmatrix}$$

سهم بازار

اگر ۵٪ زیاد شده بایستی از روی بقیه کارخانه‌ها کم کنیم

بنابراین بایستی شرطی روی این خروجی بگذاریم:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{1j} = cte$$

چون در هر جا درصد نیست cte نوشتیم.

کارخانه اتومبیل سازی ⟵ می‌خواهیم تولید را افزایش دهیم.

هر کارخانه به هر اندازه نمی‌تواند تولید کند چون جمعیت ایران ۷۰ میلیون است.

اگر کل سهم داشتیم: ۱ ≥ سهم

هم جمع باید ثابت باشد هم مقدار بعد از هدف گذاری نیز:

$$\begin{cases} \sum y_{rj} = cte \\ \sum y'_{rj} = cte \end{cases}$$

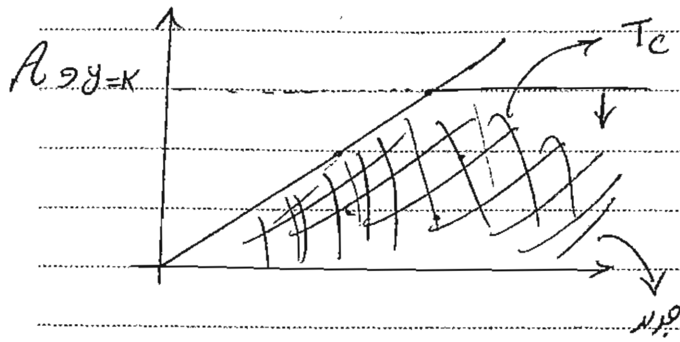
مقدار بعد از Target گذاری

در واقع این‌ها محدودیت‌اند، اصول موضوعه نیستند.

Subject: ۲۷

year. Month. Day.

تذکر: هر چه قدر اصول موضوعه بیشتری بپذیریم، PPS را بزرگتر می‌کنیم ولی محدودیت‌ها برعکس، PPS را کوچکتر می‌کنند.

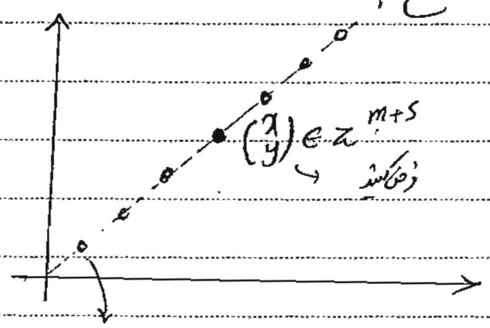


$\forall \alpha \geq 0 , \forall \binom{x}{y} \in T , \binom{\alpha x}{\alpha y} \in T$

$y \in A = \{ y \mid y \leq k \}$

در اینجا با اضافه کردن اصول موضوعه محدودتر می‌شوند PPS.

مثال: اصل بازده به مقیاس ثابت داریم و می‌خواهیم DMUها صحیح باشند.

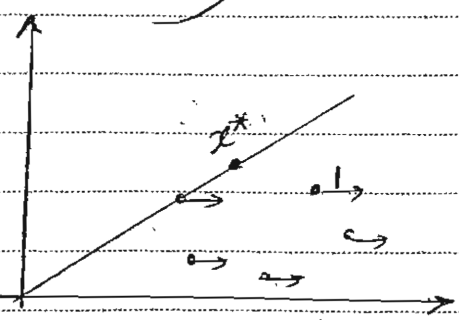


$\forall \alpha \geq 0 , \forall \binom{x}{y} \in T , \binom{\alpha x}{\alpha y} \in T$

محدود می‌شوند → $\alpha x \in \mathbb{Z}$

حداقل در ۲ تا صحیح ولی لزوماً همه اینها را صحیح نیست. بهمین دلیل گفتیم حداقل PPS کوچکتر می‌شود.

تذکر: یک DMU در یک PPS کارا است (کارای نسبی) اگر و فقط اگر نقطه‌ای بهتر از آن یافت نشود.



DMUها: نماینده نقاط T هستند.

DMU حقیقی: DMUهای مشاهده شده‌اند.

تعمیم ساختگی شوند مجازی‌اند.

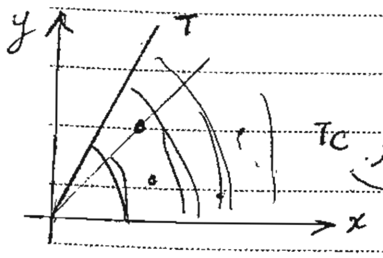
DMU، کارا نیست چون نقطه‌ای مانند x^* هست که بهتر از آن است.

Subject: ۲۸
year. Month. Day.

تمرین ۵: به کمک اصول موضوعه ثابت کنید حداقل یکی از مشاهدات روی مرز PPS است.

(بنا به اصل کمینه برونیابی)

تذکر: اگر به کمک اصول موضوعه PPS را بسازیم، این مجموعه کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول صدق می‌کند. یعنی اگر گام به گام اصول را چک کنیم جلو برویم، اصل کمینه برونیابی صادق می‌باشد.



T_c کوچکترین مجموعه‌ای که در اصول صدق کند.

$$T_c=\left\{\binom{x}{y} \;\middle|\; x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j ,\; y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j ,\; \lambda \geq 0\right\}$$

فرض کنید T مجموعه‌ای دلخواه باشد که در اصول ۱ تا ۴ صدق می‌کند. ثابت می‌کنیم $T_c \subseteq T$.

برهان: فرض کنید $(x',y') \in T_c$ باشد ثابت می‌کنیم $(x',y') \in T$.

$$(x',y') \in T_c \longrightarrow \exists \bar{\lambda} \geq 0 \;;\; x' \geq \sum \bar{\lambda}_j x_j ,\; y' \leq \sum \bar{\lambda}_j y_j \quad \text{(I)}$$

چون $1\bar{\lambda} > 0$ پس:

تعریف می‌کنیم: $\hat{\lambda} = \frac{\bar{\lambda}}{1\bar{\lambda}}$ ، $1\bar{\lambda} := \alpha > 0$ $\longrightarrow \alpha \hat{\lambda}_j = \bar{\lambda}_j$

$1\hat{\lambda} = 1$

چون T در اصل شمول مشاهدات صدق می‌کند $\Longrightarrow \forall j \;\; (x_j, y_j) \in T$

Page:

$(x_1,y_1)\in T$ چون T در بسته تحت ترکیب محدب است $\hat\lambda_1(x_1,y_1)+\dots+\hat\lambda_n(x_n,y_n)\in T$ (1)
$\vdots$
$(x_n,y_n)\in T$ $\quad 1\hat\lambda=1$

Subject: ۲۹

year. Month. Day.

چون T در اصل تحدب صدق می‌کند پس:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\hat\lambda_j x_j,\ \sum_{j=1}^{n}\hat\lambda_j y_j\right)\in T \quad (1)$$
$$\sum \hat\lambda_j=1$$

از آنجایی که T دارای بازده به مقیاس ثابت است پس:

$$\forall \lambda>0 \xrightarrow{\lambda=\alpha \text{ می‌گذاریم}} \alpha\left(\sum \hat\lambda_j x_j,\ \sum \hat\lambda_j y_j\right)\in T \Longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n}(\alpha\hat\lambda_j)x_j,\ \sum_{j=1}^{n}(\alpha\hat\lambda_j)y_j\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n}\bar\lambda_j x_j,\ \sum_{j=1}^{n}\bar\lambda_j y_j\right)\in T$$

T در اصل امکان‌پذیری نیز صدق می‌کند.

$$\forall(x,y),\ \forall(\bar x,\bar y)\ \left((\bar x,\bar y)\in T,\ x\geq\bar x,\ y\leq\bar y\right) \xRightarrow{*} (x,y)\in T$$

چون شاخص فوق به ازای هر (x,y) در شرایط فوق صادق باشد برقرار است من جمله (x',y') زیرا:

(I) از $\rightarrow x'\geq\sum_{j=1}^{n}\bar\lambda_j x_j,\ y'\leq\sum_{j=1}^{n}\bar\lambda_j y_j \xrightarrow[\text{(II)}]{* \text{ از}} (x',y')\in T$

(II) $\rightarrow \left(\underbrace{\sum\bar\lambda_j x_j}_{\bar x \text{ قرار میدهیم}},\ \underbrace{\sum\bar\lambda_j y_j}_{\bar y \text{ قرار میدهیم}}\right)\in T \rightarrow (\bar x,\bar y)\in T$

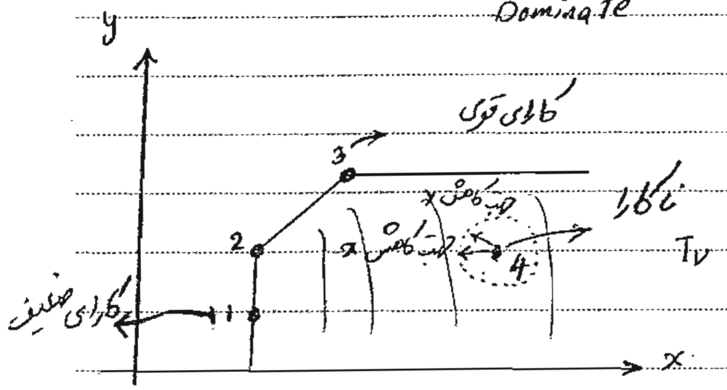
Subject :

year. Month. Day.

تعریف: DMU ناکارا: DMU ای که داخل T باشد (درونی باشد)

DMU کارا: DMU ای که متعلق به مرز T باشد ($DMU \in \partial T$)

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \begin{cases} \in \operatorname{int} T & \text{ناکارا} \\ \in \partial T \begin{cases} N.D \ (\text{none Dominate}) & \text{کارای قوی} \\ D \ (\text{Dominate}) & \text{کارای ضعیف} \end{cases} \end{cases}$$



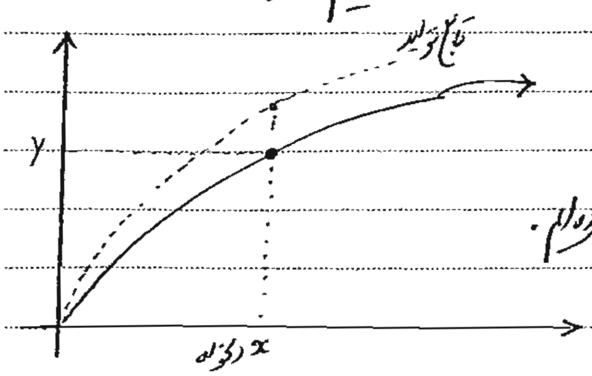
ناکارا: $\exists \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in T ; \begin{pmatrix} -\bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ نقطه درونی ≡ ناکارا
می‌توان در آن هم گوی زد (داخل مجموعه باشد)

کارای قوی: $\nexists \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in T ; \begin{pmatrix} -\bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \gneq \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ روی مرز نمی‌توان هم گوی زد

$\ngtr$: اکیداً بیشتر یعنی ناکارا نیست

$\ngeq$: یعنی ضعیف نیست

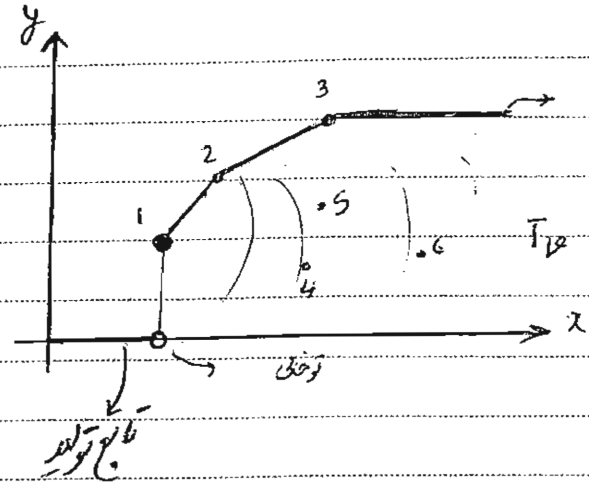
تعریف تابع تولید: تابعی است که به ازای هر مقدار دلخواه x (ورودی)، ماکزیمم خروجی را نشان می‌دهد.



تابع تولید واقعی که الان این تابعی است که روی مرز است زیرا ماکزیمم خروجی که تابع تولید به ازای x می‌دهد باید حداقل بالاتر از y باشد چون این مقدار را ما مشاهده کرده‌ایم.

Page:

جمله غلط: مرز تولید، تابع تولید است.



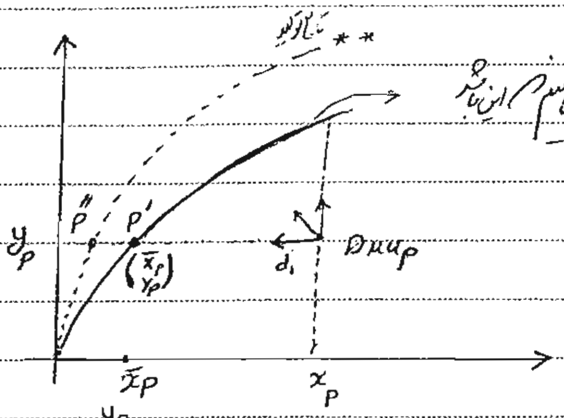
تابع تولید مشابه تابع کاب‌داگلاس است) همه اولیه دارند

بنابراین کمک مرز PPS می‌توان تابع تولید را تقریب زد.

چون به ازای هر مقدار دلخواه x، ماکزیمم خروجی را باید بدهد، از صفر تا بی‌نهایت رسم می‌شود یعنی صفر را هم شامل می‌شود.

می‌خواهیم مدل‌سازی کنیم که تشخیص دهد DMU ناکارا است یا نه. (نه اینکه کارا است یا نه). یعنی:

$$\exists \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} \underset{\neq}{\geq} \begin{pmatrix}-x_p\\ y_p\end{pmatrix}$$



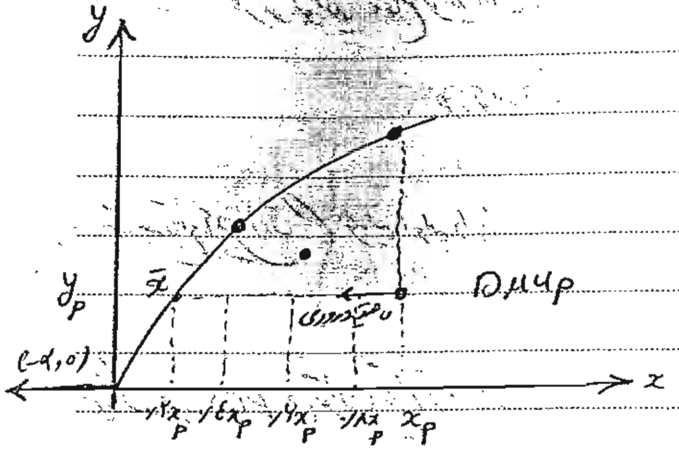
$$RE_p = \frac{\frac{y_p}{x_p}}{\frac{y_p}{\bar{x}_p}} = \frac{\bar{x}_p}{x_p}$$

اگر در جهت d_1 حرکت کنیم در جهت افزایش کارایی DMU_p قدم برمی‌داریم زیرا تا p'، مقدار x_p کاهش می‌یابد و لذا RE_p افزایش.

حال اگر مرز تابع تولید (**) باشد، در این صورت RE_p کاهش می‌یابد.

Subject :

year. Month. Day.



$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

می‌خواهیم : $\bar{x} < x_p \xrightarrow{\text{دو راه حل}} \begin{cases} x_p \xrightarrow{1} x_p - \alpha & (\alpha \geq 0) \\ x_p \xrightarrow{2} x_p \cdot \alpha & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$

= می‌دانیم کم کنیم تا کجا

$$① : RE_p = \frac{\frac{y_p}{x_p}}{\frac{y_p}{x_p - \alpha^*}} = \frac{x_p - \alpha^*}{x_p} = 1 - \frac{\alpha^*}{x_p} \longrightarrow$$ روش SBM

$$② RE_p = \frac{\frac{y_p}{x_p}}{\frac{y_p}{x_p \cdot \alpha^*}} = \alpha^* \longrightarrow$$ این روش ما است

$$\text{Min} \quad \theta$$

$$\begin{pmatrix} \theta x_p \\ y_p \end{pmatrix} \in T$$

θ^*: کارایی نسبی واحد

Page:

Subject:

year. Month. Day.

با فرض $T=T_c$ داریم:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &v\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_p\right) \\ &u\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_p\right) \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned}$$

CCR پوششی - در ماهیت ورودی

دوآل مدل پوششی فوق را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &\text{Max } u y_p \\ &u y_j - v x_j \leq 0 \quad j=1,\dots,n \\ &v x_p = 1 \\ &u \geq 0,\ v \geq 0 \end{aligned}$$

CCR مضربی - ماهیت ورودی

این همان مدل CCR قبلی است.

طبق قضیه دوآلیتی: $\theta^* = u^* y_p$.

تمرین ۶: نشان دهید ناحیه شدنی CCR پوششی - ماهیت ورودی نامحدود است. و یک جهت دور شونده راسی پیدا کنید.

حل: در مدل پوششی CCR - ماهیت ورودی θ را مقید می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \theta_1 - \theta_2 \\ &\text{s.t.} \quad -X\lambda + \theta_1 x_p - \theta_2 x_p \geq 0 \\ &\qquad Y\lambda + 0 \geq y_p \\ &\qquad \lambda \geq 0,\ \theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ماتریس ورودی‌ها $X = [x_1, \dots, x_n]^{m\times n}$

ماتریس خروجی‌ها $Y = [y_1, \dots, y_n]^{s\times n}$

$x_j \gneq 0,\ y_j \gneq 0$

ماتریس تکنولوژی CCR را A می‌نامیم و به صورت زیر است،

$$A = \begin{bmatrix} -x_1, & \cdots & -x_n & +x_p & -x_p \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر دستگاه فوق جواب داشته باشد، فرم پوششی CCR نامحدود است:

$$\begin{cases} Ad \geq 0 \\ d \geq 0 \\ d \neq 0 \end{cases}$$

مجموعه جهت‌های دور شونده CCR پوششی

Page:

Subject:

year. Month. Day.

d را این صورت تعریف می‌کنیم:

$d=(d_1,d_2,d_3)\;;\; d_1\in\mathbb{R}^n,\; d_2,d_3\in\mathbb{R}$

پس باید داشته باشیم:

$-Xd_1+x_p d_2-x_p d_3\geqslant 0$

$Yd_1+0\,d_2+0\,d_3\geqslant 0$

$0\leqslant(d_1,d_2,d_3)\neq 0$

ادعا: $\bar d=(0,\ldots,0,1,0)$ جهت دورشونده فرم پوششی CCR است زیرا:

$0\,d_1+x_p-0\geqslant 0 \to x_p\geqslant 0$ ✓

$0\,Y_1+0+0\geqslant 0 \qquad 0\geqslant 0$ ✓

$(d_1,d_2,d_3)\gneqq 0$

پس چون ناحیه پوششی مدل CCR در حالت ورودی دارای یک جهت دورشونده است، لذا نامحدود است.

از طرفی $\bar d$ راسی نیز می‌باشد زیرا نقطه راسی مجموعه $\{Ad\geqslant 0,\ d\gneqq 0,\ 1d=1\}$ است.

بوضوح $c\bar d>0$. زیرا در غیر این صورت چون مسئله Min سازی لذا جواب بهینه فرم پوششی نامتناهی می‌شود و این یعنی $\theta^*\to-\infty$ و این تناقض است (زیرا ثابت می‌کنیم $0<\theta^*\leqslant 1$).

۱) حال ثابت می‌کنیم: $0<\theta^*\leqslant 1$

$\lambda=e_p,\ \theta=1 \longrightarrow \theta = \text{تابع هدف} =1\longrightarrow \theta^*\leqslant 1$

۲) $\theta>0$

$x_p \gneqq 0 \longrightarrow \exists t;\ x_{tp}>0$

بخ: فرض کنید $\theta<0$:

قید tام ورودی‌ها: $\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{tj}}_{\geqslant 0}\leqslant \underbrace{x_{tp}\cdot\theta}_{<0}$ ✗

فرض کنید $\theta=0$

$\lambda_1 x_{11}+\lambda_2 x_{12}+\cdots+\lambda_n x_{1n}\leqslant 0$

$\vdots$

$\lambda_1 x_{m1}+\lambda_2 x_{m2}+\cdots+\lambda_n x_{mn}\leqslant 0$

$\lambda_j\geqslant 0$

Page:

Subject: ۵۵

year. Month. Day.

$$\Longrightarrow \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix}}_{X_1} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 X_1 = 0 \xrightarrow{X_1 \neq 0} \lambda_1 = 0 \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = (\lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0 \Longrightarrow y_p \leqslant 0 \longrightarrow \times$$

چون هر بردار باید حداقل یک مولفه مثبت داشته باشد.

این را با ابزار DMUهای حقیقی اثبات کردیم

$$\longrightarrow 0 < \theta^* \leqslant 1$$

تذکر: طبق اصل امکان پذیری همه x های بزرگتر از x_p هم می‌توانند داخل PPS باشند بنابراین $\theta > 1$ هم می‌تواند باشد (اگر اینکه اصل امکان پذیری را بپذیریم). و این یعنی همواره $\theta > 0$. حال چرا با این وجود θ نامقید در نظر گرفته می‌شود؟

اگر بخواهیم فرم پوششی CCR را حل کنیم به نفع ماست $\theta \geqslant 0$ را لحاظ کنیم.

اگر بخواهیم دوال فرم پوششی CCR را بنویسیم، بهتر است θ نامقید باشد تا قید $vx_p = 1$ گردد.

ولی اگر $vx_p \leqslant 1$ باشد مشکلی ندارد $\theta \geqslant 0$ بنویسیم.

۳) در هر جواب شدنی $\lambda \neq 0$ از جمله $\lambda^* \neq 0$

۴) در هر جواب بهینه مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی حداقل یکی از قیود نامساوی، بالفعل است:

روش اول: $\lambda^* \neq 0 \longrightarrow \exists t ; \lambda_t^* > 0 \xrightarrow{\text{طبق قضیه مکمل زائد}} u^* y_t - v^* x_t = 0$

روش دوم:

$$\text{Max } u^t y_p$$

$$u^t y_j - v^t x_j \leqslant 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \qquad \text{(I)}$$

$$v^t x_p = 1 \qquad \text{(II)}$$

$$u \geqslant 0 , v \geqslant 0 \qquad \text{(III)}$$

فرض کنید (u^*, v^*) جواب بهینه مدل مضربی فوق باشد. می‌دانیم اگر LP جواب بهینه داشته باشد، بهینه متناهی

Page:

Subject : ۴۷

year. Month. Day.

راسی هم دارد. بدون آنکه در طی استدلال خللی وارد شود فرض کنید (U^*, V^*) همین راسی است. ناحیه شدنی مدل مضربی زیر مجموعه $\mathbb{R}^{m+s}$ می‌باشد ($V \geq 0$ و $U \geq 0$) پس حداقل یک دسته از $m+s$ ابر صفحه مستقل خطی تعریف کننده ناحیه شدنی تنگ بر (U^*, V^*) می‌باشند. اگر هیچ یک از قیود (I) در بر نقطه بهین نباشند از آنجایی که $V^* x_p = 1$ لذا $m+s-1$ تا از $U^* \geq 0$ ها و $V^* \geq 0$ ها بایستی ناقد باشند.

همگی U^* و V^* ها نمی‌توانند صفر باشند زیرا:

$$V^* x_p = 1 \longrightarrow V^* \neq 0$$

نیز: $U^* = 0 \longrightarrow U^* y_p = 0 = \theta^* \longrightarrow \theta^* = 0$ ✗

بنابراین $m-1$ تا از $V \geq 0$ و $s-1$ تا هم از $U \geq 0$ ناقد است و لذا

$$(m-1) + (s-1) + 1 = m+s-1 = \text{تعداد ناقدها در } (U^*, V^*)$$

چون یک قید ناقد کم داریم تا $m+s$ قید تنگ حاصل شود بنابراین بایستی حتماً آنرا از قیود (I) بگیریم.

و این یعنی:

$$\exists\, t \in \{1, \dots, n\};\ U^* y_t - V^* x_t = 0$$

۵) در هر جواب بهین مدل مضربی CCR - ماهیت ورودی داریم $U^* \neq 0$ (چون $V^* \neq 0$ را قبلاً نشان داده است)

نوشتیم)

۶) در هر جواب بهین مدل پوششی CCR - ماهیت ورودی کالاقل یک قید ورودی و کالاقل یک قید خروجی ناقد است

$U^* \neq 0 \longrightarrow$ قید متناظر در مدل پوششی ناقد $\longrightarrow$ حداقل یکی از قیود خروجی ناقد است

$U^* = (U_1^*, \dots, U_s^*) \neq 0$ ← به این علت که ممکن است قید مولفه $U^* \neq 0$ باشد.

$V^* \neq 0 \longrightarrow$ قید متناظر در مدل پوششی ناقد $\longrightarrow$ حداقل یکی از قیود ورودی ناقد است.

$V^* = (V_1^*, \dots, V_m^*) \neq 0$

Subject: ۳۷

year. Month. Day.

برای بیان بقیه خواص نیاز به چند تعریف داریم:

① $\text{Max} \quad UY_p$

s.t. $UY_j - VX_j \leq 0 \;;\; \forall j \quad \leftarrow \lambda_j$

$VX_p = 1 \quad \leftarrow \theta$

$U \geq 1\varepsilon , V \geq 1\varepsilon$

$s^+ \uparrow \quad s^- \uparrow$

$\xrightarrow{\text{دوآل}}$

② $\text{Min} \quad \theta - \varepsilon(1s^+ + 1s^-)$

s.t. $\sum_j \lambda_j x_j + s^- = \theta x_p$

$\sum_j \lambda_j Y_j - s^+ = Y_p$

$\lambda \geq 0 , s^- \geq 0 , s^+ \geq 0$

در صورت تبهگنی فرم مضربی CCR ، فرم پوششی هم وجود دارد . از طرفی طبق قضایای در برنامه‌ریزی خطی داریم: بهینگی چندگانه دوآل مستلزم بهینگی تبهگنی در پرایمال است یعنی اگر دوآل جواب بهینه چندگانه داشته باشد پرایمال جواب بهینه تبهگن دارد (عکس* این مطلب لزوماً برقرار نیست) . بنابراین هر دو مسأله می‌توانند* جواب دگرین داشته باشند .

فرض کنید (U^*, V^*) جواب بهینه دلخواه مدل ① باشد (نمی‌دانیم منحصر بفرد است یا نه) . تعریف می‌کنیم:

$$H = \left\{ \binom{X}{Y} \;\middle|\; U^*Y - V^*X = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{m+s}$$

⑦ H بر T_c تکیه کننده است (از حل مدل مضربی CCR - وقتی ورودی‌ها صفر نصورت H حاصل می‌گردد) بر T_c تکیه کرده است

برهان:

$$H = \left\{ \binom{X}{Y} \;\middle|\; U^*Y - V^*X = 0 \right\} \longrightarrow H^- = \left\{ \binom{X}{Y} \;\middle|\; U^*Y - V^*X \leq 0 \right\}$$

$$T_c = \left\{ \binom{X}{Y} \;\middle|\; X \geq \sum_j \lambda_j X_j , \; Y \leq \sum_j \lambda_j Y_j , \; \lambda \geq 0 \right\}$$

H تکیه کننده بر T_c: ① $H \cap T_c \neq \phi$

② $T_c \subseteq H^-$

برهان:

① : در هر جواب بهینه مدل مضربی یکی از قیود نامساوی‌ها فعال است (خاصیت ۴) $\longrightarrow \exists t \in \{1, \dots, n\} ; \; U^*Y_t - V^*X_t = 0 \Longrightarrow (X_t, Y_t) \in H$

یعنی DMU_t طبق اصل شمول $(X_t, Y_t) \in T_c$

$H \cap T_c \neq \Phi$

Subject: ۵۸

year. Month. Day.

ادامه

(۲) : $\forall \binom{\bar{x}}{\bar{y}} \in T_c \longrightarrow \exists \bar{\lambda} \geq 0 ; \begin{cases} (\bar{x} \geq \sum \bar{\lambda}_j x_j) \times -v^* & v^* \geq 0 \\ (\bar{y} \leq \sum \bar{\lambda}_j y_j) \times u^* & u^* \geq 0 \end{cases}$

$\xrightarrow{+} u^*\bar{y} - v^*\bar{x} \leq u^* \sum \bar{\lambda}_j y_j - v^* \sum \bar{\lambda}_j x_j$ (I)

از طرفی (u^*, v^*) جواب بهین مدل مضربی در بالا شد پس:

$(u^* y_1 - v^* x_1 \leq 0) \times \bar{\lambda}_1 \geq 0$

$\vdots$

$(u^* y_n - v^* x_n \leq 0) \times \bar{\lambda}_n \geq 0$

$\Longrightarrow \Big\downarrow + \Longrightarrow u^* \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j y_j - v^* \sum \bar{\lambda}_j x_j \leq 0$ (II)

(I), (II) $\Longrightarrow u^*\bar{y} - v^*\bar{x} \leq 0 \longrightarrow \binom{\bar{x}}{\bar{y}} \in H^-$

$\Longrightarrow T_c \subseteq H^-$

تذکر: این قضیه در هر دو مورد CCR و CCR_ε صادق است.

دوگانی DEA

$Max \quad uy_p$

$uy_j - vx_j \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n$

$vx_p = 1$

$u \geq 1\varepsilon, v \geq 1\varepsilon$

x_p را اول با θ کم می‌کند اگر لازم بود با s^- کم می‌کند

فاز I: θ فاز II: $+\varepsilon$

$Min \quad 1\theta - \varepsilon(1s^+ + 1s^-)$

$s.t. \quad \sum_j \lambda_j x_j + \vec{s^-} = \theta \vec{x_p}$

$\sum_j \lambda_j y_j - \vec{s^+} = y_p$

$\lambda \geq 0, s^- \geq 0, s^+ \geq 0$

$e T_c \Longrightarrow e T_c$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \sum \lambda_j x_j \\ \sum \lambda_j y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta x_p - s^- \\ y_p + s^+ \end{pmatrix} \to$ Bench Mark

الگو

Page:

Subject : ۳۹

year. Month. Day.

اصل بازده به مقیاس ثابت:

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T,\ \forall \lambda \geq 0 \,.\, \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \in T$$

$$\Downarrow$$

$$e\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{*} \Leftarrow \frac{\lambda u y}{\lambda v x} = \frac{u y}{v x}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \\ 10/3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \\ 7/4 \\ 10/4 \end{pmatrix}$$

* فقط در T مجازیم یکی از مولفه‌ها را ۱ کنیم.

بنابراین می‌توان گفت در T هر DMU ها یکی از مختصاتشان یک است.

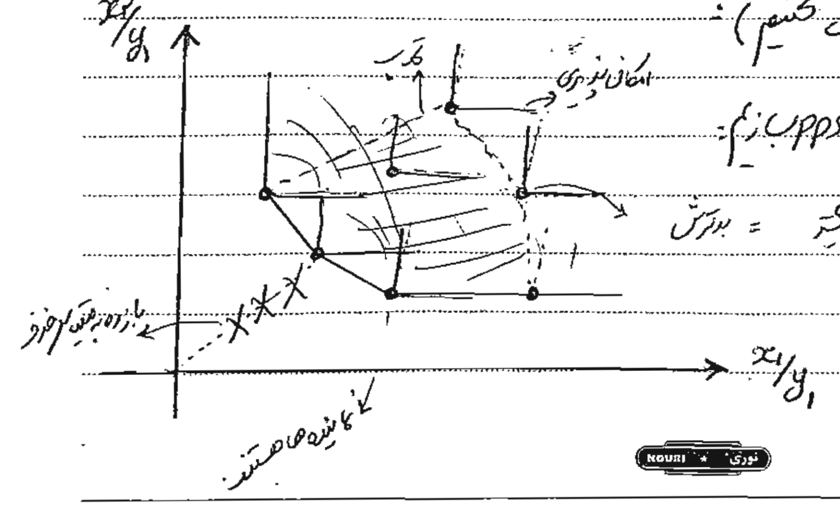
فرض کنید: $m=2$، $s=1$

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{y_1} \\ \frac{x_{21}}{y_1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \frac{x_{1n}}{y_n} \\ \frac{x_{2n}}{y_n} \\ 1 \end{pmatrix}$$

نمودار عادل: هر نمودار را در صورتی می‌توان رسم کرد که فقط یک خروجی داشته باشیم (یا یک ورودی). اگر دو خروجی (یا ۲ ورودی) داشته باشیم نمی‌توان نمودار را رسم نمود. زیرا در صورتی که یک خروجی داشته باشیم چون مجموعه امکان تولید بازده به مقیاس ثابت دارد می‌توان با تقسیم تک‌تک مولفه‌ها بر آن خروجی را یک نمود. و پس از cut زدن در واقع دیگر y را نداریم (اصلا انگار y را حذف کنیم):



باید اصل بازده به مقیاس ثابت را حذف کنیم سپس ppps بسازیم:

هر تحلیلی روی این، روی اصلی صادق است.

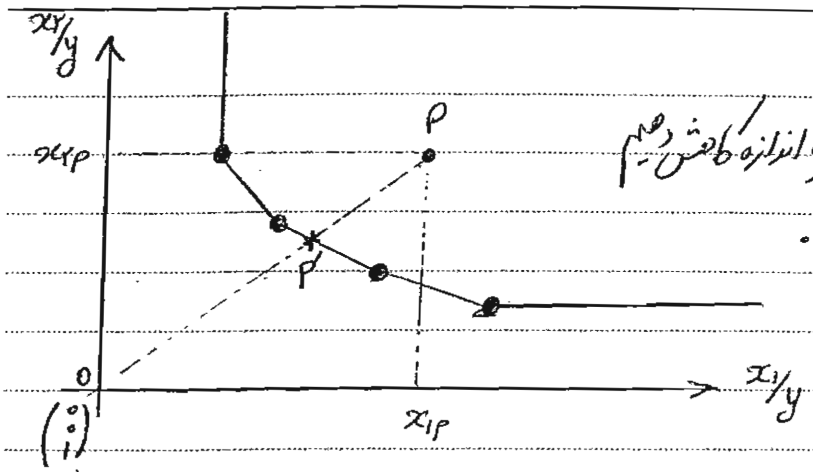
Page:

Subject : ۴۰

year. Month. Day.

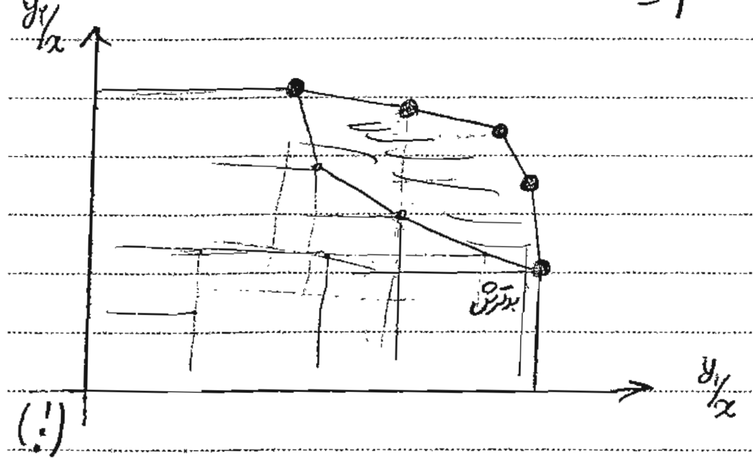
ماهیت ورودی:

اگر بخواهیم هر دوی x_{1P} و x_{2P} را به یک اندازه کاهش دهیم باید روی PO حرکت کنیم تا به P' برسیم.



منظور از محور y هاست مبدأ نیست

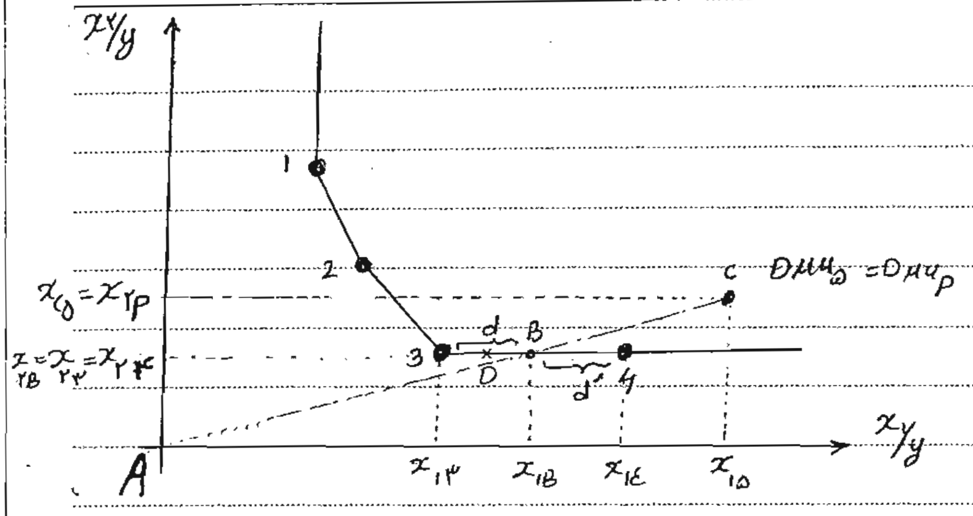
تمرین ۷۰: مرز کارا برای دو خروجی یک ورودی رسم کنید.



Subject: ۴۱

year. Month. Day.

مثال:



$d = d'$

ارزیابی DMU_5: $\quad Min\ \theta$

$$s.t.\quad \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12} + \lambda_3 x_{13} + \lambda_4 x_{14} + \lambda_5 x_{15} = \theta x_{15} - s_1^-$$

$$\lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22} + \lambda_3 x_{23} + \lambda_4 x_{24} + \lambda_5 x_{25} = \theta x_{25} - s_2^-$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1 + s^+$$

$$\lambda \geq 0,\ s^- \geq 0,\ s^+ \geq 0$$

مسأله دارای ۲ جواب بهینه است زیرا:

جواب بهینه ①

$$\begin{cases} \lambda_3^* = \lambda_4^* = \frac{1}{2},\ \lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_5^* = 0 & \mathrm{I} \\ s_1^{-*} = s_2^{-*} = 0,\ s^{+*} = 0 & \mathrm{II} \end{cases}$$

$$\theta^* = \frac{AB}{AC} \qquad \mathrm{III}$$

$$\Leftarrow \theta = \frac{x_B}{x_P} \Leftarrow \theta x_P = x_B$$

$$\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III} \Rightarrow \begin{cases} x_{1B} = \frac{1}{2}x_{13} + \frac{1}{2}x_{14} = \theta^* x_{15} - s_1^{-*} = \frac{AB}{AC}\cdot x_{15} - 0 = x_{1B} \rightarrow x_{1B} = x_{1B} \checkmark \\ x_{2B} = \frac{1}{2}x_{23} + \frac{1}{2}x_{24} = \theta^* x_{25} - s_2^{-*} = \frac{AB}{AC}\cdot x_{25} - 0 = x_{2B} \rightarrow x_{2B} = x_{2B} \checkmark \\ 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + s^{+*} = 1 \longrightarrow \end{cases}$$

قید اول برقرار

قید دوم برقرار

قید سوم برقرار

جواب بهینه ②:

$$\begin{cases} \lambda_3^* = 1,\ \lambda_j^* = 0,\ j \neq 3 \\ s_1^{-*} = d,\ s_2^{-*} = 0,\ s^{+*} = 0 \\ \theta^* = \frac{AB}{AC} \end{cases}$$

همیشه slack مثبت ملاک بهینگی نیست باید مثبت ترین slack را بدهد (حداکثر slack ها صفر در ورودی و یکی در خروجی داریم)

مجموع slack این حکم منحصر بود با شرط اینکه هانه.

در نقطه D، slack مثبت است ولی چون مثبت ترین نیست بهینه نیست.

Page:

Subject: ۴۲

year. Month. Day.

(همین دلیل است) در روش ۲ فازی در فاز II فقط بیشترین slack ها را بدست می‌آوریم

$$\max \quad w = 1s^{+} + 1s^{-}$$

$$\sum \lambda_j x_{ij} + s_i^{-} = \theta^* x_{io} \qquad i=1,\dots,m$$

$\theta^*=1$ در فاز اول θ^* بدست آمد

$$\sum \lambda_j y_{rj} - s_r^{+} = y_{ro}, \qquad r=1,\dots,s$$

$$\lambda \geq 0,\ s^{-} \geq 0,\ s^{+} \geq 0$$

قضیه: DMU_p در مدل پوششی CCR_E در ماهیت ورودی کارای قوی است اگر و تنها اگر $\theta^*=1,\ s^{-*}=0,\ s^{+*}=0$.

برهان:
فرض کنید DMU_p را ارزیابی می‌کنیم:

$$\min \quad 1\theta - \varepsilon(1s^{+} + 1s^{-})$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = \theta x_p - s^{-} \qquad \text{I}$$

$$\sum_j \lambda_j y_j = y_p + s^{+}$$

$$\lambda \geq 0,\ s^{-} \geq 0,\ s^{+} \geq 0$$

ف: DMU_p کارای قوی است

ح: $\theta^*=1,\ s^{-*}=0,\ s^{+*}=0$

نخ: فرض کنید (حکم برقرار نباشد):
$\theta^* \neq 1 \ \vee \ (s^{-*}, s^{+*}) \neq 0$

حالت اول: $\theta^* \neq 1 \rightarrow \theta^* < 1$

$$\sum_j \lambda_j^* x_j = \theta^* x_p - s^{-*} \leq \theta^* x_p \underset{\neq\,(*)}{\leq} x_p$$

* برای حداقل یک i مولفه x_{ip}

$$\sum_j \lambda_j^* y_j = y_p + s^{+*} \geq y_p$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -\sum \lambda_j^* x_j \\ \sum \lambda_j^* y_j \end{pmatrix} \underset{\neq\,(*)}{\geq} \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$(*)$ با $\longrightarrow$ تناقض با DMU_p کارای قوی است.

Page:

Subject: ۴۳

year. Month. Day.

حالت دوم: $(\bar{s}^{-*}, \bar{s}^{+*}) \neq 0$

همانطور که قبلاً ثابت کردیم $\theta^* \leq 1$ است.

$$\sum \lambda_j^* x_j = \theta^* x_p - \bar{s}^{-*} \overset{\theta^*\leq 1}{\leq} x_p - \bar{s}^{-*} \quad (\leq)\, x_p$$

$$\sum \lambda_j^* y_j = y_p + \bar{s}^{+*} \quad (\geq)\, y_p$$

$\neq$ چون $(\bar{s}^{-*}, \bar{s}^{+*}) \neq 0$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -\sum \lambda_j^* x_j \\ \sum \lambda_j^* y_j \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geq} \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix} \quad \times$$

برعکس: ف: $\theta^* = 1,\ \bar{s}^{-*} = \bar{s}^{+*} = 0$

ح: DMU_p کارای قوی است.

نخ: فرض کنید DMU_p کارای قوی نباشد. بنابراین:

$$\exists \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \in T_c \ \& \ \begin{pmatrix} -\bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geq} \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$\exists \bar{\lambda} \geq 0; \begin{pmatrix} -\sum \bar{\lambda}_j x_j \\ \sum \bar{\lambda}_j y_j \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -\bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geq} \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

چون مخالف است بنابراین در حداقل یک جا بصورت اکید است.

$$\Longrightarrow \exists t \in \{1,\dots,m\}; \begin{cases} \sum_j \bar{\lambda}_j x_{tj} < x_{tp} \\ \sum_j \bar{\lambda}_j x_{ij} = x_{ip} & i=1,\dots,m,\ i\neq t \\ \sum \bar{\lambda}_j y_{rj} = y_{rp} & r=1,\dots,s \\ \bar{\lambda} \geq 0 \end{cases}$$

بقیه بصورت تساوی

هر کدام مساوی نشد slack آن را در جواب شدنی ادعایی مثبت می‌گذاریم

ادعا:
$$\begin{cases} \bar{\lambda} \geq 0 \\ \bar{\theta} = 1 \\ \bar{s}_i^- = 0 & i=1,\dots,m,\ \neq t \\ \bar{s}_t^- = x_{tp} - \sum \bar{\lambda}_j x_{tj} > 0 \\ \bar{s}_r^+ = 0 \end{cases}$$
یک جواب شدنی مدل (I) می‌باشد. بوضوح این ادعا برقرار است. از طرفی:

مقدار تابع هدف بهین $(\theta^*=1, \bar{s}^{-*}=\bar{s}^{+*}=0)$ $= 1 > 1 - \varepsilon(\alpha) =$ مقدار تابع به ازای این جواب شدنی

($\alpha > 0$ زیرا $\bar{s}_t > 0$)

$\times$ ← تناقض با بهینگی است.

