سلام بچه ها :

قبل از اینکه جواب سؤال های سال ترم را بدهم، یه سری نکاتی از فصل 9 باقی مانده که سر کلاس فرصت توضیح وجود نداشت که اینجا براتون گذاشتم، حتماً به جزوه ی درستون اضافه کنید.

1- تعریف مواد پارامغناطیس، دیامغناطیس و فرومغناطیس

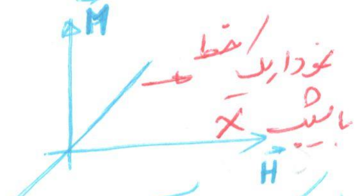
همانطور که گفته شد اگر محیط خطی و همگن و همسانگرد باشد

$\vec{M}=\underbrace{\chi_m}_{\text{پذیرفتاری مغناطیسی}}\vec{H}$ $\quad \chi_m=(k_m-1)\mu_0$

اگر $\chi_m<0$ ← مواد دیامغناطیس هستند

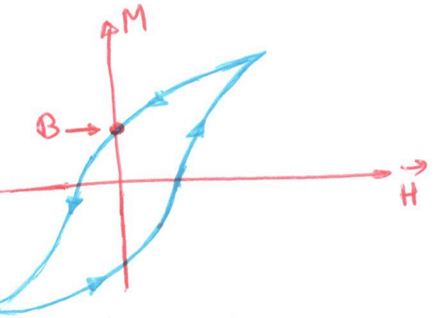
اگر $\chi_m>0$ ← مواد پارامغناطیس هستند

نکته مهم در مورد این دو دسته مواد این است که در آنها یک رابطه ی خطی ای که بین $\vec{M}$ و $\vec{H}$ وجود دارد و با صفر شدن $\vec{H}$، $\vec{M}$ نیز صفر می شود ←



- نیز لازم به ذکر است که در حضور مواد دیامغناطیس که برای آنها $\chi_m<0$ است، میدان مغناطیسی تضعیف می شود و در مورد مواد پارامغناطیس، میدان مغناطیسی تقویت می شود، اما نکته مهم همانطور که ذکر شد، نداشتن خاصیت مغناطیسی در حالت $H=0$ است و نکته بعد $|\chi_m|\ll 1$ می باشد

- اما مواد فرومغناطیس، مواد غیرخطی هستند، یعنی که بین $\vec{M}$ و $\vec{H}$ رابطه ی خطی ای همچون $\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ که در آن χ_m یک عدد است وجود **ندارد**، رابطه ی بین $\vec{M}$ و $\vec{H}$ در این مواد از منحنی ای به نام منحنی پسماند تبعیت می کند که در شکل مشخص است.



این منحنی نشانگر این واقعیت است که با صفر شدن $\vec{H}$، مغناطش صفر نمی شود و بنابراین این مواد در عدم حضور میدان مغناطیسی، دارای میدان مغناطیسی هستند (به نقطه ی B روی نمودار توجه شود) در این نقطه $H=0$ ولی $M\neq 0$ است

۳- یک کره‌ی مغناطیده با بردار مغناطش $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ دارای شعاع a است. پتانسیل داخل و خارج این کره با استفاده از هماهنگ‌های کروی قابل محاسبه است زیرا $\nabla\cdot M = 0$ است ← $\nabla^2 \Phi^* = 0$

$$\Phi^*_{in} = A_0 + \cancel{\frac{B_0}{r}} + A_1 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta + A_2 r^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2} + \frac{B_2}{r^3}\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2} + \dots$$

تک قطبی مغناطیسی نداریم

$$\Phi^*_{out} = C_0 + \cancel{\frac{D_0}{r}} + C_1 r\cos\theta + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta + C_2 r^2 \frac{(3\cos^2\theta-1)}{2} + \frac{D_2}{r^3}\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2} + \dots$$

$$r \to 0 \Rightarrow \Phi^*_{in} \neq \infty \to B_n = 0 \quad n \geq 1 \to \Phi^*_{in} = A_0 + A_1 r\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n P_n(\theta)$$

$$r \to \infty \Rightarrow \Phi^*_{out} \neq \infty \to C_n = 0 \quad n \geq 1 \to \Phi^*_{out} = C_0 + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D_n}{r^{n+1}} P_n(\theta)$$

$$\Rightarrow \Phi^*_{in}\big|_{r=a} = \Phi^*_{out}\big|_{r=a} \to A_0 + A_1 a\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n P_n(\theta) = C_0 + \frac{D_1}{a^2}\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{D_n}{r^{n+1}} P_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = C_0 \\ A_1 a = \dfrac{D_1}{a^2} \\ A_n a^n = \dfrac{D_n}{a^{n+1}} \end{cases}$$

دستگاه معادلات I

$A_0 = C_0 \to$ چون اینکه از ثابت پتانسیل کم شود می‌توان A_0 و C_0 را صفر در نظر گرفت $\to A_0 = C_0 = 0$

بیرون کره مغناطش صفر است.

