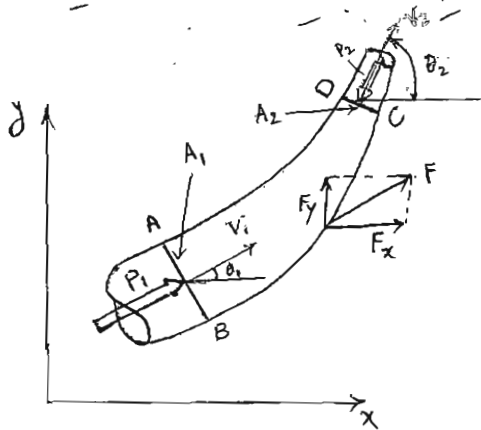


مثال 8: لوله خمیده‌ای را مطابق شکل در نظر بگیرید. نیروی وارد بر این لوله را از طرف سیال محاسب کنید.



حجم کنترل: ABCD

P_1 و P_2 : فشار در مقاطع 1 و 2

V_1 و V_2 : سرعت در مقاطع 1 و 2

A_1 و A_2 : سطح مقاطع 1 و 2

معادله اندازه حرکت در جهت x:

$$-F_x + P_1 A_1 \cos \theta_1 - P_2 A_2 \cos \theta_2 = \dot{m} (V_2 \cos \theta_2 - V_1 \cos \theta_1)$$

معادله اندازه حرکت در جهت y:

$$-F_y + P_1 A_1 \sin \theta_1 - P_2 A_2 \sin \theta_2 = \dot{m} (V_2 \sin \theta_2 - V_1 \sin \theta_1)$$

F نیروی وارد بر لوله از طرف سیال است. پس نیروی وارد بر سیال از طرف لوله $-F$ است. F_x و F_y مؤلفه‌های نیروی F در جهات x و y هستند.

در نتیجه داریم:

$$F_x = \dot{m} (V_1 \cos \theta_1 - V_2 \cos \theta_2) + P_1 A_1 \cos \theta_1 - P_2 A_2 \cos \theta_2$$

$$F_y = \dot{m} (V_1 \sin \theta_1 - V_2 \sin \theta_2) + P_1 A_1 \sin \theta_1 - P_2 A_2 \sin \theta_2$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{نیروی برآیند}$$

27

$$\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 90^\circ$$

هرگاه زاویه 90° درج باشد.

$$F_x = \dot{m}v_1 + P_1 A_1$$

$$F_y = -\dot{m}v_2 - P_2 A_2$$

طریقه حل مثل مربوط به اندازه حرکت خطی:

1. ابتدا حجم کنترل مثل را بدانند.
2. ورودی و خروجی های جریان را به حجم کنترل بدانند.
3. فشارهای ورودی و خروجی به حجم کنترل را بدست آورند. اگر لازم باشد باید از روابط معادله برنولی و معادله پیوستگی استفاده کنند.
4. در نوشتن رابطه اندازه حرکت خطی به نکته زیر خیلی دقت کنند. (حجم)

$$\sum F = \sum v(PVA)$$

(در حالت پایا)

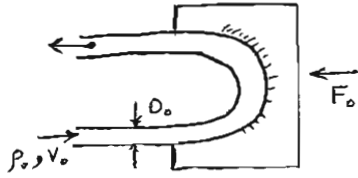
a) در رابطه بالا v ، سرعت نسی سیال نسبت به حجم کنترل می باشد که قبلاً در صفحه 24، 25 با ملامت توضیح داده شد.

b) در رابطه $(PVA)v$ به سرعت مولفه ای سیال

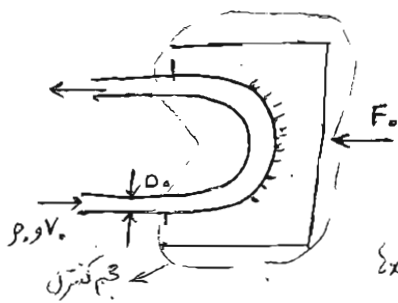
علامت v : سرعت مولفه ای سیال: یعنی اگر در جهت مثبت محور x بود علامت $+$ و در خلاف جهت محور x علامت $-$ می باشد.

علامت PVA : برای ورودی های جریان با علامت $-$ و برای خروجی های جریان با علامت $+$ می باشد.

مثال 9 در شکل زیر که جریان برگشت یک جهت آب می باشد رابطه نیروی وارد به پایه (F_o) با سرعت جهت سیال (V_o) رابطه آورید. (V_o) به جهت (F_o)



پایه : حجم کنترل که شامل یک ورودی و یک خروجی می باشد.



✓ فشار در ورودی و خروجی ثابت را تغییر می باشد که چون سطح مقطع در ورودی و خروجی یکسان است از رابطه صرف می شوند.

$$-F_o + P_1 A - P_2 A = \underbrace{(\dot{V}_o)}_{\text{درجهت } +x} (-\rho_o V_o A) - \underbrace{(\dot{V}_o)}_{\text{درجهت } -x} (\rho_o V_o A)$$

$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$-F_o = -\rho_o V_o^2 A - \rho_o V_o^2 A$$

$$F_o = 2 \rho_o A V_o^2$$

$$A = \frac{\pi D_o^2}{4}$$

$$F_o = 2 \rho_o \frac{\pi D_o^2}{4} \times V_o^2 = \frac{1}{2} \rho_o \pi V_o^2 D_o^2$$

$$V_o = \sqrt{\frac{2 F_o}{\rho_o \pi D_o^2}}$$

ب) اگر در سوال قبل، پایه خود را با سرعت V به سمت چپ حرکت می کرد، F_o رابطه آورید.