Page:

Subject : ۴۴

year. Month. Day.

با ارائه قضیه ذیل ثابت می‌کنیم که اگر مدل CCR_ε را حل کنیم $B.M$ کارای قوی را به ما می‌دهد (در CCR بدون ε، $B.M$ روی مرز می‌باشد)

قضیه: فرض کنیم $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ یک جواب بهین دلخواه مدل (I) باشد. آنگاه $\begin{pmatrix} \theta^* x_p - s^{-*} \\ y_p + s^{+*} \end{pmatrix}$ یک نقطه کارای قوی است.

برهان: قرار می‌دهیم

$$\begin{pmatrix} \theta^* x_p - s^{-*} \\ y_p + s^{+*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \quad (*)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$ کارای قوی است. بدین منظور این DMU را با مدل پوششی CCR ماهیت ورودی تحت ارزیابی قرار می‌دهیم:

$$\text{Min} \quad \theta - \varepsilon(1s^- + 1s^+)$$
$$\text{s.t.} \quad \sum \lambda_j x_j + s^- = \theta \hat{x}$$
$$\sum_j \lambda_j y_j - s^+ = \hat{y}$$
$$\lambda, s^-, s^+ \geq 0$$

فرض کنیم $(\hat{\theta}, \hat{\lambda}, \hat{s}^-, \hat{s}^+)$ جواب بهینه مدل فوق باشد. با قرار دادن مقادیر $\hat{x}$ و $\hat{y}$ از رابطه (*) داریم:

$$\begin{cases} \sum \hat{\lambda}_j x_j + \hat{s}^- = \hat{\theta}(\theta^* x_p - s^{-*}) \\ \sum \hat{\lambda}_j y_j - \hat{s}^+ = y_p + s^{+*} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X\hat{\lambda} + \hat{s}^- + \hat{\theta} s^{-*} = \hat{\theta}\theta^* x_p \\ Y\hat{\lambda} - \hat{s}^+ - s^{+*} = y_p \end{cases}$$

قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} \hat{\theta}\theta^* = \tilde{\theta} \\ \hat{s}^- + \hat{\theta} s^{-*} = \tilde{s}^- \\ \hat{s}^+ + s^{+*} = \tilde{s}^+ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X\hat{\lambda} + \tilde{s}^- = \tilde{\theta} x_p \\ Y\hat{\lambda} - \tilde{s}^+ = y_p \end{cases}$$

ادعا: $\hat{\theta} = 1$.

نخ $\hat{\theta} \neq 1 \xrightarrow{\hat{\theta}\text{ جواب بهین}} \hat{\theta} < 1 \xrightarrow{\theta^* > 0 \text{ از}} \hat{\theta}\theta^* < \theta^* \longrightarrow \tilde{\theta} < \theta^*$

و این خلاف بهینه بودن θ^* در ارزیابی DMU_p با مدل پوششی CCR_ε می‌باشد (زیرا $\tilde{\theta} < \theta^*$) پس فرض خلف باطل است.

Subject : ۴۵

year. Month. Day.

و این یعنی $\hat{\theta}=\theta^*$. از طرف دیگر :

$$1\tilde{s}^- + 1\tilde{s}^+ = (1\hat{s}^- + 1\hat{s}^+) + (\hat{\theta}\,1s^{-*} + 1s^{+*}) \geq 1s^{-*} + 1s^{+*}$$

زیرا $1s^{-*}+1s^{+*}$ ماکزیمم مقدار مجموع slack ها می باشد.

$$\Longrightarrow 1\hat{s}^- + 1\hat{s}^+ = 0 \xRightarrow[\hat{s}^+ \geq 0]{\hat{s}^- \geq 0} \hat{s}^- = 0 ,\ \hat{s}^+ = 0$$

بنابراین ثابت کردیم $\hat{s}^- = \hat{s}^+ = 0$ و $\hat{\theta}=1$ و لذا بنا به قضیه قبل $\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}$ در مدل پوششی CCR_ε در ماهیت ورودی کارای قوی است.

تذکر: مدل CCR پوششی در ماهیت ورودی را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } \theta$$

$$\sum \lambda_j x_j + s^- = \theta x_p$$

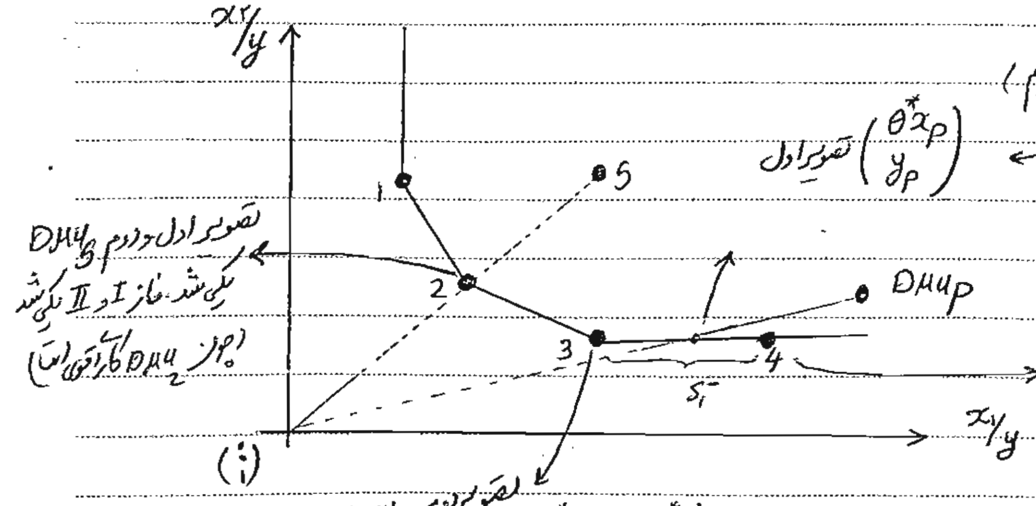
$$\sum \lambda_j y_j - s^+ = y_p$$

$$\lambda \geq 0 ,\ s^- \geq 0 ,\ s^+ \geq 0$$

DMU_p کارای قوی است اگر و تنها اگر در هر جواب بهین $\theta^*=1$ ، $s^{-*}=s^{+*}=0$ باشد.

به عبارت دیگر وقتی CCR بدون ε حل کنیم نقطه $\begin{pmatrix}\theta x_p\\ y_p\end{pmatrix}$ روی مرز می باشد (ضعیف یا قوی بودن را نمی دانیم) ولی اگر CCR_ε باشد $LB.M$ $\begin{pmatrix}\theta x_p - s^-\\ y_p + s^+\end{pmatrix}$ قطعاً روی مرز قوی است.

تحلیل: (ε را در نظر نگرفتیم تا بتوانیم تحلیل کنیم)



تصویر اول $\begin{pmatrix}\theta^* x_p\\ y_p\end{pmatrix}$ ← فاز I

DMU_4 روی مرز (ضعیف) است ولی کارا نیست

DMU_p تصویر دوم $\begin{pmatrix}\theta^* x_p - s^{-*}\\ y_p + s^{+*}\end{pmatrix}$ ← فاز II

هر نقطه مرزی که کارا نباشد کارای ضعیف است.

هر دو ابرصفحه سازا و زائد تکیه کننده اند

Subject: ۴۶

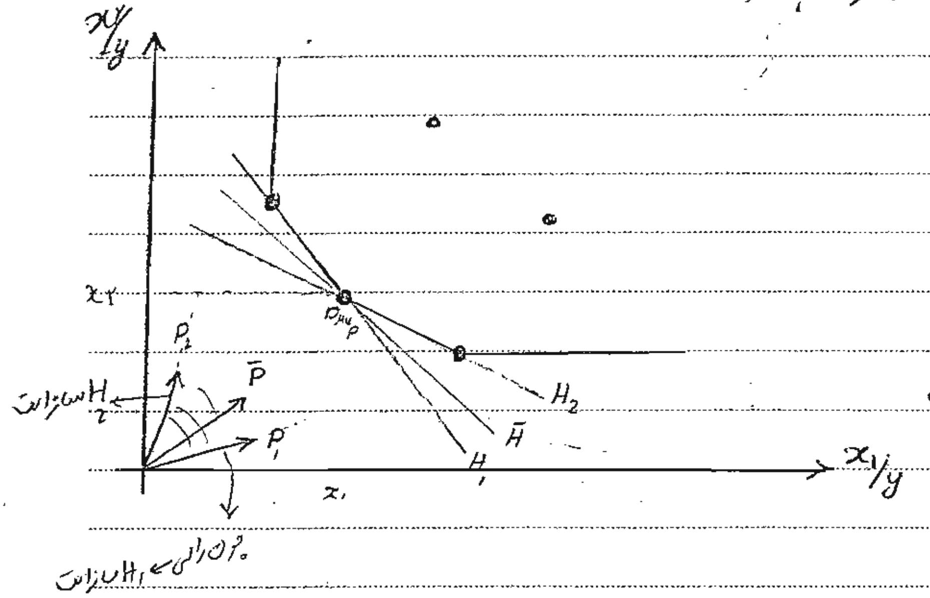
year. Month. Day.

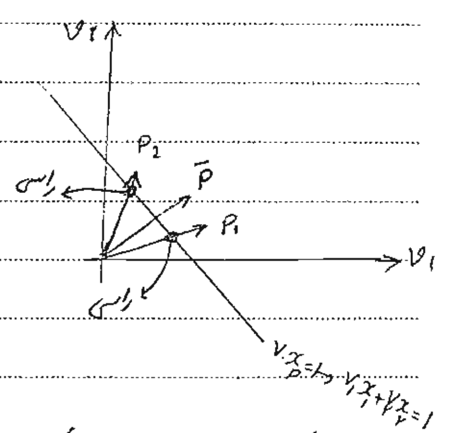
ثابت کردیم ابرصفحه حاصل از حل مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی بر T_c تکیه کننده است یعنی مجموعه

$$H=\left\{\binom{x}{y} \,\middle|\, u^*y - v^*x = 0\right\}$$

H بر T_c تکیه کننده است. حال سوالی پیش می‌آید که: ابرصفحه پیدا شده H آیا سازا است یا زائد؟

ابرصفحه سازا: ابرصفحه‌ای که پس از حذف آن ناحیه جدید بزرگتر از قبل می‌شود سازا گوییم. در واقع ابرصفحه سازا به ابرصفحه‌ای در PPS می‌گویند که زائد نباشد.





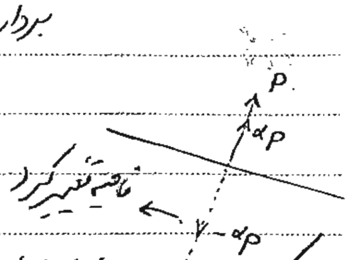
نکته: اگر ابرصفحه تکیه کننده در صفحه وجهی بر یک نقطه منحصر بفرد باشد بالاجبار سازا است.

- تشخیص بازده‌ها را با ابزار نوری ابرصفحه ...

Subject: ۴۷

year. Month. Day.

$\begin{pmatrix} -v^* \\ u^* \end{pmatrix} = H$ بردار نرمال $\Longrightarrow \forall \alpha > 0 \; , \; \begin{pmatrix} -\alpha v^* \\ \alpha u^* \end{pmatrix} = H$ بردار نرمال



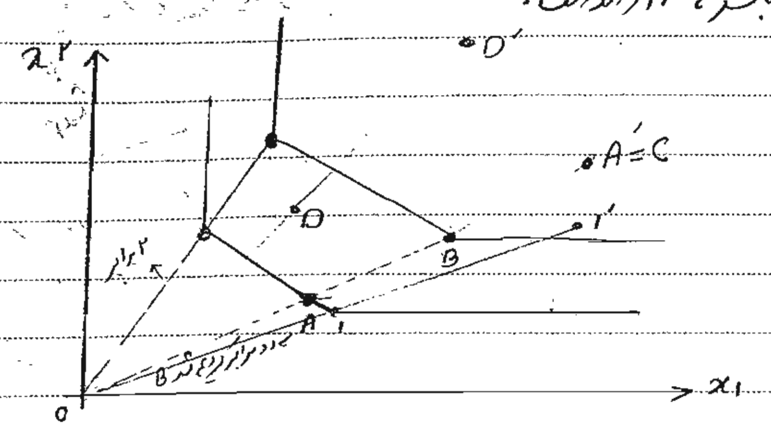
دلیل اینکه $\alpha > 0$ قرار داده‌ایم این است که نمی‌خواهیم جهت PPS تغییر کند و ناحیه‌ای که ابرصفحه پشتیبان، مقدار را تولید می‌کند تغییر نکند

$\text{if} \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} =$ جواب بهین $\longrightarrow \forall \alpha > 0 \; \begin{pmatrix} \alpha u^* \\ \alpha v^* \end{pmatrix} =$ جواب بهین

چون مدل کسری CCR است لذا اگر (x, y) جواب بهین باشد $(\alpha x, \alpha y)$ هم جواب بهین است؟

تمرین ۹: اگر (u^*, v^*) یک BFS بهین (نقطه راسی بهین) باشد ثابت کنید H سازا است.

نتیجه: اگر $\binom{u^*}{v^*}$ جواب بهین ادرین باشد، H از اندازت.



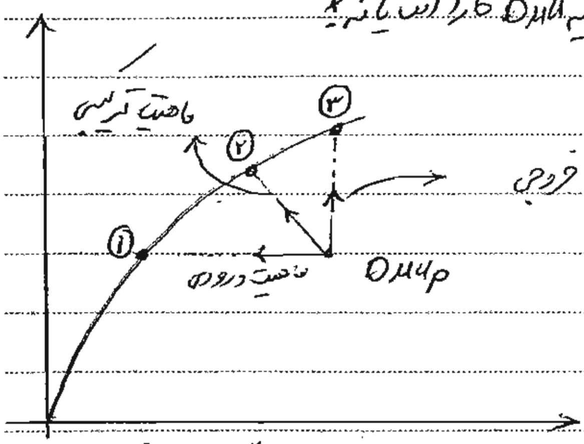
if $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} \longrightarrow$ دو مرز هم عبارتند

وقتی ابرصفحه تکیه کننده ای که تکیه شده است چه در نقطه؟

$$B.M = \begin{pmatrix} \sum \lambda_j^* x_j \\ \sum \lambda_j^* y_j \end{pmatrix}$$

B.M ← استاندارد نسبی برای DMU تحت ارزیابی

B.M ← نقطه‌ای روی مرز PPS و برای تشخیص اینکه DMU کارا است یا نه؟



$$\sum \lambda_j^* x_j \le \theta^* x_p \le x_p$$
$$\sum \lambda_j^* y_j \ge y_p$$

① در ماهیت ورودی همان نقطه B.M
② " " ترکیبی " " "
③ " " خروجی " " "

هر ابرصفحه تکیه کننده از مرز می‌گذرد.

Subject: ٤٩

year. Month. Day.

تذکر: فرم‌های پوششی و مضربی باید دوال یکدیگر باشند یعنی یا هر دو ε دار باشند یا هر دو بدون ε.

قضیه: فرض کنید (λ^*, θ^*) و (u^*, v^*) به ترتیب جواب‌های بهین فرم‌های پوششی و مضربی CCR باشند آنگاه:

$$B.M = \begin{pmatrix} \sum \lambda_j^* x_j \\ \sum \lambda_j^* y_j \end{pmatrix} \in H$$

برهان:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| \, u^* y - v^* x = 0 \right\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \sum_{j \in J_1} \lambda_j^* \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} + \sum_{j \in J_2} \lambda_j^* \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \qquad J_1 = \{ j \mid \lambda_j^* > 0 \}$$

$$= \sum_{j \in J_1} \lambda_j^* \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \qquad J_2 = \{ j \mid \lambda_j^* = 0 \}$$

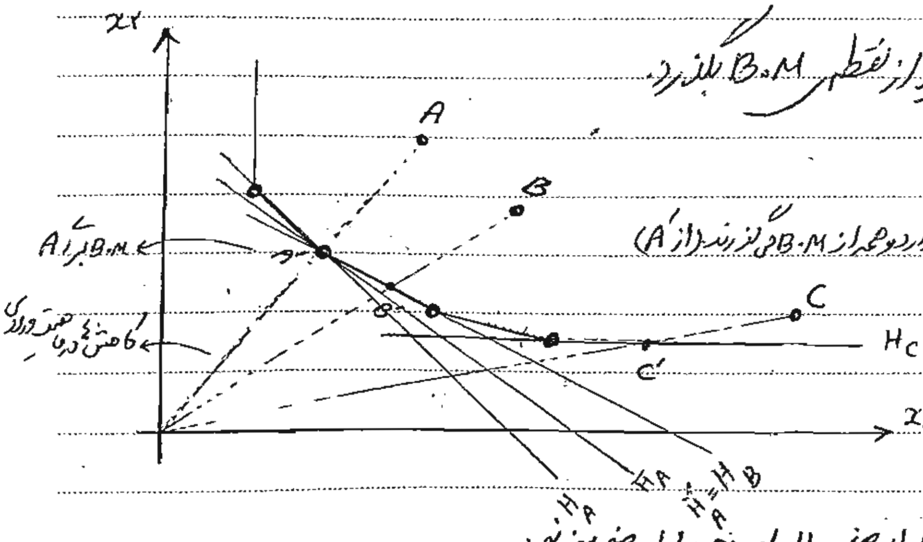
$J_1 = \{1, \dots, k\}$

$$\forall j \in J_1 \rightarrow \lambda_j^* > 0 \xrightarrow{\text{از قضیه مکمل زائد}} u^* y_j - v^* x_j = 0 \xrightarrow{\lambda_k} u^* \Big(\sum_{j \in J_1} \lambda_j^* y_j \Big) - v^* \Big(\sum_{j \in J_1} \lambda_j^* x_j \Big) = 0$$

$$\longrightarrow u^* \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_j \Big) - v^* \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_j \Big) = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_j \end{pmatrix} \in H$$

نتیجه: ابر صفحه تکیه‌کننده باید از نقطه B.M بگذرد.

مثال:



اگر DMU_A را در ماهیت ورودی حل کنیم، بی‌نهایت جواب بهین دارد و همه از B.M می‌گذرند (از A')

اگر DMU_B را در ماهیت ورودی حل کنیم، احتمالاً ابر صفحه H_B را می‌دهد (ابر صفحه منحصر به فرد)

اگر DMU_C را " " " " " H_C را می‌دهد (ابر صفحه منحصر به فرد است)

Page:

چرا ان نوشته شده؟ چون کل نقاط متعلق به جوموع ماهیت است ولی ** نقط ماهیت ورودی است.

Subject: ۵۰
year. Month. Day.

قضیه: در هر دو نوع فرم پوششی (ε دار و بدون ε) B.M متعلق به مرز T_c است.

معادل حل:

$$\partial T_c \ni \begin{pmatrix} \sum \lambda_j^* x_j \\ \sum \lambda_j^* y_j \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \theta^* x_p - s^{-*} \\ y_p + s^{+*} \end{pmatrix}^{**}$$

$\uparrow_{B.M}$

ثابت کردیم اگر CCR_ε باشد، B.M کارای قوی است و لذا متعلق به مرز T_c است.

حال ثابت می‌کنیم برای CCR بدون ε، B.M روی مرز ضعیف است و لذا در این صورت نیز B.M متعلق به مرز T_c است.

در CCR بدون ε:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &\text{s.t. } \sum_j \lambda_j x_j = \theta x_p - s^- \\ &\sum_j \lambda_j y_j = y_p + s^+ \\ &\lambda \geq 0,\ s^-, s^+ \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Max } u y_p \\ &u y_j - v x_j \leq 0 \\ &v x_p = 1 \\ &u \geq 0,\ v \geq 0 \end{aligned}$$

$\theta^* = 1 \xrightarrow{\text{در هر جواب بهین}} (s^{-*}, s^{+*}) = 0 \longrightarrow$ کارای قوی است DMU

$\theta^* = 1 \longrightarrow \exists (s^{-*}, s^{+*}) \neq 0 \longrightarrow$ مرزی هست ولی کارای ضعیف (I)

طبق قضیه مکمل زائد ضعیف:
$$\forall \begin{pmatrix} \lambda^* \\ \theta^* \\ s^{-*} \\ s^{+*} \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_i^* \times s_i^{-*} = 0 & \forall i \\ u_r^* s_r^{+*} = 0 & \forall r \\ \lambda_j^* (v^* x_j - u^* y_j) = 0 \end{cases}$$

طبق قضیه مکمل زائد قوی:
$$\exists \begin{pmatrix} \lambda^* \\ \theta^* \\ s^{-*} \\ s^{+*} \end{pmatrix}, \exists \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} \text{ و } \begin{cases} \quad // \end{cases}, \begin{cases} v_i^* + s_i^{-*} > 0 & \forall i \\ u_r^* + s_r^{+*} > 0 & \forall r \\ \lambda_j^* + (v^* x_j - u^* y_j) > 0 \end{cases}$$

کارا قوی		کارا ضعیف	
$\theta^*=1$	$U^*Y_p=1$	$\theta^*=1$	$U^*Y_p=1$
$\forall\begin{pmatrix}\bar{S}^*\\ S^{+*}\end{pmatrix}$	$\exists\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix}$	$\exists\begin{pmatrix}\bar{S}^*\\ S^{+*}\end{pmatrix}$	$\forall\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}\bar{S}^*\\ S^{+*}\end{pmatrix}=0 \xrightarrow{\text{متمم قوی}}$	$\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix}>0$	$\begin{pmatrix}\bar{S}^*\\ S^{+*}\end{pmatrix}\neq 0 \xrightarrow{\text{زائد ضعیف}}$	$\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix}\not> 0$

از بالا داریم: (I) $\Rightarrow \forall\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix}\ \exists i;\ V_i^*=0\ \vee\ \forall\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix}\ \exists r;\ U_r^*=0$

ثابت می‌کنیم در اینجا می‌توان اندیس‌ها را جابجا کرد با وجود اینکه همیشه نمی‌توان این کار را انجام داد. نقیض را ثابت می‌کنیم:

حکم: $\exists i;\ \forall\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix},\ V_i^*=0\ \vee\ \exists r;\ \forall\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix},\ U_r^*=0$

نقیض: $\forall i\ \exists\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix},\ V_i^*>0\ \ \&\ \ \forall r\ \exists\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix},\ U_r^*>0$

$i=1:\ \begin{pmatrix}V_1^{*1}>0\\ V_2^{*1}\\ \vdots\\ V_m^{*1}\\ U_1^{*1}\\ \vdots\\ U_s^{*1}\end{pmatrix}\quad i=2:\ \begin{pmatrix}V_1^{*2}\\ V_2^{*2}>0\\ \vdots\\ V_m^{*2}\\ U_1^{*2}\\ \vdots\\ U_s^{*2}\end{pmatrix}\quad \cdots\quad i=m:\ \begin{pmatrix}V_1^{*m}\\ \vdots\\ V_m^{*m}>0\\ U_1^{*m}\\ \vdots\\ U_s^{*m}\end{pmatrix}$

$i=m+1:\ \begin{pmatrix}V_1^{*m+1}\\ \vdots\\ V_m^{*m+1}\\ U_1^{*m+1}>0\\ \vdots\\ U_s^{*m+1}\end{pmatrix}\quad \cdots\quad i=m+s:\ \begin{pmatrix}V_1^{*m+s}\\ \vdots\\ V_m^{*m+s}\\ U_1^{*m+s}\\ \vdots\\ U_s^{*m+s}>0\end{pmatrix}$

چون ترکیب محدبی از جوابها جواب است $\rightarrow \frac{1}{m+s}\underbrace{\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}}_{}^{i=1}+\cdots+\frac{1}{m+s}\underbrace{\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}}_{i=m+s}=\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}>0$

تناقض با $\forall\begin{pmatrix}U^*\\ V^*\end{pmatrix}\not>$.

در قضیه قبل ثابت کردیم که اگر مولفه‌ای در یکی از جوابهای بهین صفر باشد آنگاه در تمام جوابهای بهین صفر باشد (این فقط در مورد کارایی ضعیف صادق است و این مطلب فقط از فرض $\binom{U^*}{V^*} \not> 0$ ، $\forall \binom{U^*}{V^*}$ ناشی می‌شود)

به عبارت دیگر ثابت کردیم:

در T_c ابر صفحه ضعیف به ابر صفحه‌ای گوییم که لااقل موازی یکی از محورها باشد. (لااقل گفته شد چون ممکن است چند تا U^* و V^* صفر باشد)

لااقل موازی یکی از محورها است. ← لااقل یکی از U^*ها و V^*ها صفر است ← $\binom{U^*}{V^*} \not> 0$ در کارایی ضعیف

تذکر: در T_c ابر صفحه‌هایی که به محورها می‌چسبند ضعیف اند.

نکته: الزامی ندارد که روی ابرصفحه ضعیف حتما DMU ضعیف باشد (مشترک قوی و ضعیف، DMU قوی که $\exists \binom{U^*}{V^*} > 0$)

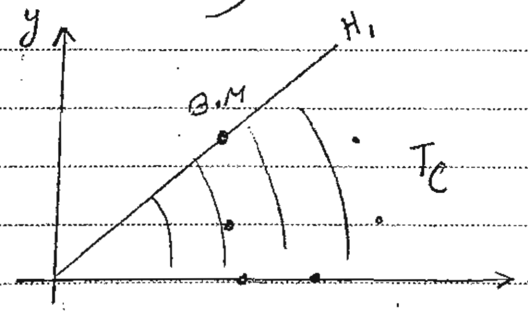
DMU ها، فصل مشترک قوی و ضعیف DMU ها قوی اند.

هر DMU که روی ابرصفحه کارایی ضعیف باشد الزاماً کارایی ضعیف نیست.

هر DMU کارایی ضعیف الزاماً روی ابر صفحه ضعیف است در تمام ابرصفحه‌هایی که از آن می‌گذرند ضعیف اند.

تمرین ۱: ثابت کنید در هر T_c (در هر T ای) لااقل یک DMU کارایی قوی وجود دارد. اما الزامی ندارد کارایی ضعیف داشته باشیم.

ثابت کردیم که B.M متعلق به T_c است و از طرفی نیز ثابت کردیم B.M ها کارای قوی می‌باشند لذا در هر T_c لااقل یک DMU کارایی قوی وجود دارد.



در T_c با یک ورودی یک خروجی DMU کارای ضعیف نداریم.

$$H_1=\left\{\binom{x}{y} \,\middle|\, U^*y-V^*x=0\right\} \rightsquigarrow H_1=\left\{\binom{x}{y} \,\middle|\, U_1^*y-V_1^*x=0\right\} ; \binom{U_1^*}{V_1^*}>0$$

زیرا در غیر این صورت اگر $U^*=0$ ← $\cancel{x}$ ، و $V^* \neq 0$ است.

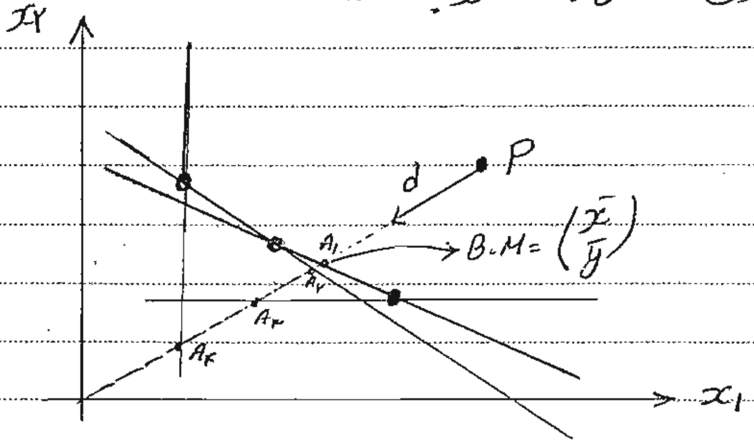
Subject: ۵۳

year. Month. Day.

تمرین ۱۱: آیا در هر T_c الزاماً ابرصفحه‌ی سازای ضعیف وجود دارد.

خیر: شکل تمرین قبل بازگو کننده این مطلب است.

اگر تمام ابرصفحه‌ها در دست باشد بدون LP می‌توان θ را بدست آورد:



فرض کنید B.M برای DMUها را با ماهیت ورودی بدست آوریم.

$$\begin{pmatrix}x_p\\ y_p\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}d^x\\ d^y=0\end{pmatrix}$$

معادله خط $\vec{dP}$ را نوشته و با ابرصفحه ۴ قطع می‌دهیم. نقاط تقاطع A_1، A_2، A_3 و A_4 حاصل می‌شود.

هر یک از نقاط که کمترین نرم اقلیدسی را داشته باشد، B.M می‌باشد.

$$A_1:\ \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} \begin{matrix}\le \theta x_p\\ \ge y_p\end{matrix} \longrightarrow \bar{x}\le\theta x_p$$

Min θ را بدست می‌آوریم

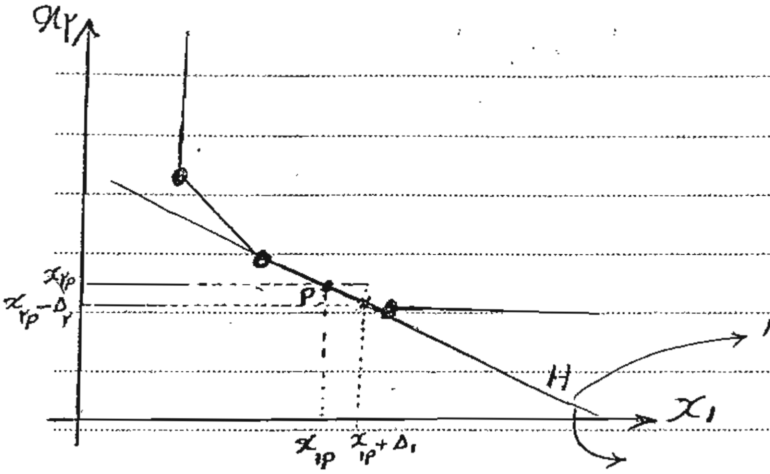
$$\frac{\bar{x}_i}{x_{ip}}\le\theta,\quad i=1,2,\ x_{ip}>0$$

ثابت و برقرار است

Page:

Subject: ۵۴

year. Month. Day.



چون ابرصفحه قوی است . $\rightarrow$ H در: $U>0, V_1>0, V_2>0$

$V_1x_1+V_2x_2=1$

$$H:\ UY-VX=0 \xrightarrow{y=1} U-V_1x_1-V_2x_2=0 \xrightarrow[\text{فرمول قرارداد}]{U=1} V_1x_1+V_2x_2=1 \rightarrow \frac{\partial x_2}{\partial x_1}=\frac{-v_1}{v_2}$$

یعنی: اگر x_1 یک واحد افزایش یابد، x_2 باید $\frac{v_1}{v_2}$ واحد کاهش یابد تا باز هم روی ابرصفحه قرار داشته باشیم

در حالت کلی: $UY-VX=0 \Longrightarrow \dfrac{\partial y_r}{\partial x_i}=\dfrac{V_i}{U_r}$

تعریف مجموعه مرجع: مجموعه مرجع متناظر یک DMU_p خاص و بدین صورت تعریف می‌شود:

$$E_p \text{ یا } RS_p=\left\{\begin{pmatrix}x_j\\y_j\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_j^*>0 \text{ حداقل برای یک جواب بهینه فرم پوششی متناظر } DMU_p\right\}$$

$\Downarrow$

$$RS_p=\bigcup_{\lambda^*}\left\{\begin{pmatrix}x_j\\y_j\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_j^*>0 \,,\ \lambda^* \text{ جواب بهینه فرم پوششی متناظر } DMU_p\right\}$$

DMU_j

* اعضای مجموعه مرجع کارای قوی هستند؟

فرض کنید (λ^*,θ^*) جواب بهینه فرم پوششی باشد:

$$\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*x_j\\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*y_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j\in J_p}\lambda_j^*x_j\\ \sum_{j\in J_p}\lambda_j^*y_j\end{pmatrix}=\sum_{j\in J_p}\lambda_j^*\begin{pmatrix}x_j\\y_j\end{pmatrix} \quad,\ J_p=\left\{j \,\middle|\, \begin{pmatrix}x_j\\y_j\end{pmatrix}\in RS_p\right\}$$

مجموعه اندیس‌های مجموعه مرجع

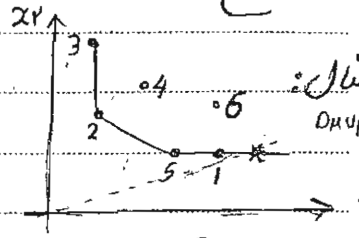
(به دلیل مسدود و محدودی است) : می‌توانند در تعریف RS_p در نظر نگیریم

در ساختن $B.M$ می‌توانند سهمی داشته باشند

Page:

با توجه به اینکه بدست آوردن λها جواب بهین (در صورت وجود) کارا، دقیق نیست، از این رو بدست آوردن مجموعه مرجع DMU_p کار ساده‌ای نخواهد بود.

مثال:



$$RS_p = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} \right\}$$

فرض کنید $\lambda_1^* = 1/5$ ، $\lambda_5^* = 2/5$ ، $\lambda_j^* = 0$ ، $j \neq 1, 5$

مختصات جدید که باید می‌رسیدیم بدین صورت است:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_5 \\ \frac{1}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{p_{new}} \\ y_{p_{new}} \end{pmatrix}$$

ترکیب‌ یا تلفیقی از ۱ و ۵ می‌باشد.

✓ تعریف DMU کارای راسی:

DMU_p کارای راسی است اگر و فقط اگر $RS_p = \left\{ \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \right\}$ یعنی مرجع آن فقط خودش باشد.

$$\sum_j \lambda_j^* x_j = \theta^* x_p - s^{-*}$$

$$\sum_j \lambda_j^* y_j = y_p + s^{+*}$$

$\Longrightarrow$ چون DMU_p کارا است پس $\theta^* = 1$ ، $s^{-*} = 0$ ، $s^{+*} = 0$.

چون راسی است پس λ_j^* ها بقیه صفر است ولذا:

$$\begin{matrix} \lambda_p^* x_p = x_p \\ \lambda^* y_p = y_p \end{matrix} \longrightarrow \lambda_p^* = 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda^* = e_p \\ \theta^* = 1 \\ s^{-*} = 0 \\ s^{+*} = 0 \end{pmatrix}$$

$$T_c = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| X \geqslant \sum \lambda_j x_j , Y \leqslant \sum \lambda_j y_j , \lambda \geqslant 0 \right\}$$

در T_c هم DMUهای روی یال، DMUهای کارای راسی اند (فقط کارای راسی و راسی نیست فرق می‌کند) ؟؟

چون در زیر تاکارا است

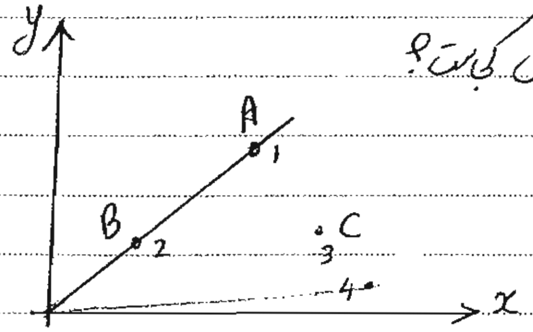
$$DMU \text{ کارا} \rightarrow \begin{cases} X = \sum_j \lambda_j x_j \\ Y = \sum_j \lambda_j y_j \\ \lambda \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in pos(\text{همه } DMU)$$

Subject : ۵۶

year. Month. Day.

بنابراین نقاط کارای رائی اند که نتوان آنها را به صورت ترکیب خطی نامنفی از بقیه نوشت. و در T_c فقط نقاط روی یال‌ها دارای این خاصیت می‌باشند:

در T_c، تمام نقاط روی یال‌ها، DMU های کارای رائی اند. (DMU)



سوال: در شکل زیر هیچ یک از نقاط رائی نیست. تناقض کجاست؟ مخصوصاً که روی یال رائی است!!!

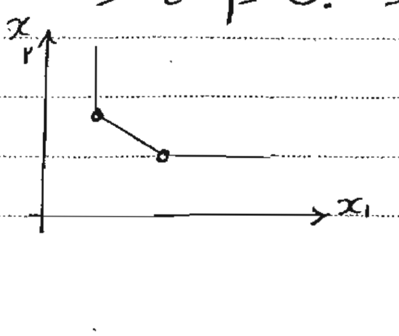
$$DMU_A:\begin{cases}\lambda^*=e_1,\ \theta^*=1,\ s^{-*}=0,\ s^{+*}=0\\ \lambda^*=2e_2\ \ \text{"}\ \ \text{"}\end{cases}\longrightarrow RS_A=\{A,B\}\longrightarrow$$ پس A کارای رائی نیست.

$$DMU_B:\begin{cases}\lambda^*=e_2,\ \theta^*=1,\ s^{-*}=0,\ s^{+*}=0\\ \lambda^*=\tfrac{1}{2}e_1,\ \theta^*=1,\ s^{-*}=0,\ s^{+*}=0\end{cases}\longrightarrow RS_B=\{A,B\}\longrightarrow$$ پس B کارای رائی نیست.

C در pos A و 4 است

تذکر: در T_c هرگاه می‌خواهیم تحلیل کنیم، هیچ DMU با ضرب مثبت همدیگر نداریم زیرا در این صورت آن دو هم‌رفتارند. اگر A کارا است، B هم کارا است. اگر A رائی باشد، B نیز رائی است. در این صورت یکی از DMU های هم‌رفتار را حذف می‌کنیم و سپس تحلیل را ادامه می‌دهیم.

تذکر: شکل قسمتی از PPS اصلی را لحاظ نمی‌کند به همین دلیل همیشه قابل تعمیم به T_c نیست.



مثال نقض: مرز کارا محور x ها را قطع نمی‌کند ولی T_c قطع می‌کند.

Subject : ۵۷

year. Month. Day.

تعریف: هر DMU ای که کارا باشد ولی راسی نباشد DMU کارای غیر راسی گوئیم.

DMU_p کارای غیر راسی جواب بهینه منحصر بفرد نیست $\left(\begin{array}{l} \lambda^* = e_p \\ \boxed{\begin{array}{l}\theta^*=1 \\ s^{-*}=0 \\ s^{+*}=0\end{array}} \end{array}\right)$ $\longrightarrow$ بالاجبار باید اینطور باشد چون کاراست

$\Longrightarrow RS_p = \{ DMU_p, DMU_t, \dots \}$

تمرین ۱۲: برای DMU_p کارای غیر راسی $\exists \bar{\lambda}^* : \bar{\lambda}^*_p = 0$ (بهینه) (یعنی در بین جوابهای بهینه، λ ای پیدا می‌شود که مؤلفه p اُمش صفر است)

تمرین ۱۳: ثابت کنید هیچ DMU ضعیفی راسی نیست. یعنی هر راسی قوی است. کارا قوی $\leftarrow s^{-*}=0, s^{+*}=0$ و $\theta^*=1 \leftarrow DMU_p$ کارا

تمرین ۱۴: ثابت کنید برای هر PPS لااقل یک کارای راسی قوی وجود دارد.

جواب تمرین ۱۲: برهان خلف

$\forall \ \lambda^*$ بهینه, $\lambda^*_p \neq 0$

$$\left\{\begin{array}{l} X_p = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*_j X_j \\ Y_p = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*_j Y_j \\ \binom{X_j}{Y_j} \in RS_p, \quad j=1,\dots,n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda^*_j X_j = (1-\lambda^*_p) X_p \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda^*_j Y_j = (1-\lambda^*_p) Y_p \end{array}\right. \quad \& \quad \lambda^*_p \neq 0$$

$$\Rightarrow 1-\lambda^*_p > 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \frac{\lambda^*_j}{1-\lambda^*_p} X_j + 0 X_p = X_p \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \frac{\lambda^*_j}{1-\lambda^*_p} Y_j + 0 Y_p = Y_p \end{array}\right.$$

جوابی بدست آوردیم که $\lambda^*_p = 0$ و این تناقض است.

Page:

Subject: ۵۸

year. Month. Day.

✓ماهیت خروجی

$$\text{Max} \quad \varphi$$
$$\text{s.t} \quad \begin{pmatrix} x_p \\ \varphi y_p \end{pmatrix} \in T_c$$

$$\text{Max} \quad \varphi \qquad\qquad \text{Min} \quad v x_p$$
$$\sum \lambda_j x_j \leqslant x_p \quad \xrightarrow{\text{دوآل}} \quad u y_j - v x_j \leqslant 0 \quad \forall j$$
$$\sum \lambda_j y_j \geqslant \varphi y_p \qquad\qquad u y_p = 1$$
$$\lambda \geqslant 0 \qquad\qquad u \geqslant 0, v \geqslant 0$$

همه قضایای گفته شده برای ماهیت خروجی هم صادق است.

ن

$$\text{Min} \ \frac{v x_p}{u y_p} = \text{Max} \ \frac{u y_p}{v x_p} \sim$$ این هم مدل خارج قسمتی است.

$$u y_j - v x_j \leqslant 0 \quad \forall j \qquad\qquad u y_j - v x_j \leqslant 0 \quad \forall j$$
$$u \geqslant 0, v \geqslant 0 \qquad\qquad u \geqslant 0, v \geqslant 0$$

✓قضیه: $\theta^* = 1/\varphi^*$

$$\text{Max} \quad \varphi$$
$$\sum \lambda_j x_j \leqslant x_p$$
$$\sum \lambda_j y_j \geqslant \varphi y_p$$
$$\lambda \geqslant 0$$

جواب بدیهی: $\varphi = 1, \lambda = e_p \Longrightarrow \varphi^* \geqslant 1$

ن

برهان:

$$\text{Min} \quad \theta$$
$$\sum \lambda_j x_j \leqslant \theta x_p$$
$$\sum \lambda_j y_j \geqslant y_p$$
$$\lambda \geqslant 0$$

Subject: ۵۹

year. Month. Day.

چون $\theta > 0$ پس:

$$\operatorname{Min} \theta = \operatorname{Max} \frac{1}{\theta}$$

$$\sum_j \frac{\lambda_j}{\theta} x_j \leq x_p \qquad \xrightarrow[\frac{1}{\theta}=\varphi]{\frac{\lambda_j}{\theta}=\mu_j} \qquad \operatorname{Max} \ \varphi$$

$$\sum \frac{\lambda_j}{\theta} y_j \geq \frac{1}{\theta} y_p \qquad\qquad \sum \mu_j x_j \leq x_p$$

$$\lambda \geq 0 \qquad\qquad \sum \mu_j y_j \geq \varphi y_p$$

$$\mu \geq 0$$

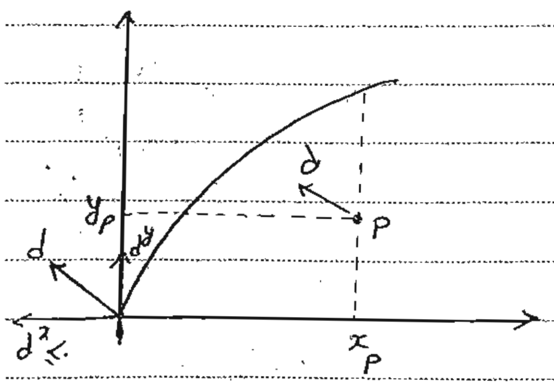
بنابراین $\varphi^* = 1/\theta^*$.

توجه:

$$DMU_p \text{ کارایی نسبی } = RE_p = \frac{\frac{y_p}{x_p}}{\frac{\varphi^* y_p}{x_p}} = 1/\varphi^*$$

به همین دلیل، کارایی نسبی در ماهیت خروجی φ^* نیست بلکه $1/\varphi^*$ است.

ماهیت ترکیبی:



$$\operatorname{Max} \ \theta$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} d^x \\ d^y \end{pmatrix} \in T$$

$$\rightarrow \operatorname{Max} \ \theta$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -d^x \\ d^y \end{pmatrix} \in T$$

این مدل کارایی را نمی‌دهد. (فقط کارا بودن یا نبودن را می‌گوید)
طبقه‌بندی می‌کند

با روش معنی برای θ پیدا نمی‌کند برای رفع مشکل قرار می‌دهیم:

$$d = \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix} \longrightarrow$$ بیشتر از خودش کم نکند.