پیوستگی مولفه‌ی عمودی B

$$B_{2n}\big|_{r=a} = B_{1n}\big|_{r=a} \to \begin{cases} B_{2n} = \mu_0(\vec{H}_2 + \vec{M}_2)\cdot\hat{n} = \mu_0 H_{2n} + \cancel{M_{2n}} \to B_{2n} = \mu_0 H_{2n} \\ B_{1n} = \vec{B}_1\cdot\hat{n} = \mu_0(\vec{H}_1 + \vec{M}_1)\cdot\hat{n} = \mu_0(H_{1n} + M_{1n}) = \mu_0 H_{1n} + \mu_0 M_{1n} \\ \phantom{B_{1n}} = \mu_0 H_{1n} + \mu_0 M_0\cos\theta \\ M_{1n} = \vec{M}\cdot\hat{r} = M_0\cos\theta \to B_{1n} = \mu_0 H_{1n} + \mu_0 M_0 \cos\theta \end{cases}$$

خارج کره

داخل کره

مولفه‌ی عمودی مغناطش

$$H_{2n} = -\frac{\partial \Phi^*_{out}}{\partial r}\Big|_{r=a} \qquad H_{1n} = -\frac{\partial \Phi^*_{in}}{\partial r}\Big|_{r=a}$$

$$B_{2n} - B_{1n} = \mu_0 H_{2n} = \mu_0(H_{1n} + M_0\cos\theta)$$

$$\frac{2\mu_0 D_1}{a^3}\cos\theta + \mu_0\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)a^n}{a^{2n+2}} D_n P_n(\theta) = -A_1\cos\theta\,\mu_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\mu_0\, n a^{n-1} A_n P_n(\theta) + \mu_0 M_0\cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\cancel{\mu_0} D_1}{a^3} = -A_1\cancel{\mu_0} + \cancel{\mu_0} M_0 \\ \dfrac{\cancel{\mu_0}(n+1)a^n}{a^{2n+2}} D_n = \cancel{\mu_0}\, n a^{n-1} A_n \end{cases}$$

II دستگاه معادلات

از دستگاه معادلات (I), (II) داریم

$$\begin{cases} A_1 a = \dfrac{D_1}{a^2} \to A_1 = \dfrac{D_1}{a^3} \\ \dfrac{2D_1}{a^3} = -A_1 + M_0 \to \dfrac{2D_1}{a^3} = -\dfrac{D_1}{a^3} + M_0 \to \dfrac{3D_1}{a^3} = M_0 \to \end{cases}$$

$$D_1 = \frac{M_0 a^3}{3}$$

$$\to A_1 = \frac{D_1}{a^3} = \frac{M_0}{3}$$

$$\begin{cases} A_n a^n = \dfrac{D_n}{a^{n+1}} \to A_n = \dfrac{D_n}{a^{2n+1}} \\ \dfrac{(n+1)a^n}{a^{2n+2}} D_n = n a^{n-1} A_n \to \dfrac{(n+1)}{a^{n+2}} D_n = n a^{n-1} \dfrac{D_n}{a^{2n+1}} = \dfrac{n D_n}{a^{n+2}} \to \end{cases}$$

$$\frac{(n+1)}{a^{n+2}} D_n = \frac{n D_n}{a^{n+2}} \to \frac{D_n}{a^{n+2}}(\cancel{n}+1-\cancel{n}) = 0 \to \frac{D_n}{a^{n+2}} = 0 \to D_n = 0 \to A_n = 0$$

$$\to \begin{cases} A_0 = C_0 = 0 \\ D_n = A_n = 0 \quad n \geq 2 \\ D_1 = M_0 a^3/3 \ , \ A_1 = \dfrac{M_0}{3} \end{cases} \to \begin{cases} \Phi^*_{in} = \dfrac{M_0}{3} r\cos\theta \\ \Phi^*_{out} = \dfrac{M_0 a^3}{3} \dfrac{\cos\theta}{r^2} \end{cases}$$