$$V' = V_o + V$$

$$F_o = 2 \rho_o A V'^2 = 2 \rho_o A (V_o + V)^2$$

مسئله ۱۰
 مثال ۱۰ آب با سرعت 5 m/s در یک زانوی 90° در یک دایره قطر 25 cm جریان دارد.
 اگر فشار آب در ورودی برابر با فشار در خروجی باشد، در این صورت نیروی که آب در زانوی
 حرکت به زانو وارد می‌شود چند نیوتن است؟

$$\begin{cases} \theta_1 = 0^\circ \\ \theta_2 = 90^\circ \end{cases}$$

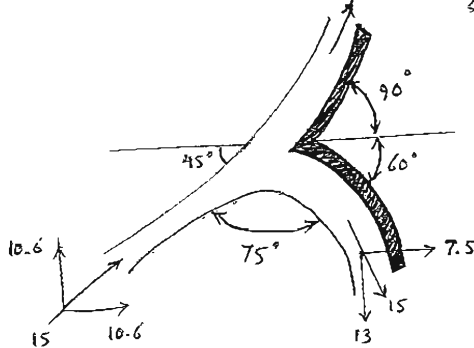
در یک زانوی 90° در یک دایره قطر 25 cm

$$-F_x + P_1 A_1 \cos \theta_1 - P_2 A_2 \cos \theta_2 = m(v_1 \cos \theta_1 - v_2 \cos \theta_2)$$

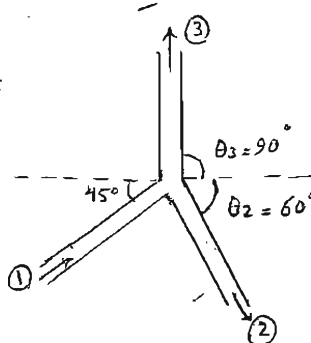
$$F_x = P_1 A_1 + (P A v_1)(v_1) = P_1 A_1 + P A v_1^2$$

$$F_x = (-35 \times 10^3) \times \frac{\pi \times 0.25^2}{4} + 1000 \times \frac{\pi \times 0.25^2}{4} \times 5^2 = -490.9 \text{ N}$$

مسئله ۱۱
 مثال ۱۱ در شکل به سطح سه‌رسانیت فوران آب سه خورد می‌کند و جریان به دو قسمت مساوی
 $0.03 \text{ m}^3/\text{s}$ در دو جهت مطابق شکل خارج می‌شود. اگر سرعت فوران در دردی 15 متر بر ثانیه
 باشد نیروی وارد بر سطح ثابت در جهت x و y چقدر است؟



حل: ابتدا ترسیم گهبری از شکل رسم می‌کنیم.



در هر سه مقطع فشار اتحتمری است و سرعت سیال در هر سه مقطع برابر خواهد بود.

$$v_1 = v_2 = v_3 = v = 15 \text{ m/s}$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

معادله پیوستگی بنام مقطع :

$$Q_1 = 0.03 + 0.03 = 0.06 \text{ m}^3/\text{s}$$

معادله اندازه حرکت در جهت x :

$$-F_x = (v_1 \cos \theta_1)(-p v_1 Q_1) + (v_2 \cos \theta_2)(p v_2 Q_2) + (v_3 \cos \theta_3)(p v_3 Q_3)$$

$$\underbrace{v_1 = v_2 = v_3 = v} \rightarrow -F_x = (v \cos \theta_1)(-p v Q_1) + (v \cos \theta_2)(p v Q_2) + (v \cos \theta_3)(p v Q_3)$$

$$F_x = p v (Q_1 \cos \theta_1 - Q_2 \cos \theta_2 - Q_3 \cos \theta_3)$$

$$F_x = 1000 \times 15 (0.06 \cos 45^\circ - 0.03 \cos 60^\circ - 0.03 \cos 90^\circ) = 411.4 \text{ N}$$

معادله اندازه حرکت در جهت y :

$$-F_y = (v_1 \sin \theta_1)(-p v_1 Q_1) + (-v_2 \sin \theta_2)(p v_2 Q_2) + (v_3 \sin \theta_3)(p v_3 Q_3)$$

$$-F_y = (v \sin \theta_1)(-p v Q_1) - (v \sin \theta_2)(p v Q_2) + (v \sin \theta_3)(p v Q_3)$$

$$F_y = p v (Q_1 \sin \theta_1 + Q_2 \sin \theta_2 - Q_3 \sin \theta_3)$$

$$F_y = 1000 \times 15 (0.06 \sin 45^\circ + 0.03 \sin 60^\circ - 0.03 \sin 90^\circ) = 576.1 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 707.9 \text{ N}$$

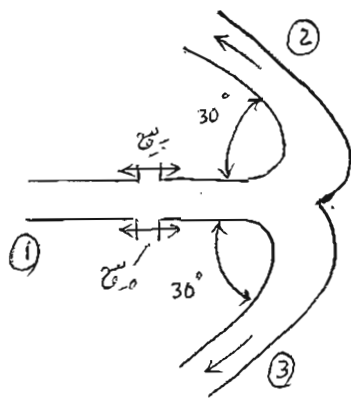
رقت : نیروی در هر بنام مقطع منفرجه باشد.