$\theta^* = 0$ یعنی کارا، خوب بودن

$\theta^* = 1$ ناکارا (بدترین وضع ناکارایی)

Page:

Subject: ۴۰

year. Month. Day.

$$\text{Max} \quad \theta$$

$$\text{St.} \quad \sum_j \lambda_j x_j \leqslant (1-\theta) x_p$$

ترکیبی از عوامل بهبود می‌یابد.

$$\sum_j \lambda_j y_j \geqslant (1+\theta) y_p$$

$$\lambda \geqslant 0$$

در این ورودی‌ها و خروجی‌ها به یک نسبت تغییر کرده اند. یعنی ورودی‌ها به اندازه θx_p کاهش و خروجی‌ها به اندازه θy_p افزایش پیدا کنند. چون در این حداکثر کاهش در ورودی و حداکثر افزایش در خروجی DMU_p را به مرز کارایی برسانند لذا تابع هدف به صورت ماکزیمم سازی درآمده.

مدل ترکیبی CCR همواره شدنی است زیرا:

$$(\theta = 0 \,,\, \lambda = e_p) = \text{جواب شدنی}$$

$$\theta = 0 \text{ جواب شدنی} \longrightarrow \theta^* \geqslant 0$$

اگر $\theta^* > 0$ باشد، DMU_p ناکاراست زیرا فرض کنید (ق) DMU_p کارا باشد:

$$\begin{aligned} \sum \lambda_j^* x_j &\leqslant (1-\theta^*) x_p \leqslant x_p \\ \sum \lambda_j^* y_j &\geqslant (1+\theta^*) y_p \geqslant y_p \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\sum \lambda_j^* x_j \\ \sum \lambda_j^* y_j \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geqslant} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$\neq$ برای حداقل یک مؤلفه

تناقض با اینکه DMU_p کاراست.

از طرفی $\theta \geqslant 1$ نمی‌تواند باشد، زیرا در غیر این صورت:

$$\text{if } \theta \geqslant 1$$

$$\sum \lambda_j x_j \leqslant (1-\theta) x_p \leqslant 0 \longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow (1+\theta) y_p \leqslant 0 \to y_p \leqslant 0$$

چون y_p باید حداقل یک مؤلفه مثبت داشته باشد.

بنابراین ثابت کردیم همواره $1 > \theta^* \geqslant 0$ و اگر $\theta^* = 0$ باشد DMU_p کاراست.

Page:

Subject: 41

year. Month. Day.

تمرین ۵: در مدل ترکیبی d را چگونه انتخاب نمائیم تا ماهیت ورودی یا خروجی دقیقاً حاصل شود.

برهان: ماهیت ترکیبی را در نظر می‌گیریم:

$$\text{Max } \theta \quad \text{s.t.} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -d^x \\ d^y \end{pmatrix} \in T$$

حالت اول: فرض کنید $T = T_c$. از طرفی فرض کنید در جهت y حرکتی نداشته باشیم پس:

$$\text{Max } \theta \quad \text{s.t.} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -d^x \\ 0 \end{pmatrix} \in T \xrightarrow{\text{if } d^x = x_p} \text{Max } \theta \quad \text{s.t.} \begin{pmatrix} x_p - \theta x_p \\ y_p \end{pmatrix} \in T$$

$$\Longrightarrow \text{Max } \theta \quad \text{s.t.} \begin{pmatrix} (1-\theta) x_p \\ y_p \end{pmatrix} \in T \xrightarrow[\substack{1-\theta = \alpha \\ \theta = 1-\alpha}]{\text{تغییر متغیر}} \text{Max } 1-\alpha \quad \text{s.t.} \begin{pmatrix} \alpha x_p \\ y_p \end{pmatrix} \in T$$

$$\xrightarrow{\text{معادل با این است}} \text{Min } \alpha \quad \text{s.t.} \begin{pmatrix} \alpha x_p \\ y_p \end{pmatrix} \in T_c$$

if $\alpha^* = 1 \longrightarrow \theta^* = 0$

مقدار جواب بهینه ماهیت ترکیبی $= \theta^* = 0 \longrightarrow$ DMU کارا است

$\Updownarrow$

$\alpha^* = 1$ مقدار تابع هدف ماهیت ورودی

$\Downarrow$

DMU_p با ماهیت ورودی کارا

DMU_p با ماهیت ترکیبی کارا است

حالت دوم: حال فرض کنید در جهت x حرکتی نداشته باشیم:

$$\text{Max } \theta \quad \text{s.t.} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 \\ d^y \end{pmatrix} \in T \xRightarrow{\text{if } d^y = y_p} \text{Max } \theta \quad \text{s.t.} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p + \theta y_p \end{pmatrix} \in T$$

$$\Rightarrow \text{Max } \theta \quad \text{s.t.} \begin{pmatrix} x_p \\ (1+\theta) y_p \end{pmatrix} \in T \xrightarrow[\substack{1+\theta = \beta \\ \theta = -1+\beta}]{\text{تغییر متغیر}} \text{Max } -1+\beta \quad \text{s.t.} \begin{pmatrix} x_p \\ \beta y_p \end{pmatrix} \in T$$

$$\xrightarrow{\text{معادل است با}} \text{Max } \beta \quad \begin{pmatrix} x_p \\ \beta y_p \end{pmatrix} \in T_c$$

$\beta^* = 1 \longleftrightarrow \theta^* = 0$ مقدار تابع هدف ماهیت ترکیبی

بنابراین با قرار دادن $d = \begin{pmatrix} 0 \\ y_p \end{pmatrix}$ مدل ترکیبی مثل مدل CCR با ماهیت خروجی می‌شود.

Subject : ۴۲

year. Month. Day.

تمرین ۱۶: بطور مستقیم ثابت کنید CCR در ماهیت خروجی جواب بهینه نامتناهی ندارد.

حل: مدل CCR در ماهیت خروجی را در نظر می‌گیریم:

$$\text{Max} \quad \varphi$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{ip} \quad , i=1,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi y_{rp} \quad , r=1,\dots,s$$

$$\lambda \geq 0$$

متغیر φ آزاد است لذا: $\begin{cases} \varphi := \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_1 \geq 0 , \varphi_2 \geq 0 \end{cases}$

(۱) $$\text{Max} \quad \varphi_1 - \varphi_2$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \geq -x_{ip}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - \varphi_1 y_{rp} + \varphi_2 y_{rp} \geq 0 \quad r=1,\dots,s$$

$$\lambda \geq 0 , \varphi_1 \geq 0 , \varphi_2 \geq 0$$

مدل P۱ دارای جواب بهینه محدود است $\overset{\text{نامتناهی}}{\longleftrightarrow}$ مسئله بیکران نباشد.

$$\text{Max} \quad \varphi_1 - \varphi_2$$

$$-\lambda_1 x_{11} - \lambda_2 x_{12} - \dots - \lambda_n x_{1n} + 0 + 0 \geq -x_{1p}$$

$$\vdots$$

$$-\lambda_1 x_{m1} - \lambda_2 x_{m2} - \dots - \lambda_n x_{mn} + 0 + 0 \geq -x_{mp}$$

$$\lambda_1 y_{11} + \lambda_2 y_{12} + \dots + \lambda_n y_{1n} - \varphi_1 y_{1p} + \varphi_2 y_{1p} \geq 0$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 y_{s1} + \lambda_2 y_{s2} + \dots + \lambda_n y_{sn} - \varphi_1 y_{sp} + \varphi_2 y_{sp} \geq 0$$

$$\lambda \geq 0 , \varphi_1 \geq 0 , \varphi_2 \geq 0$$

Subject: ۶۳

year. Month. Day.

$$A=\begin{bmatrix} -x_{11} & -x_{12} & \cdots & -x_{1n} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -x_{m1} & -x_{m2} & \cdots & -x_{mn} & 0 & 0 \\ y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} & -y_{1p} & y_{1p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sn} & -y_{sp} & y_{sp} \end{bmatrix}$$

مجموعه جهت‌های دور شونده $= \{ d \mid Ad \geq 0 ,\ d \geq 0 ,\ d \neq 0 \}$

$d=(d_1,d_2,d_3)=(d_1^1,d_1^2,\ldots,d_1^n,d_2,d_3)$ $\qquad d_1\in\mathbb{R}^n,\ d_2,d_3\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} +x_{11}d_1^1+x_{12}d_1^2+\cdots+x_{1n}d_1^n \leq 0 \\ \vdots \\ x_{m1}d_m^1+x_{m2}d_m^2+\cdots+x_{mn}d_m^n \leq 0 \\ y_1d^1+y_2d^2+\cdots+y_nd^n-y_pd_2+y_pd_3 \geq 0 \\ 0\leq (d_1,d_2,d_3)\neq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow x_1d^1+\cdots+x_nd^n\leq 0 \to \forall j,\ x_jd^j=0 \longrightarrow x_1d^1=0 \to d^1=0,\ \ldots,\ x_nd^n=0\to d^n=0$

دستگاه فوق دارای جواب غیر بدیهی جز صفر است پس ناحیه بیکران است.

$\Longrightarrow d_1=0,\ d_3\geq d_2 \xrightarrow{\text{جهت دور شونده فقط}} = (0,+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})$ راس، $(0,0,1)$ راس

$\xrightarrow[d_2+d_3=1]{d_1=0} \begin{cases} d_3\geq d_2 \\ d_2+d_3=1 \end{cases} \Longrightarrow 2d_3\geq 1 \to d_3\geq \tfrac{1}{2}$

شرط لازم و کافی برای اینکه مسئله LP ① دارای جواب بهینه متناهی باشد آن است که:

$\forall d,\ cd\leq 0$ ؛ d جهت دور شونده

فرض کنید $d=(0,1-\alpha,\alpha)$ $\quad \alpha\geq\tfrac{1}{2}$ $\xrightarrow{c=(0,1,-1)} cd=(0,1,-1)\begin{pmatrix}0\\1-\alpha\\\alpha\end{pmatrix}=1-\alpha-\alpha=1-2\alpha\leq 0$

(زیرا $\alpha\geq\tfrac{1}{2} \leftarrow 2\alpha\geq 1 \leftarrow 1-2\alpha\leq 0$)

مطابق قضیه به راحتی ثابت می‌شود $c\in\mathbb{R}$ در ماهیت ورودی جواب بهینه نامتناهی ندارد.

Page:

Subject : ۶۴

year. Month. Day.

بازده به مقیاس متغیر:

فرض کنید DMUها در نوع بازده به مقیاس هم‌رفتار نیستند (یعنی امکان وجود DMU با بازده به مقیاس ثابت هست، امکان وجود DMU با بازده به مقیاس نزولی و صعودی هم هست)

با پذیرفتن اصول موضوعه شمول مشاهدات، اصل تحدب و اصل امکان‌پذیری، T جدید را می‌سازیم:

$$T^{1} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} ,\ j=1,\dots,n \right\}$$

$$T^{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j ,\ Y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j ,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 ,\ \lambda \geq 0 \right\}$$

شرط تحدب

$$T_V = T^{1,2,3} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| X \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \ \&\ Y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j ,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 ,\ \lambda \geq 0 \right\}$$

$\hookrightarrow$ variable

همانطور که ملاحظه می‌کنید هیچ نوع بازده به مقیاسی را برای جامعه نپذیرفتیم.

هر اصل تعدادی نقاط به مسئله اضافه می‌کند در اینجا یک اصل (بازده به مقیاس) کمتر از T_c داریم پس $T_V \subseteq T_c$

از طرفی چون T_V یک شرط بیشتر از T_c دارد $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right)$ هم می‌توان گفت $T_V \subseteq T_c$

تذکر: در T_c هم شرط تحدب بودن وجود دارد ولی با تغییر متغیر در T_c ظاهر شده و حذف شد

T_V با ماهیت ورودی:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &\text{s.t. } \begin{pmatrix} \theta x_p \\ y_p \end{pmatrix} \in T_V \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_p \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_p \\ &1\lambda = 1 ,\ \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

مدل BCC نوشته شده

$$\rightarrow \begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &\text{s.t. } \sum \lambda_j x_j + s^- = \theta x_p \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - s^+ = y_p \\ &1\lambda = 1 ,\ \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Subject: ۹۵

year. Month. Day.

$$B.M = \begin{pmatrix} \sum \lambda_j^* x_j \\ \sum \lambda_j^* y_j \end{pmatrix}_{*} = \begin{pmatrix} \theta^* x_p - s^{-*} \\ y_p + s^{+*} \end{pmatrix}_{**}$$

همیشه برای تعیین B.M باید ⊛ را بنویسیم زیرا ⊛⊛ بستگی به ماهیت مدل دارد.

T_V در: $B.M = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \lambda_j^* x_j \\ \sum \lambda_j^* y_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \Longrightarrow B.M \in C(DMU)$

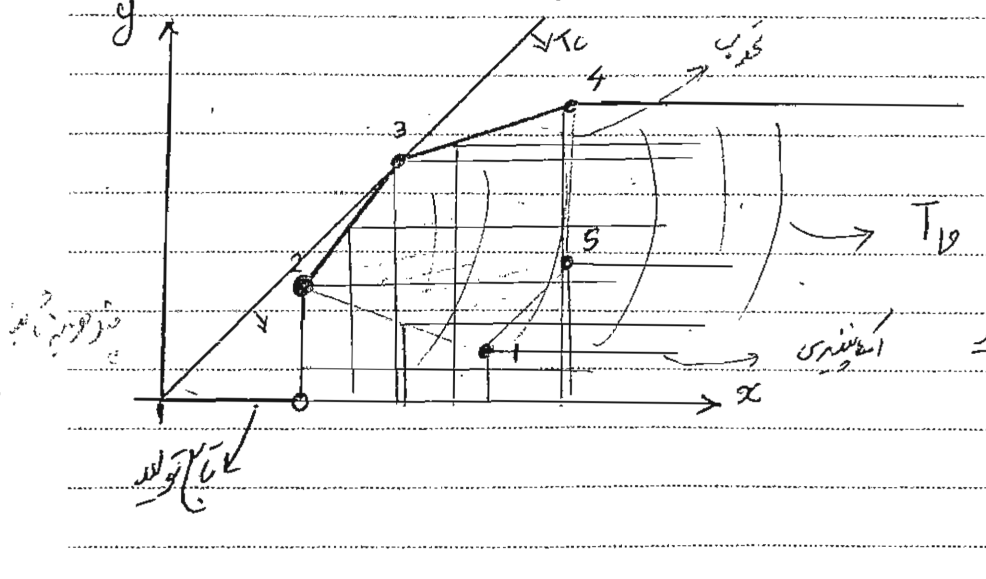
$1\lambda^* = 1, \lambda^* \geq 0$

$1\lambda^* = 1, \lambda^* \geq 0$

یعنی در T_V، الگوی B.M متعلق به پوسته محدب DMU هاست. درحالیکه در T_C الگوی B.M متعلق به پوسته خطی نامنفی (PDS) DMU هاست.

تذکر: چون یک اصل از T_C برداشتیم، جاهای دیگر شد و امکان دارد فضاهایی که آنجا اثبات کردیم اینجا صادق نباشد.

$$S_{BCC-I} \subseteq S_{CCR-I} \xRightarrow[\min]{\text{چیتر ورودی}} \theta^*_{BCC} \geq \theta^*_{CCR}$$



فضای PDS یا فضای مخروطی نیست. زیرا فضای مخروطی فضای T_C است.

BCC کارایی بیشتری دارد چون تابع تولید به مرز BCC نزدیکتر است.

Subject : ۴۴

year. Month. Day.

تمرین ۱۷: آیا می‌توان مثالی ارائه نمود که $T_V = T_C$ باشد؟ به عبارت دیگر آیا می‌توان ثابت کرد که $T_C \subset T_V$.

حل: خیر، نمی‌توان مثالی ارائه نمود که $T_V = T_C$ گردد. زیرا ثابت می‌کنیم که $T_V \subset T_C$. یعنی ثابت می‌کنیم:

$$\exists (x,y) \in T_C \,;\, (x,y) \notin T_V$$

فرض کنید:

$$\Sigma_{DMU} = \left\{ \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \,\middle|\, j = 1, \dots, n \;;\; x_j \gneq 0 ,\; y_j \gneq 0 \right\}$$

همانطور قبلاً ثابت کردیم T_C یک مخروط است بنابراین:

$$\forall \lambda \geq 0 ,\; \forall (x,y) \in T_C \longrightarrow \lambda (x,y) \in T_C \xrightarrow{\lambda = 0} (0,0) \in T_C$$

حال ثابت می‌کنیم $(0,0) \notin T_V$.

فخ: فرض کنید $(0,0) \in T_V$ پس:

$$\exists \bar{\lambda} \geq 0 \;;\; \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{ij} \leq 0 , & i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j y_{rj} \geq 0 , & r = 1, \dots, s \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j = 1 , & \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \bar{\lambda}_1 x_{11} + \bar{\lambda}_2 x_{12} + \dots + \bar{\lambda}_n x_{1n} \leq 0 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_1 x_{m1} + \bar{\lambda}_2 x_{m2} + \dots + \bar{\lambda}_n x_{mn} \leq 0 \end{array} \Longrightarrow \bar{\lambda}_1 x_1 + \dots + \bar{\lambda}_n x_n \leq 0$$

$$\xrightarrow[x \gneq 0]{\bar{\lambda} \geq 0} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda}_1 x_1 = 0 \xrightarrow{x_1 \neq 0} \bar{\lambda}_1 = 0 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_n x_n = 0 \Longrightarrow \bar{\lambda}_n = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \bar{\lambda} = 0 \;\times\; \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j = 1 \right)$$

بنابراین نقطه‌ای مانند $(0,0)$ از T_C پیدا کردیم که در T_V نیست و این یعنی $T_V \subset T_C$.

Subject: ۶۷

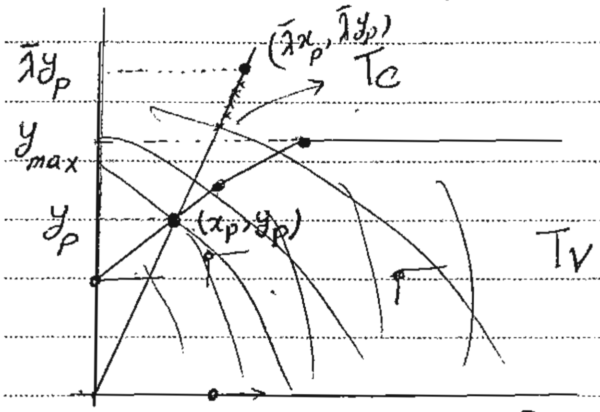
year. Month. Day.

سوال: در تمرین ۱۷ با شرط $x \ngeq 0$ ثابت کردیم $T_v \subset T_c$ است. حال اگر این شرط‌ها را از روی ورودی‌ها و خروجی‌ها برداریم آیا $T_v = T_c$ امکان پذیر خواهد بود؟ ($x \geq 0$ ، $y \geq 0$)

حل: فرض کنید شرط صفر بودن تمام ورودی‌ها، خروجی‌ها را داشته باشیم یعنی:

$(0,0) \in T$ ، $(x,0) \in T$ و $(0,x) \in T$

بنابراین T_v و T_c را در نظر می‌گیریم:



فرض کنید $(x_p, y_p) \in T_v \cap T_c$. بنابر اصل بازده به مقیاس ثابت در T_c داریم:

$$\forall \lambda \geq 0, \ (\lambda x_p, \lambda y_p) \in T_c \Longrightarrow \exists \lambda' ; \ \lambda' y_p = y_{max}$$

$$\longrightarrow \forall \bar{\lambda} > \lambda' \longrightarrow \bar{\lambda} y_p > y_{max}$$

داریم یعنی:

$$(\bar{\lambda} x_p, \bar{\lambda} y_p) \in T_c \ , \ (\bar{\lambda} x_p, \bar{\lambda} y_p) \notin T_v$$

پس $T_v \subset T_c$.

Subject : ۶۸

year. Month. Day.

حال نشان می‌دهیم که در مدل BCC خواص زیر برقرار است:

$$\text{Min } \theta$$
$$\text{s.t. } \sum_j \lambda_j x_j \leq \theta x_p$$
$$\sum_j \lambda_j y_j \geq y_p$$
$$\sum \lambda_j = 1$$
$$\lambda \geq 0$$

① $\lambda^* \neq 0$

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* = 1 \longrightarrow \lambda^* \neq 0$

② $0 < \theta^* \leq 1$

(I) $\theta^* \neq 0$:

خ $\theta^* = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq 0 \rightarrow \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \leq 0 \xrightarrow[x_j \gneq 0]{\lambda \geq 0} \lambda_1 x_1 = 0 \xrightarrow{x_1 \neq 0} \lambda_1 = 0$ $\Longrightarrow$

$\vdots$

$\lambda_n x_n = 0 \xrightarrow{x_n \neq 0} \lambda_n = 0$

$\lambda = 0$ ✗

(II) $0 < \theta^*$

فخ $\theta^* < 0$: $\sum \lambda_j x_j \leq \theta x_p$

$x_p \gneq 0 \rightarrow \exists t; x_{tp} > 0 \longrightarrow \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{tj}}^{\geq 0} \leq \overbrace{\theta x_{tp}}^{< 0}$ ✗

(III) $(\theta = 1, \lambda = e_p) \in S_{BCC-I} \longrightarrow \theta^* \leq 1 =$ تابع هدف θ

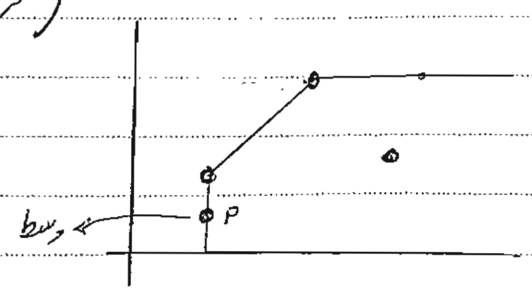
③ $\begin{pmatrix} \theta^* x_p \\ y_p \end{pmatrix} \in \partial T_V$

جلوتر اثبات می‌کنیم.

④ $\theta^* \neq \frac{1}{\varphi^*}$ (لزوماً رابطه $\theta^* = 1/\varphi^*$ برقرار نیست)

ماهیت ورودی

ماهیت خروجی



$\theta_p^* = 1$ ، $\varphi_p^* = 2$

نامیرشدنی BCC، تصویرش در قسمت (U,V) نامیرشدنی CCR است.

Subject : ۷۹

year. Month. Day.

(الف) در هر جواب بهین مدل مضربی BCC_I حداقل یکی از قیود نامساوی، ناقدالت.

$$\text{Min } \theta$$

$$\text{s.t. } \left(\sum \lambda_j x_j \leq \theta x_p\right) v$$

$$\left(\sum \lambda_j y_j \geq y_p\right) u \quad (1)$$

$$\left(\sum \lambda_j = 1\right) u_0$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{دوآل } BCC_I}$$

(۲)

$$\text{Max } u y_p + u_0$$

$$\text{s.t. } u y_j - v x_j + u_0 \leq 0$$

$$v x_p = 1$$

$$u, v \geq 0$$

برهان:

فرض کنید (u^*, v^*, u_0^*) یک جواب بهین مدل (۲) باشد. از طرفی بنابر قضیه مکمل زائد:

$$\forall \begin{pmatrix} \lambda^* \\ \theta^* \end{pmatrix}, \ \forall \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ u_0^* \end{pmatrix}, \quad \lambda_j^*(-u y_j + v x_j - u_0^*) = 0 \ (*) \quad j = 1, \dots, n$$

از طرفی چون $\lambda^* \neq 0$ است پس:

$$\exists t ; \lambda_t^* \neq 0 \xrightarrow{(*)} -u^* y_t + v^* x_t - u_0^* = 0$$

(۶) در هر جواب بهین مدل مضربی BCC-I داریم $(u^*, u_0^*) \neq 0$.

پاسخ: فرض کنید $(u^*, u_0^*) = 0$ پس $u^* = 0$ و $u_0^* = 0$ و لذا:

$$u^* y_p + u_0^* = 0 \longrightarrow \theta^* = 0 \ \times$$

(۷) در هر جواب بهین مدل پوششی BCC-I لااقل یک قید ورودی ناقدالت.

برهان: حداقل یکی از قیود ورودی ناقدالت ⟸ قید متناظر در حالت پوششی ناقد

$$v^* x_p = 1 \longrightarrow v^* \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Max } u y_p + u_0$$

$$\text{s.t. } u y_j - v x_j + u_0 \leq 0 \leftarrow \lambda_j$$

$$v x_p = 1 \leftarrow \theta$$

$$u \geq 1\varepsilon, \ v \geq 1\varepsilon$$

$$\uparrow s^+ \qquad \uparrow s^-$$

$$\xrightarrow{\text{دوآل}}$$

$$\text{Min } \theta - \varepsilon(1s^+ + 1s^-)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + s^- = \theta x_p$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - s^+ = y_p$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \ s^- \geq 0, \ s^+ \geq 0$$

Subject: ۷۰

year. Month. Day.

۸) فرض کنید (u^*, v^*, u_0^*) جواب بهینه دوگان مدل مضربی BCC در ماهیت ورودی باشد. ثابت کنید H بر T_V مماس (تکیه‌گاه) است.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; u^*y - v^*x + u_0^* = 0 \right\}$$

حل: تکیه‌گاه: $H \cap T_V \neq \emptyset$ (1)

$T_V \subseteq H^-$ (2)

(1) در هر جواب حداقل یک قید به تساوی برقرار است (برای یک واحد مضربی باشد) $\longrightarrow \exists t;\; u^*y_t - v^*x_t + u_0^* = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \in H$

طبق اصول شمول مشاهدات $\longrightarrow \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \in T$

$\Longrightarrow H \cap T_V \neq \emptyset$

(2) $\forall \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in T_V \xrightarrow{\exists \bar{\lambda} \geq 0} \begin{cases} \bar{x} \geq \sum \bar{\lambda}_j x_j \xrightarrow{\times -v^*} \\ \bar{y} \leq \sum \bar{\lambda}_j y_j \xrightarrow{\times u^*} \\ \sum \bar{\lambda}_j = 1 \end{cases}$

$\Longrightarrow u^*\bar{y} - v^*\bar{x} + u_0^* \leq u^* \sum \bar{\lambda}_j y_j - v^* \sum \bar{\lambda}_j x_j + u_0^*$ (I)

از طرفی: (u^*, v^*, u_0^*) جواب بهینه $\longrightarrow u^*y_1 - v^*x_1 + u_0^* \leq 0 \xrightarrow{\times \bar{\lambda}_1 \geq}$

$\vdots \Longrightarrow$

$u^*y_n - v^*x_n + u_0^* \leq 0 \xrightarrow{\times \bar{\lambda}_n \geq 0}$

$\sum_j u^*\bar{\lambda}_j y_j - \sum v^* \bar{\lambda}_j x_j + u_0^* \leq 0$ (II)

$I, II \rightarrow u^*\bar{y} - v^*\bar{x} + u_0^* \leq 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in H^- \longrightarrow T_V \subseteq H^-$

قضیه: DMU_p در مدل مضربی $BCC_0 - I$ کارای قوی است اگر و فقط اگر $\theta^* = 1$ و $s^{-*} = 0$، $s^{+*} = 0$

برهان: ف: DMU_p کارای قوی است.

ح: $\theta^* = 1, s^{-*} = 0, s^{+*} = 0$

بخ: فرض کنید

$\theta^* \neq 1 \quad \vee \quad (s^{-*}, s^{+*}) \neq 0$

Subject : ۷۱

year. Month. Day.

جایگذاری در مسئله

i) $\theta^* \neq 1 \longrightarrow \theta^* < 1 \longrightarrow \begin{cases} \sum \lambda_j^* x_j + \bar{s}^* = \theta^* x_p \rightarrow \sum \lambda_j^* x_j = \theta^* x_p - \bar{s}^* \leqslant \theta^* x_p \underset{\neq}{\leqslant} x_p \\ \sum \lambda_j^* y_j - \bar{s}^* = y_p \rightarrow \sum \lambda_j^* y_j = y_p + \overset{+}{s}^* \geqslant y_p \\ \sum \lambda_j^* = 1 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -\sum \lambda_j^* x_j \\ \sum \lambda_j^* y_j \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geqslant} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \quad \therefore \times$

ii) $(\bar{s}^*, \overset{+}{s}^*) \neq 0$

$\theta^* \leqslant 1 \longrightarrow \begin{cases} \sum \lambda_j^* x_j = \theta^* x_p - \bar{s}^* \leqslant x_p - \bar{s}^* \leqslant x_p \\ \sum \lambda_j^* y_j = y_p + \overset{+}{s}^* \geqslant y_p \end{cases}$

$\neq \longrightarrow (\bar{s}^*, \overset{+}{s}^*) \neq 0$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} -\sum \lambda_j^* x_j \\ \sum \lambda_j^* y_j \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geqslant} \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix} \quad \therefore \times$

برعکس، فرض کنید $\theta^* = 1, (\bar{s}^*, \overset{+}{s}^*) = 0$

ح: DMU_p کارا قوی است.

نخ: فرض کنید DMU_p کارا قوی نباشد بنابراین،

$\exists \bar{\lambda} \geqslant 0 ; \begin{pmatrix} -\sum \bar{\lambda}_j x_j \\ \sum \bar{\lambda}_j y_j \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geqslant} \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix}$

$\neq \Longrightarrow \exists t ; -\sum \bar{\lambda}_j x_{tj} > -x_{tp}$

$\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{ij} = x_{ip} \quad i = 1, \dots, m, i \neq t$

$\sum \bar{\lambda}_j y_{rj} = y_{rp} \quad r = 1, \dots, s \quad \Longrightarrow \begin{cases} \bar{\theta} = 1 \\ \bar{\lambda} \geqslant 0 \\ \bar{s}_t = x_{tp} - \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{tj} > 0 \\ \bar{s}_i = 0 \quad i = 1, \dots, m, i \neq t \\ s_r^+ = 0 \quad , r = 1, \dots, s \end{cases}$ یک جواب شدنی

$\sum \bar{\lambda}_j = 1$

تابع هدف به ازای جواب شدنی $= 1 - \varepsilon(\alpha) < 1$, $\alpha > 0$

$\therefore \times \longrightarrow \theta^* = 1, (\bar{s}^*, \overset{+}{s}^*) = 0$ با همین

NOURI نوری

Page:

قضیه: فرض کنید (λ^*,θ^*) و (u^*,v^*,u_0^*) به ترتیب جواب‌های بهین فرم پوششی و مضربی BCC-I باشند آنگاه:

$$B.M=\begin{pmatrix}\sum \lambda_j^* x_j\\ \sum \lambda_j^* y_j\end{pmatrix}\in H$$

برهان:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*\begin{pmatrix}x_j\\ y_j\end{pmatrix}=\sum_{j\in J_1}\lambda_j^*\begin{pmatrix}x_j\\ y_j\end{pmatrix}+\sum_{j\in J_2}\lambda_j^*\begin{pmatrix}x_j\\ y_j\end{pmatrix}$$

$$J_1=\{j\mid \lambda_j^*>0\},\quad J_2=\{j\mid \lambda_j^*=0\}$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*\begin{pmatrix}x_j\\ y_j\end{pmatrix}=\sum_{j\in J_1}\lambda_j^*\begin{pmatrix}x_j\\ y_j\end{pmatrix}$$

$$\forall j\in J_1 \longrightarrow \lambda_j^*>0 \xrightarrow{\text{طبق قضیه مکمل زائد}} u^* y_j - v^* x_j + u_0^* = 0 \longrightarrow$$

$$u^*\lambda_1^* y_1 - v^*\lambda_1^* x_1 + \lambda_1^* u_0^* = 0$$
$$\vdots$$
$$u^*\lambda_n^* y_n - v^*\lambda_n^* x_n + \lambda_n^* u_0^* = 0$$

$$\xrightarrow{\forall j\in J_1 \to \lambda_j^*>0} + \to u^*\Big(\sum_{j\in J_1}\lambda_j^* y_j\Big) - v^*\Big(\sum_{j\in J_1}\lambda_j^* x_j\Big) + u_0^* = 0$$

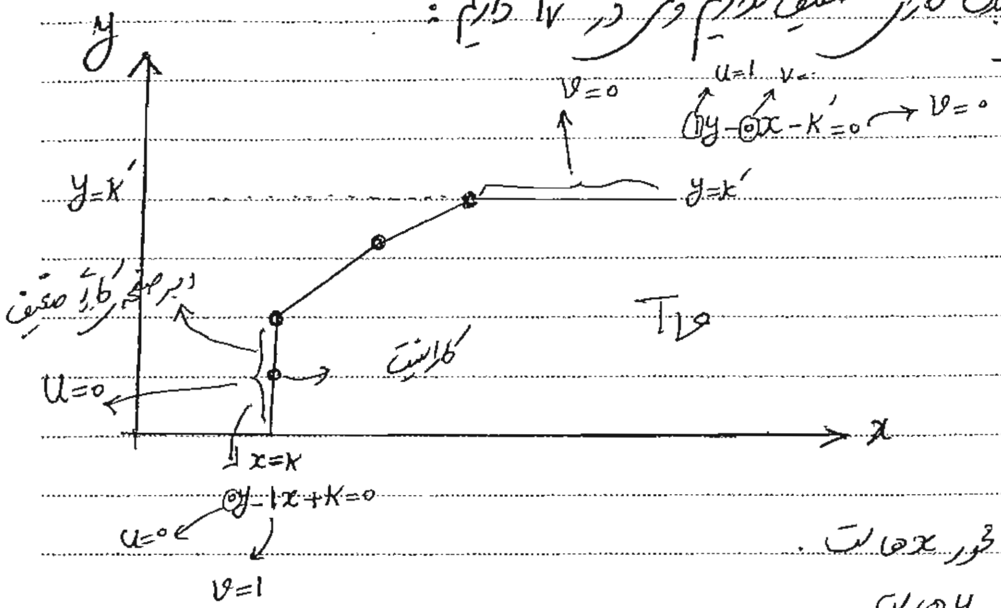
$$\longrightarrow \begin{pmatrix}\sum \lambda_j^* x_j\\ \sum \lambda_j^* y_j\end{pmatrix}\in H$$

Subject : ۷۲

year. Month. Day.

تفاوت‌های T_C و T_V :

۱) T_C در فضای دوبعدی کارایی ضعیف نداریم ولی در T_V داریم :



$v=0$ قید مساوی اگر موازی محور xها است.

$u=0$ قید مساوی اگر موازی محور yها است.

۲) T_C یک مخروط است ولی T_V نیست.

۳) T_C همواره شامل مبدأ می‌باشد ولی T_V از مبدأ عبور نمی‌کند.

۴) در T_C چون اصل بازده به مقیاس ثابت داریم cut می‌زنیم و لذا نامساوی داشتیم ولی در T_V می‌توانیم cut (برش) بزنیم ولی چون اصل بازده به مقیاس ثابت را نداریم دیگر نامساوی نداریم و این یعنی وزن آزاد برای BCC نداریم.

۵) در T : $U \neq 0 , V \neq 0$

ولی در T_V در ماهیت ورودی $(V X_p = 1)$ U^* می‌تواند صفر باشد (یعنی $V^* \neq 0$ خط افقی در شکل را داریم بوجود می‌آید)

ولی در T_V در ماهیت خروجی $(U Y_p = 1)$ V^* می‌تواند صفر باشد. ($U^* \neq 0$، خط عمودی در شکل را داریم بوجود می‌آید)

درحالیکه در T_C (CCR) هم $U^* \neq 0$ و هم $V^* \neq 0$.

تذکر: لذا از آنجایی که U و V توأماً صفر نمی‌شوند، لذا حتماً اثر ضعف را بدست می‌آوریم ($\begin{matrix} VX_p=1 \\ \text{یا} \\ UY_p=1 \end{matrix} \rightarrow$ توأماً صفر نمی‌شوند)

Subject : ۷۴

year. Month. Day.

در BCC چون در ماهیت ورودی $V \neq 0$ پس حداقل یکی از ورودی‌ها نافذ امکان دارد هیچ کدام از ورودی‌ها نافذ نباشد. و همین ترتیب BCC-O چون $U \neq 0$ پس حداقل یکی از قیود فوق‌ها نافذ و امکان دارد هیچ یک از ورودی‌ها نافذ نباشد.

Page:

قضیه: مجموعه مرجع غیر تهی است یعنی $E_p \neq \phi$.

برهان:

$$E_p = RS_p = \{ j \mid \lambda_j^* > 0 \text{ در یک جواب بهین حداقل} \}$$

$$\lambda \neq 0 \xrightarrow{\text{بخصوص}} \lambda^* \neq 0 \xrightarrow{\lambda_j^* \geq 0} \exists t;\ \lambda_t^* > 0 \longrightarrow t \in E_p \longrightarrow E_p \neq \phi$$

قضیه: در صورت پوششی BCC حداقل یکی از DMUهای مشاهده شده کارا می‌باشد.

برهان:

$$\lambda^* \neq 0 \longrightarrow \exists t;\ \lambda_t^* > 0 \longrightarrow u^* y_t - v^* x_t + u_0^* = 0$$

جواب بهین فرم پوششی BCC در ارزیابی DMU_p

ادعا: DMU_t کارا است.

مدل ارزیابی DMU_t در ماهیت ورودی مضربی:

$$\text{Max} \quad u y_t + u_0$$

$$\text{s.t.} \quad u y_j - v x_j + u_0 \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$v x_t = 1$$

$$u, v \geq 0$$

فرض کنید (u^*, v^*, u_0^*) جواب بهین مدل مضربی BCC در ارزیابی DMU_p باشد.

فرض $v^* x_p = 1$ $\quad \xrightarrow{v^* x_t = \alpha > 0} \left(\frac{v^*}{\alpha}\right) x_t = 1 \checkmark$ (*)

$$\forall j,\ u^* y_j - v^* x_j + u_0^* \leq 0 \xrightarrow{\alpha > 0} \left(\frac{u^*}{\alpha}\right) y_j - \left(\frac{v^*}{\alpha}\right) x_j + \left(\frac{u_0^*}{\alpha}\right) \leq 0 \checkmark$$

$$u^* \geq 0,\ v^* \geq 0 \longrightarrow \frac{u^*}{\alpha} \geq 0,\ \frac{v^*}{\alpha} \geq 0$$

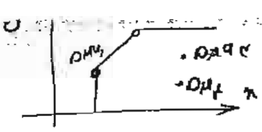
بنابراین $\left(\frac{u^*}{\alpha}, \frac{v^*}{\alpha}, \frac{u_0^*}{\alpha}\right)$ جواب شدنی مدل (1) می‌باشد،

$$\text{تابع هدف مدل (1) به ازای جواب شدنی جدید} = \left(\frac{u^*}{\alpha}\right) y_t + \left(\frac{u_0^*}{\alpha}\right) = \left(\frac{v^*}{\alpha}\right) x_t \overset{(*)}{=} 1$$

بنابراین DMU_t کارا است.

بدین ترتیب ثابت کردیم مدل BCC-I مضربی کارایی نسبی را ارائه می‌دهد.

DMU2 کمترین ورودی در ورودی دیگر دارد
DMU1 کمترین



Subject : ۷۶

year. Month. Day.

قضیه: یک DMU در ورودی (خروجی) kام کمترین (بیشترین) مقدار در مقایسه با DMU های دیگر داشته باشد، در صورت پوششی BCC در ماهیت ورودی (خروجی) کارا است.

برهان: بدون اینکه در کلیت استدلال خللی وارد شود، فرض کنید برای DMU1 در ورودی اول کمترین مقدار در مقایسه با ورودی اول بقیه DMU ها باشد یعنی:

$x_{11} < x_{1j}$; $j = 2, \dots, n$ (ورودی اول DMU1 کمتر از ورودی اول بقیه باشد)

فرض کنید $\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j = 1$ ، $\bar{\lambda}_j \geq 0$. با ضرب رابطه‌های فوق در $\bar{\lambda}_j$ ها داریم:

$$x_{11} \leq x_{11} \xrightarrow{\times \bar{\lambda}_1 \geq 0}$$
$$x_{11} < x_{12} \xrightarrow{\times \bar{\lambda}_2 \geq 0}$$
$$x_{11} < x_{13} \xrightarrow{\times \bar{\lambda}_3 \geq 0}$$
$$\vdots$$
$$x_{11} < x_{1n} \xrightarrow{\bar{\lambda}_n \geq 0}$$

$$+ \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{11} \leq \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{1j} \rightarrow x_{11} \leq \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{1j} \quad \text{(I)}$$

مدل پوششی BCC-I برای ارزیابی DMU1 را در نظر بگیرید:

$$\text{Min} \quad \theta$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i1} \quad , \quad i = 1, \dots, m \qquad (*)$$
$$\sum \lambda_j x_{rj} \geq y_{r1} \quad , \quad r = 1, \dots, s$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \quad , \quad \lambda \geq 0$$

فرض کنید

(I) و (*) بنا به قید: $x_{11} \leq \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{1j} \leq \bar{\theta} x_{11} \longrightarrow x_{11} \leq \bar{\theta} x_{11}$

$x_{11} = 0 \rightarrow \theta \in \mathbb{R}$

$x_{11} > 0 \rightarrow \bar{\theta} \geq 1$

$\Longrightarrow \bar{\theta} \geq 1$

پس $\theta^* \geq 1$

از آنجایی که $\bar{\theta} \geq 1$ لذا جواب بهینه مسئله $\bar{\theta} = 1$، $\bar{\lambda}_1 = 1$ و $\bar{\lambda}_j = 0$ ($j \neq 1$) می‌باشد. (زیرا به ازای هر λ, θ دلخواه که $1\lambda = 1$ می‌باشد، $\theta \geq 1$ حاصل می‌شود و چون مسئله Min θ می‌باشد لذا جواب بهینه مسئله $\bar{\theta} = 1$ می‌باشد)

Page:

Subject : ۷۴

year. Month. Day.

برهان ماهیت خروجی:

فرض کنید DMU_1 در خروجی اول، بیشترین مقدار را در بین خروجی اول سایر DMUها داشته باشد یعنی:

$$y_{11} > y_{1j} \quad j=2,\dots,n \longrightarrow \begin{array}{l} y_{11} \geq y_{11} \xrightarrow{\lambda_1 \geq} \\ y_{11} > y_{12} \xrightarrow{\alpha\lambda_2 \geq} \\ \vdots \\ y_{1n} > y_{1n} \xrightarrow{\alpha\lambda_n \geq} \end{array} \Big\downarrow + \quad ; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\longrightarrow y_{11}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{1j} \longrightarrow y_{11} \geq \sum \lambda_j y_{1j} \quad \text{II}$$

مدل خروجی BCC-O برای ارزیابی DMU_1 را در نظر می‌گیریم:

$$\text{Max} \quad \varphi$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{i1} \quad ; i=1,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi y_{r1} \quad , r=1,\dots,s \qquad (**)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \quad , \lambda \geq 0$$

$$\text{II} , (**) \text{ از } \longrightarrow \varphi y_{11} \leq \sum \lambda_j y_{1j} \leq y_{11} \rightarrow \varphi y_{11} \leq y_{11}.$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \text{if } y_{11}=0 \rightarrow \varphi \in \mathbb{R} \\ \text{if } y_{11} > 0 \rightarrow \varphi \leq 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{c} \varphi \leq 1 \\ \varphi^* \geq 1 \end{array} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \varphi^* = 1$$

بنابراین چون $1 \geq \varphi^*$ می‌باشد لذا $\varphi^* = 1$ و $\lambda_1^* = 1, \lambda_j^* = 0 \; (j \neq 1)$ جواب بهینه مسئله فوق می‌باشد و این یعنی DMU_1 کارا است.

Subject : VV

year. Month. Day.

قضیه : مدل CCR در ماهیت خروجی و بدون ورودی بی معنی است .

