ضمیمه آنالیز ریاضی ۱ توابع محدب

شریفی

تعریف. فرض کنیم $-\infty \le a < b \le \infty$. تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ را محدب می‌نامیم درصورتی که برای هر $x,y\in(a,b)$ هر $\lambda\in[0,1]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

لم ۱. شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f بر بازه (a,b) محدب باشد آن است که به ازاء هر s، t، u که $a<s<t<u<b$ داشته باشیم:

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\le\frac{f(u)-f(t)}{u-t} \qquad 1$$

برهان. $(\Rightarrow)$ فرض کنیم $\lambda=\frac{u-t}{u-s}$ پس $t=\lambda s+(1-\lambda)u$، لذا:

$$f(t)\le\frac{u-t}{u-s}f(s)+\frac{t-s}{u-s}f(u)$$

$$f(t)-f(s)\le\frac{s-t}{u-s}f(s)+\frac{t-s}{u-s}f(u)$$

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\le\frac{f(u)-f(t)}{u-t}.$$

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم $x,y\in(a,b)$ و $\lambda\in[0,1]$ دلخواه باشند و رابطه 1 برقرار باشد. بدون آنکه به کلیت خللی وارد شود فرض کنیم $x<y$، لذا $x\le\lambda x+(1-\lambda)y\le y$ بنابر 1 داریم:

$$\frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{(1-\lambda)(y-x)}\le\frac{f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)}$$

یعنی: $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$. پس f بر (a,b) محدب است.

باتوجه به اینکه طرف چپ و راست نامساوی 1 به ترتیب شیب خطوط مار بر $(t,f(t))$، $(s,f(s))$ و $(t,f(t))$، $(u,f(u))$ هستند، لذا f محدب است اگر و فقط اگر شیب خط اول نابیشتر از شیب خط دوم باشد.

قضیه ۲. اگر f بر (a,b) محدب باشد، آنگاه f بر هر بازهٔ بستهٔ $[c,d]\subseteq(a,b)$ در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که f بر $[c,d]$ از بالا و پایین کراندار است. فرض کنیم

در این صورت $M=\max\{f(c),f(d)\}$ برای هر $x\in[c,d]$ ؛ $x=\lambda c+(1-\lambda)d$

که $\lambda=\frac{d-x}{d-c}$ ، پس : $f(x)\leq\lambda f(c)+(1-\lambda)f(d)\leq\lambda M+(1-\lambda)M=M$

یعنی f از بالا کراندار است . حال ثابت می کنیم f از پائین نیز کراندار است ، برای

این منظور اگر $x\in[c,d]$ دلخواه باشد ، آنگاه با فرض $t=x-\frac{c+d}{2}$ داریم :

$$\frac{c+d}{2}+t\ ,\ \frac{c+d}{2}-t\in[c,d]$$

چون f محدب است پس

$$f\left(\frac{c+d}{2}\right)\leq\frac{1}{2}f\left(\frac{c+d}{2}+t\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{c+d}{2}-t\right)$$

$$=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f\left(\frac{c+d}{2}-t\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}M$$

$$\therefore\ f(x)\geq 2f\left(\frac{c+d}{2}\right)-M=m$$

حال اگر $c\leq x<y\leq d$ دلخواه باشد و p و q دو عدد ثابت باشند بطوریکه :

$$a<q<c\leq x<y\leq d<p<b$$

با بکاربردن نامساوی ۱ برای x ، y ، p و q ، x ، y خواهیم داشت :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(p)-f(y)}{p-y}\leq\frac{M-m}{p-d}$$

$$\frac{m-M}{p-q}\leq\frac{f(x)-f(q)}{x-q}\leq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

قرار می دهیم $K=\frac{M-m}{p-d}$ ، لذا : $|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$. لذا f بر (a,b) پیوسته است .

تذکر . اگر f بر (a,b) محدب باشد و a و b اعداد حقیقی باشند آنگاه لازم نیست f در a و b از راست یا چپ پیوسته باشد حتی اگر در a و b تعریف شده باشد .

تعریف . تابع f بر بازه $[c,d]$ پیوسته مطلق است اگر برای هر $\varepsilon>0$ ، $\delta>0$ ی موجود باشد که برای هر خانوادهٔ $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{n}$ از بازه های باز دو به دو جدا از هم از $[c,d]$ ، اگر $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ آنگاه $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$.