۲۹ سوال ۱۴ در شکل مقابل اتصال انحرافی لوله توسط سیج دی به لوله متصل شده است. فشار مطلق آب در مقطع ۱ برابر با ۱۴۵ کیلو پاسکال می باشد و در مقاطع ۲ و ۳ آب با فشار ۱۵۱ کیلو پاسکال به هوای آزاد تخلیه می شود. سطح مقطع لوله در مقاطع مختلف عبارتند از:

$$A_2 = A_3 = 0.005 \text{ m}^2 \quad \text{و} \quad A_1 = 0.01 \text{ m}^2$$

دری آب در مقاطع ۲ و ۳ با ۰.۰۴۲ متر بر ثانیه و در برابر ۰.۰۴۲ متر مکعب بر ثانیه می باشد. نیروی وارده بر سیج دی را بدست آورید.

$$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$$



$$-F_x + P_1 A_1 = V_1 (-P V_1 A_1) + (-V_2 \cos \theta) (P V_2 A_2) + (-V_3 \cos \theta) (P V_3 A_3)$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \xrightarrow[A_2 = A_3]{Q_2 = Q_3 = Q} \quad Q_1 = 2Q$$

$$Q_2 = Q_3 = Q \quad \longrightarrow \quad V_2 = \frac{Q}{A_2}, \quad V_3 = \frac{Q}{A_3} \quad \longrightarrow \quad V_2 = V_3 = \frac{Q}{A_2} = V \quad \star$$

$$\longrightarrow -F_x + P_1 A_1 = V_1 (-P Q_1) - (V_2 \cos \theta) (P Q_2) - V_3 \cos \theta (P Q_3)$$

$$\longrightarrow -F_x + P_1 A_1 = -2V_1 P Q - P V Q \cos \theta - P V Q \cos \theta$$

$$\longrightarrow F_x = P_1 A_1 + 2 P Q (V_1 + V \cos \theta)$$

$$\xrightarrow{P_1 = 39 \text{ kPa}} F_x = 39000 \times 0.01 + 2 \times 1000 \times 0.042 \left(\frac{0.084}{0.01} + \frac{0.042}{0.005} \cos 30 \right)$$

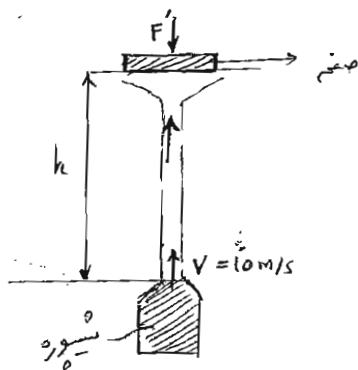
$$\longrightarrow F_x = 1707.7 \text{ N}$$

$$-F_y = (+V_2 \sin \theta)(\rho Q_2) - (V_3 \sin \theta)(\rho Q_3) \quad \text{معادله اندازه حرکت در جهت } y$$

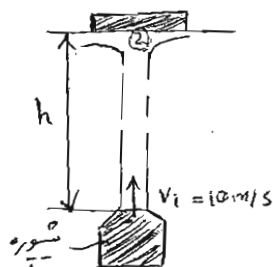
$$\begin{matrix} Q_2 = Q_3 = Q \\ V_2 = V_3 = V \end{matrix} \quad -F_y = \rho V Q \sin \theta - \rho V Q \sin \theta = 0 \rightarrow F_y = 0$$

سوال ۱۳) صنعتی ای به وزن ۳۵ N فقط می تواند آزارانه در استای قائم حرکت کند
آب از سیوره ای به قطر ۳ سانتی متر با سرعت اولیه ۱۰ m/s به پایین صنعت بر خور می کند
الف) مطلوب است فاصله صنعت از سیوره (h) در حالت تعادل صنعت را بیابید.

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2$$



حل) هرگاه V_1 سرعت در فرودی سیوره و V_2 سرعت در نقطه برخورد به صنعت باشد با نوشتن معادله برزلی بین نقاط ① و ② خواهیم داشت.



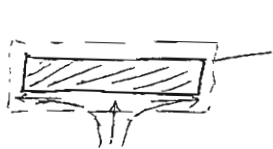
$$\text{نقطه ①} \begin{cases} V_1 = 10 \text{ m/s} \\ P_1 = 0 \\ Z_1 = 0 \end{cases} \quad \text{نقطه ②} \begin{cases} V_2 = ? \\ P_2 = 0 \\ Z_2 = h \end{cases}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

$$0 + \frac{V_1^2}{2g} + 0 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + h \rightarrow h = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

30

محاسبه V_2 به کمک معادله اندازه حرکت در جهت y :
 معادل زغانی است که نیروی وزن صفحه برابر نیروی پاسدم از طرف سیال به صفحه وارد



می شود / معادله اندازه حرکت در جهت y :

$$-F_y = V_2 (-\rho V_2 A_2)$$

$$\rightarrow F_y = V_2 (\rho Q_2) = V_2 (\rho Q_1)$$

$$\rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \rightarrow Q_1 = Q_2$$

معادله پیوستگی :

$$\rightarrow F_y = V_2 (\rho Q_1) = \rho Q V_2 = 1000 \times (V_1 \times A_1) \times V_2$$

$$\rightarrow F_y = 1000 \times (10 \times \frac{\pi \times 0.03^3}{4}) \times V_2$$

$$\xrightarrow{\text{معادل}} W = F_y \rightarrow 30 = 1000 \times 10 \times \frac{\pi \times 0.03^3}{4} \times V_2$$

$$\rightarrow V_2 = 4.424 \text{ m/s}$$

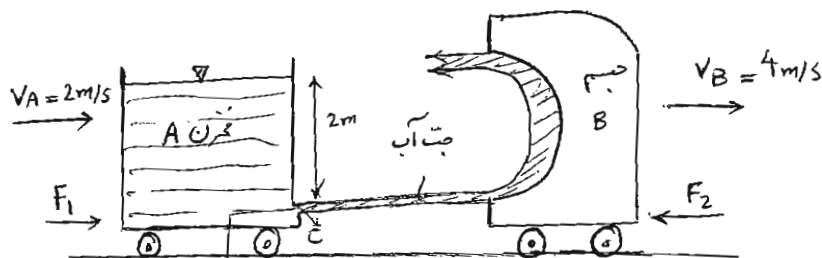
$$\rightarrow h = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = \frac{10^2 - 4.424^2}{2 \times 9.81} = 4.18 \text{ m}$$