$$\vec{H}_{in} = -\vec{\nabla}\Phi^*_{in} = -\frac{\partial \Phi^*_{in}}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi^*_{in}}{\partial \theta}\hat{\theta} = -\frac{M_0}{3}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{M_0}{3} r\sin\theta\,\hat{\theta} =$$

$$\frac{M_0}{3}(-\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}) = -\frac{M_0}{3}(\underbrace{\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}}_{\hat{k}}) = -\frac{M_0}{3}\hat{k}$$

$$\vec{H}_{out} = -\vec{\nabla}\Phi^*_{out} = -\frac{\partial \Phi^*_{out}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi^*_{out}}{\partial \theta}\hat{\theta} = \frac{2M_0 a^3}{3r^3}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{M_0 a^3}{3r^3}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

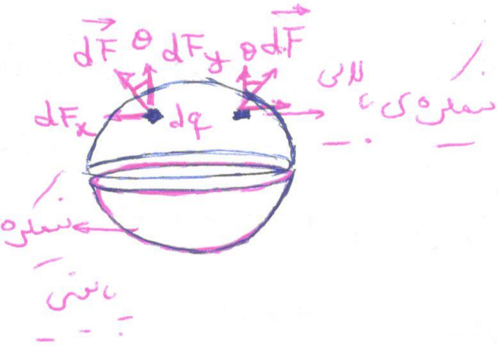
$$= \frac{M_0 a^3}{3r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$$

*** فصل ۹ تا انتهای مثال 9.9 درس داده شده است ***

سوالات پایان ترم در ادامه

سوال ۱: برای به دست آوردن نیرویی که نیمکره‌ی جنوبی یک کره‌ی باردار بر نیمکره‌ی شمالی وارد می‌کند ابتدا با استفاده از قانون گاوس، میدان را داخل کره محاسبه کرده و سپس با استفاده از نیروی وارد بر المان بار dq که برابر Edq است $d\vec{F}$ را حساب می‌کنیم سپس dF_x و dF_y را یافته و نهایتاً با انتگرال گیری از هر یک از مولفه‌ها، F_x و F_y را محاسبه کرده و بردار $\vec{F}$ را به دست می‌آوریم.

قانون گاوس: $\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = q/\varepsilon_0 \rightarrow E\,4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3/\varepsilon_0 \rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ میدان داخل کره



مطابق شکل مولفه‌های x نیروهای وارد شونده به المان‌های بار در نیمکره‌ی شمالی یکدیگر را خنثی می‌کنند و مولفه‌های y با هم جمع می‌شوند

$$F_x = \int dF_x = 0$$

$$F_y = \int dF_y = \int dF\cos\theta \qquad dF = E\,dq = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dq$$

$$dq = \rho dV = \rho r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr \rightarrow F_y = \int \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}\, r^3/3\, \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^3/3 \int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R^4}{4}\right)\underbrace{\left(\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right)}_{1/2}(2\pi)$$

$$= \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}\pi\frac{R^4}{4} \xrightarrow{\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}} F_y = \frac{\pi R^4}{3\times 4\times\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(\frac{4}{3}\pi R^3)^2} = \frac{3}{16}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\rightarrow \vec{F} = \frac{3}{16}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{j}$$

سؤال ۲: پتانسیل داخل و خارج یک پوسته ی نارسانا با شعاع a و چگالی سطحی بار $\sigma(\theta)=(\cos\theta-1)^2$

$$\sigma(\theta)=(1-\cos\theta)^2=\cos^2\theta+1-2\cos\theta$$

خلاء $k=1$ ، a ، خلاء $k=1$

$$\begin{cases}\phi_{in}=A_0+\frac{B_0}{r}+A_1 r\cos\theta+\frac{B_1}{r^2}\cos\theta+A_2r^2\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}+\frac{B_2}{r^3}\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}+\cdots\\ \phi_{out}=C_0+\frac{D_0}{r}+C_1 r\cos\theta+\frac{D_1}{r^2}\cos\theta+C_2r^2\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}+\frac{D_2}{r^3}\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}+\cdots\end{cases}$$

$r\to 0 \Rightarrow \phi_{in}\neq\infty \rightarrow B_0,B_1,B_2,\dots=0$ $\rightarrow \phi_{in}=A_0+A_1r\cos\theta+A_2r^2\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}+\cdots$