واضح است که اگر f در شرط لیپ شیتز صدق کند ، آنگاه f پیوسته مطلق است و بعلاوه اگر f بر $[a,b]$ پیوسته مطلق باشد ، در این صورت f روی این فاصله با تغییر کراندار است .

قضیه ۳.۱ اگر f بر (a,b) محدب (اکیداً محدب*) باشد و $x_0\in(a,b)$ آنگاه $f'_+(x_0)$ و $f'_-(x_0)$ موجود و صعودی اند.

برهان. فرض کنید $a<x_0<y<z<b$ و $\lambda=\frac{z-y}{z-x_0}$ ، از محدب بودن f داریم:

$$f(y)\le \lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(z)$$

$$f(y)-f(x_0)\le(1-\lambda)(f(z)-f(x_0))$$

$$\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}\le\frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ بر (x_0,b) صعودی است، لذا $\lim_{x\to x_0^+} g(x)$ موجود است، (قضیه ۲۹.۴ - [۱]) یعنی $f'_+(x_0)$ موجود است و مشابهاً $f'_-(x_0)$ نیز موجود است. حال اگر $a<x_1<x_0<x_2<b$ ، بنابر ۱ داریم: $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\le\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ ، با حد گرفتن از طرفین وقتی که $x_1\to x_0$ و $x_2\to x_0$ نتیجه می‌گیریم: $f'_-(x_0)\le f'_+(x_0)$.

حال ثابت می‌کنیم f'_- صعودی است، اگر $t<x<y$ آنگاه بنابر ۱ داریم:

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\le\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le f'_-(x)\qquad (\text{چرا؟})$$

حال اگر $x\to t$ داریم: $f'_-(x)\le f'_-(y)$ ؛ یعنی f'_- صعودی است. مشابهاً f'_+ صعودی است. ∎

نتیجه ۱. اگر f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه مشتق چپ و راست باهم برابرند. لذا تابع مشتق‌پذیر f بر (a,b) محدب است اگر و فقط اگر f' صعودی باشد. واضح است اگر f بر (a,b) مشتق‌پذیر و محدب باشد قضیه فوق نشان می‌دهد که f' صعودی است. برعکس اگر f' بر (a,b) صعودی باشد و $a<s<t<u<b$ آنگاه بنابر قضیه مقدار

---

* اگر در تعریف ۱ نامساوی اکید باشد، آنگاه f را اکیداً محدب گوییم.

میانگین داریم: $\exists c_1$ s.t $s<c_1<t$ $\quad f'(c_1)=\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$

$$\exists c_2 \text{ s.t } t<c_2<u \quad f'(c_2)=\frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

از صعودی بودن f' داریم $f'(c_1)\le f'(c_2)$ که معادل با 1 است، یعنی f محدب است.

نتیجه ۲. اگر f بر (a,b) دارای مشتق دوم باشد آنگاه f بر (a,b) محدب است اگر و فقط اگر f'' بر (a,b) مثبت باشد.

قضیه ۴. (نامساوی ینسن) اگر f بر (a,b) محدب و $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ اعداد حقیقی نامنفی باشند بطوری که $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n=1$ آنگاه:

$$f(\alpha_1x_1+\cdots\alpha_nx_n)\le\alpha_1f(x_1)+\cdots\alpha_nf(x_n)$$

برهان. اثبات با استقراء روی n. حکم برای $n=1,2$ برقرار است. حال اگر حکم برای $n-1$ برقرار باشد، ثابت می‌کنیم برای n نیز برقرار است.

بنابر فرض استقراء با فرض $\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=1$ داریم:

$$f(\alpha_1x_1+\cdots\alpha_{n-1}x_{n-1})\le\alpha_1f(x_1)+\cdots\alpha_{n-1}f(x_{n-1})$$

حال اگر $\alpha_1+\cdots\alpha_n=1$ و $0\le\alpha_n<1$ (اگر $\alpha_n=1$ حکم برقرار خواهد بود) آنگاه:

$$\alpha_1x_1+\cdots\alpha_{n-1}x_{n-1}+\alpha_nx_n=\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_n}x_1+\cdots\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n}x_{n-1}\right)(1-\alpha_n)+\alpha_nx_n$$