دقت : در سوال بالا ، برای نوشتن معادله اندازه حرکت در جهت y ، صفحه را حجم کنترل

در نظر می گیریم که ۱- ورودی در جهت y ، ۲- خروجی در جهت x .

V_2 : سرعت سیال قبل از برخورد به صفحه که به ما F_y می دهد.

۱۳۰
 مثال) در شکل زیر مخزن A با سرعت ثابت 2 m/s و جسم B با سرعت ثابت 4 m/s هر دو به سمت راست حرکت می کنند. نیروهای F_1 و F_2 در این لحظه را بدست آورید.
 (از اصطکاک صرف نظر شود و مخزن A بسیار بزرگ فرض می شود). ارتفاع آب از مخزن ثابت فرض کنید. $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ و $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$



حل) اگر نقطه سوراخ مخزن A را به سیال به صورت حب آب
 از آن خارج شده و به جسم B برخورد می کند را C بنامیم، سرعت خروج آب از مخزن A
 از معادله برابری بین سطح از مخزن و نقطه C بدست می آید.

$$V_C = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 2} = 6.26 \text{ m/s}$$

برای محاسبه F_1 ، باید مخزن A را حجم کنترل کنیم که فقط ۱ فرضی دارد.

$$V = V_C + V_A$$

سرعت بی سیال نسبت به مخزن A را V می نامیم.

$$-F_x = V(-\rho VA) \rightarrow F_x = \rho V^2 A \rightarrow F_1 = \rho (V_C + V_A)^2 A$$

$$\rightarrow F_1 = \rho (V_C + V_A)^2 \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) = 1000 (6.26 + 2)^2 \times \frac{\pi}{4} \times 0.04^2$$

$$F_1 = 85.75 \text{ N}$$

3) برای محاسبه F_2 ، باید حجم B را حجم کنترل بگیریم که ۱ دردی و ۱ خروجی دارد.

$$V' = V_C + V_A - V_B$$

سرعت نسی سال نسبت به حجم B :

$$V' = 6.26 + 2 - 4 = 4.26 \text{ m/s}$$

$$-F_x = V'(-\rho V'A) - V'(\rho V'A)$$

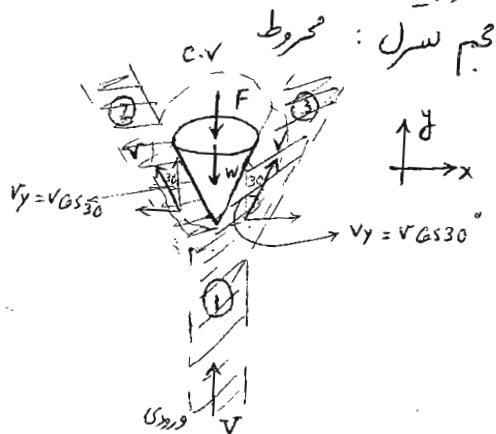
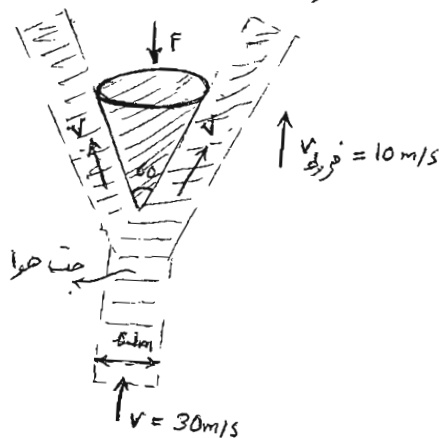
$$-F_x = -2\rho V'^2 A \rightarrow F_x = 2\rho V'^2 A$$

$$\rightarrow F_2 = 2\rho V'^2 A \rightarrow F_2 = 2 \times 1000 \times 4.26^2 \times \frac{\pi \times 0.04^2}{4}$$

$$F_2 = 45.63$$

مثال ۱۵) جت هوا با مقطع دایره‌ای به قطر ۰.۱ متر به جسم مخروطی شکل برخورد می‌کند. نیروی برابر با $F = 0.15 \text{ N}$ لازم است تا جسم مخروطی شکل در جای خود باقی بماند. اگر سرعت جت $v = 30 \text{ m/s}$ ثابت بماند و از طرفی جسم مخروطی شکل با سرعت 10 m/s خود در جهت جت سیال به طرف بالا حرکت داشته باشد، مهم جسم مخروطی شکل چند کیلوگرم است؟

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \text{ و } \rho_{\text{هوا}} = 1.23 \text{ kg/m}^3$$



برای حل سؤال نیاز به نوشتن رابطه تعادل در جهت y داریم، از طرف سیال به مخروط نیروی F_y وارد می شود. پس برای تناسب F_y معادله اندازه سرعت در جهت y را می نویسیم در ورودی و خروجی که فشارش صفر است.