$r\to\infty \Rightarrow \phi_{out}\neq\infty \rightarrow C_1,C_2,C_3,\dots=0$ $\rightarrow \phi_{out}=C_0+\frac{D_0}{r}+\frac{D_1}{r^2}\cos\theta+\frac{D_2}{r^3}\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}+\cdots$

- با توجه به اینکه $\sigma(\theta)=\cos^2\theta+1-2\cos\theta$ است و $D_{2n}-D_{1n}=\sigma$ می باشد بنابراین جملات تا توان دوم $\cos\theta$ در عبارات مربوط به ϕ_{in} و ϕ_{out} باقی می مانند تا با $\sigma(\theta)$ برابر از تفاضل D_{2n} و D_{1n} هم خوانی داشته باشد

$\rightarrow$ $A_n=0 \quad n\geq 3$, $D_n=0 \quad n\geq 3$ $\rightarrow$

$$\phi_{in}=A_0+A_1r\cos\theta+A_2r^2\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}$$

$$\phi_{out}=C_0+\frac{D_0}{r}+\frac{D_1}{r^2}\cos\theta+\frac{D_2}{r^3}\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}$$

چون پوسته بار دارد پس ضریب D_0 باید بی بماند

ضرایب مجهولی که باید تعیین شوند، A_0 ، A_1 ، A_2 ، C_0 ، D_0 ، D_1 و D_2 می باشند

- پتانسیل در $r=a$ یک کمیت پیوسته است $\rightarrow \phi_{in}|_{r=a}=\phi_{out}|_{r=a} \Rightarrow$

$A_0=C_0+\frac{D_0}{a}$ جملات ثابت در طرفین تساوی با هم برابرند

$A_1a=\frac{D_1}{a^2}$ جملات با ضریب $\cos\theta$ در طرفین با هم برابرند

$A_2a^2=\frac{D_2}{a^3}$ جملات با ضریب $\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}$ با هم در طرفین تساوی برابرند

دسته معادلات (I)

$$D_n=\varepsilon E_n=\varepsilon\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=\varepsilon(-\vec\nabla\phi\cdot\hat n)$$

$- D_{2n}-D_{1n}=\sigma(\theta)$ $\longrightarrow$ $\begin{cases}D_{2n}=\varepsilon_0\left(\frac{D_0}{a^2}+\frac{2D_1}{a^3}\cos\theta+\frac{3D_2}{a^4}\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}\right)\\ D_{1n}=\varepsilon_0\left(-A_1\cos\theta-2A_2a\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}\right)\end{cases}$

$$\rightarrow D_{2n}-D_{1n}=\sigma(\theta)\rightarrow \frac{D_0}{a^2}+\frac{2D_1}{a^3}\cos\theta+\frac{9\cos^2\theta D_2}{2a^4}-\frac{3}{2}\frac{D_2}{a^4}+A_1\cos\theta+3A_2\cos^2\theta a-A_2a=(\varepsilon_0)^{-1}(\cos^2\theta+1-2\cos\theta)$$

$$\rightarrow \frac{D_0}{a^2}+\frac{2D_1}{a^3}\cos\theta+\frac{9D_2}{2a^4}\cos^2\theta-\frac{3}{2}\frac{D_2}{a^4}+A_1\cos\theta+3A_2 a\cos^2\theta-A_2 a=$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{2\cos\theta}{\varepsilon_0} \longrightarrow$$ ضرایب ثابت، ضرایب با ضریب $\cos\theta$ و با ضریب $\cos^2\theta$ را در طرفین تساوی با هم مساوی قرار می‌دهیم

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{D_0}{a^2}-\frac{3D_2}{2a^4}-A_2 a=\frac{1}{\varepsilon_0} \\ \frac{2D_1}{a^3}+A_1=-\frac{2}{\varepsilon_0} \\ \frac{9}{2}\frac{D_2}{a^4}+3A_2 a=\frac{1}{\varepsilon_0} \end{cases}$$ ← (II) دسته معادلات

دو دسته معادلات (I) و (II) داریم که با استفاده از آنها می‌توان ضرایب مجهول را محاسبه کرد.