برهان : مدل CCR مورد نظر به صورت ذیل می باشد :

$$\text{Max} \quad \varphi$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq \varphi y_p \qquad (I)$$

$$\lambda \geq 0$$

روش اول :

واضح است که $\lambda = e_p$ ، $\varphi = 1$ جواب شدنی مسئله (I) می باشد به علاوه

$$\begin{cases} \lambda_p = K , \quad \lambda_j = 0 , \; j = 1, \dots, n , \; j \neq p \\ \end{cases}$$

به ازای $K \geq \varphi$ جواب شدنی (I) می باشد زیرا :

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_p y_p + \dots + \lambda_n y_n \overset{?}{\geq} \varphi y_p \xrightarrow[\lambda_j = 0,\ j \neq p]{\lambda_p = K} \lambda_p y_p \overset{?}{\geq} \varphi y_p$$

$$\xrightarrow{K \geq 0} K y_p \geq \varphi y_p \Longrightarrow \text{به ازای } K \geq \varphi \xrightarrow{(\text{چرا؟})} \text{ یک جواب شدنی مسئله } \begin{cases} \lambda_p = K \\ \lambda_j = 0 , \; j \neq p \end{cases}$$

و این بدین معنی است که وقتی $K \to +\infty$ ، مقدار بهینه φ که آن را به φ^* نشان می دهیم به سمت $+\infty$ میل می کند.

$$\varphi \leq K \longrightarrow \max \varphi = K \xrightarrow{K \to +\infty} \varphi^* = \max \varphi \longrightarrow +\infty$$

(چرا؟) :

$$K y_p \geq \varphi y_p \longrightarrow K y_{1p} \geq \varphi y_{1p}$$

$$\vdots$$

$$K y_{sp} \geq \varphi y_{sp}$$

$$\text{if } y_{ip} > 0 \longrightarrow \varphi \leq K \qquad \longrightarrow \quad \varphi \leq K$$

$$\text{if } y_{ip} = 0 \longrightarrow \varphi \in \mathbb{R}$$

وقتی $\varphi^* \to +\infty$ یعنی واحد تحت ارزیابی بی نهایت ناکارا می باشد. توجه داشته باشید که فرض بر این بوده

$$y_j \geq 0 , \; y_j \neq 0 , \; j = 1, \dots, n$$

Page:

روش دوم: مدل (I) را می‌توان بدین صورت در نظر گرفت:

$$\text{Max } \varphi \qquad\qquad \text{Min } 0u^t$$

$$\text{s.t. } \varphi y_p - \sum \lambda_j y_j \leq 0 \quad \xrightarrow{\text{دوآل مسئله } I} \quad u^t y_p = 1$$

$$\lambda \geq 0 \qquad\qquad -u^t y_j \geq 0 \quad j=1,\dots,n \text{ هر}$$

$$u \geq 0$$

واضح است که دوآل مسئله I نشدنی می‌باشد زیرا:

فرض خلف: فرض کنید دوآل دارای جواب $\bar{u}$ باشد که در قیدها صدق کند. داریم،

$$-\bar{u}^t y_p = -1$$

$$\Longrightarrow -1 \geq 0$$

$$-\bar{u}^t y_p \geq 0 \quad (p \in \{1,\dots,n\})$$

چون $0 \geq -1$ است لذا $0 = 1-$ که تناقض است

لذا از این رو مدل CCR در ماهیت خروجی و بدون ورودی بی‌معنی می‌باشد.

قضیه: مدل CCR در ماهیت ورودی و بدون خروجی بی‌معنی است.

برهان: مدل مورد نظر این چنین خواهد بود:

$$\text{Min } \theta$$

$$\text{s.t. } \theta x_p - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \geq 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1,\dots,n \text{ هر}$$

واضح است که $\theta < 0$ نمی‌تواند جواب شدنی مدل (II) باشد زیرا:

فرض خلف: $\theta < 0$

$$x_p \gneq 0 \longrightarrow \exists t;\, x_{tp} > 0 \xrightarrow{\text{قید ام}t} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{tj}}_{\geq 0} \leq \overbrace{\theta x_{tp}}^{<0} \quad \lambda \geq 0 \quad \times$$

$(\theta^* = 0, \lambda^* = 0)$ یک جواب بهینه مسئله (II): $0 - 0 = 0 \geq 0 \checkmark$

Subject : ۷۹
year. Month. Day.

بنابراین همواره $\theta \geq 0$ می‌باشد. و این یعنی $\theta^* = 0$ و لذا کارایی واحد تحت ارزیابی صفر می‌باشد پس مطلقاً ناکارا می‌باشد.

تفسیر اقتصادی: اگر ورودی مصرف شود و خروجی حاصل نگردد، بایستی کارایی آن صفر باشد، این امر منطبق بر واقعیت است.

قضیه: مدل CCR در ماهیت خروجی با یک ورودی ثابت معادل یک مدل BCC در ماهیت خروجی بدون ورودی می‌باشد.

برهان: مدل مورد نظر این چنین خواهد بود:

$$\text{Max } \varphi$$
$$\text{s.t. } \sum_j \lambda_j a \leq a$$
$$\sum_j \lambda_j y_j \geq \varphi y_p$$
$$\lambda \geq 0$$

صورت ماتریسی مدل فوق چنین خواهد بود:

$$\text{Max } \varphi$$
$$\text{s.t. } 1\lambda \leq 1$$
$$Y\lambda \geq \varphi Y_p$$
$$\lambda \geq 0$$

ثابت می‌کنیم اگر (λ^*, φ^*) جواب بهینه مدل فوق باشد، داریم:

$$1\lambda^* = 1$$

نفی: فرض کنید $1\lambda^* \neq 1$. پس $1\lambda^* < 1$. قرار می‌دهیم:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda^*}{1\lambda^*}$$

$$\longrightarrow 1\bar{\lambda} = 1$$

Page:

Subject : ۸۰

year. Month. Day.

$1\lambda^* < 1$

$$Y\bar{\lambda} = Y\left(\frac{\lambda^*}{1\lambda^*}\right) = \frac{Y\lambda^*}{1\lambda^*} \geq \frac{\varphi^* y_p}{1\lambda^*} = \left(\frac{\varphi^*}{1\lambda^*}\right) y_p > \varphi^* y_p$$

$$\longrightarrow \bar{\varphi} = \frac{\varphi^*}{1\lambda^*} > \varphi^* \longrightarrow \bar{\varphi} > \varphi^* \quad \times \longrightarrow$$ تناقض با بهینگی φ^*.

($\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$) جواب شدنی مدل

یعنی $1\lambda^* = 1$ بنابراین بدون هیچ مشکلی $1\lambda \leq 1$ جایگزین $1\lambda = 1$ می‌شود و الزاماً به تبدیل مدل زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \varphi \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j \lambda_j y_j \geq \varphi y_p \\ & \sum_j \lambda_j = 1 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

که یک مدل BCC-O بدون ورودی می‌باشد.

قضیه: مدل CCR در ماهیت ورودی با یک خروجی ثابت معادل با مدل BCC در ماهیت ورودی بدون خروجی است.

برهان: مدل مورد نظر این چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j \lambda_j x_j \leq \theta x_p \\ & \sum_j \lambda_j b \geq b \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad \xRightarrow{\text{صورت ماتریسی}} \quad \begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & X\lambda \leq \theta x_p \\ & 1\lambda \geq 1 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

ثابت می‌کنیم اگر (θ^*, λ^*) جواب بهینه مدل فوق باشد داریم $1\lambda^* = 1$.

برهان خلف: فرض کنید $1\lambda^* \neq 1$ یعنی $1\lambda^* > 1$. قرار می‌دهیم:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda^*}{1\lambda^*} \longrightarrow 1\bar{\lambda} = 1$$

$$X\bar{\lambda} = \frac{X\lambda^*}{1\lambda^*} \leq \frac{\theta^* x_p}{1\lambda^*} = \left(\frac{\theta^*}{1\lambda^*}\right) x_p < \theta^* x_p \longrightarrow \left(\frac{\theta^*}{1\lambda^*}, \bar{\lambda}\right) \in S$$ جواب شدنی

$$\bar{\theta} = \frac{\theta^*}{1\lambda^*} \longrightarrow \bar{\theta} = \frac{\theta^*}{1\lambda^*} < \theta^* \longrightarrow \bar{\theta} < \theta^* \quad \times \longrightarrow$$ تناقض با بهینگی θ^*

Page:

بنابراین مدل فوق را می‌توان بدین صورت نوشت :

$$\begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &\text{s.t. } X\lambda \leq \theta x_p \\ &\quad 1\lambda = 1 \\ &\quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

/ مدل BCC-I بدون خروجی می‌باشد.

قضیه: یک مدل BCC با ماهیت خروجی (یا ماهیت ورودی) با یک ورودی (یا یک خروجی) ثابت معادل یک مدل BCC با ماهیت خروجی (یا ماهیت ورودی) بدون ورودی (بدون خروجی) می‌باشد.

برهان: مدل مورد نظر این چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned} &\text{Max } \varphi \\ &\text{s.t. } \sum_j \lambda_j a \leq a \\ &\quad \sum \lambda_j y_j \geq \varphi y_p \\ &\quad \sum \lambda_j = 1 \\ &\quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad \xRightarrow{\text{صورت ماتریسی}} \quad \begin{aligned} &\text{Max } \varphi \\ &\text{s.t. } 1\lambda \leq 1 \\ &\quad Y\lambda \geq \varphi y_p \\ &\quad 1\lambda = 1 \\ &\quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} &\text{Max } \varphi \\ &\text{s.t. } Y\lambda \geq \varphi y_p \\ &\quad 1\lambda = 1 \\ &\quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

و این همان مدل BCC با ماهیت خروجی بدون ورودی می‌باشد.

$L_1(x)=\sum_{i=1}^{m}|x_i|$; $x\in\mathbb{R}^m$ $L_p(x)=\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|^p\right)^{1/p}$

دسته دومی از مدل ها:

$$\text{Max} \quad \left\| \begin{pmatrix} \sum \lambda_j x_j \\ \sum \lambda_j y_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \right\|_p \rightarrow \text{نرم } p$$

s.t.

$$\sum \lambda_j x_j \leq x_p$$

$$\sum \lambda_j y_j \geq y_p$$

مثلا ت ۲ ت ۳ ... $\lambda\in\Lambda$

if $p=1$

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{m}\underbrace{\left|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}-x_{ip}\right|}_{-s_i^-}+\sum_{r=1}^{s}\underbrace{\left|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-y_{rp}\right|}_{s_r^+}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ip} \quad , i=1,\dots,m$$

$$\sum_j \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp} \quad , r=1,\dots,s$$

$$\lambda\geq 0 \;,\; s^-\geq 0 \;,\; s^+\geq 0 \longrightarrow$$ چون خواستیم تا دوآل بنویسیم

$$\Rightarrow \theta^*=\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{m}s_i^- + \sum_{r=1}^{s}s_r^+$$

مدل Additive (جمع پذیری)

$$\text{s.t.} \quad \left(\sum \lambda_j x_j + s_i^- = x_{ip}\right) v_i, \quad i=1,\dots,m$$

$$\left(\sum \lambda_j y_j - s_r^+ = y_{rp}\right) u_r, \quad r=1,\dots,s \qquad 0\leq\theta^*<\infty$$

$$\lambda\geq 0, \; s^-\geq 0, \; s^+\geq 0$$

اگر $\theta^*=0$ باشد، کارا است در غیر این صورت ناکارا می باشد.

اگر جایی خواستیم کارا و ناکارا را تشخیص دهیم این مدل بکار می رود.

دوآل مدل جمعی:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m}v_i x_{ip}-\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp} \quad = \quad \text{Max} \quad uY_p - vX_p$$

تفاضل

$$\text{s.t.} \quad \sum v_i x_{ij} - \sum u_r y_{rj} \geq 0 \;,\; \forall j$$

$$v_i\geq 1 \;,\; i=1,\dots,m$$

$$u_r\geq 1 \;,\; r=1,\dots,s$$

بهمین دلیل این مدل کارایی را مستقیم نمی دهد.

دقت: بدون ε با این قاز مشخص می کند DMU کارا است یا نه. مشکل روش

این است که کارایی را نمی دهد (اگر ناکارا است عدد در صورت ناکارا است

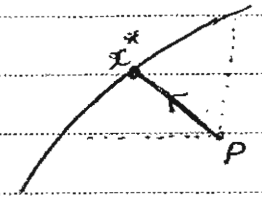
بهمین دلیل خوب نیست)

Subject : ۸۵

year. Month. Day.

مدل Additive غیرشعاعی است:

مسیر search در Additive ۴ جهت بهبود دهنده است.



$$\text{مجموعه مسیر حرکت در ماهیت ورودی} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T \;\middle|\; \begin{array}{l} x = \lambda x_p \\ y = y_p \end{array} \;;\; \theta^* \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

معادله اخیر یک متغیر دارد، پس معادله خط است

$$\text{مجموعه مسیر حرکت در ماهیت خروجی} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T \;\middle|\; \begin{array}{l} x = x_p \\ y = \lambda y_p \end{array} \;;\; 1 \leq \lambda \leq \varphi^* \right\}$$

$$\text{مجموعه مسیر حرکت در ماهیت ترکیبی} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T \;\middle|\; \begin{array}{l} x = (1-\lambda) x_p \\ y = (1+\lambda) y_p \end{array} \;;\; 0 \leq \lambda \leq \theta^* \right\}$$

$$\text{Additive مجموعه مسیر حرکت} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} \in T \;\middle|\; \begin{array}{ll} x_1 = x_{1p} - \alpha_1 , & y_1 = y_{1p} + \beta_1 \\ x_2 = x_{2p} - \alpha_2 & y_2 = y_{2p} + \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_m = x_{mp} - \alpha_m & y_s = y_{sp} + \beta_s \\ 0 \leq \alpha_i \leq s_i^{-*} , \; i = 1, \dots, m & \\ 0 \leq \beta_r \leq s_r^{+*} , \; r = 1, \dots, s & \end{array} \right\}$$

مسیر حرکت غیرشعاعی است. زیرا $\dim(\;) = m+s$.

Subject: ۸۴

year. Month. Day.

رفع مشکل یا ضعف Additive :

حسن Additive در این است که هر DMU را مستقل می‌داند (بخاطر slack یا بخاطر غیر شعاعی بودن) ایرادی
اینکه مانند ماهیت‌های قبلی این طور نیست:

$$\begin{pmatrix}\theta x_p \\ y_p\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_p \\ \varphi y_p\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(1-\theta)x_p \\ (1+\theta)y_p\end{pmatrix}$$

در واقع در Additive این طور بود:

$$\begin{pmatrix}x_p - s^- \\ y_p + s^+\end{pmatrix}$$

مستقل کردن تک‌تک شاخص‌ها از همدیگر:

روش اول:

$$\begin{pmatrix}x_{1p} \\ \vdots \\ x_{mp} \\ y_{1p} \\ \vdots \\ y_{sp}\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{بهتر باشد}]{\text{برداشتی از } DMU_p} \begin{pmatrix}x_{1p} - s_1^- \\ \vdots \\ x_{mp} - s_m^- \\ y_{1p} + s_1^+ \\ \vdots \\ y_{sp} + s_s^+\end{pmatrix}$$

روش دوم:

برداشتی از DMU_p بهتر باشد

$$\left.\begin{pmatrix}\theta_1 x_{1p} \\ \vdots \\ \theta_m x_{mp} \\ \varphi_1 y_{1p} \\ \vdots \\ \varphi_s y_{sp}\end{pmatrix} \begin{matrix}\leq x_{1p} \\ \vdots \\ \leq x_{mp} \\ \geq y_{1p} \\ \vdots \\ \geq y_{sp}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\forall i,\ \theta_i \leq 1 \\ \\ \forall r,\ \varphi_r \geq 1\end{matrix}$$

$$\text{Min}\ \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$$

$$\text{Max}\ \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s\}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix}\theta_1 x_{1p} \\ \vdots \\ \theta_m x_{mp} \\ \varphi_1 y_{1p} \\ \vdots \\ \varphi_s y_{sp}\end{pmatrix} \in T$$

$$\theta_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\varphi_r \geq 1, \quad r = 1, \dots, s.$$

Subject: 85

year. Month. Day.

ساده‌ترین روش حل MOLP، وزن دار کردن آنهاست. (با نسبت به بقیه آنها که هدف می‌گیریم)

$$\text{Min} \quad Z=\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \theta_i - \sum_{r=1}^{s} \beta_r \varphi_r$$

پیشنهاد دکتر جهانشاهلو $\alpha>0$ ، $\beta>0$

st. { }

مدل غیرخطی نیست ولی DMUها را نشان نمی‌دهد و Z هر مقداری می‌تواند باشد (منفی، مثبت یا صفر)

اولین بار پیشنهاد دکتر برای رفع این مشکل این بود:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \theta_i + \sum_{r=1}^{s} \frac{\beta_r}{\varphi_r}$$

مشتقات را دارد $\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial \theta}>0 \\ \frac{\partial e}{\partial \varphi}>0 \end{cases}$

مشکل: ۱) غیرخطی است
۲) کارایی را نشان نمی‌دهد

پیشنهاد دو شخص به نام پاستور:

$$\text{Min} \ \rho_P=\frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \theta_i}{\sum_{r=1}^{s} \beta_r \varphi_r}$$

پاستور

مدل دیگر غیرخطی نیست ولی مشکل کارایی را دارد زیرا:

$$\text{if} \begin{cases} \theta_i=1 \\ \varphi_r=1 \end{cases} \longrightarrow \rho=\frac{\sum \alpha_i}{\sum \beta_r} \overset{\text{مثلاً}}{=} \frac{10}{5}=2$$

برای اینکه مشکل کارایی نیز حل شود مدل زیر ارائه شد:

$$\text{Min} \quad \rho_P=\frac{\frac{1}{\sum \alpha_i}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \theta_i}{\frac{1}{\sum \beta_r}\sum_{r=1}^{s} \beta_r \varphi_r} \in (0,1]$$

تذکر:

$$RE_p=\frac{\text{عملکرد فعلی}}{\text{عملکرد بهینه}}=\frac{\frac{y_p}{x_p}}{\frac{\varphi^* y_p}{\theta^* x_p}}=\frac{\theta^*}{\varphi^*}$$

کارایی نسبی به صورت $\frac{\theta^*}{\varphi^*}$ است.

Subject : ۸۹
year. Month. Day.

اگر فرض کنیم $T=T_e$ پس:

$$\text{Min } \rho = \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\theta_i}{\frac{1}{\sum \beta_r}\sum_{r=1}^{s}\beta_r\varphi_r}$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \leqslant \theta_i x_{ip} \quad , \; i=1,\dots,m, \qquad (*)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} \geqslant \varphi_r y_{rp} \quad , \; r=1,\dots,s.$$

$$\theta_i \leqslant 1 \;, \forall i$$

$$\varphi_r \geqslant 1 \;, \forall r$$

ادعا: تابع فوق تابع کارایی است پس باید ثابت کنیم:

1) $\rho \in (0,1]$

$$\forall i,\; \theta_i \leqslant 1 \xrightarrow{\times\alpha_i \geqslant} \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\theta_i \leqslant \sum_{i=1}^{m}\alpha_i$$

$$\forall r,\; \varphi_r \geqslant 1 \xrightarrow{\times\beta_r \geqslant} \sum_{r=1}^{s}\beta_r\varphi_r \geqslant \sum_{r=1}^{s}\beta_r$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}\cdot\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\theta_i \leqslant 1 \\ \frac{1}{\frac{1}{\sum_{r=1}^{s}\beta_r}\cdot\sum_{r=1}^{s}\beta_r\varphi_r} \leqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\rho \leqslant 1$

از طرفی θ_i نمی‌تواند صفر باشد چون با توجه به قید (*) این امکان پذیر نیست پس $0 < \theta_i \leqslant 1$ ، $\forall i$ و لذا

if $\theta_i = 0$ $i=1,\dots,m$ $\Downarrow$ $\lambda=0$ ✗ $y_p<0$

$0 < \rho \leqslant 1$

2) $\forall i,\; \frac{\partial \rho}{\partial x_i} < 0 \quad , \quad \forall r,\; \frac{\partial \rho}{\partial y_r} > 0$

در واقع می‌خواهیم ثابت کنیم ρ نسبت به ورودی‌ها اکیداً نزولی و نسبت به خروجی‌ها اکیداً صعودی است

Page:

Subject : ۸۷

year. Month. Day.

فرض کنید در ارزیابی DMU_p جواب بهینه $(\lambda^*, \theta_1^*, \dots, \theta_m^*, \varphi_1^*, \dots, \varphi_s^*)$ باشد. در این صورت:

$$\sum_j \lambda_j^* x_{ij} = \theta_i^* x_{ip} \quad , i = 1, \dots, m$$

$$\sum_j \lambda_j^* y_{rj} = \varphi_r^* y_{rp} \quad , r = 1, \dots, s$$

حال فرض کنید یکی از ورودی‌های DMU_p را به اندازه ثابت Δ افزایش داده‌ایم. بدون اینکه در کلیت استدلال خللی وارد شود فرض کنید ورودی اول DMU_p را به اندازه Δ افزایش داده‌ایم:

$$x_{1p} \longrightarrow x_{1p} + \Delta \quad (\Delta > 0)$$

قید اول ورودی‌ها در DMU_p جدید می‌شود:

فرض کردیم $\lambda = \lambda^*$ جدید

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{1j} \leq \theta_1 (x_{1p} + \Delta)$$

فرض کنید:

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\sum_{j \neq p} \lambda_j^* x_{1j} + \lambda_p^* (x_{1p} + \Delta)}{x_{1p} + \Delta}$$

از طرفی همواره $\lambda_p^* \leq 1$ (DMU_p تحت ارزیابی است) زیرا:

فرض: $\lambda_p^* > 1$: $\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij} \leq \theta_i^* x_{ip} \rightarrow \sum_{j \neq p} \lambda_j^* x_{ij} + \lambda_p^* x_{ip} \leq \theta_i^* x_{ip}$

$$\longrightarrow \sum_{j \neq p} \lambda_j^* x_{ij} \leq \theta_i^* x_{ip} - \lambda_p^* x_{ip} \leq x_{ip}(1 - \lambda_p^*) < 0 \quad \text{تناقض}$$

بنابراین:

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\sum_{j \neq p} \lambda_j^* x_{1j} + \lambda_p^* (x_{1p} + \Delta)}{x_{1p} + \Delta} < \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{1j}}{x_{1p}} = \theta_1^*$$

بنابراین با تعریف $\bar{\theta}_i = \theta_i^*$، $i = 2, \dots, m$، جواب $(\lambda^*, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_m, \varphi_1^*, \dots, \varphi_s^*)$ یک جواب شدنی برای مسئله ارزیابی جدید می‌باشد و داریم:

$$\frac{\frac{1}{\sum \alpha_i} \sum \alpha_i \bar{\theta}_i}{\frac{1}{\sum \beta_r} \sum \beta_r \varphi_r^*} < \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i} \sum_i \alpha_i \theta_i^*}{\frac{1}{\sum_r \beta_r} \sum_r \beta_r \varphi_r^*} \Rightarrow$$

یعنی مسئله نسبت به ورودی‌ها اکیداً نزولی است.

Subject : M

year. Month. Day.

نتیجه: DMU_p کارای قوی است اگر و فقط اگر $\rho^*=1$ (راسل اصلاح شده)

برهان: ف: DMU_p کارای قوی است

ح: $\rho^*=1$

راسل اصلاح شده

$$\rho^* = \operatorname{Min} \quad \rho = \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i} \sum_i \alpha_i \theta_i}{\frac{1}{\sum_r \beta_r} \sum_r \beta_r \varphi_r}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum \lambda_j x_{ij} \leqslant \theta_i x_{ip} \qquad i=1,\dots,m$$

$$\sum \lambda_j y_{rj} \geqslant \varphi_r y_{rp} \qquad r=1,\dots,s$$

$$\theta_i \leqslant 1 \qquad , i=1,\dots,m$$

$$\varphi_r \geqslant 1 \qquad , r=1,\dots,s$$

$$\lambda \geqslant 0$$

برهان خلف: فرض کنید $\rho^* \neq 1$. از آنجایی که $\rho^* \leqslant 1$ پس $\rho^* < 1$. از طرفی

$$\rho^* = \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i} \sum \alpha_i \theta_i^* \;\; \leqslant 1}{\frac{1}{\sum \beta_r} \sum \beta_i \varphi_r^* \;\; \geqslant 1} < 1 \Longrightarrow \underset{①}{\frac{1}{\sum \alpha_i} \sum \alpha_i \theta_i^* < 1} \;\vee\; \underset{②}{\frac{1}{\sum_{r=1} \beta_r} \sum_{r=1}^{s} \beta_r \varphi_r^* > 1}$$

فرض کنید ① برقرار باشد. بدون آنکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض کنید

$$\exists i ;\ \theta_i^* < 1 \xrightarrow[\;i=1\;]{\text{مثلاً}} \theta_1^* < 1$$

$$\text{T}\ \ni \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{1j} \leqslant \theta_1^* x_{1p} < x_{1p}$$

$$\sum_j \lambda_j^* x_{ij} \leqslant \theta_i^* x_{ip} \quad , i=2,\dots,m \quad \leqslant x_{ip}$$

$$* \quad \sum_j \lambda_j^* y_{rj} \geqslant \varphi_r^* y_{rp} \geqslant y_{rp}$$

بنابراین نقطه‌ای مثل (*) پیدا شد که DMU_p را Dominate کرد، پس DMU_p کارای قوی نیست. $\times$ با فرض

Page:

Subject: ۸۹

year. Month. Day.

ف: $\rho^* = 1$

DMU_p کارای قوی است.

برهان خلف: فرض کنید DMU_p کارای قوی نباشد پس وجود دارد DMU مانند $(\bar{x},\bar{y}) \in T$ بطوری که بر آن غلبه کند یعنی:

$$\begin{pmatrix} -\bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geqslant} \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \exists \bar{\lambda} \geqslant 0 ; \begin{pmatrix} -\sum \bar{\lambda}_j x_j \\ \sum \bar{\lambda}_j y_j \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geqslant} \begin{pmatrix} -x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$\neq : \Longrightarrow \exists t ; \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{tj} < x_{tp} \quad \vee \quad \exists q ; \sum_j \bar{\lambda}_j y_{qj} > y_{qp}$$

بدون از دست دادن کلیت استدلال فرض کنید:

$$\exists t ; \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{tj} < x_{tp}$$

تعریف می‌کنیم: $\theta_t = \dfrac{\sum \bar{\lambda}_j x_{tj}}{x_{tp}} < 1$

توجه داشته باشید که $x_{tp} \neq 0$ زیرا:

خ: $x_{tp} = 0 \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{tj} < 0$ ✗

با قرار دادن $\bar{\theta}_i = 1 \;\; i=1,\dots,m \;\; i \neq t$ ، $\bar{\theta}_t = \dfrac{\sum \bar{\lambda}_j x_{tj}}{x_{tp}}$ ، $\bar{\varphi}_r = 1, \dots$. در این صورت

$(\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_m, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_s, \bar{\lambda})$ یک جواب شدنی مدل است و داریم:

$$\text{مقدار تابع هدف به ازای جواب شدنی جدید} = \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i} \sum \alpha_i \bar{\theta}_i}{\frac{1}{\sum \beta_r} \sum \beta_r \bar{\varphi}_r} = \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i}\left(\alpha_t \frac{\sum \bar{\lambda}_j x_{tj}}{x_{tp}}\right)}{1} = \theta_t < 1$$

تابع هدف یعنی

$\Rightarrow \rho^* < 1$ ✗ و این یک تناقض با بهینگی ρ^* باشد،

Page:

Subject : ۹۰

year. Month. Day.

قضیه: $\rho_{\text{راسل اصلاح شده}} \le \theta_{CCR\text{-}I}$

برهان: مدل CCR-I زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{ip} \quad , \ i=1,\dots,m$$

$$\sum \lambda_j y_{rj} \ge y_{rp} \quad r=1,\dots,s$$

$$\lambda \ge 0$$

فرض کنید (θ^*, λ^*) جواب بهینه مدل فوق باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\theta}_i = \theta^*, \ \forall i \quad , \quad \bar{\varphi}_r = 1 \ \ \forall r$$

در این صورت $(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_s, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_m, \lambda^*)$ یک جواب شدنی راسل اصلاح شده می‌باشد، داریم:

مقدار بهینه هدف راسل: $$\rho^*_{(x_p,y_p)} \le \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i}\sum \alpha_i \bar{\theta}_i}{\frac{1}{\sum \beta_r}\sum \beta_r \bar{\varphi}_r} = \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i}\sum \alpha_i \theta^*}{1} = \theta^* \Rightarrow \rho^* \le \theta^*$$

پیش فرض:

$\text{if } \exists t;\ x_{tp}=0 \longrightarrow$ θ_t از مدل حذف می‌شود (هر جا θ داریم x متناظرش ضرب است)

زیرا دیگر نمی‌توانیم x_{tp} را کم کنیم (Min مقدار ممکن است)

$\text{if } \exists l;\ y_{lp}=0 \longrightarrow y_{lp} := \varepsilon > 0$

یعنی:

پیش فرض: $\begin{cases} \forall i,\ x_{ip} > 0 \\ \forall r,\ y_{rp} > 0 \end{cases}$

تمرین: مثالی بزنید که در یک جامعه DMU هر یک از ورودی‌ها مقدار صفر داشته باشد ولی کارای قوی باشد.

$$\underset{①}{\begin{pmatrix} 10 \\ 0.5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}} \quad \underset{②}{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}} \quad \underset{③}{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}}$$

② ، ③ را Domi کرده ولی

③ ، ① را نمی‌کند چون متغیر ورودی اول صفر است

Page:

Subject: 91

year. Month. Day.

قضیه: هر جواب بهین مدل راسل اصلاح شده، تمام قیود ورودی‌ها و خروجی‌ها ناقدند. (فرم پیشنهادی در راستا)

برهان: فرض کنید $(\theta_1^*, \ldots, \theta_m^*, \varphi_1^*, \ldots, \varphi_s^*, \lambda^*)$ جواب بهین مدل راسل اصلاح شده باشد، ثابت می‌کنیم تمام قیود ورودی و خروجی متناظر آن ناقدند.

ح: تمام قیود متناظر جواب بهین ناقد نباشند. بدون اینکه در طبیعت استدلال خللی وارد شود فرض کنید این قید، قید اول ورودی که با شرط مینی:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{1j} < \theta_1^* x_{1p} \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{1j} + s_1^- = \theta_1^* x_{1p} \qquad s_1^- >$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{1j} = \theta_1^* x_{1p} - s_1^- = \theta_1^* x_{1p} - \delta_1 x_{1p} = \underbrace{(\theta_1^* - \delta_1)}_{\bar{\theta}} x_{1p}$$

$$\longrightarrow \bar{\theta} < \theta_1^*, \quad \sum \lambda_j^* x_{1j} \leq \bar{\theta} x_{1p}$$

تناقض از اینجا ناشی می‌شود $\theta_1^* = \text{Min}\{\theta_i : i = 1, \ldots, m\}$

یا

تعریف می‌کنیم: $\bar{\theta}_i = \theta_i^*, \ i = 2, \ldots, m, \quad \bar{\varphi}_r = \varphi_r^*$

$$\bar{\rho} = \frac{\frac{1}{\sum d_i} \sum_i d_i \bar{\theta}_i}{\frac{1}{\sum \beta_r} \sum \beta_r \bar{\varphi}_r} < \frac{\frac{1}{\sum d_i} \sum d_i \theta_i^*}{\frac{1}{\sum \beta_r} \sum \beta_r \varphi_r^*} = \rho^* \Rightarrow \bar{\rho} < \rho^*$$

نتیجه: در مدل راسل اصلاح شده slack‌ها نداریم. این یعنی فاز دوم نداریم و این یکی از حسن‌های این مدل است.

در CCR کلاسیک: $z^* = \theta^* - \overset{\text{صفر کوچک}}{\varepsilon}(1s^- + 1s^+) \simeq \theta^*$ (*) $\longleftarrow$ if $x_{ip} \to x_{ip} + \Delta$

در راسل اصلاح شده: $$z^* = \frac{\frac{1}{\sum d_i} \sum d_i \theta_i^*}{\frac{1}{\sum \beta_r} \sum \beta_r \varphi_r^*}$$

اولی را ناقد شده θ را تعدیل کرده است، و ممکنه θ را تغییر دهد (وقتی دو تا قید ناقد باشد).

Page:

همیشه کاهش تعداد متغیرها بسود ماست. راه بهتر ترتیب کاهش قیدها.

Subject : ۹۲

year. Month. Day.

در مدل راسل اصلاح شده تمام صفرهای ورودی و خروجی روی کارایی تأثیری ندارد در حالیکه در مدل CCR کلاسیک عملاً تأثیر ندارد (*) و این یکی دیگر از حسن‌های راسل اصلاح شده است.

اگر در مدل CCR کلاسیک قیدی ناقد باشد:

$$\sum \lambda_j^* x_{1j} + s_1^{-*} = \theta_1^* x_{1p}$$

اگر $x_{1p} \rightarrow x_{1p+\Delta}$ فقط s_1^- افزایش می‌یابد و روی θ_1 تأثیری نمی‌گذارد. چون اولی ناقد شده θ را فعال کرده.

تذکر: چون در جواب بهینه تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها ناقد هستند پس می‌توان از ابتدا slack ها را صفر قرار داد. ولی در راسل اصلاح شده این کار را نمی‌کنند. و این به ۲ دلیل است:

① اولاً slack ها را اگر نگذاریم تا شبیه ایجاد نشود که فرض امکان پذیری نداریم (نامساوی بگذاریم) اصل امکان پذیری را نپذیرفته‌ایم.

② اگر slack ها باشد، جواب پایه‌ای شدنی داریم و نیازی به افزودن متغیرهای تصنعی و لذا فاز ۲ حذف در M بزرگ نیست.*

$X\lambda - \theta x_p + s^- = 0$ (جواب پایه آغازین)

$Y\lambda - \varphi_r y_{rp} + s^+ = 0$

نکته: مدلی که فقط با اصل شمول مشاهدات ساخته شده باشد، راسل اصلاح شده است. (و اصل تحدب)

مجدداً مدل راسل اصلاح شده را با صفر قرار دادن slack ها در نظر بگیرید:

$$\text{Min} \quad \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i} \sum \alpha_i \theta_i}{\frac{1}{\sum \beta_r} \sum \beta_r \varphi_r}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - \theta_i x_{ip} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum \lambda_j y_{rj} - \varphi_r y_{rp} = 0$$

$$\theta_i \leq 1 \quad , \quad \forall i$$

$$\varphi_r \geq 1 \quad , \quad \forall r$$

$$\lambda \geq 0$$

تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

با s_i^- تبلی فرق دارد:

$$\begin{cases} \theta_i = \dfrac{x_{ip} - s_i^-}{x_{ip}} = 1 - \dfrac{s_i^-}{x_{ip}} \\ \varphi_r = \dfrac{y_{rp} + s_r^+}{y_{rp}} = 1 + \dfrac{s_r^+}{y_{rp}} \end{cases}$$

NOURI نوری

Page:

مدل SBM که همان مدل راسل اصلاح‌شده و همان مدل Additive است.

Subject: ۹۲

year. Month. Day.

بنابراین داریم:

$$\text{Min } \rho = \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i}\sum \alpha_i\left(1-\frac{s_i^-}{x_{ip}}\right)}{\frac{1}{\sum \beta_r}\sum \beta_r\left(1+\frac{s_r^+}{y_{rp}}\right)}$$

s.t.

$$\sum_j \lambda_j x_{ij} - \left(1-\frac{s_i^-}{x_{ip}}\right)x_{ip} = 0$$

$$\sum_j \lambda_j y_{rj} - \left(1+\frac{s_r^+}{y_{rp}}\right)y_{rp} = 0$$

$$1-\frac{s_i^-}{x_{ip}} \leq 1 \quad , \forall i$$

$$1+\frac{s_r^+}{y_{rp}} \geq 1 \quad , \forall r$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{\sum \alpha_i}\left(\sum \alpha_i - \sum \frac{\alpha_i s_i^-}{x_{ip}}\right)}{\frac{1}{\sum \beta_r}\left(\sum \beta_r + \sum \frac{\beta_r s_r^+}{y_{rp}}\right)} = \frac{\overset{\text{ثابت}}{1} - \underset{\text{ثابت}}{\frac{1}{\sum \alpha_i}} \sum \underset{\text{ثابت}}{\overset{\text{ثابت}}{\alpha_i}} \overbrace{\frac{s_i^-}{x_{ip}}}^{\max s_i^-}}{\underset{\text{ثابت}}{1} + \underbrace{\underset{\text{ثابت}}{\frac{1}{\sum \beta_r}} \sum \underset{\text{ثابت}}{\beta_r} \frac{s_r^+}{y_{rp}}}_{\beta}}$$

(α)

$$\longrightarrow \text{Min } \rho = \text{Min } \frac{\alpha}{\beta} = \text{Max } \sum s_i^- + \sum s_r^+$$

$\max s_r^+$

تابع هدف Additive

در قیود راسل اصلاح‌شده جدید:

$$\left.\begin{array}{l} \sum \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ip} \\ \sum \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp} \\ \overset{①}{s_i^-} \geq 0 ,\ \overset{②}{s_r^+} \geq 0 ,\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \text{همان قیود مدل Additive}$$

①: $1-\frac{s_i^-}{x_{ip}} \leq 1 \rightarrow \frac{s_i^-}{x_{ip}} \geq 0 \longrightarrow s_i^- \geq 0$

②: $1+\frac{s_r^+}{y_{rp}} \geq 1 \longrightarrow \frac{s_r^+}{y_{rp}} \geq 0 \longrightarrow s_r^+ \geq 0$

ظاهر Additive طوری عوض شده که این نتیجه را

Page:

میدهد یکی از مشکلات راسل اصلاح‌شده را ندارد. (همولوژن نیست)

مدل SBM[1] :

$$\text{Min } \rho = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum \frac{s_i^-}{x_{ip}}}{1 + \frac{1}{s}\sum \frac{s_r^+}{y_{rp}}}$$

s.t.

$$\sum_j \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ip}$$

$$\sum \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp}$$

$$s^- \geq 0 ,\ s^+ \geq 0 ,\ \lambda \geq 0$$

پیش فرض $X_p > 0$ و $Y_p > 0$. توجه داشته باشید اگر $x_{ip}=0$ باشد، $\frac{s_i^-}{x_{ip}}$ از تابع مقصود حذف می گردد.
اگر $y_{rp}=0$ در این صورت بجای آن عدد بسیار کوچک ε قرار می دهیم که جمله $\frac{s_r^+}{y_{rp}}$ نقش جریمه بازی نماید.

قضیه: تابع مقصود SBM (در مقابل تغییر واحد پایدار) و همچنین قیود آن در مقابل تغییر واحد پایدار می باشند.

برهان: فرض کنید:

$$x_{ij} \longrightarrow \alpha_i x_{ij} \quad , \quad i=1,\ldots,m$$

$$y_{rj} \longrightarrow \beta_r y_{rj} \quad , \quad r=1,\ldots,s$$

$$\begin{cases} s_i^- = x_{ip} - \sum \lambda_j x_{ij} \\ s_r^+ = -y_{rp} + \sum \lambda_j y_{rj} \end{cases} \xrightarrow{\text{اعمال تغییر واحد}} \begin{cases} \alpha_i x_{ip} - \sum \lambda_j \alpha_i x_{ij} = \alpha_i\left(x_{ip} - \sum_j \lambda_j x_{ij}\right) = \alpha_i s_i^- \\ -\beta_r y_{rp} + \sum \lambda_j \beta_r y_{rj} = \beta_r\left(-y_{rp} + \sum_j \lambda_j y_{rj}\right) = \beta_r s_r^+ \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_i^- \longrightarrow \alpha_i s_i^-$$

$$\longrightarrow \frac{s_i^-}{x_{ip}} \longrightarrow \frac{\alpha_i s_i^-}{\alpha_i x_{ip}} = \frac{s_i^-}{x_{ip}} \Rightarrow$$ صورت تابع SBM تغییری نمی کند
به همین ترتیب مخرج SBM تغییری نمی کند.

1) Slacks-Based Measure of Efficiency (SBM)

Subject: ۹۵

year. Month. Day.

قضیه: $0 \le \rho_{SBM} \le 1$.

برهان:

$$\rho_{SBM}=\frac{1-\frac{1}{m}\sum\frac{s_i^-}{x_{ip}}}{1+\frac{1}{s}\sum\frac{s_r^+}{y_{rp}}}$$

$$s_i^- = x_{ip}-\sum \lambda_j x_{ij} \quad , \quad \sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_{ij}\ge 0 \Longrightarrow s_i^- \le x_{ip} \quad i=1,\dots,m$$

$$\longrightarrow \frac{s_i^-}{x_{ip}} \le 1 \quad , \quad i=1,\dots,m$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{x_{ip}} \le m \longrightarrow 0 \le \frac{1}{m}\sum\frac{s_i^-}{x_{ip}} \le 1 \Longrightarrow 0 \le 1-\frac{1}{m}\sum\frac{s_i^-}{x_{ip}} \le 1$$

از طرفی $1+\frac{1}{s}\sum\frac{s_r^+}{y_{rp}} \ge 1$ و لذا:

$$0 \le \frac{\overbrace{1-\frac{1}{m}\sum\frac{s_i^-}{x_{ip}}}^{\le 1}}{\underbrace{1+\frac{1}{s}\sum\frac{s_r^+}{y_{rp}}}_{\ge 1}} \le 1 \Longrightarrow 0 \le \rho_{SBM} \le 1$$

نکته: اگر تمام متغیرهای کمکی برابر صفر باشند، در این صورت $\rho=1$ یعنی واحد o پارتو کارا است.

تفسیری از SBM:

$$\rho_p=\frac{1-\frac{1}{m}\sum_i\frac{s_i^-}{x_{ip}}}{1+\frac{1}{s}\sum\frac{s_r^+}{y_{rp}}}$$

$$=\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_{ip}-s_i^-}{x_{ip}}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{s}\sum\frac{y_{rp}+s_r^+}{y_{rp}}\right)^{-1}$$

نسبت $\frac{x_{ip}-s_i^-}{x_{ip}}$ نشان دهنده میزان نسبی استفاده از ورودی iام است. لذا براین جمله اول عبارت فوق عبارت است از میانگین حسابی میزان استفاده از ورودی‌ها، میانگین نسبی استفاده از ورودی‌ها. جمله دوم عبارت است از میانگین نسبی افزایش خروجی‌ها. اگر $\rho=1$ باشد بایستی هر دو جمله یک باشند، یعنی نه ورودی هدر رفته و نه خروجی کم تولید شده است.

Page:

Subject: ۹۴
year. Month. Day.

حل مسأله SBM:

$$\text{Min} \quad \rho_{SBM} = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum \frac{s_i^-}{x_{ip}}}{1 + \frac{1}{s}\sum \frac{s_r^+}{y_{rp}}}$$

s.t.

$$\sum \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ip}$$

$$\sum \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp}$$

$$\lambda \geq 0, \; s^- \geq 0, \; s^+ \geq 0$$

قرار دهید: $1 + \frac{1}{s}\sum \frac{s_r^+}{y_{rp}} = \frac{1}{t}$, $t > 0$. در واقع داریم:

$$\text{Min} \quad \rho = t - \frac{1}{m}\sum \frac{t s_i^-}{x_{ip}}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j (t\lambda_j) x_{ij} + t s_i^- = t x_{ip} \qquad , i = 1, \dots, m$$

$$\sum (t\lambda_j) y_{rj} - t s_r^+ = t y_{rp}$$

$$t + \frac{1}{s}\sum \frac{t s_r^+}{y_{rp}} = 1$$

$$\lambda \geq 0, \; s^- \geq 0, \; s^+ \geq 0, \; t > 0$$

$$t\lambda_j := \delta_j \;, \quad t s_i^- := s_i' \;, \quad t s_r^+ := s_r''$$

$$\text{Min} \quad \rho = t - \frac{1}{m}\sum \frac{s_i'}{x_{ip}}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum \delta_j x_{ij} + s_i' = t x_{ip} \qquad \text{(I)}$$

$$\sum \delta_j y_{rj} - s_r'' = t y_{rp}$$

$$t + \frac{1}{s}\sum \frac{s_r''}{y_{rp}} = 1$$

$$\delta_j \geq 0, \; s_i' \geq 0, \; s_r'' \geq 0, \; t > 0$$

$t > 0$ یعنی تبدیل قابل برگشت است.

?

Page:

Subject : ۹۷

year. Month. Day.

بنابراین اگر $(\bar{\rho}^*, t^*, \lambda'^*, s'^{-*}, s'^{+*})$ جواب بهینه مدل (II) باشد آنگاه

$$\left(\rho^* = \bar{\rho}^*,\ \lambda^* = \frac{\lambda'^*}{t},\ s^{-*} = \frac{s'^{-*}}{t},\ s^{+*} = \frac{s'^{+*}}{t}\right)$$

جواب بهینه مدل SBM اولیه است.

قضیه: DMU_p در SBM پارتو کارا است اگر و فقط اگر $\rho^* = 1$.