چون هم سیال سرعت دارد هم مخروط (حجم کنترل)، لذا باید سرعت بی سیال را در نظر بگیریم.

$$v' = v_{\text{سیال}} - v_{\text{مخروط}} = 30 - 10 = 20 \text{ m/s}$$

$$-F_y = v'(-\rho v'A) + (v' \cos \theta)(\rho Q_2) + (v' \cos \theta)(\rho Q_3)$$

از طرفی، دبی جرمی ورودی یعنی Q به دو مخروط برخورد می کند به طور مساوی و نصف دبی جرمی اول از دو قسمت 2 و 3 خارج می شود.

$$Q_2 = Q_3 = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{2} (v'A)$$

$$-F_y = -\rho v'^2 A + v' \cos \theta \left(\rho \left(\frac{1}{2} v'A \right) \right) + v' \cos \theta \left(\rho \left(\frac{1}{2} v'A \right) \right)$$

$$-F_y = -\rho v'^2 A + v' \cos \theta (\rho v'A) = -\rho v'^2 A + \rho v'^2 A \cos \theta$$

$$-F_y = -\rho v'^2 A (1 - \cos \theta) \rightarrow F_y = \rho v'^2 A (1 - \cos \theta)$$

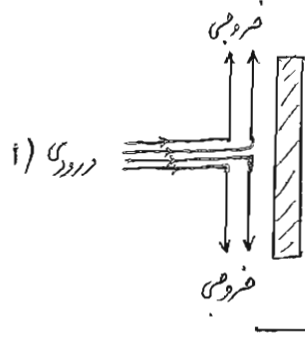
$$\begin{cases} v' = 20 \text{ m/s} \\ A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 0.1^2}{4} = 7.85 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \end{cases}$$

$$F_y = 1.23 \times (20)^2 \times 7.85 \times 10^{-3} (1 - \cos 30) = 0.52 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F + W = F_y \rightarrow W = 0.52 - 0.15 = 0.37 \text{ N}$$

$$W = mg \rightarrow m = \frac{W}{g} = \frac{0.37}{9.81} = 0.04 \text{ kg} = 40 \text{ gr}$$

سوال 14 در کدام حالت نیروی جت سیال به جسم ستر است؟ (احجام در حال سکون 32)



فرض کنید
در تمام حالات زیر جت سیال است فقط نیروی F_x وارد بر جسم را حساب کنیم
زیرا نیروی F_y در تمام حالات منفی است.

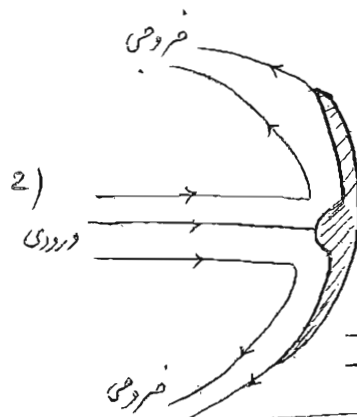
$$-F_x = V(-PVA)$$

$$F_x = \rho V^2 A$$

فرض: سرعت ورودی سیال V باشد.

$$-F_y = V(P \frac{1}{2} VA) - V(P \frac{1}{2} VA)$$

$$F_y = 0$$



$$-F_x = V(-PVA) + (-V \cos \theta)(\rho \frac{V}{2} A) + (-V \cos \theta)(\rho \frac{V}{2} A)$$

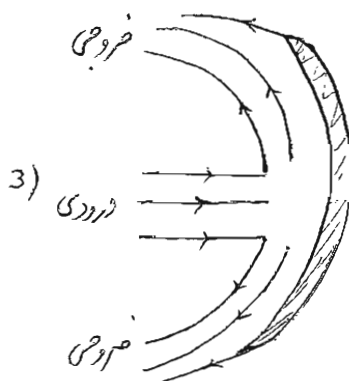
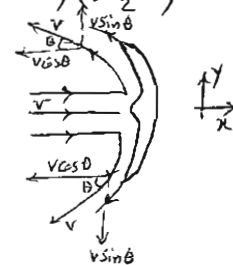
دبی حجمی ورودی (VA) ، به طور یکنواخت از خروجی خارج می شود.

$$Q = \frac{1}{2} VA$$

$$-F_x = -\rho V^2 A - \rho V^2 A \cos \theta$$

$$F_x = \rho V^2 A (1 + \cos \theta)$$

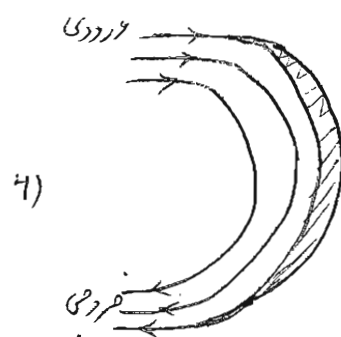
$$-F_y = (V \sin \theta)(\rho \frac{V}{2} A) + (-V \sin \theta)(\rho \frac{V}{2} A) \rightarrow F_y = 0$$



$$-F_x = V(-PVA) + (-V \cos \theta)(\rho \frac{V}{2} A) + (-V \cos \theta)(\rho \frac{V}{2} A)$$