$$\begin{cases} A_1 a=\frac{D_1}{a^2} \rightarrow A_1=\frac{D_1}{a^3} \\ \frac{2D_1}{a^3}+A_1=-\frac{2}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{2D_1}{a^3}+\frac{D_1}{a^3}=-\frac{2}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{3D_1}{a^3}=-\frac{2}{\varepsilon_0} \rightarrow D_1=-\frac{2}{3}\frac{a^3}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\rightarrow A_1=\frac{D_1}{a^3}=-\frac{2}{3\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} A_2 a^2=\frac{D_2}{a^3} \rightarrow A_2=\frac{D_2}{a^5} \\ \frac{9}{2}\frac{D_2}{a^4}+3A_2 a=\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{9}{2}\frac{D_2}{a^4}+3\frac{D_2}{a^5}a=\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{15}{2}\frac{D_2}{a^4}=\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow D_2=\frac{2a^4}{15\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\rightarrow A_2=\frac{D_2}{a^5}=\frac{2}{15\varepsilon_0 a}$$

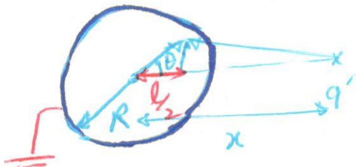
$$\left\{\frac{D_0}{a^2}-\frac{3D_2}{2a^4}-A_2 a=\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{D_0}{a^2}-\frac{3}{2a^4}\frac{2a^4}{15\varepsilon_0}-\frac{2}{15\varepsilon_0 a}a=\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow\right.$$

$$\frac{D_0}{a^2}-\frac{3}{15\varepsilon_0}-\frac{2}{15\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow D_0=a^2\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{5}{15\varepsilon_0}\right)=D_0 \rightarrow a^2\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{3\varepsilon_0}\right)=D_0 \rightarrow D_0=\frac{4a^2}{3\varepsilon_0}$$

$$\left\{A_0=C_0+\frac{D_0}{a} \rightarrow \begin{cases} C_0=0 \\ A_0=D_0/a=\frac{4}{3}\frac{a}{\varepsilon_0} \end{cases} \rightarrow A_0=\frac{4}{3}\frac{a}{\varepsilon_0}\right.$$

$$\rightarrow \begin{cases} \phi_{in}=\frac{4a}{3\varepsilon_0}-\frac{2}{3\varepsilon_0}r\cos\theta+\frac{2}{15a\varepsilon_0}r^2\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2} \\ \phi_{out}=\frac{4a^2}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}-\frac{2}{3\varepsilon_0}\frac{a^3\cos\theta}{r^2}+\frac{2a^4}{15\varepsilon_0}\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2} \end{cases}$$

سوال ۳ باری به فاصله‌ی $l/2$ از مرکز کره‌ای به شعاع R قرار گرفته است که $l/2 \ll R$ می‌باشد، چگالی سطحی بار و نیروی بین کره و بار را حساب کنید



$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(l/2)^2+r^2-2\,l/2\, r\cos\theta}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2-2rx\cos\theta}}$$

$$\phi\big|_{r=R}=0 \rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(l/2)^2+R^2-lR\cos\theta}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2-2xR\cos\theta}} = 0$$

$$\begin{cases} \theta=0 \rightarrow \dfrac{q}{R-l/2} = \dfrac{-q'}{x-R} \\ \theta=\pi \rightarrow \dfrac{q}{R+l/2} = \dfrac{-q'}{x+R} \end{cases} \rightarrow q = -\frac{q'(R+l/2)}{x+R}$$

$$-\frac{q'(R+l/2)}{(x+R)(R-l/2)} = \frac{-q'}{x-R} \rightarrow$$

$$(R+l/2)(x-R) = (x+R)(R-l/2) \rightarrow x = 2R^2/l \quad , \quad q' = -\frac{2R}{l}q$$

$$x-l/2 = 2R^2/l - l/2 = \frac{4R^2-l^2}{2l} = R^2(4-l^2/R^2)/2l = \frac{4R^2}{2l}$$

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(x-l/2)}$$

$$\rightarrow |\vec{F}| = \frac{q\,2Rq}{l\,(2R^2/l)^2} = \frac{q^2 l}{4\pi\varepsilon_0 2R^3}$$

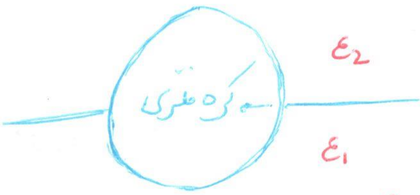
$$\varepsilon_0(-\nabla\phi\cdot\hat{n}) = \sigma \rightarrow \sigma = \varepsilon_0\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$

$$\rightarrow \sigma = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(l/2)^2+r^2-2r\,l/2\cos\theta}} - \frac{2Rq'}{4\pi\varepsilon_0 l\sqrt{(2R/l)^2+r^2-2\frac{2R^2}{l}r\cos\theta}}\right\}\Bigg|_{r=R}$$