تفسیر: هیچ ورودی هدر نرود و هیچ خروجی کمبود نداشته باشد.

برهان: اگر $\rho^* = 1$ باشد لازم می‌آید:

$$1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{x_{ip}} = 1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{y_{rp}}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{1}{m}\sum \frac{s_i^- \geq 0}{x_{ip} > 0}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{s}\sum \frac{s_r^+ \geq 0}{y_{rp} > 0}}_{\geq 0} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \forall i,\ s_i^- = 0 \\ \forall r,\ s_r^+ = 0 \end{cases}$$

عکس قضیه: فرض کنید DMU_p، پارتو کارا باشد. بنابراین $\forall i,\ s_i^- = 0$ و $\forall r,\ s_r^+ = 0$ و بوضوح $\rho^* = 1$.

قضیه: ثابت کنید

$$\rho^*_{SBM} \leq \theta^*_{CCR}$$

برهان: مدل پوششی CCR را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min}\ & \theta \\ \text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j + s^- = \theta x_p \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j - s^+ = y_p \\ & \lambda \geq 0,\ s^- \geq 0,\ s^+ \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ جواب بهینه مدل فوق باشد. می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \sum_j \lambda_j^* x_j + s^{-*} - \theta^* x_p + x_p = x_p \Longrightarrow \sum_j \lambda_j^* x_j + s^{-*} + (1-\theta^*)x_p = x_p \\ \sum \lambda_j^* y_j - s^{+*} = y_p \qquad \sum_j \lambda_j^* y_j - s^{+*} = y_p \end{cases}$$

Subject : ۹۸

year. Month. Day.

تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \lambda^* \\ \hat{s}^- = s^{-*} + (1-\theta^*) x_p \\ \hat{s}^+ = s^{+*} \end{cases}$$

با قرار دادن $(\hat{\lambda}, \hat{s}^-, \hat{s}^+)$ یک جواب شدنی مدل SBM بدست می‌آید و به ازای این جواب داریم:

$$\rho_{SBM} = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum \frac{\hat{s}_i^-}{x_{ip}}}{1 + \frac{1}{s}\sum \frac{\hat{s}_r^+}{y_{rp}}} = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^{-*} + (1-\theta^*)x_{ip}}{x_{ip}}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^{+*}}{y_{rp}}} = \frac{1 - \frac{1}{m}\left\{\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^{-*}}{x_{ip}} + m(1-\theta^*)\right\}}{1 + \frac{1}{s}\sum \frac{s_r^{+*}}{y_{rp}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{m}\sum \frac{s_i^{-*}}{x_{ip}} - 1 + \theta^*}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^{+*}}{y_{rp}}} = \frac{\theta^* - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^{-*}}{x_{ip}}}{\left(1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^{+*}}{y_{rp}}\right) \geq 1} \leq \theta^* - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^{-*}}{x_{ip}}$$

$$\leq \theta^*$$

$$\Longrightarrow \rho_{SBM} \leq \theta^*$$

بنابراین:

$$\rho^*_{SBM} = \mathrm{Min}\, \rho_{SBM} \leq \rho_{SBM} \leq \theta^* \longrightarrow \rho^*_{SBM} \leq \theta^*$$

تذکر: قضیه فوق حقیقتی را بیان می‌کند و آن حقیقت این است که ρ در SBM تمام ناکارایی‌ها را در محاسبه ρ به حساب می‌آورد، در صورتی که ρ در CCR فقط ناکارایی تکنیکی را ملحوظ می‌دارد.

نکته: فرض کنید $(\rho^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ جواب بهینه مدل SBM باشد در این صورت می‌توان نوشت:

$1 - \frac{s_i^-}{x_{ip}} \geq \theta^* \geq 1$ $\qquad ((\theta^*-1)x_p + s_i^-) \geq 0$

$$\begin{cases} \sum_j \lambda_j^* x_j + s_i^{-*} - x_p + \theta^* x_p = \theta^* x_p \Longrightarrow \sum_j \lambda_j^* x_j + (\theta^*-1)x_p + s_i^{-*} = \theta^* x_p \\ \sum \lambda_j^* y_j - s^{+*} = y_p \qquad \sum \lambda_j^* y_j - s_r^{+*} = y_p \end{cases}$$

در این صورت $(\theta^*, \lambda^*, (\theta^*-1)x_p + s^{-*}, s^{+*})$ که جواب شدنی برای CCR با ماهیت ورودی است.

Page:

Subject : 99

year. Month. Day.

رابطه بین کارایی در CCR و کارایی در SBM :

قضیه: DMU_p در مدل CCR کارای قوی است اگر و فقط اگر $\rho^*_{SBM}=1$. (یعنی در SBM کارا باشد)

برهان: حکم: DMU_p در CCR کارای قوی است $\Longleftrightarrow \rho^*_{SBM}=1$

معادل حکم: DMU_p در CCR کارای قوی نیست $\Longleftrightarrow \rho^*_{SBM}\neq 1$.

ف: DMU_p در CCR کارای قوی نیست

ح: $\rho^*\neq 1$

از ارزیابی DMU_p در CCR کارای قوی نیست دو حالت پیش می‌آید، $\theta^*=1, (s^{-*}, s^{+*})\neq 0$ ۲ $\theta^*<1$

الف) $\theta^*<1$. در این حالت با توجه به اینکه $\rho^*\leq\theta^*<1$ لذا $\rho^*<1$ و این یعنی DMU_p در SBM کارا نیست

ب) $\theta^*=1, (s^{-*}, s^{+*})\neq 0$

فرض کردیم $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ جواب بهینه مدل CCR-I باشد. در قضیه قبل ثابت کردیم:

$$\rho_{SBM}=\frac{\theta^*-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^{-*}}{x_{ip}}}{1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^{+*}}{y_{rp}}}=\frac{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^{-*}}{x_{ip}}}{1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^{+*}}{y_{rp}}}<1$$ چون $(s^{-*}, s^{+*})\neq 0$ *

* دلیل:

$(s^{-*}, s^{+*})\neq 0$:

۱) $s^{-*}=0, s^{+*}\neq 0 \longrightarrow$ مخرج کسر $=\alpha>1 \Rightarrow \rho_{SBM}=\frac{1}{\alpha>1}<1$

۲) $s^{-*}\neq 0, s^{+*}=0 \longrightarrow$ مخرج کسر $=1$، صورت کسر $=\beta<1 \rightarrow \rho_{SBM}=\frac{\beta}{1}<1$

۳) $s^{-*}\neq 0, s^{+*}\neq 0 \longrightarrow$ صورت کسر $=\beta<1$، مخرج کسر $=\alpha>1 \longrightarrow \rho_{SBM}=\frac{\beta}{\alpha}<1$

$\Rightarrow \rho_{SBM}<1 \Longrightarrow \rho^*_{SBM}<1 \Longrightarrow$ DMU_p در SBM کارا نیست.

Page:

Subject : ۱۰۰

year. Month. Day.

برعکس : فرض : $\rho^* \neq 1$

حکم : DMU$_p$ در CCR کارای قوی نیست.

از آنجایی که $\rho^* \neq 1$ یعنی DMU$_p$ در SBM کارا نیست، پس $(s^{-*}, s^{+*}) \neq 0$. از طرفی فرض کردیم $(\rho^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ جواب بهینه SBM باشد. بنابر قضیه قبل $(\theta, \lambda^*, (\theta^*-1)x_p + s^{-*}, s^{+*})$ به شرط آنکه $(\theta^*-1)x_p + s^{-*} \geq 0$، یک جواب شدنی برای CCR-I است. دو حالت پیش می‌آید:

الف) $\theta^* = 1$. چون $(s^{-*}, s^{+*}) \neq 0$ پس در این حالت DMU$_p$ در مدل CCR کارای قوی نیست.

ب) $\theta^* < 1$ که در این حالت DMU$_p$ در مدل CCR کارا نیست.

جواب بهینه CCR — جواب شدنی SBM

$$(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) \longrightarrow (\lambda^*, s^{-*} + (1-\theta^*)x_p, s^{+*})$$

جواب بهینه SBM — جواب شدنی CCR

$$(\rho^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) \longrightarrow (\theta^*, \lambda^*, (\theta^*-1)x_p + s^{-*}, s^{+*})$$

$$\rho = \frac{\theta^* - \frac{1}{m}\sum \frac{s_i^-}{x_{ip}}}{1 + \frac{1}{s}\sum \frac{s_r^+}{y_{rp}}}$$

قضیه: اگر یکی از مولفه‌های U^* یا V^* در ابر صفحه $H=\{(x,y) \mid U^{*t}y-V^{*t}x=0\}$ برابر با صفر باشد و $(x_p,y_p)\in int(H\cap T_c)$ آنگاه امکان تولید با ورودی کمتر یا خروجی بیشتر می‌توان یافت که بر (x_p,y_p) غالب باشد.

برهان: به طریق استدلال خللی وارد نمی‌شود اگر فرض کنیم $V_1^*=0$.

چون (x_p,y_p) نقطه داخلی است پس،

$$\exists \delta>0 ;\ N_\delta(x_p,y_p)\subseteq int(H\cap T_c)$$

امکان تولید زیر را در نظر بگیرید:

$$(x_{1p}-\delta, x_{2p},\dots,x_{mp}, y_{1p},\dots,y_{sp}) := (\bar{x},\bar{y}) \in H\cap T_c$$

از طرفی داریم: $(x_p,y_p)\in H$ پس:

$$u_1^*y_{1p}+\dots+u_s^*y_{sp}-0x_{1p}-v_2^*x_{2p}-\dots-v_m^*x_{mp}=0$$

$$\Rightarrow u_1^*y_{1p}+\dots+u_s^*y_{sp}-0(x_{1p}-\delta)-v_2^*x_{2p}-\dots-v_m^*x_{mp}=0 \Rightarrow (\bar{x},\bar{y})\in H$$

بنابراین امکان تولید $(\bar{x},\bar{y})\in H$ می‌باشد و نیز چون به لحاظ ورودی اول کمتر از ورودی اول x_p می‌باشد لذا بر (x_p,y_p) غالب می‌باشد.

تذکر: از قضیه فوق بر می‌آید که در حل مدل مضربی CCR یکی از ضرایب جواب بهینه صفر باشد، DMU_p نقطه‌ای داخلی $H\cap T_c$ باشد، آنگاه DMU غالب بر آن وجود دارد.

سوال: ثابت کنید $DMU_p\in int T_c$ اگر و فقط اگر $\theta_p^*<1$.

ف: DMU_p متعلق به نقاط درونی T_c باشد یعنی $DMU_p\in int T_c$.

ه: $\theta_p^*<1$

چون DMU_p نقطه درونی T_c است پس همسایگی از DMU_p هست که زیرمجموعه T_c باشد یعنی:

$$\exists\delta>0 ;\ N_\delta(x_p,y_p)\subset T_c$$

به عبارت دیگر :

$$\forall \delta_1, \delta_2 ; \quad 0 \leq \delta_1 \leq \delta, \ 0 \leq \delta_2 \leq \delta \longrightarrow \begin{pmatrix} x_p - \delta_1 \\ y_p + \delta_2 \end{pmatrix} \in T_c$$

قرار می‌دهیم $\delta_1 = 0$ ، $0 < \delta_2 < \delta$. در این صورت

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p + \delta \end{pmatrix} \in T_c$$

و این یعنی DMU_p کارا نیست زیرا DMU $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$ بر آن غالب است و این یعنی $\theta^* < 1$.

تمرین: ثابت کنید هر ترکیب نامنفی از DMUهای مرجع DMU_p یک واحد کارا است.

حل: فرض کنید (λ^*, θ^*) جواب بهینه در ارزیابی DMU_p باشد.

بدون از دست دادن کلیت استدلال خللی وارد نشود فرض کنید: $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*, 0, \dots, 0)$

$$B.M = \sum_{j \in J_p} \lambda_j^* \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \quad ; \quad J_p = \{ j \mid \lambda_j^* > 0 \} = \{1, \dots, k\}$$

ولذا $RS_p = \{ DMU_1, \dots, DMU_k \}$

حکم: $\sum_{j=1}^{k} \mu_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ کارا است.

$$\lambda_1^* > 0 \xrightarrow{\text{طبق نقیض مکمل زائد}} u^* y_1 - v^* x_1 = 0 \xrightarrow{\times \mu_1} u^*(\mu_1 y_1) - v^*(\mu_1 x_1) = 0$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\lambda_k^* > 0 \xrightarrow{\quad " \quad " \quad} u^* y_k - v^* x_k = 0 \xrightarrow{\times \mu_k} u^*(\mu_k y_k) - v^*(\mu_k x_k) = 0$$

+

$$\longrightarrow u^* \left(\sum_{j=1}^{k} \mu_j y_j \right) - v^* \left(\sum_{j=1}^{k} \mu_j x_j \right) = 0 \Longrightarrow_{\bar{p}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k} \mu_j x_j \\ \sum_{j=1}^{k} \mu_j y_j \end{pmatrix} \in H \text{ (ابرصفحه کارا)}$$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ کارا است.

حال صورت مدل برای ارزیابی $DMU_{\bar{p}}$ را در نظر می‌گیریم:

ص ۱۱۱

$$\max \ u y_{\bar{p}}$$
$$v x_{\bar{p}} = 1$$
$$u y_j - v x_j \leq 0$$
$$u \geq 0, \ v \geq 0$$

Subject: ۱۰۵

year. Month. Day.

داده‌های بازه‌ای:

$x_{ij} \in [x_{ij}^{l}, x_{ij}^{u}]$

اگر $u=l$ باشد قطعی می‌گردند

$y_{rj} \in [y_{rj}^{l}, y_{rj}^{u}]$ معلوم

اگر داده‌ها مقادیر معلوم بوده (یا مقدارشان در یک بازه معینی است) هیچ مشکلی ندارد - اطلاعات ناقص است

با تصادفی فرق دارد چرا؟ متغیر تصادفی اتفاق نیفتاده است و رخ نداده است ولی بازه‌ای معلوم است چون در قبل اتفاق افتاده است.

$\in [5000, 15000]$ پول

قیمت هر ماشین $= 2000 \longrightarrow$ تعداد ماشین‌هایی که می‌توانم بخرم $2 \leq \; \leq 7$

از اطلاعات نادقیق، جواب نادقیق انتظار داریم. بنابراین باید گفت: اطلاعات نادقیق الزاماً جواب نادقیق می‌دهند زیرا:

$\in [5000, 5500]$ پول

دقیقاً $2 =$ تعداد ماشین‌هایی که می‌توانم بخرم

$$A_j = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in [x_{ij}^{l}, x_{ij}^{u}],\; y_r \in [y_{rj}^{l}, y_{rj}^{u}] \right\}$$

تجزیه برای هر DMU

تجزیه‌ها می‌توانند صفر بعدی باشند (در حالت دقیق بودن داده‌ها)، و حداکثر $m+s$ بعدی باشند (در حالت نادقیق بودن کل داده‌ها)

مکعب: تجزیه در فضای ۳ بعدی

مستطیل: " " ۲ بعدی

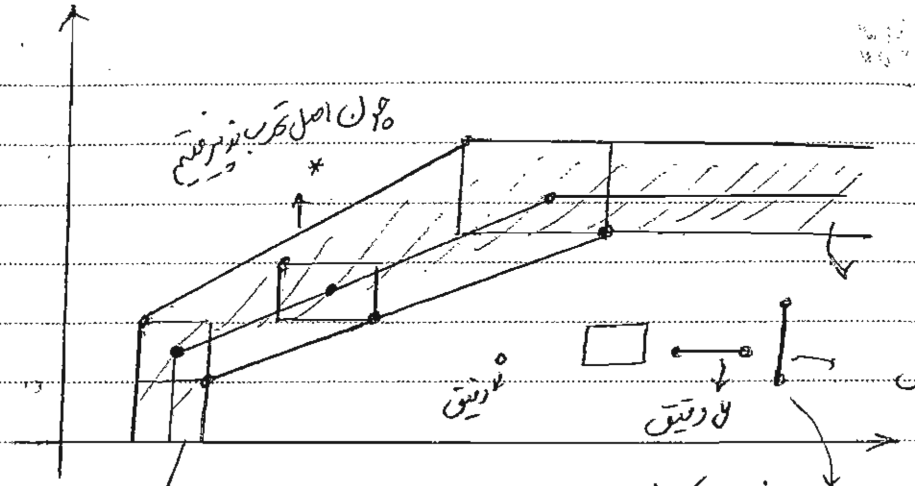
پاره‌خط: " " ۱ بعدی

نقطه: " " صفر

نحوه مشخص کردن PPS:

از هر تجزیه یک نقطه تصادفی انتخاب می‌کنیم و PPS می‌سازیم، دیوار قطعه مشترک همه PPSها در PPS می‌باشد.

Page:



ازاینرو هم باید اینها بکشیم ولی چون تاثیری ندارند نیاوردیم.
همه ppsها نوارش اینجا (از مرز ppsها)
نوار ppsها همیشه بهترین و بدترین است. (*) به عبارت دیگر همیشه بهترین و بدترین نقاط که بازه روی آنها هستند

برای همه DMUها بهترین مختصاتش را در نظر بگیریم یک ppsای می‌سازیم
" " " بدترین " " " " " "

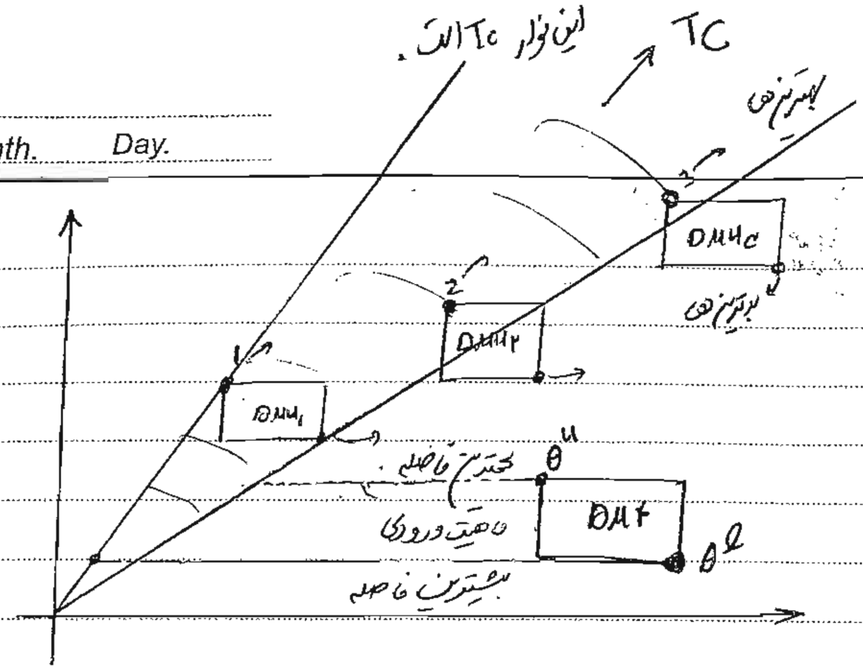
نوار، اختلاف بین این دو pps است که فرم صریح ندارد یعنی دستگاه معادلاتی نمی‌توانیم بنویسیم که جواب آن این نوار گردد. چون محدب نیست و شکل آن کاملا مشخص نیست.

همانطور که می‌دانید کارایی با فاصله تا مرز، نسبت معکوس دارد ($\theta = f(d)$) یعنی هرچه فاصله تا مرز کمتر باشد کارایی واحد بیشتر است.

حال جهت پیدا کردن کران بالای کارایی کمترین فاصله DMU_p تا مرز را در نظر می‌گیریم. این فاصله عبارت است از بهترین نقطه DMU_p تا مرز پایین. (DMU_p در بهترین حالت دقیق در بدترین حالت)
به همین ترتیب کران پایین کارایی متناظر بیشترین فاصله DMU_p تا مرز خواهد بود.

Subject : ۱۰۷

year. Month. Day.



نوار PPS، در ۲ بعدی محدب شد ولی در سه بعدی محدب نیست.

$$\theta^l = Max\ d \quad = \begin{cases} DMU_p \text{ در بدترین مختصات} \\ \text{سایرین در بهترین} \end{cases}$$

$$\theta^u = Min\ d \quad \begin{cases} DMU \text{ در بهترین مختصات} \\ \text{سایرین در بدترین} \end{cases}$$

کمترین فاصله از نوار

از نظر مدیریتی: اگر بتوان مختصات DMU مقابل را خراب کرده خودمان رشد می‌کنیم.

همانطور که می‌دانید DMU_p کارا است هرگاه:

$$\exists (u,v) > 0 \ ; \ \forall j, \quad \frac{Uy_p}{Vx_p} \geq \frac{Uy_j}{Vx_j} \qquad j=1,\dots,n \ , \ j \neq p$$

چون به ازای $j=p$ نامساوی فوق همواره برقرار است لذا می‌توان فرض کرد $j \neq p$.

لذا بسیار در جهت افزایش کارایی DMU_p، y_p را زیاد و بقیه y_jها را کم کن یا ورودی x_p را کم و ورودی سایرین را افزایش بدهیم.

$\uparrow uy_p$ و $Uy_j \downarrow$

$Vx_p \downarrow$ و $Vx_j \uparrow$

Subject: ۱۰۸

year. Month. Day.

$$\theta^* = \text{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j [x_{ij}^L, x_{ij}^U] \leq \theta [x_{ip}^L, x_{ip}^U] \quad , \forall i$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j [y_{rj}^L, y_{rj}^U] \geq [y_{rp}^L, y_{rp}^U] \quad , \forall r$$

$$\lambda \in \Lambda$$

(I)

این یک مدل برنامه ریزی پارامتری است.

اولین ایده بدین صورت بود:

$$\text{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ip} \quad , i=1,\dots,m$$

$$\sum \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} \quad , r=1,\dots,s$$

$$\lambda \in \Lambda$$

$$* \begin{cases} x_{ij}^L \leq x_{ij} \leq x_{ij}^U \\ y_{rj}^L \leq y_{rj} \leq y_{rj}^U \end{cases}$$

(II)

مدل فوق یک مدل غیرخطی است. برای خطی کردنش بدین صورت عمل می کنیم:

برای هر i، j، λ_{ij} مختلفی می نویسیم

$$\begin{cases} x_{ij} = \lambda_{ij} x_{ij}^U + (1-\lambda_{ij}) x_{ij}^L & 0 \leq \lambda_{ij} \leq 1 \\ y_{rj} = \delta_{ij} y_{rj}^U + (1-\delta_{ij}) y_{rj}^L & 0 \leq \delta_{ij} \leq 1 \end{cases}$$

Page:

Subject: ۱۰۹

year. Month. Day.

با جایگذاری در II داریم:

$$\sum \lambda_j \left(\lambda_{ij} x_{ij}^U + (1-\lambda_{ij}) x_{ij}^L\right) \leqslant \theta\left(\lambda_{ij} x_{ip}^U + (1-\lambda_{ij}) x_{ip}^L\right)$$

$\lambda_j \lambda_{ij} = \bar{\lambda}_{ij}$

$$\Longrightarrow \sum \bar{\lambda}_{ij} x_{ij}^U + \sum (\lambda_j - \bar{\lambda}_{ij}) x_{ij}^L \leqslant \theta \lambda_{ip} x_{ip}^U + \theta(1-\lambda_{ip}) x_{ip}^L$$

$$\Longrightarrow \theta \lambda_{ip} := \lambda'_{ip} \quad ; \quad 0 \leqslant \lambda'_{ip} \leqslant 1$$

$$\longrightarrow \sum \bar{\lambda}_{ij} x_{ij}^U + \sum (\lambda_j - \bar{\lambda}_{ij}) x_{ij}^L \leqslant \lambda'_{ip}(x_{ip}^U - x_{ip}^L) + \theta x_{ip}^L$$

به همین ترتیب می‌توان قید دیگر را نیز خطی نمود.

Page:

اشکال عمده مدل II آن است که قیود (*) پارامتر را متغیر گرفت. جهت روشن شدن موضوع نمونه زیر را در نظر بگیرید:

(I) $\text{Max} \quad ax$

$x \in [3,4]$

هدف حل مسئله (I) مشروط براین است که $3 \leq a \leq 7$ باشد.

مسئله اخیر یک مسئله پارامتری است. یعنی به ازای هر مقداری که به a می‌دهیم یک جواب بهینه معرفی می‌کند.

$if\ a=7 \Longrightarrow z^*=28$

$if\ a=3 \Longrightarrow z^*=12$ $\longrightarrow z^* \in [12,28]$

حال اگر قید $3 \leq a \leq 7$ را به مسئله اضافه کنیم یعنی مسئله II را حل کنیم مسئله یک جواب بهینه منحصر به فرد خواهد داشت:

(II) $\text{Max} \quad ax$

$s.t. \quad 3 \leq x \leq 4 \longrightarrow z^*=28$

$3 \leq a \leq 7$

نتیجه‌گیری: اگر مدل (II) را با قیود (*) حل کنیم θ^{*U} را به ما می‌دهد. (کران بالای کارایی را می‌دهد)

پس دنبال راه حل بهتری برای مدل (I) می‌رویم (با برنامه‌ریزی پارامتری حل آن دشوار است زیرا $m+s$ تا پارامتر داریم)

بدین صورت عمل می‌کنیم که با توجه به اینکه کارایی با فاصله تا مرز نسبت عکس دارد، پس هر چه کارایی وقتی است که d بیشترین باشد و حداقل کارایی وقتی است که d کمترین باشد پس:

$$\theta^L = \text{Min} \quad \theta$$

خروجی در بدترین وضعیت و ورودی در بهترین وضعیت

$$s.t. \quad \sum_{j \neq p} \lambda_j x_{ij}^L + \lambda_p x_{ip}^U \leq \theta x_{ip}^U$$

$$\sum \lambda_j y_{rj}^U + \lambda_p y_{rp}^L \geq y_{rp}^L$$

$$\lambda \in \Lambda$$

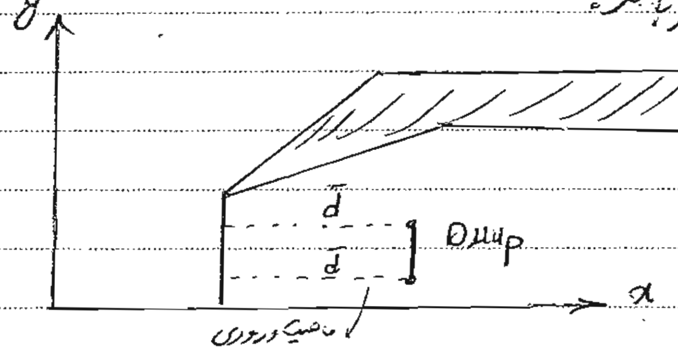
$$\theta^U = \operatorname{Min} \ \theta$$ خودش بدترین وضعیت، رقبا در بهترین وضعیت

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \neq p} \lambda_j x_{ij}^U + \lambda_p x_{ip}^L \leq \theta x_{ip}^L \quad , \forall i$$

$$\sum_{j \neq p} \lambda_j y_{rj}^L + \lambda_p y_{rp}^U \geq y_{rp}^U \quad , \forall r$$

$$\lambda \in \Lambda$$

تذکر: θ^L و θ^U ممکن است با هم برابر باشند:



$$\theta^L = \operatorname{Max} \ d = \bar{d} \longrightarrow \theta^L = \theta^U$$
$$\theta^U = \operatorname{Min} \ d = \bar{d}$$

قضیه: هر x_{ij} و y_{rj} را که متعلق به I انتخاب کنیم و مدل I را حل کنیم آنگاه داریم:

$$\theta^* \in [\theta^L, \theta^U]$$

برهان: فرض کنیم x_{ij} و y_{rj} های دیگر ثابت انتخاب کرده‌ایم، مدل زیر حاصل شده است:

$$\operatorname{Min} \ \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ip} \ , \forall i \qquad \text{III}$$

$$\sum_j \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp}$$

$$\Lambda \rightarrow \quad \sum_j \lambda_j = 1 \ , \lambda \geq$$

Subject : ۱۱۲

year. Month. Day.

فرض کنید (λ^*, θ^*) جواب بهینه مدل فوق باشد $\overline{III}$ ثابت می کنیم:

$$\theta^L \leqslant \theta^* \leqslant \theta^U$$

$$\begin{cases} \sum_{j\neq p} \lambda_j^* x_{ij} \leqslant \underbrace{(\theta^* - \lambda_p^*)}_{\geqslant 0 \;\to\; (**)} x_{ip} \\ \sum_{j\neq p} \lambda_j^* y_{rj} \geqslant (1-\underbrace{\lambda_p^*}_{\geqslant 0}) y_{rp} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* = 1 , \quad \lambda_j^* \geqslant 0$$

DMU_p ناکارا باشد ← یا خودش یکی و بقیه صفر

یا خودش صفر بقیه مثبت

DMU_p $(**)$ کارا ← $\lambda_p^*=1$ و $0<\lambda_p^*<1$ در حالتی $\theta^*=1$ $\Rightarrow$ $\theta^* - \lambda_p^* \geqslant 0$

ناکارا ← $\lambda_p^*=0$ در حالتی $\theta^*>0$ $\Rightarrow$ $\theta^* - \lambda_p^* > 0$

$$\begin{cases} \sum_{j\neq p} \lambda_j^* x_{ij}^L \leqslant \sum_{j\neq p} \lambda_j^* x_{ij} \leqslant (\theta^* - \lambda_p^*) x_{ip} \leqslant (\theta^* - \lambda_p^*) x_{ip}^U \\ \sum_{j\neq p} \lambda_j^* y_{rj}^U \geqslant \sum \lambda_j^* y_{rj} \geqslant (1-\lambda_p^*) y_{rp} \geqslant (1-\lambda_p^*) y_{rp}^L \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{j\neq p} \lambda_j^* x_{ij}^L \leqslant (\theta^* - \lambda_p^*) x_{ip}^U \\ \sum \lambda_j^* y_{rj}^U \geqslant (1-\lambda_p^*) y_{rp}^L \end{cases} \Longrightarrow$$

(λ^*, θ^*) جواب شدنی برای مدل θ^L باشد

$$\Downarrow$$

$$\theta^L \leqslant \theta^*$$

برعکس: جواب بهینه برای مدل θ^U در نظر می‌گیریم ثابت می کنیم این جواب برای مسئله $\overline{III}$ شدنی است که در این صورت

$$\theta^* \leqslant \theta^U$$

اثبات:

$$\sum_{j\neq p} \lambda_j^* x_{ij}^U \leqslant (\theta^U - \lambda_p^*) x_{ip}^L$$

$$\sum_{j\neq p} \lambda_j^* y_{rj}^L \geqslant (1-\lambda_p^*) y_{rp}^U$$

$$\sum \lambda_j^* = 1 , \quad \lambda_j^* \geqslant 0$$

$$\begin{cases} \sum_{j \neq p} \lambda_j^* x_{ij} \leqslant \sum_{j \neq p} \lambda_j^* x_{ij}^U \leqslant (\theta^U - \lambda_p^*) x_{ip}^L \leqslant (\theta^U - \lambda_p^*) x_{ip} \\ \sum_{j \neq p} \lambda_j^* y_{rp} \geqslant \sum_{j \neq p} \lambda_j^* y_{rp}^L \geqslant (1-\lambda_p^*) y_{rp}^U \geqslant (1-\lambda_p^*) y_{rp} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{j \neq p} \lambda_j^* x_{ij} \leqslant (\theta^U - \lambda_p^*) x_{ip} \\ \sum_{j \neq p} \lambda_j^* y_{rp} \geqslant (1-\lambda_p^*) y_{rp} \end{cases} \longrightarrow (\theta^U, \lambda_p^*) \in \text{III}$$ چون شدنی‌اند در

$$\Downarrow$$

$$\theta^U \geqslant \theta^*$$

در LP دیگر نمی‌توان گفت من بهترینم و تقسیم‌بندی.

فرق LP بازه‌ای با LP قبل؟

در LP بازه‌ای پارامترها بازه‌ای هستند (اگر متغیرها هم بازه‌ای باشند، متغیر صحیح در نظر گرفته می‌شوند)

در هر LP تعدادی متغیر تصمیم وجود دارد و تعدادی c که هیچ کدام بر دیگری ارجحیت ندارد (اکثر بودن وجود ندارد). LP زیر را در نظر بگیرید که در آن متغیرهای تصمیم دقیق و پارامترها نادقیق‌اند:

$$(*) \quad \text{Max} \quad Z = \sum_j [c_j^L, c_j^U] x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum [a_{ij}^L, a_{ij}^U] x_j \leqslant [b_i^L, b_i^U], \ \forall i$$

مسأله فوق در صورتی قابل حل است که a، b، c از هم مستقل باشند. با فرض مستقل بودن خواهیم داشت: (دو LP مشابه (*) خواهیم داشت)

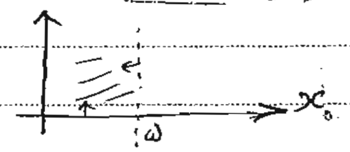
$$Z^U = \text{Max} \; c_j^U x_j \qquad\qquad Z^L = \text{Max} \sum c_j^L x_j$$

$$\text{s.t.} \; \sum a_{ij}^L x_j \leq b_i^U \;, \forall i \qquad\qquad \text{s.t.} \; \sum a_{ij}^U x_j \leq b_i^L \;, \forall i$$

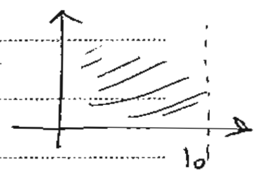
$$x_j \geq 0 \qquad\qquad x_j \geq 0$$

تذکر: وقتی ضریب x کوچک‌تر و b بزرگ‌تر می‌شود، ناحیه شدنی بزرگ‌تر می‌شود. به عبارت دیگر برای انجام هر فعالیت x_j به منابع کمتری نیاز داریم و از طرفی منابع افزایش دهیم ناحیه شدنی بزرگ‌تر می‌شود:

$2x_1 \leq 10$
$x_1, x_2 \geq 0$



$x_1 \leq 10$
$x_1, x_2 \geq 0$



تذکر: در DEA شرط مستقل بودن a و b و c برقرار نیست. زیرا در فرم پوششی قید یکتایی یکی از ستون‌های a است پس a و b وابسته‌اند. و در فرم مضربی ضرایب تابع هدف یکی از بردار سطری قیود هستند پس a و c وابسته‌اند.

از این رو نمی‌توان مسائل DEA بازه‌ای را به روش بالا حل نمود.

در DEA از خاصیت بهتر بودن و یا Dominate کردن استفاده و مدل بازه‌ای را حل می‌کنند.

$0 < \theta^* \leq 1 \longrightarrow 0 < \theta^L \leq \theta^U \leq 1 \longrightarrow$ ۳ حالت رخ می‌دهد
$\theta^L \leq \theta^* \leq \theta^U$

۱) $\theta^L = \theta^U = 1$

$$E^{++} = \{ DMU_p \mid \theta_p^L = 1 \}$$

اطلاعات نادقیق گاهی جواب دقیق می‌دهد.

هم در بدترین حالت و هم در بهترین حالت کاراست. هر مجموعه‌ای از خودش و دیگران بگیرد کارایی یک است.

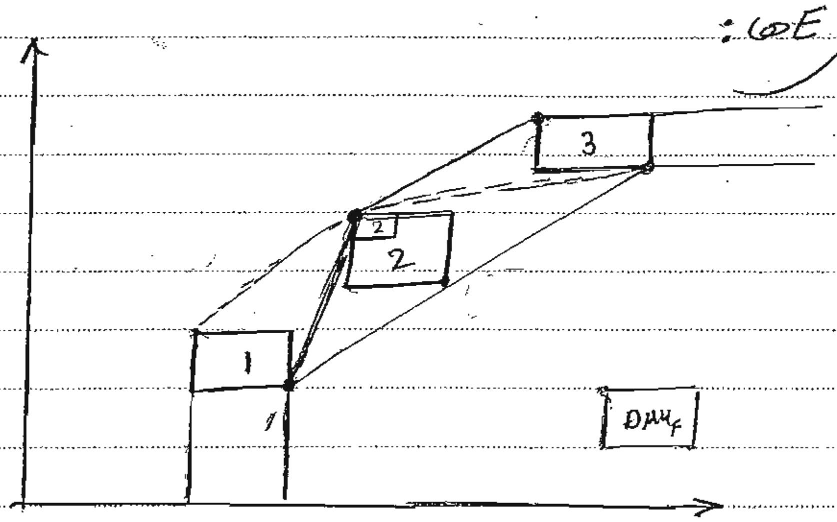
۲) $E^{+}=\{DMU_p \mid \theta_p^U=1 , \theta_p^L<1\}$

در بهترین شرایط کاراست ولی در بدترین شرایط ناکاراست.

۳) $E^{-}=\{DMU_p \mid \theta_p^U<1\}$

همواره ناکاراست. چه در بهترین شرایط و چه در بدترین شرایط.

مثال شهودی برای E ها:



DMU_1: $\theta_1^L=1 \Rightarrow \theta_1^U=1 \longrightarrow DMU_1 \in E^{++}$

DMU_2: $\theta_2^L<1 , \theta_2^U=1 \longrightarrow DMU_2 \in E^{+}$

DMU_3: $\theta_3^L=1 , \theta_3^U=1 \longrightarrow DMU_3 \in E^{++}$

و $DMU_4 \in E^{-}$

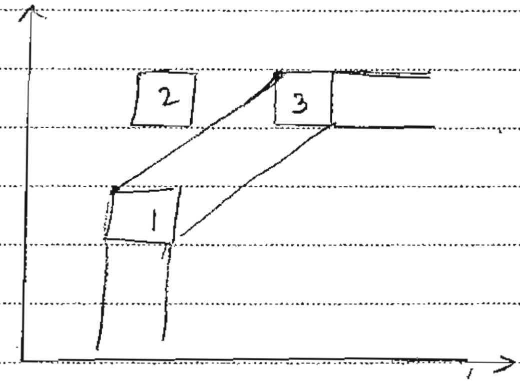
تذکر: اگر هر DMU داخل نوار PPS بهترین شرایط برای نیست متعلق به E^{++} است.

واضح است که هر DMU عضو E^{++} یک DMU عضو E^{+} و همچنین هر DMU عضو E^{+} کمپلمنت E^{-} است.

دسته‌ی E^+ خودش رتبه‌بندی می‌شود:
هر DMU که θ^L بزرگتری داشته باشد رتبه‌اش بالاتر است و $\theta^U=1$

ولی رتبه‌بندی E^{++}، E^- ساده نیست.

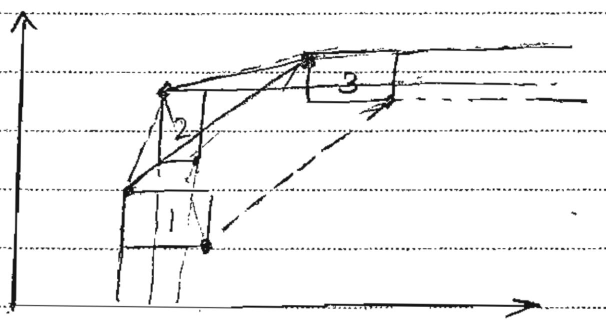
نکته: می‌خواهیم DMU_p در E^{++} قرار گیرد. این وقتی اتفاق می‌افتد که اگر DMU_p را حذف کنیم، نوار کارایی تکه‌ای شکل جدیدی بگیرد که PPS شد با نقطه بیرونی کارایی اش بیرون نوار، شد بالایی انقطاع نداشته باشد که توسط مرز جدید مغلوب بشود



$DMU_2 \in E^{++}$

سوال: آیا می‌توان مثالی زد که E^{++} تهی باشد؟

بله.



لزوماً DMU رأسی در E^{++} نیست

$\theta_1^L < 1,\ \theta_1^U = 1 \rightarrow DMU_1 \in E^+$

$\theta_2^L < 1,\ \theta_2^U = 1 \rightarrow DMU_2 \in E^+$ $\Longrightarrow E^{++} = \phi,\ E^- = \phi$

$\theta_3^L < 1,\ \theta_3^U = 1 \rightarrow DMU_3 \in E^+$

Subject: ۱۱۷

year. Month. Day.

سوال ۲: اگر بپذیریم تعریف MPSS کارایی رأسی همان تعریف قبلی (مجموعه جواب‌ها شکل عکس آن) آیا برای بازه‌ها نیز MPSS کارایی رأسی وجود دارد.

سوال ۳: آیا هر عضو E^{++} کارایی رأسی است؟ عکس آن چطور؟

اصل کلی: هر بازه‌ای که شامل بازه‌ای دیگر می‌گردد، بزرگتر است.

بازه [۵،۶] از بازه [۲،۱] بزرگتر است زیرا از صفر دورتر است.

$$\text{Max} \quad Z_p = \sum_{r=1}^{s} u_r [y_{rp}^L, y_{rp}^U]$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i [x_{ip}^L, x_{ip}^U] = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r [y_{rj}^L, y_{rj}^U] - \sum_{i=1}^{m} v_i [x_{ij}^L, x_{ij}^U] \leqslant 0$$

$$u_r \geqslant 0, \ v_i \geqslant 0$$

$$\text{Max} \quad Z_p^U = \sum u_r y_{rp}^U$$

خوش‌بینانه‌ترین وضعیت، تصمیم بدترین وضعیت

$$\text{s.t.} \quad \sum v_i x_{ip}^L = 1$$

$$\sum u_r y_{rj}^L - \sum v_i x_{ij}^U \leqslant 0 \qquad j = 1, \dots, n, \ j \neq p$$

$$\sum u_r y_{rp}^U - \sum v_i x_{ip}^L \leqslant 0$$

$$u_r \geqslant 0, \ v_i \geqslant 0$$

Subject: ۱۱۸

year. Month. Day.

$$\text{Max} \quad z_p^L = \sum_r u_r y_{rp}^L$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_i v_i x_{ip}^U = 1$$

خوش‌بین‌ترین وضعیت، بقیه بدترین وضعیت

$$\sum_r u_r y_{rj}^U - \sum_i v_i x_{ij}^L \leqslant 0$$

$$\sum_r u_r y_{rp}^L - \sum_i v_i x_{ip}^U \leqslant 0$$

$$u_r \geqslant 0, \; v_i \geqslant 0$$

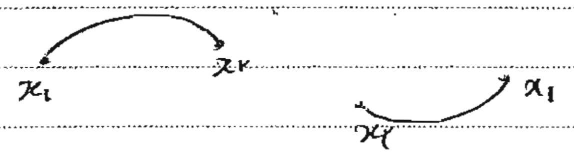
$$\longrightarrow \quad z_p^* \in [z_p^{*L}, z_p^{*U}]$$

Subject: ۱۱۹

year. Month. Day.

مدل‌های حاصل‌ضربی:

if $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\longrightarrow$ ترکیب هندسی $\bar{x}$: $\exists \lambda \geq 0 ; \bar{x} = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\lambda_j} ; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda \geq 0$



مسیر کوتاه

با استفاده از اصول مشاهدات، تحدب هندسی، امکان‌پذیری، کمینه برون‌یابی مجموعه امکان تولید می‌سازیم:

$$T^{1} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, n \right\}$$ اصل مشاهدات

اصل تحدب هندسی

$$T^{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| X = \prod x_j^{\lambda_j}, Y = \prod y_j^{\lambda_j}, \sum \lambda_j = 1, \lambda \geq 0 \right\}$$

اصل تحدب هندسی امکان

$$T^{1,2,3} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| X \geq \prod x_j^{\lambda_j}, Y \leq \prod y_j^{\lambda_j}, \sum \lambda_j = 1, \lambda \geq 0 \right\}$$

بازده به مقیاس ثابت

$$T^{1,2,3,4} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| X \geq \prod (\alpha x_j)^{\lambda_j}, Y \leq \prod (\alpha y_j)^{\lambda_j}, \sum \lambda_j = 1, \lambda \geq 0, \alpha \geq 0 \right\}$$

$\alpha^{\lambda_j} := \mu_j \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{n} \mu_j = \beta, \ \mu_j \geq 0 \rightsquigarrow$ چون این شرط به بیان حذف می‌کنیم $, \lambda_j = \operatorname{Ln} \mu_j / \alpha$

$\prod \mu_j = \alpha$

$$\longrightarrow T_{e} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| X \geq \prod x_j^{\lambda_j}, Y \leq \prod y_j^{\lambda_j}, \lambda \geq 0 \right\}$$

$$T_{v} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| X \geq \prod_{j=1}^{n} x_j^{\lambda_j}, Y \leq \prod_{j=1}^{n} y_j^{\lambda_j}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda \geq 0 \right\}$$

Subject: ۱۲۰

year. Month. Day.