چون $(1-\alpha_n)+\alpha_n=1$، بنابر محدب بودن f داریم:

$$f(\alpha_1x_1+\cdots\alpha_nx_n)\le(1-\alpha_n)f\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_n}x_1+\cdots\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n}x_{n-1}\right)+\alpha_nf(x_n)$$

چون $\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_n}+\cdots\dfrac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n}=1$ بنابر فرض استقراء

$$f\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_n}x_1+\cdots\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n}x_{n-1}\right)\le(1-\alpha_n)\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_n}f(x_1)+\cdots\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n}f(x_n)\right)=$$

$$\alpha_1f(x_1)+\cdots\alpha_{n-1}f(x_{n-1}) \quad . \text{II}$$

تعریف. تابع $f: I\to\mathbb{R}$ را محدب میانگاهی گوییم اگر

$$\forall x,y\in I,\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

لم ۱.۵ اگر f روی بازه I محدب میانگاهی باشد آنگاه:

$$\forall x_1,\dots x_n\in I;\quad f\left(\frac{x_1+\cdots x_n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\cdots f(x_n)\right)$$

برهان. بدیهی است که برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم:

$$f\left(\frac{x_1+\cdots x_{2^m}}{2^m}\right) \le \frac{f(x_1)+\cdots f(x_{2^m})}{2^m} \qquad *$$

عدد مفروض n را در نظر می‌گیریم، در این صورت k ای هست که $n<2^k$. برای هر i که $n+1 \le i \le 2^k$، تعریف می‌کنیم $\sigma = x_i = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots x_n)$، لذا:

$$\sigma = \frac{1}{n}(x_1+\cdots x_n) = \frac{(x_1+\cdots x_n)+(2^k-n)\sigma}{2^k}$$

بنابر *

$$f(\sigma) \le \frac{f(x_1)+\cdots f(x_n)+(2^k-n)f(\sigma)}{2^k}$$

$$f(\sigma) \le \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}. \ \square$$

نتیجه ۳. اگر $f: I \to \mathbb{R}$ محدب میانگی و برای هر $1 \le i \le n$، $p_i \in I$ ها گویا و مثبت باشند بطوری که $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$، آنگاه: $f(p_1x_1+\cdots p_nx_n) \le p_1f(x_1)+\cdots p_nf(x_n)$

برهان. کافی است p_iها را با مخرج مشترک بنویسیم، یعنی $p_i = \frac{m_i}{m}$ & $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$

لذا بنابر لم قبل:

$$f\left(\frac{m_1x_1+\cdots m_nx_n}{m}\right) \le \frac{1}{m}\Big(\overbrace{f(x_1)+\cdots f(x_1)}^{m_1\ \text{مرتبه}}+\cdots \overbrace{f(x_n)+\cdots f(x_n)}^{m_n\ \text{مرتبه}}\Big)$$

$\therefore\ f(p_1x_1+\cdots p_nx_n) \le p_1f(x_1)+\cdots p_nf(x_n)$ (چرا). $\square$

نتیجه ۴. اگر p_iها اعداد گویا و مثبت در I باشند و $f: I \to \mathbb{R}$ محدب میانگی باشد، آنگاه:

$$f\left(\frac{p_1x_1+\cdots p_nx_n}{p_1+\cdots p_n}\right) \le \frac{p_1f(x_1)+\cdots p_nf(x_n)}{p_1+\cdots p_n}$$

برهان، از نتیجه ۳ و این واقعیت که برای هر $1 \le i \le n$، $0 \le \frac{p_i}{p_1+\cdots p_n} \le 1$ و $\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_1+\cdots p_n} = 1$ نتیجه می‌شود.

قضیه ۶. فرض کنید f یک تابع حقیقی و پیوسته باشد که در (a,b) تعریف شده و برای هر $x,y \in (a,b)$ در $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ صدق می‌کند، ثابت کنید f محدب است.