$$F_x = \rho V^2 A (1 + \cos \theta) \quad \text{مساوی 2}$$

$$F_y = 0 \quad \text{مساوی 2}$$



$$-F_x = V(-PVA) + (-V)(PVA)$$

$$F_x = 2\rho V^2 A$$

$$F_x = \rho V^2 A \quad \text{حالت 1}$$

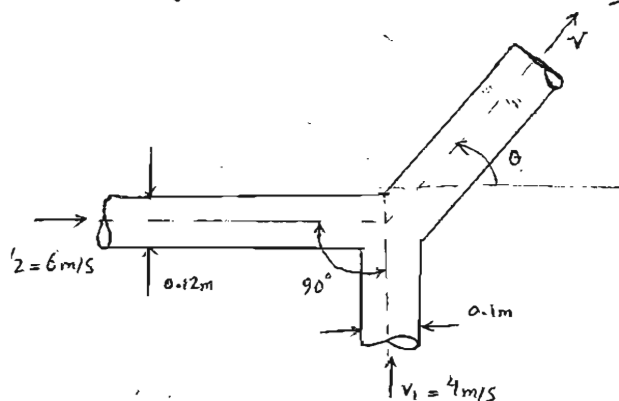
$$F_x = \rho V^2 A (1 + \cos \theta) : \text{حالت 2 و 3}$$

$$F_x = 2\rho V^2 A$$

حالت 4

← ستر است

۱۷) «درخت آب با یکدیگر برخورد کرده و یک جهت یکپارچه ای را مطابق شکل داده با مشخصات گفته شده ایجاد می کنند. در این صورت سرعت جهت حاصل چند m/s است



$$Q_1 = \frac{\pi \times 0.1^2}{4} \times 4 = 0.0314 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_2 = \frac{\pi \times 0.12^2}{4} \times 6 = 0.0679 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

معادله پیوستگی:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0.0314 + 0.0679 = 0.0992 \text{ m}^3/\text{s}$$

نقشه در محل برخورد دو جهت به یک جهت یکپارچه ای تبدیل می شوند (یعنی) F_y, F_x برابر هستند

معادله اندازه سرعت در جهت x:

$$0 = v_2 (-\rho v_2 A_2) + (v \cos \theta) (\rho VA)$$

$$\rightarrow -\rho v_2^2 A_2 + \rho v^2 A \cos \theta = 0 \rightarrow \cancel{\rho} v_2^2 A_2 = \cancel{\rho} v^2 A \cos \theta$$

$$\frac{v_2 A_2 = Q_2}{VA = Q} \quad v_2 (v_2 A_2) = v \cos \theta (VA) \rightarrow v_2 Q_2 = v \cos \theta (Q)$$

$$\rightarrow v \cos \theta = \frac{v_2 Q_2}{Q} = \frac{0.0679 \times 6}{0.0993} = 4.103 \quad (1)$$

معادله اندازه سرعت در جهت y:

$$0 = v_1 (-\rho v_1 A_1) + (v \sin \theta) (\rho VA)$$

$$\frac{v_1 A_1 = Q_1}{VA = Q} \quad -\rho v_1 Q_1 + v \sin \theta \rho Q = 0 \rightarrow v_1 Q_1 = (v \sin \theta) Q$$

$$\rightarrow v \sin \theta = \frac{v_1 Q_1}{Q} = \frac{0.0314 \times 4}{0.0993}$$

$$\rightarrow \underline{v \sin \theta = 1.265} \quad (2)$$

33 از تقسیم رابطه ② بر ① :

$$\frac{V \sin \theta}{V \cos \theta} = \tan \theta = \frac{1.265}{4.103} = 0.308$$

$$\theta = 17.1^\circ$$

$$\rightarrow V \sin \theta = 1.265 \xrightarrow{\theta = 17.1} V = \frac{1.265}{\sin 17.1} = 4.3 \text{ m/s}$$

محاسبه توان استاتی بهره یا حجم از طرف سیال :

$$P = F V$$

F : نیروی وارد شده از طرف سیال بهره یا حجم

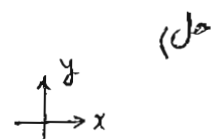
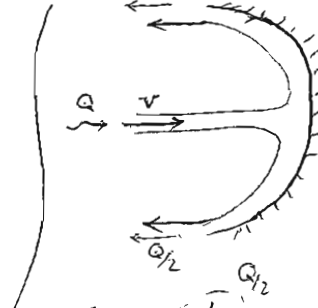
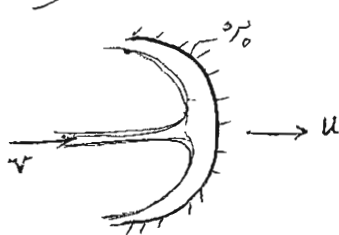
1 ✓ در محاسبه نیروی F باید از معادله اندازه حرکت استفاده کرد و نیز باید سرعت بنی را منظور کرد.

2 ✓ در رابطه بالا ، سرعت بهره یا حجم یا حجم کنترل می باشد.

مثال 18 : جهت آب مطابق شکل بهره برخورد کرده و به اندازه 180° خارج می شود. سرعت بهره

u است. سرعت جهت آب V می باشد. با فرض این که توان استاتی بهره

فاز صمم باشد ، سرعت جهت آب را بر حسب سرعت بهره بدست آورید



$$V' = V - u$$

$$-F_x = (V')(-P(V'A)) + (-V')(P(\frac{V'}{2}A)) + (-V')(P(\frac{V'}{2}A))$$

$$F_x = \rho V'^2 A + \rho V'^2 A = 2 \rho V'^2 A$$

$$F_x = 2 \rho A (V - u)^2$$

$$\begin{cases} P = (F_x) \times u \\ P = 2 \rho A (V - u)^2 u \end{cases}$$

چون می‌خواهیم توان اسمالی مانترسیم باید

$$\frac{dP}{du} = 0$$

$$\rightarrow 2\rho A (V-u)^2 + u(-2\rho A (V-u) \times 2) = 0$$

$$\rightarrow 2\rho A (V-u)^2 = 4\rho A u (V-u)$$

$$\rightarrow (V-u)^2 = 2u(V-u) \rightarrow (V-u)((V-u)-2u) = 0$$

$$\begin{cases} V-u=0 \rightarrow V=u \\ V-3u=0 \rightarrow V=3u \end{cases}$$

معادله ۲ جواب داریم به ازای $V=3u$ توان حداکثر است.