مدل ضربی CCR :

مدل حاصلضربی با بازده به مقیاس ثابت در ماهیت ورودی :

$$\text{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \prod_{j=1}^{n} x_j^{\lambda_j} \leqslant x_p^{\theta} \quad \text{یا} \quad \theta x_p \qquad \text{I}$$

$$\prod_{j=1}^{n} y_j^{\lambda_j} \geqslant y_p$$

$$\lambda_j \geqslant 0$$

با معرفی متغیرهای کمکی s_i^- و s_r^+ داریم :

$$\text{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \prod_{j=1}^{n} x_j^{\lambda_j} \cdot e^{s_i^-} = x_{ip}^{\theta} \qquad i=1,\dots,m \qquad (a)$$

$$\prod_{j=1}^{n} y_{rj}^{\lambda_j} \cdot e^{-s_r^+} = y_{rp} \qquad r=1,\dots,s \qquad (b)$$

$$\lambda_j \geqslant 0, \; s_i^- \geqslant 0, \; s_r^+ \geqslant 0$$

از طرفین قیود (a) و (b) لگاریتم طبیعی می‌گیریم :

$$\text{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{Ln} x_{ij} + s_i^- = \theta \operatorname{Ln} x_{ip} \qquad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{Ln} y_{rj} - s_r^+ = \operatorname{Ln} y_{rp} \qquad r=1,\dots,s$$

$$\lambda_j \geqslant 0, \; s_i^- \geqslant 0, \; s_r^+ \geqslant 0$$

$$\text{if} \quad \begin{cases} \operatorname{Ln} x_{ij} := \hat{x}_{ij} & i=1,\dots,m \\ \operatorname{Ln} y_{rj} := \hat{y}_{rj} & j=1,\dots,n \\ & r=1,\dots,s \end{cases}$$

مدل زیر همان مدل CCR در ماهیت ورودی است حاصل می‌گردد :

$$\text{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum \lambda_j \hat{x}_{ij} + s_i^- = \theta \hat{x}_{ip}$$

$$\sum \lambda_j \hat{y}_{rj} - s_r^+ = \hat{y}_{rp}$$

$$\lambda \geq 0, \; s^- \geq 0, \; s^+ \geq 0$$

مدل حاصلضربی با بازده مقیاس متغیر:

$$\text{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{x}_{ij} + s_i^- = \theta \hat{x}_{ip} \qquad , \; i=1,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{y}_{rj} - s_r^+ = \hat{y}_{rp} \qquad , \; r=1,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \;, \quad \lambda \geq 0, \; s^- \geq 0, \; s^+ \geq 0$$

مسیر حرکت در مدل اخیر غیرشعاعی است (منحنی است)

تذکر: ممکن است مسیر حرکت خط راست هم باشد:

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2^{1/2} \cdot 4^{1/2} \\ 2^{1/2} \cdot 4^{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \in$$ پاره خط واصل بین آن دو

مدل غیرشعاعی (جمعی) حاصلضربی با بازده به مقیاس متغیر چنین خواهد بود:

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+$$

II

$$\text{s.t.} \quad \sum \lambda_j \hat{x}_{ij} + s_i^- = \hat{x}_{ip}$$

$$\sum \lambda_j \hat{y}_{rj} - s_r^+ = \hat{y}_{rp}$$

$$\sum \lambda_j = 1, \; \lambda \geq 0, \; s^- \geq 0, \; s^+ \geq 0$$

قضیه: DMUp کارای قوی است اگر و فقط اگر $\bar{s}^{*}=0, s^{+*}=0$ یعنی مقدار بهینه تابع مقصود در مدل فاز دوم صفر باشد.

برهان: ف: DMUp کارای قوی است

ح: $\bar{s}^{*}=0, s^{+*}=0$

برهان خلف: فرض کنید $(\bar{s}^{*}, s^{+*})\neq 0$.

$$\sum \lambda_j^{*}\hat{x}_j = \hat{x}_{ip} - \bar{s}^{*} \quad (\leqslant) \ \hat{x}_p$$

$$\sum \lambda_j^{*}\hat{y}_j = \hat{y}_p + s_r^{+*} \quad (\geqslant) \ \hat{y}_p$$

$$\neq \longrightarrow (\bar{s}^{*}, s^{+*})\neq 0$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}-\sum \lambda_j^{*}\hat{x}_j \\ \sum \lambda_j^{*}\hat{y}_j\end{pmatrix} \underset{\neq}{\geqslant} \begin{pmatrix}\hat{x}_p \\ \hat{y}_p\end{pmatrix}$$

$\times \longrightarrow$ چون DMUp کارای قوی است.

برعکس: ف: $\bar{s}^{*}=0, s^{+*}=0$

ح: DMUp کارای قوی است.

فرض کنید (فرض خلف) DMUp کارای قوی نباشد یعنی:

$$\exists \bar{\lambda}\geqslant 0 ; \begin{pmatrix}-\sum \bar{\lambda}_j \hat{x}_j \\ \sum \bar{\lambda}_j \hat{y}_j\end{pmatrix} \underset{\neq}{\geqslant} \begin{pmatrix}-\hat{x}_p \\ \hat{y}_p\end{pmatrix}$$

$$\neq \rightarrow \exists t ; -\sum \bar{\lambda}_j \hat{x}_{tj} > -\hat{x}_{tp} \longrightarrow \bar{s}_t = x_{tp} - \sum \bar{\lambda}_j \hat{x}_{tj} > 0$$

$$\sum \bar{\lambda}_j \hat{x}_{ij} = \hat{x}_{ip} \qquad i=1,\dots,m,\ i\neq t$$

$$\sum \bar{\lambda}_j \hat{y}_{rj} = \hat{y}_{rp}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bar{s}_t = x_{tp} - \sum \bar{\lambda}_j \hat{x}_{tj} > 0 \\ \bar{s}_i = 0, \quad i=1,\dots,m,\ i\neq t \\ s_r^{+} = 0 \\ \bar{\lambda}\geqslant 0 \end{cases} \longrightarrow$$ یک جواب شدنی مدل فاز II است $\Longrightarrow$

تابع هدف بهینه $\bar{s}^{*}=0, s^{+*}=0$ = تابع هدف به ازای جواب شدنی $= \bar{s}_t > 0$

تناقض

Subject: ۱۲۳

year. Month. Day.

پایداری مدل های حاصلضربی با بازده به مقیاس متغیر را نسبت به تغییر واحد و انتقال بررسی می کنیم:

تغییر واحد
$$\begin{cases} \hat{x}_{ij} \to \alpha_i \hat{x}_{ij} \\ \hat{y}_{rj} \to \beta_r \hat{y}_{rj} \end{cases}$$

$$\sum_j \lambda_j (\alpha_i \hat{x}_{ij}) + s_i^- = (\alpha_i \hat{x}_{ip}) \Rightarrow s_i^- = \alpha_i \left(\hat{x}_{ip} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{x}_{ij} \right)$$

بنابراین قیود نسبت به تغییر واحد پایا هستند.

$$\begin{cases} \hat{x}_{ij} \to \hat{x}_{ij} + \alpha_i \\ \hat{y}_{rj} \to \hat{y}_{rj} + \beta_r \end{cases}$$

$$\sum \lambda_j (\hat{x}_{ij} + \alpha_i) + s_i^- = (\hat{x}_{ip} + \alpha_i)$$

$$\Rightarrow \sum \lambda_j \hat{x}_{ij} + \cancel{\alpha_i \overbrace{\sum \lambda_j}^{1}} + s_i^- = \hat{x}_{ip} + \cancel{\alpha_i}$$

$$\Longrightarrow \sum \lambda_j \hat{x}_{ij} + s_i^- = \hat{x}_{ip} \Longrightarrow$$

قیود نسبت به انتقال پایاست. (توجه کنید نقش $\sum \lambda_j = 1$ در پایا بودن نسبت به انتقال بسیار مهم است)

همچنین با توجه به اینکه s_i^- و s_r^+ تغییر نمی کند (تحت انتقال) لذا تابع هدف نیز تحت انتقال پایاست.

فرض کنید $(\lambda_j^*, s_i^{-*}, s_r^{+*})$ جواب بهینه مدل III باشد داریم:

$$\hat{x}_{ip} = \sum \lambda_j^* \hat{x}_{ij} + s_i^- \longrightarrow \ln x_{ip} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \ln x_{ij} + \ln e^{s_i^{-*}}$$

$$\longrightarrow x_{ip} = \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\lambda_j^*} \cdot e^{s_i^{-*}} = a_i^* \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\lambda_j^*}, \quad i = 1, \dots, m$$

Page:

$e^{s_i^{-*}} = a_i^*$

$Q = x_0 A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \cdots A_n^{\lambda_n}$ — خروجی — ورودی‌ها

یعنی: پارامترها هستند.

Subject: ۱۲۴

year. Month. Day.

در اینجا پارامترها: λ_j^* ، a_i^* هستند

پس

$$\begin{cases} x_{ip} = \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\lambda_j^*} \cdot e^{\bar{s}_i^*} = a_i^* \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\lambda_j^*} & i=1,\dots,m \\ y_{rp} = \prod_{j=1}^{n} y_{rj}^{\lambda_j^*} \cdot e^{-s_r^{+*}} = b_r^* \prod_{j=1}^{n} y_{rj}^{\lambda_j^*} & r=1,\dots,s \end{cases}$$

که در آن

$$b_r^* = e^{-s_r^{+*}} \ (r=1,\dots,s) \ , \quad a_i^* = e^{\bar{s}_i^*} \ (i=1,\dots,m)$$

این مطلب نشان دهنده آن است که x_{ip} و y_{rp} را مورد نظر باشد بوسیله فرآیند تابع کاب - داگلاس تولید می‌گردد که پارامترهای تابع کاب داگلاس مورد نظر از حل مدل II بدست می‌آیند.

مدل II را مجدداً در نظر می‌گیریم و دوآل آنرا بدست می‌آوریم:

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{m} \bar{s}_i + \sum_{r=1}^{s} s_r^+$$

$$\text{s.t.} \quad \sum \lambda_j \hat{x}_{ij} + \bar{s}_i = \hat{x}_{ip} \quad \longleftarrow v_i$$

$$-\sum \lambda_j \hat{y}_{rj} \pm s_r^+ = -\hat{y}_{rp} \quad \longleftarrow u_r$$

$$\cancel{\sum \lambda_j = 1,} \quad \lambda \geq 0, \ \bar{s}_i \geq 0, \ s_r^+ \geq 0$$

دوآل:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ip} - \sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rp} \cancel{+\theta}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj} \cancel{+\theta} \geq 0 \quad j=1,\dots,n \qquad \text{III}$$

$$v_i \geq 1 \ , \ i=1,\dots,m$$

$$u_r \geq 1 \ , \ r=1,\dots,s$$

داریم،

$$\begin{cases} \hat{x}_{ij} = \ln x_{ij} \longrightarrow x_{ij} = e^{\hat{x}_{ij}} \\ \hat{y}_{rj} = \ln y_{rj} \longrightarrow y_{rj} = e^{\hat{y}_{rj}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj} = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Ln} x_{ij}^{v_i} - \sum_{r=1}^{s} \operatorname{Ln} y_{rj}^{u_r}$$

$$= \operatorname{Ln} \frac{\prod_i x_{ij}^{v_i}}{\prod_r y_{rj}^{u_r}}$$

$$\longrightarrow \quad \text{Min} \quad \operatorname{Ln} \frac{\prod_{i=1}^{m} x_{ip}^{v_i}}{\prod_{r=1}^{s} y_{rp}^{u_r}}$$

$$\text{s.t.} \quad \operatorname{Ln} \frac{\prod_i x_{ij}^{v_i}}{\prod_r y_{rj}^{u_r}} \geq 0$$

$$v_i \geq 1$$

$$u_r \geq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Max} \quad \frac{\prod_{r=1}^{s} y_{rp}^{u_r}}{\prod_{i=1}^{m} x_{ip}^{v_i}}$$

$$\text{s.t.} \quad \prod_{r=1}^{s} y_{rj}^{u_r} \Big/ \prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{v_i} \leq 1 \qquad (**) \qquad j=1,\dots,n$$

$$v_i \geq 1 \qquad i=1,\dots,m$$

$$u_r \geq 1 \qquad r=1,\dots,s$$

III برای بدست آوردن شرایط کارایی، منع کننده‌ها را در مدل II (با $\sum \lambda_j = 1$) بکار گرفته و از قیود III استفاده می‌کنیم:

$$S_i^- = \hat{x}_{ip} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \hat{x}_{ij} = \operatorname{Ln} x_{ip} - \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ln} x_{ij}^{\lambda_j^*}$$

$$\Longrightarrow S_i^- = \operatorname{Ln} \frac{x_{ip}}{\prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\lambda_j^*}}$$

Subject : ۱۲۶

year. Month. Day.

$$S_r^{+} = \sum \lambda_j^{*} \hat{y}_{rj} - \hat{y}_{rp} = \sum \ln y_{rj}^{\lambda_j^{*}} - \ln y_{rp}$$

$$\longrightarrow S_r^{+} = \ln \frac{\prod_{j=1}^{n} y_{rj}^{\lambda_j^{*}}}{y_{rp}}$$

$$\longrightarrow \operatorname{Max} \sum_{r=1}^{s} S_r^{+} + \sum_{i=1}^{m} S_i^{-} = \operatorname{Max} \sum_{r=1}^{s} \ln \frac{\prod y_{rj}^{\lambda_j^{*}}}{y_{rp}} + \sum_{i=1}^{m} \ln \frac{x_{ip}}{\prod x_{ij}^{\lambda_j^{*}}}$$

$$= \operatorname{Max} \ln \left(\frac{\prod_{r=1}^{s} \prod_{j=1}^{n} y_{rj}^{\lambda_j^{*}}}{y_{rp}} \Big/ \frac{\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\lambda_j^{*}}}{x_{ip}} \right)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Max} \frac{\dfrac{\prod_{r=1}^{s} \prod_{j=1}^{n} y_{rj}^{\lambda_j^{*}}}{y_{rp}}}{\dfrac{\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\lambda_j^{*}}}{x_{ip}}} \geqslant 1 \qquad (**) \qquad \text{IV}$$

$\ln 1 = 0$

کران پایین برای رابطه‌ی فوق وقتی حاصل می‌گردد که تمامی متغیرهای کمکی برابر صفر باشند.

بنابراین شرط کارایی برای مدل ضربی همان شرط کارایی در مدل جمعی یعنی $s^{+*}=0$ و $s^{-*}=0$ است.

تذکر: (IV) در صورتی در مقابل تغییر واحد پایا است که $\sum \lambda_j = 1$ باشد.

مدلهای ضربی در کاربردهای عملی DEA زیاد به کار گرفته نمی‌شوند و کاربرد زیادی ندارند. ولی مدلهای ضربی کاربرد بالقوه‌ای در بسط و توسعه مطالعات روی بازده به مقیاس توابعی دارند که مقعر نمی‌باشند.

Page:

عوامل مطلوب و عوامل نامطلوب
Desirable UnDesirable

داریم: $\forall r, \frac{\partial e}{\partial y_r} > 0$ ؛ $e=f(x,y)$

$\forall i, \frac{\partial e}{\partial x_i} < 0$

ولی همیشه این طور نیست. گاهی ممکن است افزایش y باعث افزایش کارایی نباشد یا افزایش ورودی باعث کاهش کارایی نباشد. مانند دود کارخانه، ضایعات کارخانه، معوقه بانکی و...

داده نامطلوب: ورودی است که نمی‌خواهیم آن را کاهش دهیم و خروجی است که نمی‌خواهیم آن را افزایش دهیم.

ورودی U.D:

$$\text{زباله } ۵ \text{ تن} \longrightarrow \boxed{A} \xrightarrow{\text{انرژی}} a$$

B بهتره

$$۱۰ \text{ تن} \longrightarrow \boxed{B} \xrightarrow{\text{انرژی}} a+k$$

$$۲۰ \text{ تن} \longrightarrow \boxed{B} \xrightarrow{\text{انرژی}} a \Longrightarrow$$

باز هم B بهتره چون زباله بیشتری جمع‌آوری کرده.

خروجی U.D: دود

$$\Longrightarrow \text{U.D}: \begin{cases} \exists r; & \frac{\partial e}{\partial y_r} < 0 \\ \exists i, & \frac{\partial e}{\partial x_i} > 0 \end{cases}$$

دیگه داریم:

$$\exists r; \frac{\partial e}{\partial y_r} < 0 \longrightarrow u_r < 0$$

$$\exists i; \frac{\partial e}{\partial x_i} > 0 \longrightarrow v_i < 0$$

Subject: ١٢٨

year. Month. Day.

مشتق نسبت به y_1:
$$\frac{u_1y_1+u_2y_2+\cdots+u_sy_s}{Vx_p} > \frac{u_1(y_1+\Delta)+u_2y_2+\cdots+u_sy_s}{Vx_p}$$

$$\Longrightarrow u_1<0$$

$$\Longrightarrow \quad Max \quad e=\frac{\sum_{r\in DO}u_ry_{rp}+\sum_{r\in UDO}u_ry_{rp}}{\sum_{i\in DI}v_ix_{ip}+\sum_{i\in UDI}v_ix_{ip}}$$ مدل کسری

$$s.t. \quad \frac{\sum_{r\in DO}u_ry_{rj}+\sum_{r\in UDO}u_ry_{rj}}{\sum_{i\in DI}v_ix_{ij}+\sum_{i\in UDI}v_ix_{ij}}\leq 1$$ [illegible]

I

$$u_r\geq\varepsilon \quad r\in DO$$
$$u_r\leq-\varepsilon \quad r\in UDO$$
$$v_i\geq\varepsilon \quad i\in DI$$
$$v_i\leq-\varepsilon \quad i\in UDI$$

[illegible]

مدل خطی $\Longrightarrow$

$$Max \quad \sum_{r\in DO}u_ry_{rp}+\sum_{r\in UDO}u_ry_{rp}$$

$$s.t. \quad \sum_{i\in DI}v_ix_{ip}+\sum_{i\in UDI}v_ix_{ip}=1$$

$$\sum_{r\in DO}u_ry_{rj}+\sum_{r\in UDO}u_ry_{rj}-\sum_{i\in DI}v_ix_{ij}-\sum_{i\in UDI}v_ix_{ij}\leq 0$$

II

$$u_r\geq 0 \quad r\in DO$$
$$u_r\leq 0 \quad r\in UDO$$
$$v_i\geq 0 \quad i\in DI$$
$$v_i\leq 0 \quad i\in UDI$$

دو مشکل در اینجا وجود دارد:

مشکل اول: تغییرات چارنز کوپر زمانی مجاز است که مخرج کسر اکیداً مثبت یا منفی در کل ناحیه شدنی باشد. ولی اینجا هیچ تضمینی وجود ندارد که $\sum_{i\in DI} v_i x_{ip}+\sum_{i\in UDI} v_i x_{ip} >(<) 0$.

اگر تمام v ها اکیداً مثبت بود تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$\frac{1}{\sum_{i\in DI} v_i x_{ip}+\sum_{i\in UDI} v_i x_{ip}} = t \qquad (III)$$

دوگان مدل II به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\text{Min} \quad \theta \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} && r\in DO \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \leq y_{rp} && r\in UDO \quad (1) \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ip} && i\in DI \quad (2) \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \geq \theta x_{ip} && i\in UDI \quad (3) \\
&\qquad \lambda \geq 0
\end{aligned} \qquad (IV)$$

در کل ورودی در نظر

در کل خروجی در نظر

مشکل دوم:

خروجی های نامطلوب را مثل ورودی ها تلقی کرد (۱) و ورودی های نامطلوب را مثل خروجی ها تلقی کرد. لذا با توجه به اینکه هدف افزایش ورودی های نامطلوب است چون مدل از نوع $\text{Min}\ \theta$ است، θ اجازه افزایش x_{ip} ($i\in UDI$) را نمی‌دهد (۳) و لذا این مدل، مدل خوبی نیست.

تذکر: اگر تغییر متغیر III را انجام دهیم در این صورت مسئله تبدیل به $\text{Min}\ -\theta$ می‌شود.

Subject: ۱۳۰

year. Month. Day.

و ورودی UDI را در توان افزایش داد و این یعنی مشکل مدل (IV) حل می‌شود ولی این با قید (۲) در تناقض است و مشکل دار است.

دیدگاه دوم:

یکی از ساده‌ترین روش‌های پیشنهاد شده که اکنون نیز کاربرد دارد روش زیر است:

ورودی‌های نامطلوب را در دسته خروجی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب را در دسته ورودی‌های مطلوب قرار دهید یعنی:

$$i \in UDI \Longrightarrow i \in DO$$
$$r \in UDO \Longrightarrow r \in DI$$

بنابراین مدل زیر در ماهیت ورودی حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ip} && i \in DI \\
& \sum \lambda_j x_{ij} \geq x_{ip} && i \in UDI \\
& \sum \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} && r \in DO \\
& \sum \lambda_j y_{rj} \leq \theta y_{rp} && r \in UDO \\
& \lambda_j \geq 0
\end{aligned}$$

سه ایراد به مدل اخیر وارد است:

ایراد اول:

در مدل در ماهیت ورودی تمامی x ها باید به یک نسبت تغییر کنند در حالی که y نیز خروجی است ولی ما خواهان یا نسبت θ در حال کاهش است. جهت حل این مشکل مدل زیر ارائه شد:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ip} && i \in DI \\
& \sum \lambda_j x_{ij} \geq \left(\tfrac{1}{\theta} \text{ یا } (1-\theta)\right) x_{ip} && i \in UDI \\
& \sum \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} && r \in DO \\
& \sum \lambda_j y_{rj} \leq y_{rp} && r \in UDO, \ \lambda \geq 0
\end{aligned}$$

مدل بالا با $\frac{1}{\theta}$ غیرخطی است

Page:

خروجی کمتر

Subject: ۱۳۱

year. Month. Day.

ایراد دوم (برنامه‌ریزی ایده‌آل تا آنی):

مشکل امکان‌پذیری است. DI در امکان‌پذیری مشکلی ندارد و مشکل با UDI است که در اینجا DO یعنی خروجی مطلوب در نظر گرفته شده است.

در اینجا با این خصوصیات خروجی بد گذاشته نیست

به لحاظ خروجی کمتر آیا همان ورودی‌ها را می‌دهد

که این مطلب لزوماً برقرار نیست.

$UDI = 20^t$ زباله $\longrightarrow a$

۱۵۰ و ۸۰ خروجی

DO آیا

$15^t \xrightarrow{\text{آیا}} a$

$10^t \xrightarrow{\text{آیا}} a$

$5 \xrightarrow{\text{آیا}} a$

ایراد سوم:

تمام خروجی‌های UD باید تابعی از خروجی‌های D باشد.

ضایعات = خروجی UD

ضایعات = Vt

$YEUDO \longrightarrow YEDI$

می‌خواهیم ضایعات کم کنیم در حالیکه تولید زیاد باشد و این ممکن نیست.

$\sum \lambda j\, y_{rj} \geq y_{rp}$ $\quad YEDO \longrightarrow$ تولید افزایش ↑

$\sum \lambda j\, y_{rj} \leq y_{rp}$ $\quad YEUDO \longrightarrow$ (ضایعات ↓) کاهش بدهیم

$\Longrightarrow$ باید در تناقض است

که چون در واقع این ورودی اصلی نیست.

دیدگاه سوم: دستکاری در داده‌ها

تغییر رفتار ورودی‌ها و خروجی‌ها به دو طریق امکان‌پذیر است:

معکوس کردن داده‌ها

قرینه کردن داده‌ها

(در روش‌های قبلی به داده‌ها دست نمی‌زدیم و مدل‌سازی را عوض می‌کردیم)

Subject: ۱۳۲

year. Month. Day. آنورد در صورت و آلین چه؟

y_{rj} ⟨ ① $\frac{1}{y_{rj}}$ ، ② $-y_{rj}$ $\xrightarrow{\text{اگر نسبت به شیء حساس باشد}}$ ③ انتقال $-y_{rj}+K>0$

این تغییرات اشکال دارد. وقتی می‌توان این تغییرات را انجام داد که جواب نسبت به این تغییرات پایدار باشد. مثلاً مدل CCR نسبت به انتقال پایا نیست پس نمی‌توان داده‌ها را انتقال داد و با CCR ارزیابی کرد. بنابراین مدلی استفاده می‌کنیم که نسبت به این سه تابع پایا باشد و جواب بهینه را تغییر ندهد.

در DEA دو چیز مهم است (یعنی بعد از دو تغییری (انتقال، تغییر واحد...) دو چیز نباید تغییر کند)

۱) category ثابت باشد. کارا ناکارا نشد / ناکارا کارا نشد

۲) مقدار کارایی ثابت باشد ۰/۸ → ۰/۴

تذکر: تغییر در مدل در سطرهای مدل مجاز نیستند. باید تغییر در منبع مدل باشد. در دیدگاه اول ($\frac{0/9}{0/4}$) در مدل T.D.T اشکال نداشت ولی در مدل دیگر ایراد دارد.

Page:

Subject: ۱۴۴
year. Month. Day.

LP: $\min \; cx$

$Ax \geq b$

$x \geq 0$

A و b و c پارامتر

x متغیر

در LP فرض معین و دقیق بودن A و b و c لحاظ است — x دقیق ← A, b, c دقیق

شرط تقسیم پذیری x را داریم و پارامترها را تقسیم پذیر فرض می‌کنیم. از لحاظ دقیق بودن آن‌ها.

در DEA اگر جنس A و b و c تغییر کند θ تغییر می‌کند زیرا:

$\theta = f(X, Y, m, s, n, T, M)$ *

تغییر در هر کدام ممکن روی θ تاثیر گذار باشد.

مثلاً: α از Integer $\xrightarrow{\text{تبدیل}}$ Real شبیه‌سازی ⇐ θ تغییر می‌کند.

تمام عواملی که در (*) هستند هم جنسشان لحاظ است و هم مقدارشان.

از اصول یکتایی ارزیابی که نتیجه می‌گیریم:
۱) T
۲) M
۳) جواب‌ها $\begin{cases} \theta \\ \left(\frac{X}{Y}\right) = B.M \end{cases}$

پیش فرض‌های DEA:

۱) نسبت به ورودی‌ها اکیداً نزولی (داده‌ها)

۲) " " خروجی‌ها " صعودی

۳) حقیقی بودن

۴) دقیق و معین بودن پارامترها و تصویر آن‌ها روی PPS.

Page:

DEA نقطه B.M می دهد ولی چون میزان ۲۰ آن را نمی دهد (زیرا این عدد دست مدیر و هیچ دست ما نیست)

Subject: ۱۲۴
year. Month. Day.

عوامل کنترل پذیر و عوامل غیرقابل کنترل:

اصطلاح سهم یک شاخص خوبی برای DEA نیست:

$$\text{سهم شاخص} = \frac{\overset{\text{تعداد خوب}}{a^{\uparrow}}}{\underset{\text{تعداد کل}}{b}} \rightarrow \text{item}$$

شرط تحدب باید برای itemها باشد نه شاخص.

$\text{سهم}\uparrow \rightarrow a\uparrow , b\downarrow$

محدودیت ها یا روی تک تک آیتم ها است و یا محدودیت روی همه (ادغامی از همه)

① محدودیت روی تک تک آیتم ها:

این محدودیت ها مختص یک DMU است. مانند نمره - نمره هر دانشجو مستقل از نمره بقیه است که حداکثر می تواند ۲۰ شود

فرض کنید بعضی از ورودی ها و خروجی ها باید در یک بازه خاص صدق کنند

$$\begin{aligned}
\text{Min}\quad & \theta \\
\text{s.t.}\quad & \sum \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{ip}, \quad \forall i \\
& \sum \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp}, \quad \forall r \\
& \sum \lambda_j x_{ij} \in A_i \quad i \in I \\
& \sum \lambda_j y_{rj} \in A_r' \quad r \in O
\end{aligned}$$

که در آن A_i و A_r مجموعه هایی هستند که ورودی ها و خروجی ها را به شرایط خاص وادار می کنند.

مثلاً اگر خروجی اول نمره باشد:

$$\sum \lambda_j y_{1j} \in [0, 20]$$

توجه کنید که مجموعه ها ممکن است محدب نباشد. مثلاً اگر گفته شود که خروجی اول ممکن است در بازه $[0,5]$ یا $[10,20]$ تغییر کند در این صورت مسئله LP نیست بلکه Mix Int است و باید لذا با متغیرهای دودویی حل شود:

$$\sum \lambda_j y_{1j} \in [0,5] \cup [10,20]$$

Subject : ۱۴۵

year. Month. Day.

۲) ادغامی از شش حضورها باید در محدودیت صدق کند

$$\sum \Big(\sum_j \lambda_j^* x_{ij}\Big) \in A$$

باید هر DMU ها یک λ* داشته باشیم (λ* مشابه در DMU ها باید داشته باشیم)

DMU_1: Min θ_1

s.t. $\sum_j \lambda_j^1 x_{ij} \le \theta_1 x_{i1}$

$\sum \lambda_j^1 y_{rj} \ge y_{r1}$

$\lambda_j^1 \ge 0$

جدایی‌پذیر ← Min $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$

s.t.
$x_1 + x_2 \le 2$
(I) $2x_1 - x_2 \le 7$
$x_3 + x_4 \le 10$
$x_1, x_2 \ge 0,\ x_3, x_4 \ge 0$

DMU_2: Min θ_2

s.t. $\sum \lambda_j^2 x_{ij} \le \theta_2 x_{i2}$

$\sum \lambda_j^2 y_{rj} \ge y_{r2}$

$\lambda_j^2 \ge 0$

LP_1: Min $2x_1 + x_2$
s.t. $x_1 + x_2 \le 2$
$2x_1 - x_2 \le 7$
$x_1, x_2 \ge 0$

LP_2: Min $3x_3 + x_4$
$x_3 + x_4 \le 10$
$x_3, x_4 \ge 0$

⋮

DMU_n: Min θ_n

ولی با افزودن قید $x_2 + x_3 \le 8$ به LP (I) دیگر جدایی‌پذیر نیست.

s.t. $\sum \lambda_j^n x_{ij} \le \theta_n x_{in}$

$\sum \lambda_j^n y_{rj} \ge y_{rn}$

$\lambda_j^n \ge 0$

n LP فوق کاملاً مستقل از هم هستند و لذا می‌توان آنها را با هم ترکیب و یک LP به صورت زیر بدست آورد. به LP حاصل قید (*) را اضافه می‌کنیم با این قید دیگر مسأله جدایی‌پذیر (separate) نخواهد بود.

چون B.M ها DMU ها مستقل‌اند (چون فقط در ازای DMU p ، BM آن ارائه می‌آید) لذا همه DMU ها θ ارزیابی می‌توانیم در یک مدل باشد (I) جدا حل کنیم.

Subject : ۱۲۷

year. Month. Day.

(I) $\quad Min \sum_{p=1}^{n} \theta_p$

$$s.t. \quad \sum \lambda_j^p x_{ij} \leqslant \theta_p x_{ip} \qquad i=1,\dots,m,\ p=1,\dots,n$$

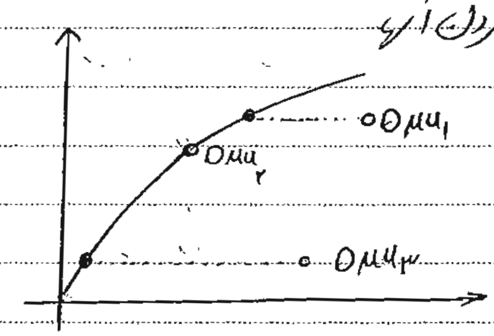
$$\sum \lambda_j^p y_{rj} \geqslant y_{rp} \qquad r=1,\dots,s,\ p=1,\dots,n$$

$$\sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p y_{rj} \right) \underset{\in A_1}{=} cte = 150 = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}$$

می‌خواهیم مجموع خروجی‌ها ثابت باشد

تفسیر هندسی مدل (I) در جهت ورودی:

سه واحد تصمیم گیرنده را در شکل مقابل در نظر بگیرید. هدف تصویر کردن آنها روی مرز کارا است، مشروط بر اینکه مجموع خروجی‌ها تغییر نکند:

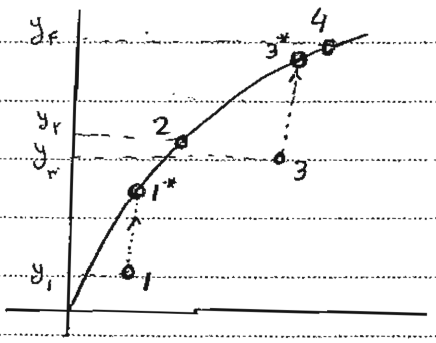


$$y_1 + y_2 + y_3 = y_1^* + y_2^* + y_3^* \qquad (*)$$

چون در جهت ورودی، خروجی‌ها تغییر نمی‌کند لذا شرط (*) برقرار است.

$y_1^* =$ خروجی target، DMU1 است

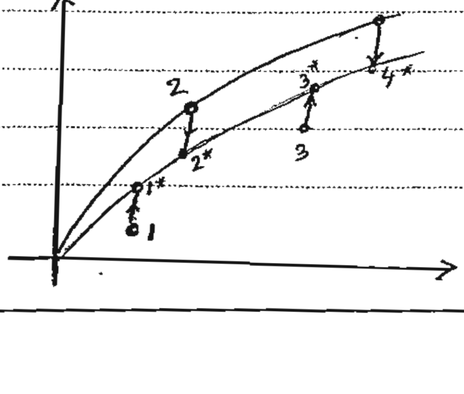
تفسیر هندسی مدل (I) در جهت خروجی:



فرض کنید می‌خواهیم پس از تصویر کردن مجموع خروجی‌ها ثابت باقی بماند

$$(*) \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = K = y_1^* + y_2^* + y_3^* + y_4^*$$

بوضوح، فقط با افزایش خروجی‌ها شرط (*) برقرار نخواهد بود. از این رو جهت حفظ شرط (*) بعضی از آنها باید اجازه‌ی کاهش در خروجی را به ما بدهند (در واقع نوعی بده بستان بین خروجی‌ها صورت می‌پذیرد.



Subject: ۱۳۷

year. Month. Day.

مدل I در ماهیت خروجی به صورت زیر است:

$$\text{Max} \sum_{p=1}^{n} \varphi_p$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p x_{ij} \leq x_{ip}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p y_{rj} \geq \varphi_p y_{rp}$$

$$\lambda_j^p \geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$\sum_p \Big(\sum_j \lambda_j^p y_{rj} \Big) = cte \qquad (**)$$

فرض کنید قید (**) روی خروجی اول باشد یعنی مجموع خروجی های مدل ثابت باشند. (از اگر همه ورودی‌ها را ثابت بگیریم مجموع خروجی‌ها ثابت است) حل صفحه قبل

بدیهی است به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum \lambda_j^p y_{1j} + s'_p - s''_p = \varphi_p y_{1p} \qquad p=1,\dots,n \qquad (1)$$

اسلک‌ها آزاد

دو حالت پیش می‌آید:

الف) مهم نباشد خروجی کدام DMU افزایش یا کاهش یابد. در این صورت قید (1) برقرار است.

ب) مهم است که خروجی‌ها تا حد امکان کاهش نیابند. یعنی برای ما مهم است که قید (1) تا حد امکان بزرگتر مساوی صفر باشد یعنی

$$\sum \lambda_j^p y_{1j} \geq \varphi_p y_{1p}$$

یعنی تا حد امکان s'_p به صفر نزدیک شود در حالت مطلوب این است که $s'_p = 0$ باشد.

پس مدلی نیاز داریم که در گام اول φ_p ها را ماکزیمم و تا حد امکان s'_p ها را کوچک کند یعنی:

از جمع تا قید (1) دور

$$\text{Max} \sum_{p=1}^{n} \varphi_p - \varepsilon \sum_{p=1}^{n} s'_p$$

$$\text{s.t.} \quad \sum \lambda_j^p x_{ij} \leq x_{ip}$$

$$\sum \lambda_j^p y_{rj} + s'_p - s''_p = \varphi_p y_{rp} \qquad \lambda^p \geq 0$$

$$\sum \Big(\sum \lambda_j^p y_{rj} \Big) = cte = \sum y_{rj}$$

Subject: ۱۳۸
year. Month. Day.

برای این کار centerlize کردن (تجمیع) گوییم.

در مسأله centerlize کردن (جهت نوشتن مدل و یافتن مطلوب‌ترین بده‌بستان بین واحدها) x ورودی‌ها را جمع کرده و از اول به هر واحد ورودی‌هایی را اختصاص می‌دهیم. ممکن است این ورودی جدید از قبلی کمتر یا بیشتر باشد. این تخصیص ورودی به هر واحد با این شرط صورت می‌گیرد که مجموع خروجی جدید از مجموع خروجی‌های قبلی بیشتر شود.

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_{mj} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{تخصیص مجدد}} \begin{pmatrix} \bar{x}_{11} \\ \vdots \\ \bar{x}_{m1} \end{pmatrix} \overset{?}{=} \longrightarrow \bar{y}_1 \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \bar{x}_{1n} \\ \vdots \\ \bar{x}_{mn} \end{pmatrix} \overset{?}{=} \longrightarrow \bar{y}_n$$

پیشنهاد: $\sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j \geq \sum_{j=1}^{n} y_j$

$\bar{y}_j$ بردار است. پس باید تک تک مولفه‌ها بزرگتر مساوی باشند.

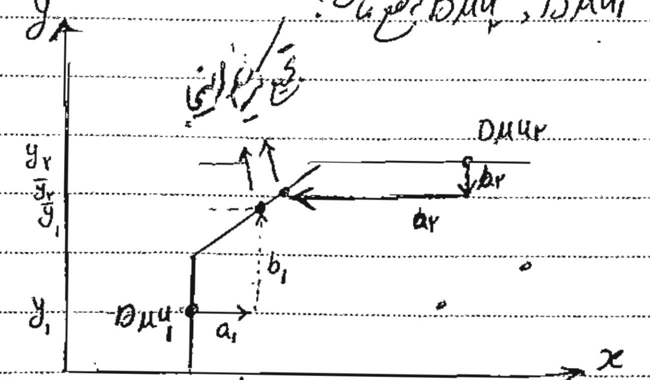
تعبیر هندسی:

بده‌بستان باید طوری صورت گیرد $\sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j \geq \sum_{j=1}^{n} y_j$ از نظر هندسی یعنی چه؟

DMU_1 و DMU_2 با مختصات $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید.

هدف: بررسی این است که آیا بده‌بستان بین DMU_1 و DMU_2 به نفع است؟

(پس اگر تجمیع شوند باید کارا شوند)



ورودی DMU_1 به اندازه a_1 افزایش دادیم ولی در عوض ورودی DMU_2 را به اندازه a_2 کاهش دادیم واضح است $a_2 > a_1$ یعنی مقداری از ورودی‌ها اضافه می‌ماند که می‌توانیم به واحد دیگر داد. با افزایش ورودی DMU_1 خروجی آن به $\bar{y}_1$ می‌رسد در آن $\bar{y}_1 = y_1 + b_1$ و با کاهش ورودی DMU_2 خروجی آن به $\bar{y}_2$ می‌رسد $\bar{y}_2 = y_2 - b_2$

Page:

$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 > y_1 + y_2 \longrightarrow$ بده‌بستان به نفع است.

Subject: ۱۳۹
year. Month. Day.

تذکر: بعضی از عوامل قابل کنترل نیست و دست ما نیست یعنی بعضی از ورودی ها و خروجی ها قابل کنترل و تغییر نیستند یعنی ما کنترلی روی آن شاخص نداریم. مثل سن، مدرک و...

به عنوان مثال: اگر یکی از ورودی ها مثل افراد باشد، اگر فردی ناکارا باشد به او نمی‌توانیم بگوییم برای اینکه کارا شوی باید ۲۰٪ از ورودی خود (یعنی خودت) را کم کنی که این امکان پذیر نیست. لذا:

چنین شاخص هایی اجازه کاهش ورودی را نداریم. محدودیت متناظر ورودی ها به صورت زیر تبدیل خواهد شد (کاملاً غیر قابل کنترل):

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = x_{ip}$$

اگر DMU_p حداکثر ۲۰٪ اجازه کاهش ورودی داشته باشد:

$$0/8\, x_{ip} \leq \sum \lambda_j x_{ij} \leq x_{ip}$$

این قید ممکنه برای برخی DMU ها کاملاً غیر قابل کنترل و برای برخی دیگر درصدی قابل کنترل باشد. به عنوان مثال:

فرض کنید حداقل تعداد پرسنل هر بانک باید ۴ نفر باشد. و ورودی های (پرسنل) هر شعبه حداکثر ۲۰٪ اجازه کاهش دارند. سه شعبه زیر با ۴، ۱۰ و ۲۰ پرسنل را در نظر بگیرید:

$DMU_1 \longrightarrow 4$

$DMU_2 \longrightarrow 10$

$DMU_3 \longrightarrow 20$

در ارزیابی DMU_1، قیدی کاملاً غیر قابل کنترل خواهد داشت زیرا حداقل پرسنل ۴ نفر است و این واحد فقط ۴ نفر دارد. پس اجازه کاهش ورودی در این بانک را نداریم:

$$\sum \lambda_j x_{1j} = 4$$

در ارزیابی DMU_2 و DMU_3، قید درصدی قابل کنترل خواهیم داشت:

$$0/8 \times 10 \leq \sum \lambda_j x_{2j} \leq 10$$

$$0/8 \times 20 \leq \sum \lambda_j x_{3j} \leq 20$$

Page:

Subject: ۱۴۰
year. Month. Day.

$$\text{Min } \theta$$
$$\text{s.t. } \sum \lambda_j x_{1j} \leq \theta x_{1p}$$
$$\sum \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ip} \qquad i=2,\dots,m$$
$$\sum \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} \qquad r=1,\dots,s$$
$$\lambda \geq 0$$

اگر ورودی اول غیرقابل کنترل باشد $\Rightarrow$

$$\text{Min } \theta$$
$$\text{s.t. } \sum \lambda_j x_{1j} = x_{1p}$$
$$\sum \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ip} \qquad i \neq 1$$
$$\sum \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} \qquad \forall r$$
$$\lambda \geq 0$$

BM :
$$\text{Min } Z_p = \theta - \varepsilon\Big(\sum_{i\in D} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\Big)$$

مقادیر متغیرهای کمکی در کدام از مدل‌ها (ε) باید دستکاری شوند تا تحت تأثیر قرار بگیرد
پس فقط متغیرهای قابل کنترل هستند که می‌توانیم دستکاری کنیم

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{ip} \qquad i\in D \qquad \leftarrow v_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ip} \qquad i\in ND \qquad \leftarrow v_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp} \qquad u_r$$
$$\lambda_j \geq 0$$

I

دوآل مدل فوق :

$$\text{Max } \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp} - \sum_{i\in ND} v_i x_{ip}$$
$$\text{s.t. } \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i\in D} v_i x_{ij} - \sum_{i\in ND} v_i x_{ij} \leq 0 \qquad j=1,\dots,n$$
$$\sum_{i\in D} v_i x_{ip} = 1$$
$$-v_i \leq -\varepsilon \qquad i\in D \qquad (a)$$
$$-v_i \leq 0 \qquad i\in ND \qquad (b)$$
$$-u_r \leq -\varepsilon \qquad \forall r \qquad (c)$$

II

باتوجه به قید (b) ضرایب متناظر ورودی‌های غیرقابل کنترل ممکن است صفر باشد ولی ضرایب متناظر دیگر متغیرها
(اعم از ورودی یا خروجی) بایستی مثبت باشد (مشابه قید (a)، (c))

مشکل این است که ورودی‌های غیرقابل کنترل در کارایی مطلق DMU_p تأثیر دارد. این دلیل برای مدل خارج تصمیم‌گیری.

NOURI نوری

Page:

Subject: ۱۴۱

year. Month. Day.

بنابر قضیه اساسی دوگان داریم:

$$\theta^* - \varepsilon\left(\sum_{i\in D} s_i^{-*} + \sum_{r=1}^{s} s_r^{+*}\right) = \sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rp} - \sum_{i\in ND} v_i^* x_{ip}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید ورودی‌های غیر قابل کنترل بطور غیر مستقیم روی کارایی تاثیر می‌گذارند زیرا:

$$\text{if } \underset{i\in ND}{v_i^*} > 0 \longrightarrow$$ مقدار p ام کاهش می‌یابد یعنی مقدار کارایی BM کاهش می‌یابد.