برهان. فرض کنیم $p_i \in \mathbb{R}^+$، $1 \le i \le m$، در این صورت برای هر i، دنباله‌ای از اعداد

گویای مثبت، مانند q_n^i موجود است که $q_n^i \to p_i$، چون f پیوسته است، $f(q_n^i) \to f(p_i)$، بنابر نتیجه ۴ داریم:

$$f\left(\frac{q_n^1 x_1+\cdots q_n^m x_m}{q_n^1+\cdots q_n^m}\right)\leqslant \frac{q_n^1 f(x_1)+\cdots q_n^m f(x_m)}{q_n^1+\cdots q_n^m}$$

چون $q_n^i \to p_i$ و $f(q_n^i)\to f(p_i)$ پس

$$f\left(\frac{p_1 x_1+\cdots p_m x_m}{p_1+\cdots p_m}\right)\leqslant \frac{p_1 f(x_1)+\cdots p_m f(x_m)}{p_1+\cdots p_m}$$

بخصوص اگر $1 \geqslant \lambda \geqslant 0$ آنگاه با انتخاب $p_1=\lambda$, $p_2=(1-\lambda)$، برای هر $x,y \in (a,b)$

داریم: $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$. ∎

قضیه ۱.۷. اگر φ بر $\mathbb{R}$ محدب و f بر $[0,1]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_0^1 \varphi\circ f(t)\,dt \geqslant \varphi\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)$$

برهان: بنابر لم ۱، برای $a<s<t<u<b$ داریم:

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\leqslant\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$$

فرض کنیم t ثابت و $B=\sup\limits_{s<t}\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$، پس:

$$\forall s<t\ ;\ \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\leqslant B \Rightarrow \varphi(s)\geqslant\varphi(t)+B(s-t)$$

$$\forall u>t\ ;\ B\leqslant\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}\Rightarrow\varphi(u)\geqslant\varphi(t)+B(u-t)$$

پس برای هر $s\in(a,b)$ $\varphi(s)\geqslant\varphi(t)+B(s-t)$. قرار می‌دهیم

$s=f(x)$ و $t=\int_0^1 f(x)\,dx$ لذا:

$$\varphi\circ f(x)\geqslant\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)+B\left(f(x)-\int_0^1 f(x)dx\right)$$

$$\int_0^1\varphi\circ f(x)\,dx\geqslant\int_0^1\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dx+B\int_0^1 f(x)dx-B\int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_0^1\varphi\circ f(x)\,dx\geqslant\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\ .\ \blacksquare$$

نتیجه ۱. اگر $\varphi(t)=e^t$ آنگاه: $e^{\int_0^1 f(x)dx}\leqslant\int_0^1 e^{f(x)}dx$.

تعمیم قضیه ۱.۷ اگر $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ محدب باشد و $g:[c,d]\to(a,b)$ تابع پیوسته باشد آنگاه

$$f\left(\frac{1}{d-c}\int_c^d g(x)\,dx\right)\leqslant\frac{1}{d-c}\int_c^d f(g(x))\,dx$$

تذکر. اگر I در $\mathbb{R}$ محدب و $f: I \to \mathbb{R}$ محدب باشد آنگاه مجموعه؛
$G = \{(x,y) \, ; \, x \in I \ \& \ y \geq f(x)\}$ در $\mathbb{R}^2$ محدب است. برعکس اگر I و G محدب باشند، آنگاه f بر I محدب است.

تمرین

۱- اگر $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ محدب میانگاهی باشد، آنگاه :

f روی (a,b) پیوسته است اگر و فقط اگر f روی (a,b) از بالا موضعاً کراندار باشد

۲- تابع $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ روی (a,b) محدب است اگر و فقط اگر f محدب میانگاهی و اندازه پذیر باشد.

۳- هر تابع محدب روی (a,b) موضعاً کراندار است.

۴- تابع حقیقی f بر $(0,\infty)$ تعریف شده و صعودی است، تابع φ چنین تعریف شده است : $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \forall x \in (0,\infty)$

(i) ثابت کنید برای هر $x,y \geq 0$ $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(y))$.

(ii) φ محدب است. (مسابقه ریاضی ۶۹ - دانشگاه فردوسی)

۵- فرض کنید $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته و $\forall x,y \in \mathbb{R} \ \ g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$

ثابت کنید $\exists c,a \ s.t \ g(x) = cx + a$ (کنکور)

منابع

[1]. مسرقالحسن ، آنالیز ریاضی.

[2]. Rudin . w. Real and Complex Analysis.

[3]. Rayden, H.L. Real Analysis.

[4]. Roberts and varberg. Another proof that Convex functions are locally Lipschitz , monthly. vol 81. page 10141

[5] Tiel . J. v. Convex Analysis.

کامران شریفی - مهر ۷۵