۳ معادله اندازه سرعت زاویه‌ای :

$$\sum M_o = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{c.v} (r \times v) \rho dv \right] + \int_{c.s} (r \times v) \rho (v \cdot n) dA \quad (1)$$

$$\int_{c.s} (r \times v) \rho (v \cdot n) dA = \sum (r \times v)_{out} \dot{m}_{out} - \sum (r \times v)_{in} \dot{m}_{in} \quad \text{در معادله بالا}$$

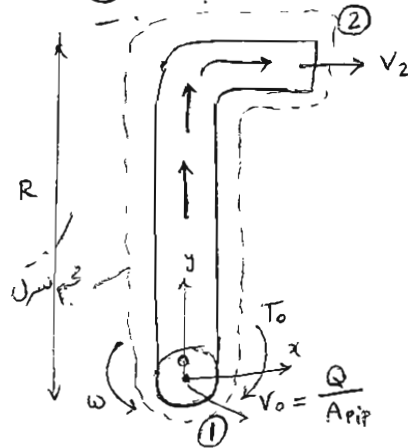
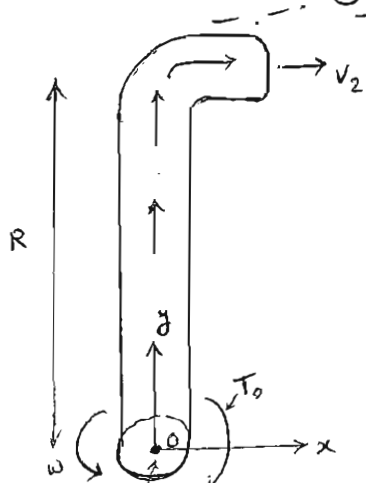
$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \text{در حالت پایا}$$

$$\rightarrow \sum M_o = \sum (r \otimes v)_{out} \dot{m}_{out} - \sum (r \otimes v)_{in} \dot{m}_{in} \quad (2)$$

✓ در روابط بالا، چون ضرب خارجی داریم باید r و v حتماً بصورت برداری بیان شوند
مسابقات راحت‌تر انجام شود

19 سال شکل روبه یک آب پاش چپن زار را نشان می دهد با نوری آب پاش حول

نقطه O با سرعت زاویه ای ثابت ω می چرخد دی همگی در دوری به بازو در نقطه O برابر Q می باشد در نقطه O به دلیل اصطکاک بین ماسه گاهی گشتاوری معادل $T_0 K$ به آن نقطه وارد می شود رابطه ای بین ω و خواص سیال بیابید



حل

محاسبه سرعت در دوری سیال به نقطه O :

$$Q = v_0 A \rightarrow v_0 = \frac{Q}{A_{رد}}$$

استفاده از رابطه 2 در صفحه 33

$$\sum M_O = \sum (r \times v)_{out} \dot{m}_{out} - \sum (r \times v)_{in} \dot{m}_{in}$$

$$\sum M_O = (r_2 \times v_2) \dot{m}_{out} - (r_1 \times v_1) \dot{m}_{in}$$

$$\begin{cases} r_2 = R j \\ v_2 = v_0 i - R \omega i \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 = 0 j \\ v_1 = v_0 k \end{cases}$$

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = PQ$$

$$\sum M_O = -T_0 K$$

$$\begin{cases} r_2 \times v_2 = R j \times (v_0 - R \omega) i = (R v_0 - R^2 \omega) (-k) \\ \quad = (R \omega - R v_0) K \end{cases}$$

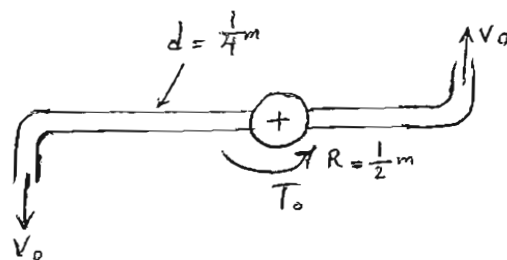
$$\begin{cases} r_1 \times v_1 = 0 j \times v_0 k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} i \times j = k \\ j \times k = i \\ k \times i = j \end{matrix}$$

$$\rightarrow -T_o K = \rho Q (R^2 \omega - R v_o) K$$

$$\rightarrow \omega = \frac{v_o}{R} - \frac{T_o}{\rho Q R^2}$$

20
سال) جریان آب معادل $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ به طوری محوری دارد مرکز فواره آب پاس می‌کند. شکل این مساله که واقعی تر از مسئله است می‌شود. با هم بوی از اصطکاک برای باز داشتن آن از مرکز چگت داری بهرب $N.m$ لازم است.