مدلهای DEA با عوامل غیر قابل کنترل با استفاده از مدلهای خارج قسمتی:

اگر تمام ورودی ها قابل کنترل باشند:

کارایی مطلق $$e_{CCR} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip}}$$,

$$e_{BCC} = \frac{\sum_r u_r y_{rp} + u_0}{\sum_i v_i x_{ip}}$$

اگر بعضی از ورودی‌ها غیر قابل کنترل باشند:

$$\text{Max} \quad e_p = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}}{\sum_{i\in D} v_i x_{ip}} \qquad \text{III}$$

$$\text{s.t.} \quad e_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i\in D} v_i x_{ij} + \sum_{i\in ND} v_i (x_{ij} - x_{ip})} \leqslant 1 \ , \ j = 1, \dots, n$$

(خود غیر قابل کنترلها وارد نشده اند اختلاف آنها با واحد p ام وارد شده است)

$$u_r \geqslant \varepsilon \ , \ r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geqslant \varepsilon \ , \ i \in D$$

$$v_i \geqslant 0 \ , \ i \in ND$$

قید e_j را به این صورت نیز می‌توان نوشت:

$$e_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i\in ND} v_i (x_{ij} - x_{ip})}{\sum_{i\in D} v_i x_{ip}} \quad j = 1, \dots, n, \ j \neq p$$

Page:

در مدل خارج قسمتی IV دیگر در تابع هدف ورودی های غیرقابل کنترل نداریم.

Subject: ۱۴۲

year. Month. Day.

اگر مدل III را با استفاده از تبدیلات چارنز کوپر خطی کنیم و سپس دوآل آن را بدست آوریم همان مدل I یعنی BM_{BCC} حاصل می‌شود زیرا:

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i\in D} v_i x_{ij} - \sum_{i\in ND} v_i (x_{ij} - x_{ip}) \leqslant 0 \quad , \forall j \quad \leftarrow \lambda_j$$

$$\sum_{i\in D} v_i x_{ip} = 1 \quad \leftarrow \theta \qquad \text{IV}$$

$$u_r \geqslant \varepsilon \quad , \forall r \quad \leftarrow s_r^+$$

$$v_i \geqslant \varepsilon \quad , i\in D \quad \leftarrow s_i^-$$

$$v_i \geqslant 0 \quad , i\in ND \quad \leftarrow s_i^-$$

دوآل مدل فوق را بدست می‌آوریم:

$$\text{Min} \quad \theta - \varepsilon\left(\sum_{i\in D} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp} \qquad \text{V}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{ip} \quad i\in D$$

$$(a) \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_{ij} - x_{ip}) + s_i^- = 0 \quad i\in ND$$

$$\lambda \geqslant 0 , s^- \geqslant 0 , s^+ \geqslant 0$$

$$(a): \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ip} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \qquad i\in ND$$

تذکر: همانطور که ملاحظه می‌کنید تنها تفاوت مدل V با مدل BM یعنی مدل I در قید (a) می‌باشد بنابراین در حالتی که مدل BCC مدنظر باشد چون $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ هر دو مدل یکسان می‌شوند

$$(a) \rightarrow \underbrace{\frac{\sum \lambda_j x_{ij}}{\sum \lambda_j}}_{\text{ترکیب محدب}} + \frac{s_i^-}{\sum \lambda_j} = x_{ip}$$

انگار دارد x_{ip} را با ترکیب محدبی از ورودی های ND، DMU ها مقایسه می‌کند.

Subject: year. Month. Day.

تذکر: اگر تمام ورودی‌ها و یا خروجی‌ها غیر قابل کنترل باشند این مدلها قابل اجرا نیست (در اینجا فرض وجود دارد که باید خروجی و ورودی قابل کنترل وجود داشته باشد)

مدلهای DEA برای ورودیها و خروجی‌های غیر قابل کنترل (ND):

فرض: D_x: اندیس ورودی‌های قابل کنترل

ND_x: اندیس ورودی‌های غیر قابل کنترل

D_y: اندیس خروجی‌های قابل کنترل

ND_y: اندیس خروجی‌های غیر قابل کنترل

$$\text{Max} \quad e_p = \frac{\sum_{r\in D_y} u_r y_{rp}}{\sum_{i\in D_x} v_i x_{ip}}$$

$$\text{s.t.} \quad e_j = \frac{\sum_{r\in D_y} u_r y_{rj} + \sum_{r\in ND_y} u_r (y_{rj} - y_{rp})}{\sum_{i\in D_x} v_i x_{ij} + \sum_{i\in ND_x} v_i (x_{ij} - x_{ip})} \le 1, \quad \forall j$$

$$u_r \ge \varepsilon \quad r\in D_y$$
$$u_r \ge 0, \quad r\in ND_y$$
$$v_i \ge \varepsilon, \quad i\in D_x$$
$$v_i \ge 0, \quad i\in ND_x$$

با تبدیلات چارنز کوپر مدل فوق را خطی می‌کنیم:

$$\text{Max} \quad \sum_{r\in D_y} u_r y_{rp}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r\in D_y} u_r y_{rj} + \sum_{r\in ND_y} u_r (y_{rj} - y_{rp}) - \sum_{i\in D_x} v_i x_{ij} - \sum_{i\in ND_x} v_i (x_{ij} - x_{ip}) \le 0, \quad \forall j \quad (\lambda_j)$$

$$\sum_{i\in D_x} v_i x_{ip} = 1, \quad \leftarrow \theta$$
$$u_r \ge \varepsilon, \quad r\in D_y \leftarrow s_r^+$$
$$u_r \ge 0, \quad r\in ND_y \leftarrow s_r^+$$
$$v_i \ge \varepsilon, \quad i\in D_x \leftarrow$$
$$v_i \ge 0, \quad i\in ND_x$$

$u_r \ge \varepsilon, \ r\in D_y \cup ND_y$

یا

$v_i \ge \varepsilon, \ i\in D_x \cup ND_x$

Subject: ۱۴۴

year. Month. Day.

دوگان مدل فوق :

$$\text{Min} \quad \theta - \varepsilon\left(\sum_{i\in D_x} S_i^- + \sum_{r\in D_y} S_r^+\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - S_r^+ = y_{rp} \qquad r\in D_y$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y_{rj} - y_{rp}) - S_r^+ = 0 \qquad r\in ND_y$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + S_i^- - \theta x_{ip} = 0 \qquad i\in D_x$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_{ij} - x_{ip}) + S_i^- = 0 \qquad i\in ND_x$$

$$\underset{j=1,\dots,n}{\lambda_j \geq 0}, \quad \underset{i\in D_x\cup ND_x}{S_i^- \geq 0}, \quad \underset{r\in D_y\cup ND_y}{S_r^+ \geq 0}$$

$$\Longrightarrow \text{Min} \quad \theta - \varepsilon\left(\sum_{i\in D_x} S_i^- + \sum_{r\in D_y} S_r^+\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + S_i^- = \theta x_{ip}, \quad i\in D_x$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + S_i^- = x_{ip}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j, \quad i\in ND_x$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - S_r^+ = y_{rp}, \quad r\in D_y$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - S_r^+ = y_{rp}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j, \quad r\in ND_y$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j=1,\dots,n$$

$$S_i^- \geq 0, \quad i\in D_x\cup ND_x$$

$$S_r^+ \geq 0, \quad r\in D_y\cup ND_y$$

Page:

Subject : ۱۴۵

year. Month. Day.

مدل‌های DEA برای عوامل تقریباً غیرقابل کنترل (درصدی کنترل‌پذیر)

فرض کنیم $0 \le \alpha_i \le 1$ و $0 \le \beta_r \le 1$ به ترتیب نشان دهنده درصد قابل کنترل (کنترل‌پذیری) ورودی iام و خروجی rام باشند. $\alpha_i = 1$ یعنی ورودی iام کاملاً کنترل‌پذیر است و $\alpha_i = 0$ یعنی ورودی iام کاملاً غیرقابل کنترل می‌باشد. $0 < \alpha_i < 1$ یعنی ورودی iام درصدی کنترل‌پذیر است.

فرض کنید در ارزیابی DMU_p مولفه x_{tp} (ورودی tام) تا حدودی کنترل‌پذیر باشد و x_{ip} $(i \neq t)$ کاملاً قابل کنترل باشند پس اگر $0 < \alpha_t < 1$ سهم کنترل‌پذیری آن باشد آنگاه $\alpha_t x_{tp}$ مقدار ورودی tام قابل کنترل و $(1-\alpha_t)x_{tp}$ مقدار ورودی tام غیرقابل کنترل است پس:

$$\text{Max} \quad e_p = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}}{\sum_{i \neq t} v_i x_{ip} + v_t(\alpha_t x_{tp})}$$

$$\text{s.t.} \quad e_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i \neq t} v_i x_{ij} + \underbrace{v_t(\alpha_t x_{tj})}_{\text{مقدار قابل کنترل}} + \underbrace{v_t(1-\alpha_t)(x_{tj} - x_{tp})}_{\text{درصد غیرقابل کنترل}}} \le 1$$

$$v_i \ge \varepsilon$$

$$u_r \ge \varepsilon$$

$$\rightarrow e_j = \frac{\sum u_r y_{rj}}{\sum_{i \neq t} v_i x_{ij} + v_t[x_{tj} - (1-\alpha_t)x_{tp}]}$$

Page:

Subject: ۱۴۶

year. Month. Day.

فرض کنید تمام ورودی‌ها و خروجی تقریباً کنترل پذیر باشند:

$$\text{Max} \quad e_p = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r(\beta_r y_{rp})}{\sum_{i=1}^{m} v_i(d_i x_{ip})}$$

کنترل پذیر — غیرقابل کنترل

$$\text{s.t.} \quad e_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r(\beta_r y_{rj}) + \sum_{r=1}^{s} u_r(1-\beta_r)(y_{rj}-y_{rp})}{\sum v_i(d_i x_{ij}) + \sum v_i(1-d_i)(x_{ij}-x_{ip})} \leq 1$$

$$u_r \geq \varepsilon$$

$$v_i \geq \varepsilon$$

$$e_j = \frac{\sum u_r(\beta_r y_{rj}) + \sum\left[u_r(y_{rj}-y_{rp}) - u_r\beta_r y_{rj} + u_r\beta_r y_{rp}\right]}{\sum v_i(d_i x_{ij}) + \sum\left[v_i(x_{ij}-x_{ip}) - v_i d_i x_{ij} + v_i d_i x_{ip}\right]}$$

$$= \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r\left[y_{rj} - y_{rp} + \beta_r y_{rp}\right]}{\sum_{i=1}^{m} v_i\left[x_{ij} - x_{ip} + d_i x_{ip}\right]} =$$

$$= \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r\left[y_{rj} - (1-\beta_r)y_{rp}\right]}{\sum_{i=1}^{m} v_i\left[x_{ij} - (1-d_i)x_{ip}\right]}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Max} \quad e_p = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r\beta_r y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i d_i x_{ip}} \qquad \text{I}$$

$$\text{s.t.} \quad e_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r\left[y_{rj} - (1-\beta_r)y_{rp}\right]}{\sum_{i=1}^{m} v_i\left[x_{ij} - (1-d_i)x_{ip}\right]} \leq 1$$

$$u_r \geq \varepsilon$$

$$v_i \geq \varepsilon$$

با بکار بردن تبدیلات مناسب مدل I را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r \beta_r y_{rp}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r \left(y_{rj} - (1-\beta_r) y_{rp} \right) - \sum_{i=1}^{m} v_i \left(x_{ij} - (1-d_i) x_{ip} \right) \leq 0 \quad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i d_i x_{ip} = 1$$

$$v_i \geq \varepsilon , \; u_r \geq \varepsilon$$

دوآل مدل فوق بدین صورت است:

$$\text{Min} \quad \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ - \sum \lambda_j (1-\beta_r) y_{rp} = \beta_r y_{rp}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (1-d_i) x_{ip} + \theta d_i x_{ip} - s_i^- = 0$$

$$\lambda_j \geq 0 , \; s_i^- \geq 0 , \; s_r^+ \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Min} \quad \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \left(\beta_r + (1-\beta_r) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right) y_{rp} \quad , r=1,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \left(\theta d_i + (1-d_i) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right) x_{ip} \quad , i=1,\dots,m$$

II

$$\lambda_j \geq 0 , \; s_i^- \geq 0 , \; s_r^+ \geq 0$$

Subject : ۱۴۸
year. Month. Day.

نکته: از توسیع مدل (II) برای BCC قید $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$ به مجموعه قیود اضافه خواهد شد و مسئله به شکل زیر تبدیل خواهد شد که با اهمیت β_r حذف می‌شود. و لذا شرط درصد کنترل پذیری خروجی‌ها حذف خواهد شد پس:

مدل BCC در ماهیت ورودی، درصد کنترل پذیری برای خروجی‌ها وجود ندارد و مدل BCC در ماهیت خروجی درصد کنترل پذیری برای ورودی‌ها وجود ندارد.

if BCC $\xrightarrow{II}$ $\quad \text{Min} \quad \theta-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}s_i^-+\sum_{r=1}^{s}s_r^+\right)$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{rp}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_i^-=(\theta\alpha_i+(1-\alpha_i))x_{ip}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$$

$$\lambda_j\geq 0,\ s_i^-\geq 0,\ s_r^+\geq 0$$

نکته: مدل II قدرت تشخیص نسبت به مدل‌های قبلی دارد زیرا با تغییر متغیر زیر، مدل تبدیل به CCR اصلی می‌گردد:

$$(*)\begin{cases}\hat{x}_{ij}=x_{ij}-(1-\alpha_i)x_{ip}\\ \hat{y}_{rj}=y_{rj}-(1-\beta_r)y_{rp}\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری در (II)}}$ $\sum\lambda_j\left[\hat{x}_{ij}+(1-\alpha_i)x_{ip}\right]+s_i^-=\theta\alpha_i x_{ip}+(1-\alpha_i)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ip}$

$\Longrightarrow \sum\lambda_j\hat{x}_{ij}+s_i^-=\theta\alpha_i x_{ip}$

از طرفی بنابر (*): $\hat{x}_{ip}=x_{ip}-(1-\alpha_i)x_{ip}=\alpha_i x_{ip}$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\hat{x}_{ij}+s_i^-=\theta\hat{x}_{ip},\ i=1,\dots,m\\ \sum\lambda_j\hat{y}_{rj}-s_r^+=\hat{y}_{rp},\ r=1,\dots,s\end{cases}$ به همین ترتیب.

پس همان مدل CCR اصلی حاصل گردید.

کارایی هزینه و درآمد:

کارایی هزینه وقتی محاسبه می‌شود که برای تمام ورودی‌ها بتوانیم هزینه‌ای را متصور شویم (هزینه‌ها قطعی و ثابت باشند)

و اگر قیمت همه خروجی‌ها را داشتیم کارایی درآمدی را می‌توانیم محاسبه کنیم.

حال اگر قیمت خروجی‌ها و هزینه ورودی‌ها همگی معلوم باشند کارایی اقتصادی محاسبه می‌شود.

کارایی هزینه:

ورودی‌ها — هزینه

$$x_1 \longrightarrow c_1$$
$$\vdots$$
$$x_m \longrightarrow c_m$$

$$\begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix}$$

قابل قیمت‌گذاری نیستند.

اگر $m=1$ کارایی هزینه با کارایی تکنیکی معادل است که قبلاً به این موضوع اشاره کردیم:

$$CE_p = \text{Min} \quad \theta$$
$$\begin{pmatrix} \theta \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip} \\ y_p \end{pmatrix} \in T_c$$

تکنولوژی تولید در R^{m+s} وارد R^{1+s} شده است. زیرا می‌خواهیم m ورودی را در هزینه‌شان ضرب و سپس با هم جمع کنیم و یک اسکالر بدست آوریم و بگوییم کل هزینه را دارد. توجه داشته باشید در مدل‌سازی همیشه می‌توان وزن یک ورودی یا یک خروجی را یک در نظر گرفت زیرا: صورت و مخرج را بر u_1 تقسیم می‌کنیم

$$\frac{u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_s y_s}{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_m x_m} = \frac{y_1 + u'_2 y_2 + \dots + u'_s y_s}{v'_1 x_1 + \dots + v'_m x_m}$$

$(a): \ \sum \lambda_j C x_j \leqslant \theta C x_p \xrightarrow{\text{بنابراین}} C\left(\sum \lambda_j x_j\right) \leqslant C \theta x_p$

Subject : ۱۵۰
year. Month. Day.

در اینجا T_c خروجی ترکیب محدب را از xها بدست آورده و سپس در بردار C ضرب کنیم.

بنابراین در اینجا یک ورودی داریم (ترکیبی از همه ورودی‌ها) لذا برای این ورودی (CX) وزنی متصور نمی‌شویم.

DMU_p کارای هزینه‌ای است اگر و فقط اگر در T مربوط نامطلوب باشد یعنی هیچ $\begin{pmatrix} CX \\ Y \end{pmatrix}$ ای موجود نباشد که

$$\begin{pmatrix} -CX \\ Y \end{pmatrix} \underset{\neq}{\geqslant} \begin{pmatrix} -C x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

(در R^{1+s} فضا به صورت $\begin{pmatrix} CX \\ Y \end{pmatrix}$ در نظر گرفتیم) پس:

$$CE_p = \operatorname{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C x_j \leqslant \theta C x_p$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geqslant y_p$$

$$\lambda \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \quad CE_p = \operatorname{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}\right) \leqslant \theta \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip} \qquad (a)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geqslant y_p$$

$$\lambda \geqslant 0$$

چون (a) یک قید می‌باشد و از طرفی می‌دانیم در جواب بهینه حداقل یکی از قیود ورودی و خروجی باید فعال باشد پس بالاجبار باید (a) بصورت تساوی درآید یعنی

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}\right) = \theta \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip}$$

$$\longrightarrow \theta = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip}$$

Subject: ۱۵۱

year. Month. Day.

$$\Longrightarrow \theta = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \lambda_j c_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip}} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} c_i \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}}^{:= x_i}}{\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip}}$$

$$\longrightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip}}$$

$$\longrightarrow CE_p = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip}} \quad \text{Min} \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

مقدار ثابت است (چون [illegible] ندارد) ←

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = x_i \quad , i=1,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} \quad , r=1,\dots,s$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , j=1,\dots,n$$

$$x_i \geq 0 \ , i=1,\dots,m.$$

$$\text{if } m=1 \rightarrow CE = \frac{\cancel{c}x^*}{\cancel{c}x_p} = \frac{x^*}{x_p}$$

اگر ← $c x_p$

ورودی ها ضرب شده $x_i \to cx_i$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_j = \theta^* x_p \longrightarrow \theta^* = \frac{\sum \lambda_j^* x_j}{x_p} = \frac{x^*}{x_p}$$

کارایی تکنیکی $(=\theta^*)$ کارایی هزینه

نتیجه: بنابراین اگر ~~[illegible]~~ یک ورودی و یک خروجی داشته باشیم کارایی هزینه معادل کارایی تکنیکی است فقط با این تفاوت که تغییر واحد کالا (داده) ها کارایی هزینه DMU$_p$

$$CE_p = \frac{CX^*}{CX_p}$$

(X^* ، λ^* جواب بهینه مدل I است)

Page:

کارایی هزینه انگاری با تکنیکی یکسان است.

$CE_p = \frac{Cx^*}{Cx_p} = \frac{\|C\|\|x^*\|\cos\alpha}{\|C\|\|x_p\|\cos\beta} = \frac{\text{تصویر } x^* \text{ بر روی } c}{\text{تصویر } x_p \text{ بر روی } c}$ ، $E_p = Cx^*$

تعبیر کارایی هزینه:

هدف یافتن x در T_c است که با کمترین هزینه بتواند y_p را تولید کند.

$$\text{Min } Cx$$
$$\binom{x}{y_p} \in PPS$$

در این صورت $CE_p = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_i x_i^*}{\sum c_i x_{ip}}$

تعبیر هندسی:

مرز فارل را در نظر بگیرید. چون در اینجا تمام خروجی ها یک در نظر گرفته شده اند حل یک مسأله LP برای پیدا کردن کارایی هزینه (CE) تمام DMU ها کفایت می کند ولی در غیر این صورت باید برای هر DMU یک مدل CE حل شود:

فرض کنید فقط یک خروجی داریم ثابت می کنیم حل یک LP برای بدست آوردن CE برای تمام DMU ها کفایت می کند.

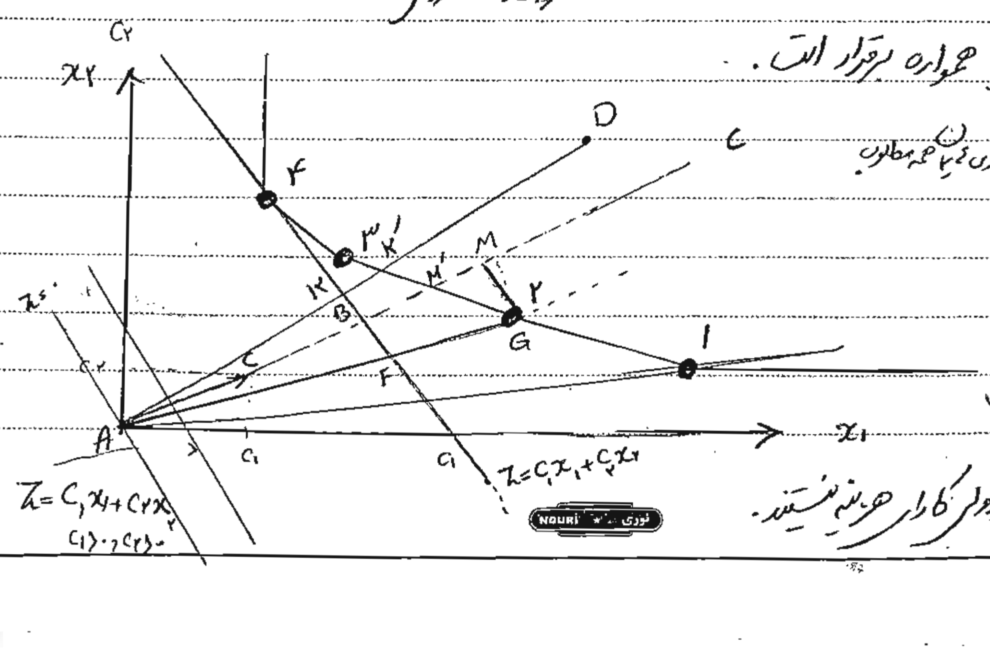
چون در T_c هستیم، لازم نیست این خروجی برای همه یکسان باشد می توانیم خروجی ها را به یک تبدیل کنیم (یعنی آنها را برابر کنیم)

مدل DMU_p : $\text{Min } Cx$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = x$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} \xrightarrow{\text{چون تک خروجی}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y = y_p \to \sum \lambda_j = 1$$
$$\lambda_j \geq 0 , x \geq 0$$

$\Downarrow$

پس قید مربوط به خروجی ها همواره برقرار است.



$c > 0$ چون جهت افزایش هزینه در راستای c است و در راستای ... مطلوب

$E_2 = 1$ ، $CE_2 = \frac{AF}{AG} = \frac{AB}{AM}$

$E_4 = CE_4 = 1$

مرز فارل

واحدهای ۱ و ۲ کارا هستند ولی کارای هزینه نیستند.

کارایی تکنیکی × کارایی (هزینه) تخصیصی = کارایی هزینه

Subject: ۱۵۳

year. Month. Day.

ثابت کنید: $CE_p \leqslant E_p$

اثبات: ثابت کردیم

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ip}}$$

$$\alpha \; CE_p = \theta^* = \operatorname{Min} \theta \, ($$

تکنولوژی تولید از $\underset{\downarrow E_p}{R^{m+s}}$ تبدیل به $\underset{\downarrow CE_p}{R^{1+s}}$ شده است پس مقدار کارایی تجمیعی کم می‌شود یعنی

$CE_p \leqslant E_p$

زیرا ممکن است شما حوزه‌ای که کردیم من در آن تجمیع بودم و با این کار کارایی کاهش دارد.

کارایی درآمد:

فرض کنید تمام خروجی‌ها را بتوانیم قیمت گذاری کنیم در این صورت:

$$DMU_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} y_1 \longrightarrow P_1 \\ \vdots \\ y_s \longrightarrow P_s \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow DMU_j \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \\ \sum_{r=1}^{s} P_r y_{rj} \end{pmatrix}$$

هدف حداکثر کردن درآمد:

$$\operatorname{Max} \; \varphi$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ \varphi \sum_{r=1}^{s} P_r y_{rj} \end{pmatrix} \in T_C$$

Page:

Subject : ۱۵۴

year. Month. Day.

$$PE = \text{Max} \quad \varphi$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{ip} \qquad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Big(\sum_{r=1}^{s} P_r y_{rj}\Big) \geq \varphi \sum_{r=1}^{s} P_r y_{rp}$$

$$\lambda_j \geq 0$$

چون تک قیمتی است خروجی‌ها، پس قید بصورت تساوی است:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{r=1}^{s} P_r y_{rj} = \varphi \sum_{r=1}^{s} P_r y_{rp}$$

$$\Longrightarrow \varphi = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{s} \lambda_j P_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} P_r y_{rp}} = \frac{\sum_{r=1}^{s} P_r \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}}^{Y_r}}{\sum_{r=1}^{s} P_r y_{rp}} = \frac{\sum_{r=1}^{s} P_r Y_r}{\sum_{r=1}^{s} P_r y_{rp}}$$

$$\Longrightarrow PE = \text{Max} \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} P_r Y_r}{\sum_{r=1}^{s} P_r y_{rp}}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = Y_r \qquad , r=1,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{ip} \qquad i=1,\dots,m$$

$$\lambda \geq 0, \quad Y_r \geq 0, \quad r=1,\dots,s$$

$$\Longrightarrow PE = \frac{1}{\sum P_r y_{rp}} \qquad \text{Max} \quad PY$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq X_p$$

احتمالاً

$$PE_p = \frac{PY^*}{PY_p} \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq Y \qquad =$$

$$\lambda \geq 0, \quad Y \geq 0$$

اندرون ازدی $CE=E$ ، معادلاتی تبدیل داده‌ایم.

Subject: ۱۵۵

year. Month. Day.

تمرین: ثابت کنید که اقل یکی از SDMU کاری جوابی است.

برهان: می‌دانیم ابر صفحه $z=k$ بر pps تکیه کرده است. حال اگر اشتراک این ابر صفحه با pps یک نقطه رأسی باشد حکم ثابت است (چون نقاط رأسی pps ، SDMU می‌شاهده شده است)

در غیر این صورت اشتراک $z=k$ با pps نقطه‌ای غیر رأسی مانند $\bar{x}$ است. از طرفی $\bar{x}$ را می‌توان

صورت ترکیب محدب دو نقطه دیگر از ناحیه مانند x_1 و x_2 نوشت یعنی

$$\bar{x}=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$$

$$\alpha \geq 0$$

حال طبق فصل در OR

$$z(\bar{x})=k \rightarrow c_1\bar{x}_1+\dots+c_m\bar{x}_m=k$$

$$\longrightarrow z(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=k \longrightarrow \alpha z(x_1)+(1-\alpha)z(x_2)=k$$

$$\longrightarrow z(x_1)=k ,\ z(x_2)=k$$

یعنی $x_1 \in (z=k)$ ، x_2 . حال اگر x_1 و x_2 رأسی باشند حکم ثابت شد. در غیر این صورت با ادامه روند بالا و

تکرار آن به یک نقطه رأسی از pps می‌رسیم که روی $z=k$ قرار دارد.

رتبه بندی Ranking

رتبه بندی میزان سطح عملکرد واحدها را مشخص کننده است.

چون فقط اعداد حقیقی را می‌توان sort کرد. تابع کارایی $f: \mathbb{R}^{m+s} \longrightarrow \mathbb{R}$

دلیل رتبه بندی: وقتی چند DMU دارای کارایی یک باشند نیاز به رتبه بندی دارند زیرا در غیر این صورت هر DMU که کارایی بالاتری دارد رتبه‌ی بالاتری نیز دارد و لذا خود بخود sort می‌شوند. توجه داشته باشید که احتمال اینکه دو DMU، کارایی کمتر از یک برابر داشته باشند صفر است یعنی:

$$\theta_1 = \theta_2 = /\Delta \rightsquigarrow P(\theta_1 = \theta_2 = /\Delta) = 0$$

در عمل هیچگاه رخ نمی‌دهد

تذکر ۱: هیچ تکنیکی بجز تابع کارایی، برای رتبه بندی واحدهای ناکارا وجود ندارد.

تذکر ۲: هرچه تعداد شاخص‌های ورودی و خروجی بیشتر باشد ($m+s$ بیشتر باشد) احتمال اینکه کارایی یک داشته باشیم زیاد می‌شود، یعنی چند DMU کارایی یک دارند (هرچه تعداد متغیرها در LP زیاد شود مقدار هدف بزرگتر می‌شود)

تذکر ۳: تحت هیچ شرایطی حق نداریم PPS را عوض کنیم. مثلاً با PPS موجود واحدهای ناکارا را رتبه بندی کنیم و سپس برای رتبه بندی کاراها، PPS را عوض کنیم چنین حقی نداریم.

بنابراین برای رتبه بندی واحدهای کارا، علاوه بر تابع کارایی نیازمند به اضافه کردن معیار دیگری هستیم. توجه داشته باشید که معیار جدیدی که اضافه می‌کنیم نباید امتیازی برای واحدهای ناکارا محسوب بشود و اگر هم امتیاز محسوب بشود، این امتیاز نباید از امتیاز واحدهای کارا کمتر باشد زیرا در غیر این صورت واحدهای ناکارا ممکن است با امتیاز جدید کارا شوند و یا رتبه آنها از واحدهای کارای قبلی، بیشتر شود. *

مثال: فرض کنید ۵ مارکت داریم. هدف رتبه‌بندی این ۵ مارکت است. با محاسبه کارایی، مارکت‌های ۱،۲،۳ ناکارا و ۴ و ۵ کارا شدند.

$1/5$ $2/5$ $3/5$ $4/5$ $4/5$

جهت رتبه‌بندی مارکت‌ها باید معیار جدیدی تعریف کنیم. فرض کنید معیار یا ملاک جدید، بیشتر بودن جوهر مارکت باشد. فرض کنید میزان جوهر مارکت‌های ۴ و ۵ به ترتیب $1/2$ و $2/3$ باشد. طبق این ملاک جدید مارکت ۵ رتبه اول و مارکت چهارم رتبه دوم خواهد بود.

نکته: توجه داشته باشید که برای اهمیت قائل شدن برای مارکت‌های ۱، ۲، ۳ باید جوهر مارکت‌های آن کمتر از $1/2$ باشد زیرا در غیر این صورت اگر میزان مارکت اول $1/2$ باشد، مارکت رتبه اول را بدست می‌آورد. این مطلب با رتبه‌بندی واحدها توسط مقدار کارایی در تناقض است.

یا روش دیگر: اولویت‌بندی دوبار باشد. بدین صورت که اولویت اول کارایی (از نمره کارایی استفاده می‌شود) و اولویت دوم جوهر مارکت باشد. در این صورت خود به خود اهمیتی برای ناکاراها قائل نشدیم.

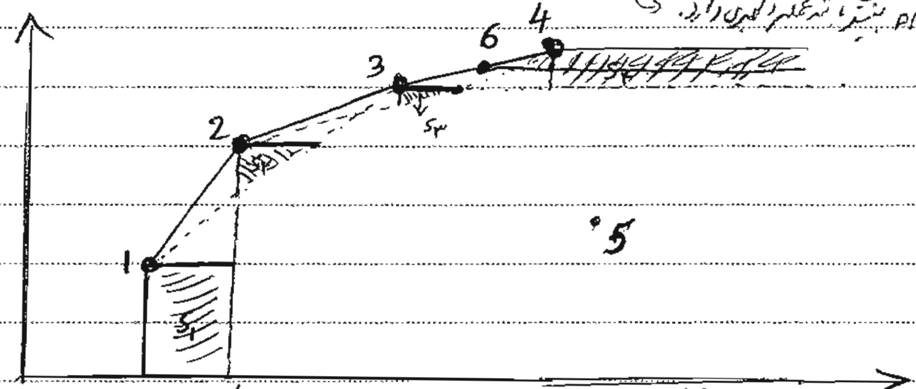
روش‌های رتبه‌بندی:

اولین روش: هر DMU کارایی که مرجع (RS) تعداد زیادی DMU ناکارا قرار گیرد رتبه بالاتری دارد.
در این روش واضح است که هیچ اهمیتی برای ناکاراها قائل نیستیم چرا که واحدهای ناکارا مرجع هیچ DMUای قرار نمی‌گیرند.

دومین روش :

با استفاده از ناحیه پایداری DMUهای کارا می‌توان آن‌ها را رتبه‌بندی نمود. هر DMUای ناحیه پایداری بزرگتری داشته باشد رتبه‌ی بالاتری دارد. به عبارت دیگر هر واحدی که تهدیدکننده‌ی کمتری داشته باشد رتبه‌ی بالاتری دارد. جهت بدست آوردن ناحیه پایداری یک DMU، آن را از مجموعه مشاهدات حذف و PPS جدید می‌سازیم. این DMU نسبت به PPS جدید هر عملکردی داشته باشد ملاک رتبه‌بندی می‌باشد.

هر چه ناحیه پایداری PPS بیشتر باشد عملکرد بهتری دارد



ناحیه پایداری DMU۶ تهی است و این یعنی کوچکترین حرکتی باعث ناکارا شدن آن می‌گردد پس بین ۵ تا DMU کارا، رتبه‌ی پنجم را دارد. در واقع همسایگی ۶ تهدیدکننده است یعنی ۶ با خوش‌شانسی کارا شده است.

$S_4 > S_1 > S_2 > S_3 \Longrightarrow DMU_4$ رتبه $= 1$

DMU_1 " $= 2$

DMU_2 " $= 3$ ، DMU_6 رتبه $= 5$

DMU_3 " $= 4$

این روش برای DMUهای ناکارا، ارزشی قائل نیست.

DMU نسبت به PPS جدید ۳ وضعیت ممکن داشته باشد

- $DMU_p \in (int\ PPS_{new}) \longrightarrow$ DMUp ناکارا بوده و از شر واحد ناکارا راحت
- $DMU_p \in (\partial PPS_{new}) \longrightarrow$ DMUp روی مرز PPS قرار داشت و حذف آن تأثیری نداشت. در واقع DMUp کارای راسی نبوده.
- $DMU_p \in (PPS_{new}$ خارج از ناحیه$) \longrightarrow$ DMUp کارای راسی بوده. در این حالت انتظار داریم عملکرد بالاتر از یک داشته باشد یعنی فراتر از DMUهای تحت ارزیابی PPS_{new} عملکرد دارد. در این حالت گوییم DMUp ابرکاراست یا super effi

توجه: بدست آوردن ناحیه پایداری کار راحتی نیست با یک خطایی می‌پذیریم که به جای محاسبه ناحیه پایداری DMU_p، ناحیه DMU_p را تا حدی محاسبه و همان را ملاک رتبه‌بندی می‌گذاریم.

روش رتبه‌بندی اندرسون - پیترسون (AP)

$$T_c' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j x_j \,,\; y \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j y_j \,,\; \lambda \geq 0 \,,\; \lambda \in R^{n-1} \right\}$$

اولین بار توسط اشخاصی به نام اندرسون - پیترسون در سال ۱۹۹۳ پیشنهاد شده:

$$AP: \quad \text{Min} \; \theta$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} \theta x_p \\ y_p \end{pmatrix} \in T_c'$$

$$\Longrightarrow \theta' = \text{Min} \; \theta$$
$$\sum_{j \neq p} \lambda_j x_j \leq \theta x_p$$
$$\sum_{j \neq p} \lambda_j y_j \geq y_p$$
$$\lambda_j \geq 0 \,,\; j \neq p$$

از آنجایی که در مدل یک متغیر حذف کرده‌ایم پس جواب بهینه (کارایی DMU_p در ناحیه جدید) بهتر نمی‌شود، زیرا همان بود این متغیر کاندیدای ورود به پایه می‌شد و تابع هدف را بهتر می‌کرد پس:

(البته به شرط آنکه مسئله شدنی شود)

$$\theta_p' \geq \theta_p^*$$

Subject: ۱۶۰

year. Month. Day.

قضیه: فرض کنید DMU_p کارا قوی باشد. مدل CCR در ماهیت ورودی و فرم پوششی متناظر DMU_p را در نظر بگیرید. DMU_p راسی نیست اگر و فقط اگر جواب بهینه‌ای مانند (λ^*, θ^*) موجود باشد که $\lambda_p^* = 0$.

برهان: مدل CCR در ماهیت ورودی و فرم پوششی متناظر DMU_p را در نظر بگیرید:

$$\text{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_p$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_p$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

فرض کنید جواب بهینه‌ای مانند (λ^*, θ^*) موجود باشد به طوری که $\lambda_p^* = 0$ یعنی:

جواب بهینه $\begin{cases} \lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{p-1}^*, 0, \lambda_{p+1}^*, \dots, 0) \\ \theta^* = 1 \end{cases}$

واضح است که $(\bar{\lambda} = e_p, \bar{\theta} = 1)$ نیز جواب بهینه دیگری می‌باشد. بنابراین چون جواب بهینه مسئله منحصر به فرد نیست لذا DMU_p کارای قوی راسی نیست:

$$\begin{pmatrix} \lambda^* \\ \theta^* = 1 \\ s^{-*} = 0 \\ s^{+*} = 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\lambda} = e_p \\ \bar{\theta} = 1 \\ \bar{s}^{-} = 0 \\ \bar{s}^{+} = 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_j &= x_p \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_j &= y_p \\ \lambda_j^* &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$$

$$\lambda_p^* = 0 \underset{\lambda^* \neq 0}{\Longrightarrow} \exists \lambda_t^* ; \lambda_t^* \neq 0 \longrightarrow RS_p = \{DMU_p, DMU_t, \dots\}$$

جواب بهینه $(\bar{\lambda} = e_p, \bar{\theta} = 1)$ است

بنابراین DMU_p راسی نیست چون مجموعه مرجع آن تک عضوی نیست.

تا ۲۰۶

Page:

* DMU_p کارای قوی است : $\forall(\lambda^*,\theta^*)$ ؛ $\lambda^*_p \neq 0$ ، $\lambda^*_p = 1$ ⟺ DMU_p راسی است

Subject: 141
year. Month. Day.

برعکس: فرض کنید DMU_p راسی نباشد. ثابت می‌کنیم جواب بهینه‌ای $(\theta^*=1,\lambda^*)$ هست که $\lambda^*_p=0$

فرض کنید $(\theta^*=1,\lambda^*)$ جواب بهینه مدل باشد. اگر $\lambda^*_p=0$ باشد حکم ثابت است.

در غیر این صورت $\lambda^*_p>0$. ثابت می‌کنیم $\lambda^*_p \geq 1$.

نخ: فرض کنید $\lambda^*_p<1$، در نظر بگیرید:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* x_j = x_p \Longrightarrow \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\lambda_j^* x_j + \lambda_p^* x_p = x_p \Longrightarrow$$

$$\sum_{j\neq p}\lambda_j^* x_j = \underbrace{(1-\lambda_p^*)}_{>0}\underbrace{x_p}_{\geq 0,\neq 0} \longrightarrow \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\lambda_j^* x_j \gneq 0 \quad \times$$

پس $\lambda^*_p \geq 1$.

اگر $\lambda^*_p=1$ در اینصورت $(\theta^*=1, \lambda^*=e_p, s^{-*}=0, s^{+*}=0)$ جواب بهینه می‌باشد. چون DMU_p طبق فرض کارای قوی راسی نیست پس بهینه دیگری دارد.

$(\bar\lambda, \bar\theta=1, s^{-*}=0, s^{+*}=0)$

موجود است به طوری که

$\bar\lambda=(\bar\lambda_1,\dots,\bar\lambda_p,\dots,\bar\lambda_n)$

اگر $\bar\lambda_p=0$ حکم ثابت است در غیر این صورت مشابه اثبات بالا $\bar\lambda_p\geq 1$ (اگر $\bar\lambda_p=1$ پس $\lambda^*=\bar\lambda$ و این با بهینه دیگر بودن در تناقض است). یعنی $\bar\lambda_p-1>0$. حال در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\bar\lambda_j x_j = x_p & (a)\\ \sum_{j=1}^{n}\bar\lambda_j y_j = y_p & (b)\end{cases}$$

(a) و (b) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\begin{cases}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\bar\lambda_j x_j + \bar\lambda_p x_p = x_p & (a')\\ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\bar\lambda_j y_j + \bar\lambda_p y_p = y_p & (b')\end{cases}$$

Page:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\neq p} \bar{\lambda}_j x_j = (1-\bar{\lambda}_p) x_p \\ \sum\limits_{j\neq p} \bar{\lambda}_j y_j = (1-\bar{\lambda}_p) y_p \end{cases} \xrightarrow{1-\bar{\lambda}_p \neq 0} \begin{cases} \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \frac{\bar{\lambda}_j}{1-\bar{\lambda}_p} x_j + 0 x_p = x_p \\ \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \frac{\bar{\lambda}_j}{1-\bar{\lambda}_p} y_j + 0 y_p = y_p \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم

$$\hat{\lambda}_j = \begin{cases} 0 & j=p \\ \frac{\bar{\lambda}_j}{1-\bar{\lambda}_p} & j\neq p \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j x_j = x_p \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j y_j = y_p \end{cases}$$

بنابراین $(\hat{\lambda}, \hat{\theta}=1, \hat{s}^-=0, \hat{s}^+=0)$ یک جواب بهینه دیگری است که در آن $\hat{\lambda}_p=0$ و لذا جواب بهینه‌ای برای ... یافت شود که مولفه p ام آن صفر است و لذا حکم ثابت است.

قضیه: در ارزیابی DMUp با فرم مضربی CCR در ماهیت ورودی و صورت تغییر یافته آن اگر θ^* و θ'^* به ترتیب مقادیر بهینه مدلهای زیر باشند:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \le \theta x_p \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \ge y_p \qquad (1) \\ & \lambda_j \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta' \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne p}}^{n} \lambda_j x_j \le \theta' x_p \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne p}}^{n} \lambda_j y_j \ge y_p \qquad (2) \\ & \lambda_j \ge 0 ,\ j=1,\dots,n ,\ j\ne p \end{aligned}$$

$\theta^* \le \theta'^*$

الف) DMUp ناکارا است اگر و فقط اگر $\theta'^* < 1$ یا اگر $\theta'^* = 1$ جواب بهینه مدل (۲) باشد در آن حداقل یک متغیر کمکی یا خروجی اکیداً مثبت باشد. (در هر حالت $\theta'^* = \theta^*$)

ب) DMUp کارای قوی غیر راسی است اگر و فقط اگر $\theta'^* = 1$ و مدل (۲) جواب بهینه‌ای با یک متغیر مثبت جدا داشته باشد.

ج) DMUp راسی است اگر و فقط اگر $\theta'^* > 1$ یا مدل (۲) نشدنی باشد.

برهان الف) فرض کنید DMUp ناکارا است. بنابراین یکی از دو حالت زیر برقرار می‌شود:

۱) $\theta^* < 1$

۲) $\theta^* = 1$ و $\exists i\,(s_i^{-*} > 0)$ یا $\exists r\,(s_r^{+*} > 0)$

11) $\theta^* < 1 \Rightarrow \forall \lambda^*$ و $\lambda_p^* = 0$

کارایی ضعیف

$\theta^* = 1$ & $(s^{-*}, s^{+*}) \neq 0 \Rightarrow 0 < \lambda_p^* < 1$

کارایی قوی $0 < \lambda_p^* \le 1$

DMU_p کارایی قوی

$\forall \lambda^* \quad \lambda^* \neq 0 \quad \Longleftrightarrow$ راسی

کارایی قوی راسی $\Rightarrow \forall \lambda_p^* \neq 0$ ~~...~~ $\lambda_p^* = 1$

$\lambda_p^* = e_p$

کارایی قوی غیرراسی $0 < \lambda_p^* < 1$

Subject : ۱۴۲
year. Month. Day.