اگر مشتق گرفته شود و به جای r، شعاع کره R قرار گیرد و از $l/2 \ll R$ استفاده شود

$$\rightarrow \sigma = -\frac{q}{4\pi R^2}\left(1+\frac{3}{2}\frac{l}{R}\cos\theta\right)$$

سؤال ۴



چون در هر یک از دو محیط، جهت خاصی در جهت زاویه‌ای ندارد ← پتانسیل فقط تابع شعاع است

در فاصله دور از مبدا، پتانسیل صفر است

محیط (۱) ← $\phi_1 = A/r + B$ $\quad r \to \infty \to \phi = 0 \to B = 0$

محیط (۲) ← $\phi_2 = C/r + D$ $\quad r \to \infty \to \phi = 0 \to D = 0$

$\to \begin{cases} \phi_1 = A/r \\ \phi_2 = C/r \end{cases}$

در محیط (۱) در مرز بین دی‌الکتریک و رسانا داریم: $\varepsilon_1\left(-\dfrac{\partial \phi_1}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = \sigma \to \varepsilon_1 A/a^2 = \sigma$

در محیط (۲) نیز در مرز بین دی‌الکتریک و رسانا داریم: $\varepsilon_2\left(-\dfrac{\partial \phi_2}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = \sigma \to \varepsilon_2 C/a^2 = \sigma$

$\sigma = \dfrac{Q}{4\pi a^2}$ → بار کره $\to \begin{cases} \varepsilon_1 \dfrac{A}{a^2} = \dfrac{Q}{4\pi a^2} \\ \varepsilon_2 \dfrac{C}{a^2} = \dfrac{Q}{4\pi a^2} \end{cases}$

از طرفی پتانسیل همه جا روی سطح رسانا ثابت است چه در محیط (۱) دی‌الکتریک نگاه کنیم چه در محیط (۲) $\to \dfrac{A}{a} = C/a \to A = C$

$A=C \to \varepsilon_1 \dfrac{A}{\cancel{a^2}} + \varepsilon_2 (A/\cancel{a^2}) = \dfrac{2Q}{4\pi \cancel{a^2}} \to (\varepsilon_1+\varepsilon_2)A = \dfrac{Q}{2\pi} \to A = C = \dfrac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

$\to \begin{cases} \phi_1 = \dfrac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \dfrac{1}{r} \to \vec{E}_1 = -\dfrac{\partial \phi_1}{\partial r}\hat{r} = \dfrac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \dfrac{1}{r^2}\hat{r} \\ \phi_2 = \dfrac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \dfrac{1}{r} \to \vec{E}_2 = -\dfrac{\partial \phi_2}{\partial r}\hat{r} = \dfrac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \dfrac{1}{r^2}\hat{r} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{P}_1 = \chi_1 \vec{E}_1 = (k_1-1)\varepsilon_0 \vec{E}_1 = \dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \dfrac{Q}{r^2}\hat{r} \\ \vec{P}_2 = \chi_2 \vec{E}_2 = (k_2-1)\varepsilon_0 \vec{E}_2 = \dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \dfrac{Q}{r^2}\hat{r} \end{cases}$

$\to \begin{cases} \vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \dfrac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r} \\ \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = \dfrac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r} \end{cases}$

$\begin{cases} \sigma_{1f} = \varepsilon_1\left(-\dfrac{\partial \phi_1}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_1 \dfrac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \dfrac{1}{a^2} \\ \sigma_{2f} = \varepsilon_2\left(-\dfrac{\partial \phi_2}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = \varepsilon_2 E_{2n} = \dfrac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \dfrac{1}{a^2} \end{cases}$

$\Downarrow$

$Q_f = \sigma_{1f} 2\pi a^2 + \sigma_{2f} 2\pi a^2 = \dfrac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)Q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = Q$

$\begin{cases} \sigma_{1p} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}\Big|_{r=a} = \vec{P}_1 \cdot (-\hat{r})\Big|_{r=a} = -\dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \dfrac{Q}{a^2} \\ \sigma_{2p} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n}\Big|_{r=a} = \vec{P}_2 \cdot (-\hat{r})\Big|_{r=a} = -\dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2} \end{cases}$

$\Downarrow$

$Q_p = \sigma_{1p} 2\pi a^2 + \sigma_{2p} 2\pi a^2 = \dfrac{(2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2)Q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$