رقت: Q کل به مرکز فواره دارد می‌شود
به طور مساوی $\frac{Q}{2}$ از هر فرعی خارج می‌شود. (تبارن)

$$Q = v_o A \rightarrow v_o = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{0.01}{2}}{\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{16}} = \frac{0.005}{\frac{\pi}{64}} = 0.1 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{v_o}{R} - \frac{T_o}{\rho Q R^2}$$

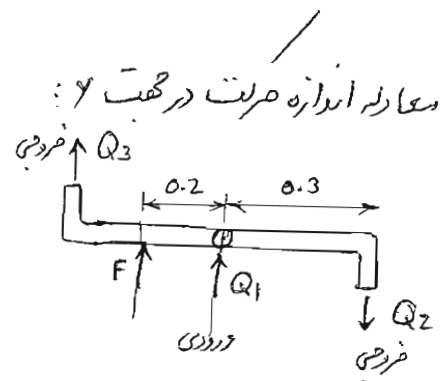
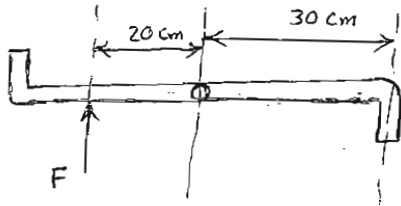
با توجه به مساله قبل)

برای عدم چرخش باید $\omega = 0$ باشد.

$$\omega = 0 = \frac{v_o}{R} - \frac{T_o}{\rho Q R^2}$$

$$\rightarrow T_o = \rho Q v_o R = 1000 \times 0.01 \times 0.1 \times \frac{1}{2} = 0.5 \text{ N.m}$$

21 سوال) پلان یک آب پاش که در آن آب از لوله قائم واقع در وسط آن وارد و از دهانه /³⁵
 های به مساحت هر یک 10 cm^2 با سرعت 50 m/s خارج می شود در شکل نشان داده شده
 است. نیروی لازم F را در شکل طوری تعیین کنید که مرکز آب پاش جلونیکی نکند؟
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$



$$-F_y = v(-\rho Q_1) - v(\rho Q_2) + v(\rho Q_3)$$

معادله پیوستگی:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$Q_1 = Q_3 = Q \quad \boxed{Q_1 = 2Q}$$

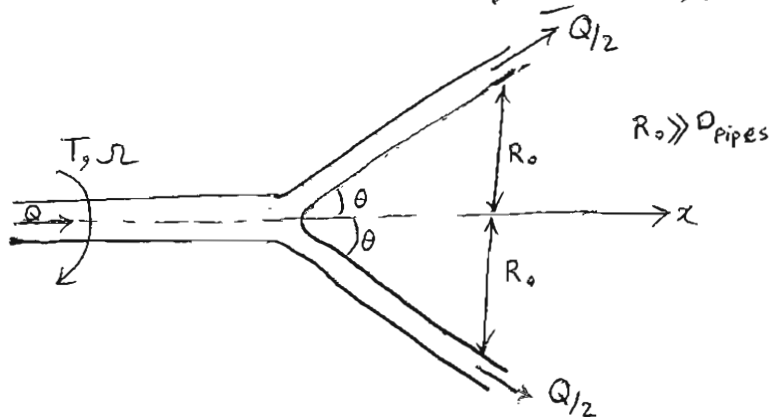
$$\rightarrow -F_y = v(-\rho Q_1) - v(\rho Q) + v(\rho Q)$$

$$\rightarrow -F_y = -2\rho v Q \rightarrow F_y = 2\rho v Q \xrightarrow{Q=VA} F_y = 2\rho v^2 A$$

$$F_y = 2 \times 1000 \times (50)^2 \times 10 \times 10^{-4} = 5000 \text{ N}$$

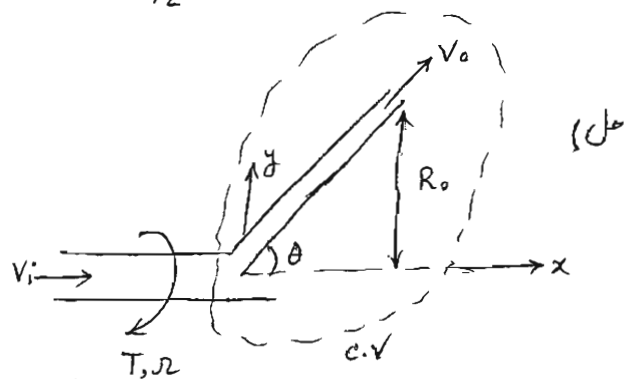
معادله $\sum M_o = 0 \rightarrow 5000 \times 0.3 = F \times 0.2 \rightarrow F = 7500 \text{ N}$

22 مثال) سوراخی شکل این مثلث جریان لوله را به دو قسمت مساوی $\frac{Q}{2}$ تقسیم می کند /
 به فاصله R_o از محور x با سرعت Ω می چرخد با حجم یونی از جاذبه واسطه کاب
 می کشد (T) برای آرام این چرخش لازم است؟



$$V_o = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}}$$

$$\vec{v}_{c.v} = -R_o \vec{j} \times \Omega \vec{i} = +R_o \Omega \vec{k}$$



$$\vec{V} = V_o \cos \theta \vec{i} + V_o \sin \theta \vec{j} + R_o \Omega \vec{k}$$

$$\sum \vec{M}_a = \vec{T}_o \vec{i} = 2(\vec{r}_o \times \vec{V}_o) \dot{m}_o - 2(\vec{r}_i \times \vec{V}_i) \dot{m}_i$$

$$\vec{r}_i = 0, \quad \vec{r}_o = R_o \vec{j}$$

$$\vec{T}_o \vec{i} = 2\dot{m} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & R_o & 0 \\ V_o \cos \theta & V_o \sin \theta & R_o \Omega \end{vmatrix}$$

$$\vec{T}_o \vec{i} = 2\dot{m}_i R_o^2 \Omega - 2\dot{m} \vec{k} R_o V_o \cos \theta \rightarrow T_o = +2\dot{m} R_o^2 \Omega$$