۱) فرض کنید $\theta^* < 1$. بنابراین ثابت می‌کنیم در هر جواب بهین $\lambda_p^* = 0$ یعنی مؤلفه p ام λ^* برابر صفر است.
اثبات ادعا: فرض کنید چنین نباشد یعنی:

$\exists \lambda^* ; \lambda_p^* \neq 0$

$(1) \to \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_j \leqslant \theta^* x_p \longrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda_j^* x_j \leqslant (\theta^* - \lambda_p^*) x_p \quad (*)$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

i) $\theta^* < \lambda_p^* \longrightarrow \theta^* - \lambda_p^* < 0$ و لذا به تناقض می‌رسیم (با توجه به $*$)

ii) $\theta^* \geqslant \lambda_p^* \longleftarrow$

$0 \leqslant \theta^* - \lambda_p^* \underset{\lambda_p^* \neq 0 \text{ چون فرض کردیم}}{<} \theta^*$

$\theta^* - \lambda_p^* := \bar{\theta}^* \Longrightarrow \bar{\theta}^* < \theta^*$

از طرفی بنابه $*$ داریم:

$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda_j^* x_j \leqslant \bar{\theta}^* x_p$

قرار میدهیم: $\bar{\lambda}_j = \begin{cases} 0 & j = p \\ \lambda_j^* & j \neq p \end{cases} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_j \leqslant \bar{\theta}^* x_p$

بنابراین $(\bar{\theta}^*, \bar{\lambda})$ یک جواب شدنی برای مسئله (۱) است (توجه داشته باشید که قیود مربوط به جواب‌ها نیز برای $\bar{\lambda}$ همواره صادق است). از طرفی چون $\bar{\theta}^* < \theta^*$ لذا به تناقض می‌رسیم چون θ^* جواب بهینه مسئله (۱) فرض شده است.

پس فرض خلف باطل و لذا در هر جواب بهین $\lambda_p^* = 0$ است. و این یعنی (θ^*, λ^*) جواب بهینه (۲) نیز است.

$\left\{ \begin{array}{l} \theta^{*} \leq \theta^{*} \\ \theta^{*} \leq \theta^{*} \end{array} \right. \Rightarrow \theta^* = \theta^* \xrightarrow{\theta^* < 1} \theta^* < 1 \longrightarrow$ حکم ثابت است

۲) فرض کنید $\theta^* = 1$، $\exists r (s_r^{+*} > 0)$ یا $\exists i (s_i^{-*} > 0)$. به بیان دیگر $(s^{-*}, s^{+*}) \neq 0$

Page:

Subject : ۱۴۵

year. Month. Day.

فرض کنید $(\lambda^*, \theta^* = 1, s^{-*}, s^{+*})$ جواب بهینه مدل (۱۱-۴) باشد که در آن $(s^{-*}, s^{+*}) \neq 0$.

بدیهی است که $\lambda_p^* \geq 1$ زیرا در غیر این صورت دو حالت ممکن است:

I) if $\lambda_p^* = 1$: $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j^* x_j + s^{-*} = (\theta^* - \lambda_p^*) x_p = 0$

$$\longrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j^* x_j + s^{-*} = 0 \Longrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j^* x_j = 0 \quad , \quad s^{-*} = 0$$

$$\lambda_1^* x_1 + \dots + \lambda_{p-1}^* x_{p-1} + \lambda_{p+1}^* x_{p+1} + \dots + \lambda_n^* x_n = 0$$

$$\longrightarrow \lambda_1^* x_1 = 0 \xrightarrow{x_1 \neq 0} \lambda_1^* = 0$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{p-1}^* x_{p-1} = 0 \xrightarrow{x_{p-1} \neq 0} \lambda_{p-1}^* = 0$$

$$\lambda_{p+1}^* x_{p+1} = 0 \longrightarrow \lambda_{p+1}^* = 0 \qquad \Longrightarrow \lambda^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = e_p \quad (**)$$

$$\vdots$$

$$\lambda_n^* x_n = 0 \longrightarrow \lambda_n^* = 0$$

از طرفی

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_j \geq y_p \longrightarrow \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j^* y_j}_{0} - s^{+*} = 0 \longrightarrow s^{+*} = 0$$

پس $(s^{-*}, s^{+*}) = 0$ است که این با فرض اولیه در تناقض است.

II) if $\lambda_p^* > 1$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j^* x_j \leq (\theta^* - \lambda_p^*) x_p = (1 - \lambda_p^*) x_p$$

$$\longrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j^* x_j \leq \underbrace{(1 - \lambda_p^*)}_{<0} x_p \longrightarrow \quad \times$$

Page:

بنابراین ثابت کردیم $1 > \lambda_p^* \geq 0$.

اگر $\lambda_p^* = 0$ پس این جواب، جواب بهینه‌ی (۲) نیز است و لذا $\theta'^* = \theta^*$

و اگر $\lambda_p^* < 1$:

$$\begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda_j^* x_j + \lambda_p^* x_p \leq x_p \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda_j^* y_j + \lambda_p^* y_p \geq y_p \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{j\neq p} \lambda_j^* x_j \leq (1-\lambda_p^*) x_p \\ \sum_{j\neq p} \lambda_j^* y_j \geq (1-\lambda_p^*) y_p \end{cases}$$

چون $1-\lambda_p^* > 0$ پس:

$$\begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \frac{\lambda_j^*}{(1-\lambda_p^*)} x_j + 0 x_p \leq x_p \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \frac{\lambda_j^*}{1-\lambda_p^*} y_j + 0 y_p \geq y_p \end{cases} \xrightarrow{\text{قرار دهیم}} \hat{\lambda}_j = \begin{cases} 0 & j=p \\ \frac{\lambda_j^*}{1-\lambda_p^*} & j\neq p \end{cases} \quad \hat{s}^- = \frac{s^-}{1-\lambda_p} \quad \hat{s}^+ = \frac{s^{+*}}{1-\lambda_p^*}$$

پس $(\hat{\lambda}, \theta^*=1, \hat{s}^-, \hat{s}^+)$ نیز جواب بهینه مدل (۱) می‌باشد که در آن $\hat{\lambda}_p = 0$.

بنابراین این جواب، جواب بهینه‌ی مدل (۲) نیز است و لذا $\theta'^* = \theta^*$ و حکم ثابت است.

بالعکس: فرض کنید $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{p-1}^*, \lambda_{p+1}^*, \dots, \lambda_n^*, \theta'^*)$ جواب بهینه مدل (۲) باشد بطوری که ($\theta'^* > 1$
یا $\theta'^* = 1$ و مسئله جواب بهینه‌ای با متغیر کمکی مثبت داشته باشد) با فرض $\lambda_p^* = 0$ در این صورت

$$(\lambda^*, \theta^*) = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{p-1}^*, 0, \lambda_{p+1}^*, \dots, \lambda_n^*, \theta^*)$$

جواب شدنی مسئله (۱) می‌باشد. بنابراین جواب بهینه مسئله (۱) نیز می‌باشد و لذا

$$\theta^* = \theta'^*$$

چون $\theta'^* > 1$ پس $\theta^* > 1$ و این یعنی DMU_O ناکارا است.

حال اگر $\theta'^* = 1$ در این صورت نیز با فرض $\lambda_p^* = 0$ استدلال همانند مطلب بالا می‌شود.

Subject: ۱۴۷

year. Month. Day.

ب) فرض کنید DMUp کارای قوی غیرراسی باشد.

چون DMUp کارای قوی است پس $\theta^*=1$ و $(s^{-*}, s^{+*})=0$ از طرفی غیر راسی نیز هست پس طبق قضیه ـــ جواب بهینه دیگر باشد $(\lambda^*, \theta^*=1)$ برای (۱) هست که $\lambda^*_p=0$ لذا از این رو $(\lambda, \theta'^*=\theta^*=1)$ با $\lambda^*_p=0$ جواب بهینه مسئله (۲) نیز است.

بالعکس فرض کنید $\theta'^*=1$ و مسئله (۲) متغیر کمکی مثبت نداشته باشد یعنی

$$(\theta'^*=\theta^*=1,\ s^{-*}=0,\ s^{+*}=0,\ \lambda'^* \in \mathbb{R}^{n-1})$$

که در آن با فرض $\lambda^*_p=0$ لذا $\lambda^*=(\lambda_1^*,\dots,\lambda_{p-1}^*,0,\lambda_{p+1}^*,\dots)$ جواب بهینه مسئله (۱) است. بنابه قضیه ـ DMUp کارای قوی غیرراسی می باشد.

ج) فرض کنید DMUp راسی باشد. حالتهای زیر برای مسئله اتفاق می افتد:

حالت اول: مسئله (۲) نشدنی است. در این صورت حکم ثابت است (حکم: $\theta'^*>1$ یا مدل (۲) نشدنی است)

حالت دوم مسئله (۲) شدنی باشد. چون DMUp کارای راسی است پس بنابه قسمت (ب) $\theta'^*\neq 1$ (a). از طرفی داریم:

$$\theta'^* \geq \theta^*=1$$

$$\Downarrow$$

$$\theta'^*\geq 1 \xRightarrow[\text{بنابه}]{(a)} \theta'^*>1$$

بالعکس: فرض کنید $\theta'^*>1$ یا (۲) نشدنی باشد. ثابت می کنیم DMUp کارای راسی است.

اثبات: خلف: فرض کنید DMUp کارای راسی نباشد پس طبق قضیه، مدل (۱) جواب بهینه ای مانند

$$(\lambda_1^*,\dots,\lambda_{p-1}^*,\ 0,\ \lambda_{p+1}^*,\dots,\lambda_n^*,\ \theta^*) \quad (b) \quad \rightarrow \theta'^*=\theta^*$$

دارد. واضح است که (b) جواب شدنی برای مسئله (۲) می باشد که هم با فرض نشدنی بودن (۲) در تناقض است و هم با $\theta'^*>1$ زیرا:

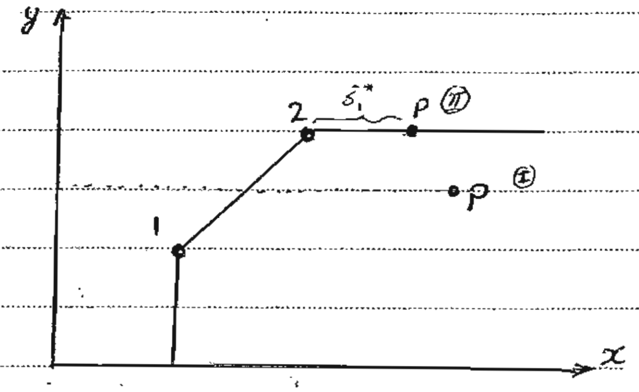
DMUp کارای راسی نباشد: DMUp ناکارا $\rightarrow \theta'^*=\theta^*<1$ ؛ DMUp کارای غیرراسی $\rightarrow \theta'^*=\theta^*=1$ $\longrightarrow \theta'^*\leq 1$

که این با θ'^* در تناقض است.

Page:

تعبیر هندسی قضیه:

الف) برای حالت‌های A در نظر می‌گیریم:



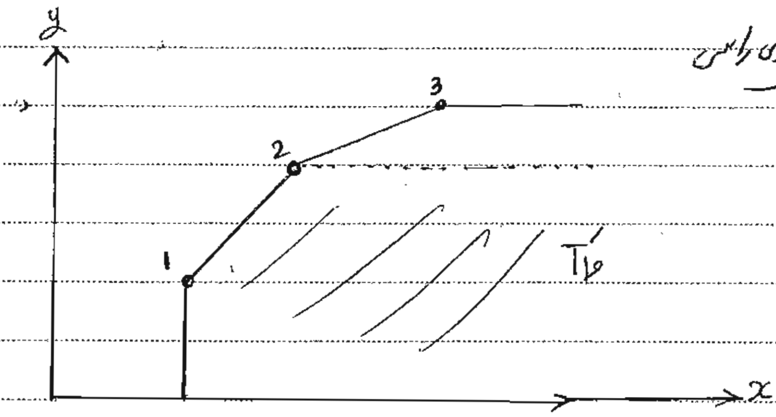
DMUp ناکارا باشد

$\Downarrow$

(I) $\theta'^{*} < 1$

(II) $\theta'^{*} = 1 , s_1^{+*} , s_2^{-*} = 0$

ب) DMU۲ کارای قوی راسی



ج)

در ماهیت ورودی 3 نشدنی

در ماهیت خروجی امکان‌پذیر است.

DMU۳ کارای رأسی و مدل (۲) نشدنی است. $\nexists\theta; \begin{pmatrix}\theta x_3 \\ y_3\end{pmatrix} \in T'_v$

DMU۲ کارای رأسی و $\theta_2^{*} > 1$؛

	DMU۱	DMU۲	DMU۳
ورودی	۱	۲	۳
خروجی	۱	۳	۴

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \leq 3\theta \\ & \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \geq 4 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta' \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 3\theta' \\ & \lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 4 \rightarrow S = \emptyset \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Subject : ۱۴۹

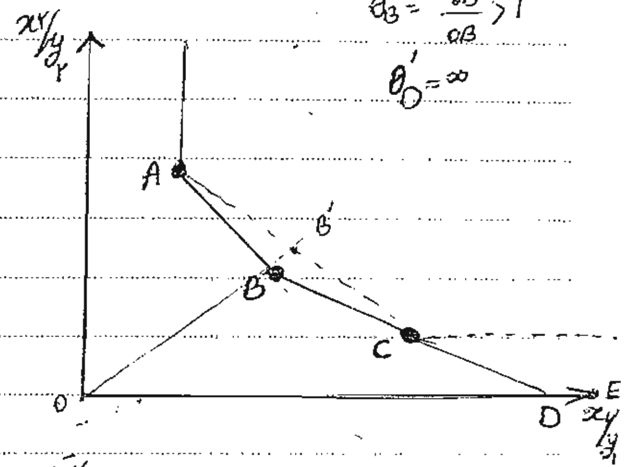
year. Month. Day.

مثال:

DMU	A	B	C	D
I_1	۱	۲	۳	۴
I_2	۳	۲	۱	۰
O	۱	۱	۱	۱

$$\theta'_B = \frac{OB'}{OB} > 1$$

$$\theta'_D = \infty$$



Min θ'_D

s.t.
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \leq 4\theta \quad (a)$$
$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \leq 0\theta \quad (b)$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 1 \quad (c)$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

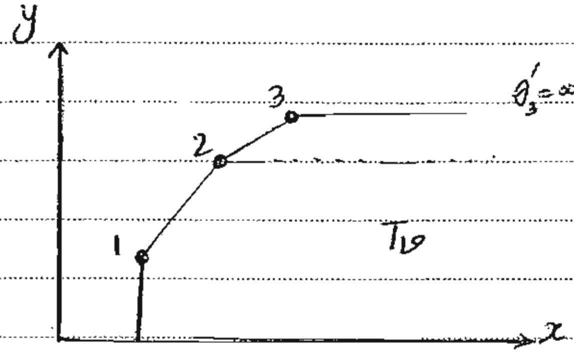
(b) $\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $\longrightarrow$ مسأله خودش نشدنی است زیرا این جواب در (c) صدق نمی‌کند

اگر E نیز جزء مشاهدات می‌بود، مسأله هیچگاه نشدنی نمی‌شد.

Subject: ۱۷۰
year. Month. Day.

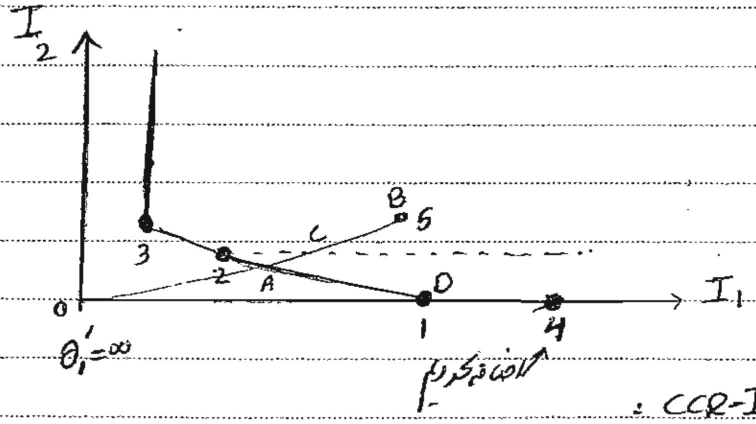
ایرادات روش رتبه‌بندی AP:

۱) نشدنی بودن (مشکل اساسی)



در ماهیت ورودی 3 نشدنی است $\left(\begin{smallmatrix}\theta x_3\\ y_3\end{smallmatrix}\right) \notin T_{v-I}$, $\theta_3' = \infty$

در ماهیت خروجی ۱ نشدنی است $\left(\begin{smallmatrix}x_1\\ \varphi y_1\end{smallmatrix}\right) \notin T'_{v-O}$



$\theta_5 = \frac{OA}{OB} < 1$ $\quad \theta_1 = 1$

$\theta_5' = \frac{OC}{OB} < 1$ $\quad \theta_1' = \frac{\infty}{OD} = \infty$

یکی از دلایل نشدنی بودن مدل CCR-I:

$\exists i;\ x_{ip}=0,\ x_{ij}>0 \quad j=1,\dots,n,\ j\neq p$ است

یعنی مولفه بردار ورودی فقط در یک DMU صفر باشد. مانند شکل بالا که ورودی اول فقط در DMU1 صفر است.

اگر یک DMU دیگر موجود باشد که ورودی اول آن نیز صفر است دیگر مدل نشدنی نیست مثلاً اگر DMU4 را اضافه کنیم.

تذکر: در حالت تک ورودی و تک خروجی این شرط اصلاً صادق نیست چون $x_1 \neq 0$ است (طبق پیش‌فرض)

توجه داشته باشید اگر مسئله AP در T_c نشدنی شد می‌توانیم بگوییم که آن DMU مولفه صفر در ورودی‌هایش دارد ولی عکس این مطلب لزوماً درست نیست (مثال بالا با در نظر گرفتن DMU4)

توجه کنید که صفر شدن خروجی‌ها مسئله AP در T_c نشدنی نمی‌کند زیرا خروجی صفر هیچ مشکلی ندارد. اتفاقاً وقتی yها صفر شوند ناحیه بزرگتر می‌شود و نشدنی بودن رخ نمی‌دهد.

Page:

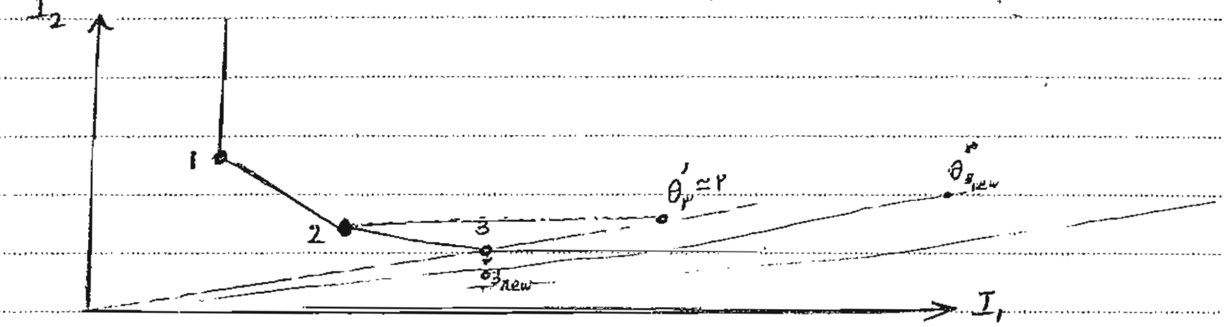
Subject: ۱۷۱
year. Month. Day.

۲) ناپایداری مدل AP.

ناپایداری یعنی تغییر کوچک در داده‌ها باعث تغییرات فاحش در مدل می‌شود. و این یعنی ناپایداری. و این در جاهایی که در بعضی داده‌ها خاصی و تراکم صفر زیرا:

$$\sum \lambda_j x_{ij} \leqslant \theta x_p \longrightarrow \theta \geqslant \frac{\sum \lambda_j x_{ij}}{x_p}$$

وقتی x_p مولفه‌ای تراکم به صفر دارد تقسیم بر آن کسر را بزرگ می‌کند.



$$\theta'_{3\,new} >> 2$$

تذکر: فقط با تغییر روی ورودی (یا خروجی) DMU حذف شده ناپایداری بوجود می‌آید در اصل اگر DMUهایی حذف نشده‌اند، ناپایداری حاصل نمی‌شود.

۳) برای همه DMUهای کارای غیر رأسی $\theta'_{AP} = 1$

بنابراین تا در رتبه‌بندی DMUهای کارای غیر رأسی فقط تعداد بیشتر از یکی نیست.

تذکر: اصولاً اگر تعداد DMUهای کارای غیر رأسی باشند در محل صفر است پس این ایراد زیاد مهم نیست.

و همچنین unstable بودن مدل در مواقعی که مولفه‌ی تراکم به صفر دارد نیز زیاد مهم نیست. ایراد مهم مدل AP نشدنی بودن آن است.

Page:

Subject: ۱۷۲

year. Month. Day.

نکته: از آزمون‌ها

۱) DMU_p ناکارا است $\longleftrightarrow$ $\theta_p^{'*}=\theta_p^{*}<1$

۲) DMU_p کارای غیرراسی $\longleftrightarrow$ $\theta_p^{'*}=\theta_p^{*}=1$

$\Longleftarrow$ ۳) DMU_p کارای راسی $\Leftrightarrow$ AP نتیجه با $\theta'_p>1$

می‌توانیم از همان اول به جای حل مدل CCR، مدل AP را حل کنیم و این یعنی مدل AP پیچیدگی محاسباتی بالایی ندارد.

برای ارائه مدل ملاک‌های زیر باید مد نظر باشد:

۱) شدنی بودن مدل

۲) رتبه‌بندی DMUهای کارای غیرراسی

۳) پایداری مدل

۴) فرآیندهای محاسباتی کم

۵) عدم تغییر رتبه (مثلاً ناکاراها را رتبه‌بندی کنیم سپس برای کاراها از Topsis برای رتبه‌بندی استفاده کنیم در این صورت رتبه عوض شد)

۶) احتمال اینکه دو DMU کارا توی رتبه‌بندی یک رتبه داشته باشند صفر باشد

۷) مقایسه با معیار رتبه‌بندی ارائه شده برای کارا، امتیازی برای ناکاراها قائل نشود یعنی باعث جابجایی رتبه ناکاراها با کاراها نشود. (رتبه ناکاراها باید از کاراها کمتر باشد) این یکی از اشکالات AP بود.

۹۰٪ محاسباتی که الآن برای رتبه‌بندی استفاده می‌شود از مدل AP است زیرا AP در ماهیت خروجی همواره شدنی است و اگر ورودی صفر نداشته باشد مدل A-P در ماهیت ورودی نیز شدنی است.

تمرین: مسأله AP در T_c در ماهیت خروجی همیشه شدنی است.

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \varphi \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leqslant x_p \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geqslant \varphi y_p \\ &\qquad \lambda \geqslant 0 \end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned} &\text{Max} \quad \varphi' \\ &\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda_j x_j \leqslant x_p \\ &\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda_j y_j \geqslant \varphi' y_p \\ &\quad \lambda \geqslant 0 \end{aligned}$$

$\begin{cases} \varphi' = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \in S' \Longrightarrow$ مسأله AP در T_c در ماهیت خروجی همواره شدنی است.

مسأله AP جواب بهینه نامتناهی ندارد.

اثبات: همانطور که قبلاً گفته شد مدل CCR و دوآل آن یعنی مدل مضربی همواره شدنی می‌باشند. اگر یک متغیر از CCR حذف کنیم معادل حذف یک قید از دوآل می‌باشد. بنابراین دوآل مدل CCR زیر مجموعه‌ای ناحیه شدنی دوآل AP می‌باشد. بنابراین

ناحیه شدنی

$$\underset{\substack{\text{مضربی CCR} \\ \text{دوآل CCR}}}{S} \subseteq \underset{\substack{\text{مضربی AP} \\ \text{دوآل AP}}}{S}$$

همواره شدنی $\Longrightarrow$ دوآل AP همواره شدنی است.

بنابراین مسأله AP جواب بهینه نامتناهی ندارد زیرا در غیر این صورت طبق قضیه دوآلیتی مسأله دوآل AP نشدنی می‌گردد.

$n>>>1$ $\quad$ Max vY_p $\quad$ Min $\theta-\varepsilon(1s^{+}+1s^{-})$

$n+1$ قید $\begin{cases} vY_j - vX_j \leq 0 \\ vX_p = 1 \end{cases}$ $\quad$ دوال $\quad$ $s.t.\ \sum \lambda_j x_j \leq \theta x_p,\ \sum \lambda_j y_j \geq y_p,\ \lambda \geq 0$ $\}$ $m+s$ قید

DMU$_p$ کارا است اگر و فقط اگر ... $\lambda^* \cdot e_p$, $\theta^*=1$ ...

Subject: (u,v) $\quad$ ۱۷۴

Year. Month. Day

$m+s>2$ ...

روش رتبه بندی سکستون:

در سال ۱۹۸۲ سکستون و همکارانش روش کارائی متقاطع (cross-efficiency) را پیشنهاد کردند.

$$\text{Max} \quad RE_{kk}=\theta_{kk}=\frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rk}}{\sum v_{ik} x_{ik}}$$

مدل خارج قسمتی (F.P)

$$s.t. \quad \theta_{jk}=\frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rj}}{\sum v_{ik} x_{ij}} \leq 1 \qquad j=1,\dots,n \qquad (1)$$

$$u_{rk} \geq 0,\ v_{ik} \geq 0$$

با تبدیلات چارنز کوپر داریم:

$$\text{Max} \quad \theta_{kk}=\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rk}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ik}=1 \qquad (2)$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rj}-\sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ij} \leq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$u_{rk} \geq 0,\ v_{ik} \geq 0$$

فرض کنید u^*_{rk} $(r=1,\dots,s)$ و v^*_{ik} $(i=1,\dots,m)$ جواب بهینه مدل فوق باشد:

$$\theta^*_{kk}=\sum_{r=1}^{s} u^*_{rk} y_{rk}=u^*_k y_k$$

که θ^*_{kk} بیشترین کارائی نسبی است که DMU_k می‌تواند بدست آورد. یعنی

$$\theta^*_{kk} \geq \theta_{jk} \qquad j=1,\dots,n$$

کارائی متقاطع DMU_j در ارتباط با DMU_k:

$$\theta_{jk}=\frac{\sum_{r=1}^{s} u^*_{rk} y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v^*_{ik} x_{ij}} \qquad (3) \qquad j=1,\dots,n,\ j\neq k$$

Page:

Subject: ۱۷۵

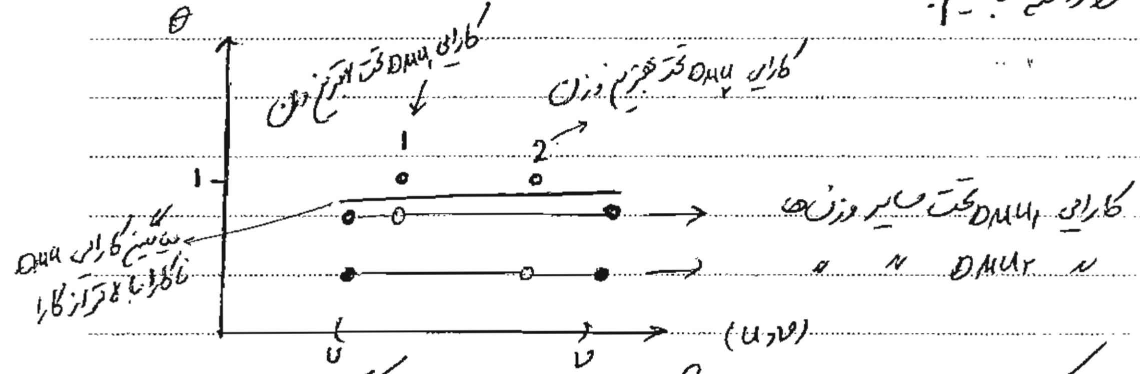
year. Month. Day.

در واقع روش کارایی متقاطع یک روش دوفازی به حساب می‌آید که فاز اول آن بدست کارایی DMU_k تحت ارزیابی توسط مدل DEA استاندارد CCR مضربی است یعنی مدل (۱) و فاز دوم آن مدل (۳) می‌باشد. یعنی بدست آوردن کارایی DMUهای دیگر تحت وزن بهینه DMU_k تحت ارزیابی است.

اگر $\theta^*_{kk}=1$ یعنی DMU_k کارا است.

سوال: چند تا (u,v) وجود دارند که به ازای آن‌ها $\theta^*_{kk}=1$؟

بدست آوردن دامنه تغییرات (u,v) به شرطی که $\theta^*_{kk}=1$ باشد کار سختی است. فرض کنید اطلاعات زیر در مورد DMUهای ۱ و 2 را داشته باشیم:



همانطور که ملاحظه می‌کنید واحدهای ۱ و ۲ هر دو کارا می‌باشند اما چون تحت وزن‌های دیگر کارایی DMU_1 بیشتر از DMU_2 است پس رتبه DMU_1 بالاتر از رتبه DMU_2 است.

ولی بدست آوردن دامنه تغییرات (u,v) کار سختی است لذا نمونه‌گیری انجام می‌دهیم. هدف مقایسه کارایی DMUها به ازای نقاط sample شده (u,v)ها است. این نقاط sample وزن‌های متناظر ۱ و ۲ هستند.

یعنی به ازای وزن‌های بهینه DMU_1، کارایی DMU_2 را حساب می‌کنیم. بدین منظور بدین صورت عمل می‌کنیم:

فرض کنید همه واحدها کارا باشند در این صورت:

(u^*_k, v^*_k) جواب بهینه DMU_k

$$\longrightarrow \theta_{jk} = \frac{u^*_k y_j}{v^*_k x_j}$$

کارایی متقاطع DMU_j تحت ارزیابی DMU_k

Page:

Subject: ۱۷۷

year. Month. Day.

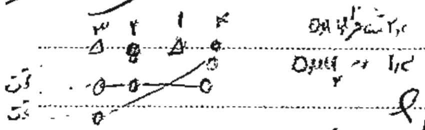
DMU	1	2 (Target DMU)	...	n	میانگین کارایی متقاطع
1	θ_{11}	θ_{12}	...	θ_{1n}	$\theta_1^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_{1k}$
2	θ_{21}	θ_{22}	...	θ_{2n}	$\theta_2^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_{2k}$
⋮	⋮			⋮	⋮
n	θ_{n1}	θ_{n2}	...	θ_{nn}	$\theta_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_{nk}$

$$\begin{cases}\theta_{kk} = \theta_{kk}^* & k=1,\dots,n \\ \theta_{kk}^* \geq \theta_{jk}^* & j=1,\dots,n\end{cases}$$

سطر اول: کارایی DMU1 تحت تمام وزن‌ها

اشکال اینکه جمع و سطر یکی نشود، متفاوت است. پس θ_k^* $(k=1,\dots,n)$ ملاک رتبه‌بندی می‌باشند.

تذکر: اگر این تکنیک برای تمام DMU ها (کارا و ناکارا) انجام شود ممکن است میانگین یک DMU ناکارا بالاتر از میانگین یک DMU کارا شود و رتبه‌بندی غلط شود. به همین دلیل این کار را فقط به ازای DMU های کارا انجام می‌دهیم. (شکل صفحه قبل)



سوال: اگر مسئله جواب بهینه چندگانه داشته باشد، کدام یک را انتخاب کنیم؟

از آنجا که ممکن است در ارزیابی DMU_k، θ_{kk}^* (u_k^*, v_k^*) منحصر به فرد نباشد، لذا انتخاب یکی از آن‌ها کاملاً دلبخواه است و ممکن است نتایج حاصل از جواب‌های بهینه دیگر متفاوت باشد. برای این منظور روش سکستون اصلاح شده را ارائه می‌کنیم. این روش به عنوان تابع هدف با توجه معروف است و توسط Doyle and Green (1994) به صورت زیر پیشنهاد گردید:

$$\text{Min} \quad \sum_{r=1}^{s} u_{rk}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} y_{rj}\Big)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} v_{ik}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} x_{ij}\Big) = 1$$

کارایی متقاطع میانگین برای DMU_k

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rk} - \theta_{kk}^* \sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ik} = 0 \qquad (4)$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ij} \leq 0 \qquad j=1,\dots,n,\ j\neq k$$

$$u_{rk} \geq 0, \quad v_{ik} \geq 0$$

کارایی متقاطع سایر DMU ها را در شرایط یکسان می‌سنجد

تحت وزن DMU_k

Page.

رتبه‌بندی سکستون ایرادات AP را ندارد یعنی: ۱) نشدنی بودن در تمام موارد
۲) پایداری
۳) توانایی رتبه‌بندی واحدهای کارای غیر راسی

ولی خود شکل جدید آمده و آن جواب بهینه چندگانه دارد.

Subject: ۱۷۷

year. Month. Day.

بهتر از AP است چون کارایی‌ها نه تنها با بهترین (u,v) بلکه با (u,v)های دیگر هم سنجیده می‌شود

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^{s} u_{rk}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} y_{rj}\Big)$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_{ik}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} x_{ij}\Big)=1$$

کارایی متقاطع خوش‌بینانه برای DMU_k

(۵)

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rk}-\theta_{kk}^{*}\sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ik}=0$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rj}-\sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ij}\leq 0 \quad , \; j=1,\dots,n \; , \; j\neq k$$

$$u_{rk}\geq 0 \; , \; v_{ik}\geq 0$$

کارایی متقاطع سایر DMU ها را در شرایط یکسان ماکزیمم می‌کند.

اشکال ایده: این دو مدل وزن‌های ورودی و خروجی را از دو روش متفاوت بهینه می‌کند لذا تضمینی وجود ندارد که منجر به رتبه‌بندی یکسان برای n واحد تصمیم گیرنده شوند.

مدل بدبینی دیگر نیز توسط sexton و 1986):

$$\text{Min} \quad \sum_{r=1}^{s} u_{rk}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} y_{rj}\Big)-\sum_{i=1}^{m} v_{ik}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} x_{ij}\Big)$$

تمرین ۸

مدل بدبینی دیگر توسط Wu 2009)

$$\text{Min} \quad \sum_{r=1}^{s} u_{rk}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} y_{rj}\Big)$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_{ik}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} x_{ij}\Big)=1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rk}-\alpha_{k}\sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ik}\geq 0$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rj}-\sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ij}\leq 0 \quad , \; j=1,\dots,n \; , \; j\neq k$$

$$u_{rk}\geq 0 \; , \; v_{ik}\geq 0$$

Subject: ۱۷۸

year. Month. Day.

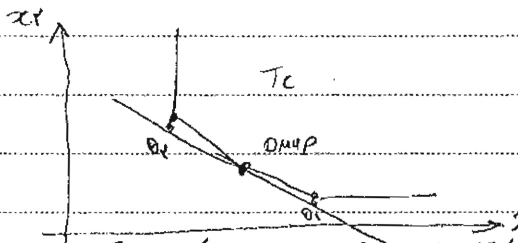
مدل پیشنهادی دی اِمیر توسط Ying wang (2010):

$$\text{Max} \quad \delta = \underset{r\in\{1,\dots,s\}}{Min} \left\{ \frac{u_{rk}\, y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik}\, x_{ik}} \right\}$$

$$s.t. \quad \theta^{*}_{kk} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk}\, y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik}\, x_{ik}}$$

$$\theta_{jk} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk}\, y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik}\, x_{ij}} \leqslant 1 \ , \ j=1,\dots,n \ , \ j\neq k$$

$$u_{rk} \geqslant 0 \quad v_{ik} \geqslant 0$$



تفسیر کلیستون:

مدل معرفی شده را برای DMUp حل می‌کنیم. اگر جواب بهینه آن صفر گردد از آن

تا نتایج θ_i ها در مدل کلیستون می‌آید، فاصله واحد که تا مرز صفر می‌باشد. هر کدام فاصله کمتری داشت رتبه بهتری دارد.

1) Jahan shahloo   Hosseinzadeh Fallah

Subject: ۱۷۹
year.   Month.   Day.

مدل رتبه بندی غیر شعاعی (JHF)

این مدل از دو روش AP ، JAM کلی تر می باشد. روش JAM مشکلات AP یعنی ناپایداری و نشدنی بودن را ندارد. روش JHF در حالت خاص هر دو مدل فوق را می دهد:

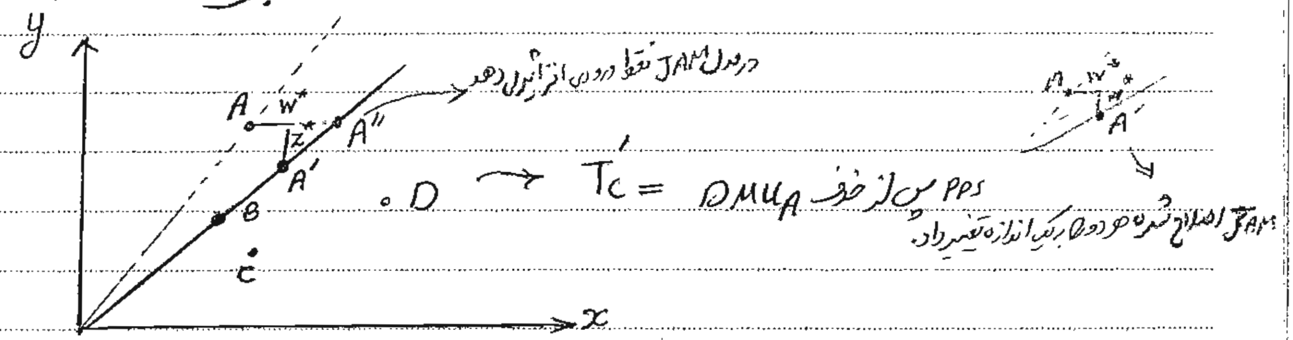
$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i + \sum_{r=1}^{s} \beta_r z_r \qquad \alpha > 0 ,\ \beta > 0$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{ip} + w_i \qquad , i = 1, \dots, m \qquad (a)$$

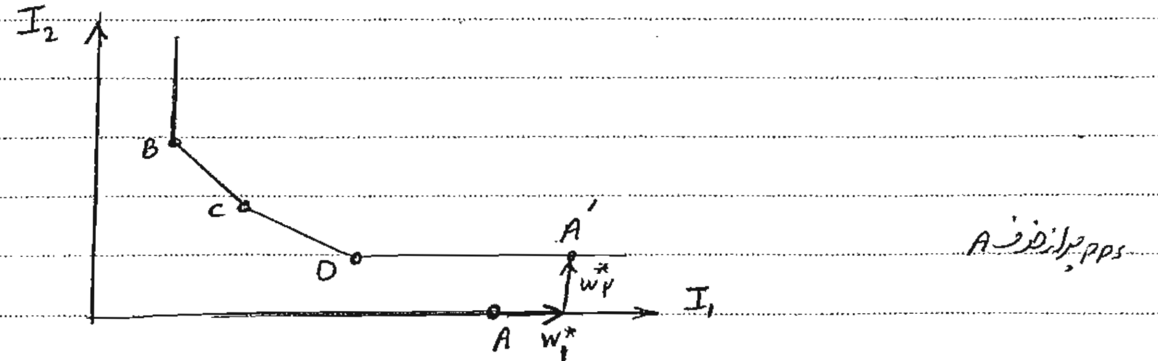
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} - z_r \qquad , r = 1, \dots, s \qquad (b)$$

$$\lambda_j \geq 0 ,\ w_i \geq 0 ,\ z_r \geq 0 \qquad (j \neq p)$$

در این مدل αها و βها از طرف مدیر بر حسب اولویت و اهمیت ورودی ها و خروجی ها مشخص می گردند.



$$\cdot D \rightarrow T_c' = DMU_A \text{ پس از حذف } PPS$$



$$DMU_A \text{ مقدار کارایی } = 1 + \alpha_1 w_1^* + \alpha_2 w_2^*$$

تمرین: نشان دهید JAM اصلاح شده یا JHF این است که در آن طول تصویر یکسان است یعنی $z = w_1 = w_2 = \dots$ یعنی مدل به صورت زیر می باشد:

Page:

Subject: ۱۸۰

year. Month. Day.

مدل JAM اصلاح شده:

$$\text{Min} \quad w$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{ip} + w \qquad , i=1,\dots,m$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} - w \qquad , r=1,\dots,s$$

$$\lambda_j \geq 0 \;,\; j\neq 0 \;,\; w \geq 0$$

در رابطه با کاربران مدل JHF ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت زیر نرمال می‌شوند

$$\begin{cases} \hat{x}_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{\max\limits_{1\leq i\leq m}\{x_{ij}\}} & i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n \\ \hat{y}_{rj} = \dfrac{y_{rj}}{\max\limits_{1\leq r\leq s}\{y_{rj}\}} & r=1,\dots,s \quad j=1,\dots,n \end{cases}$$

قضیه: مدل JHF همواره شدنی است.

برهان: قرار می‌دهیم:

$$\lambda_j = \begin{cases} 0 & j=p \\ 1 & j=1,\dots,n \;,\; j\neq p \end{cases}$$

$$w_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} x_{ij}$$

$$\text{if} \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} y_{rj} - y_{rp} \geq 0 \longrightarrow z_r := \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} y_{rj} - y_{rp}$$

$$\text{if} \quad \sum y_{rj} - y_{rp} < 0 \longrightarrow z_r := y_{rp} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} y_{rj}$$

$$\text{if} \quad y_{rp} = 0 \longrightarrow z_r = 0$$

قضیه: در مدل JHF اگر (λ^*, w^*, z^*) جواب بهینه باشد تمامی قیود (a) و (b) نافذند.

برهان: فرض کنید (فرض خلف) یکی از قیود (a) و (b) در جواب بهینه نافذ نباشد. بدون اینکه در کلیت استدلال خللی وارد شود فرض کنید قید اول (a) نافذ نباشد یعنی

Page:

Subject: ۱۸۱
year. Month. Day.

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \lambda_j^* x_{ij} \leq x_{ip}+w_1^* \longrightarrow \sum_{j\neq p} \lambda_j^* x_{1j} + s_1^{-*} = x_{1p}+w_1^*$$

$$\longrightarrow s_1^{-*} = (x_{1p}+w_1^*) - \sum \lambda_j^* x_{1j} > 0 \longrightarrow w_1'^* = w_1^* - s_1^{-*} < w_1^* \rightarrow w_1'^* < w_1^*$$

در نتیجه:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i^* + \sum_{r=1}^{s} \beta_r z_r^* = \alpha_1 w_1^* + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i w_i^* + \sum \beta_r z_r^* > \alpha w_1'^* + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i^* + \sum_{r=1}^{s} \beta_r$$

که این با فرض بهینگی (λ^*, w^*, z^*) در تناقض است.

بدست آوردن مدل JAM از JHF:

قرار می‌دهیم
$$\begin{cases} w_i = w, & i=1,\dots,m \qquad \alpha_i = 1/m \qquad i=1,\dots,m \\ z_r = 0, & r=1,\dots,s \qquad \beta_r = 0 \qquad r=1,\dots,s \end{cases}$$

در این صورت مدل JHF به صورت زیر در می‌آید که همان مدل JAM می‌باشد:

$$\text{Min} \quad w$$

مقدار ورودی‌ها به اندازه w افزایش می‌یابد

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j\neq p} \lambda_j x_{ij} \leq x_{ip} + w \qquad \forall i$$

مدل JAM

$$\sum_{j\neq p} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} \qquad \forall r$$

یا

$$1+\text{Min } w$$

$$\text{s.t. } \sum \lambda_j \frac{x_{ij}}{R_i} \leq \frac{x_{ip}}{R_i} + w_i$$

$$\lambda_j \geq 0, \ j\neq p, \ w \geq 0$$

$$\sum \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp}$$

بدست آوردن مدل JAM اصلاح شده از JHF:

$R_i = \max_j \{x_{ij}\}$

قرار می‌دهیم
$$\begin{cases} w_i = w, & i=1,\dots,m \quad , \quad \alpha_i = 1/m \ , \ i=1,\dots,m \\ z_r = w, & r=1,\dots,s \quad , \quad \beta_r = 0 \ , \ r=1,\dots,s \end{cases}$$

یا

$R_i = M_i$

مقدار ... ها را تغییر دهید

پس:

$$\text{Min} \quad w$$

$$\text{s.t.} \sum_{j\neq p} \lambda_j x_{ij} \leq x_{ip} + w \qquad \forall i$$

مدل JAM اصلاح شده

$$\sum_{j\neq p} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} - w \qquad \forall r$$

ورودی‌ها و خروجی‌ها به اندازه w به ترتیب افزایش و کاهش می‌دهد

$$\lambda_j \geq 0, \ j\neq p, \ w \geq 0$$

پایان فصل اول