## ❖ تمرینـــات :

۱. مشخص کنید که هریک از معادلات با مشتقات جزئی زیر از نوع بیضوی، هذلولی و سهموی است ؟

(الف) $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ (ب) $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(ج) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (د) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0$

(و) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+4u=2x-3y$

(هـ) $(x^2-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(y^2-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$

(ز) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4$

۲. نشان دهیدکه $z(x,y)=4e^{-3x}\cos 3y$ یک جواب برای معادله دیفرانسیل جزئی زیر است :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad ,z(x,\frac{\pi}{2})=0 \quad , \quad z(x,0)=4e^{-3x}$$

۳. (الف) نشان دهید که $v(x,y)=xF(2x+y)$ یک جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل $x\frac{\partial v}{\partial x}-2x\frac{\partial v}{\partial y}=v$ است:

(ب) یک جواب خصوصی برای معادله فوق پیدا نمائید که شرط $v(1,y)=y^2$ را برآورده سازد.

۴. (الف) معادله $x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$ را حل نمائید :

(ب) جواب خصوصی معادله را اگر $z(x,0)=x^2-x-2$ و $z(2,y)=3y$ پیدا کنید :

۵. نشان دهیدکه جواب عمومی $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ بصورت $v=\frac{F(r-ct)+G(r+ct)}{r}$ می باشد.

۶. جواب عمومی معادله $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+12t^2$ را پیدا نمائید .

معادلات زیر را توسط روش جداسازی متغیرها حل نمائید :

۷) $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=4\frac{\partial u}{\partial y}\\ u(0,y)=8e^{-3y}\end{cases}$ ۸) $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ u(0,y)=8e^{y}+4e^{-y}\end{cases}$

۹) $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{2\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=u(3,t)=0 \quad , \quad 0<x<3, t>0\\ u(x,0)=5\sin 4\pi x-3\sin 8\pi x+2\sin 10\pi x\end{cases}$

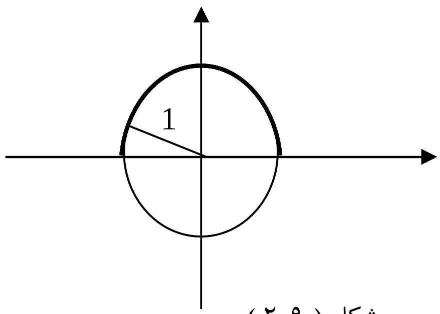
۱۰) $\begin{cases}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad , \quad y(0,t)=y(5,t)=0 \quad , \quad y(x,0)=0\\ y_t(x,0)=h(x) \quad , \quad h(x)=5\sin\pi x\end{cases}$

۱۱) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial u}{\partial y} + u \\ u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{+5x} \end{cases}$

۱۲. مسئله مقدار مرزی زیر را حل کنید :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

$$u(1,\varphi) = \begin{cases} u_1 & ; \quad 0 < \varphi < \pi \\ u_2 & ; \quad \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$ (u تابع دما است)




شکل ( ۹-۲ )

۱۳. مسئله مقدارمرزی $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right)$ را با شرایط زیر حل نمائید :

$$z(1,\varphi,t) = 0 \qquad z(\rho,\varphi,0) = F(\rho,\varphi) \qquad z_t(\rho,\varphi,0) = 0$$

۱۴. (الف) در مسئله مقدار مرزی ( u یک پارامتر فیزیکی است) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$ نشان دهید که :

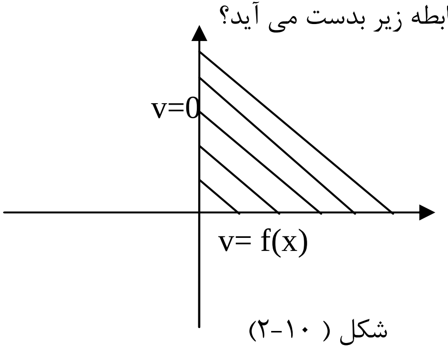
$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{\infty} f(v)e^{-\lambda y}\cos\lambda(v-x)\,d\lambda\,dv \qquad -\infty < x < \infty$$

(ب) اگر $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ u_0 & , \quad x > 0 \end{cases}$ باشد نشان دهیدکه: $u(x,y) = \dfrac{u_0}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} + \tan^{-1}\dfrac{x}{y}\right)$

۱۵. مسئله مقدار مرزی روبرو راحل نمائیدو نشان دهید که $v(x,y)$ ازرابطه زیر بدست می آید؟

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} yf(r)\left[\frac{1}{(r-x)^2+y^2} - \frac{1}{(r+x)^2+y^2}\right]dr$$

اگر $f(x) = 1$ آنگاه $v(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$




شکل ( ۱۰-۲)

۱۶. هر یک از معادلات دیفرانسیل های جزئی زیر را توسط تبدیل لاپلاس حل نمائید :

الف)
$$\frac{\partial u}{\partial t}=3\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad u(x,0)=4e^{-2x}$$
$$u(0,t)=4e^{-6t}$$

ب)
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad u(0,t)=0 \quad , \quad u(4,t)=0$$
$$u(x,0)=6\sin\pi {}^{x}\!/_{2}+3\sin\pi x$$

ج)
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad u_x(0,t)=0 \quad , \quad u_x(2,t)=0$$
$$u(x,0)=4\cos\pi x-2\cos\frac{\pi x}{2}$$

۱۷. جواب عمومی معادله زیر ر ا حساب کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=x$$

۱۸. معادله ای با مشتقات جزئی بنویسیدکه $z=x\,f(xy)$ جواب آن باشد .

۱۹. معادله ای با مشتقات جزئی بنویسیدکه جواب آن در رابطه $xyz=f(x+y+z)$ صدق کند .

۲۰. جواب معادله $x\,u_x=y\,u_y$ را بدست آورید.

۲۱.الف) بررسی کنید معادله با مشتقات جزئی $u_{xx}=u_{yy}$ با استفاده از تغییر متغیرهای $v=y+2x$ و $u=y-2y$ به چه معادله ای تبدیل می شود.

ب) معادله حاصل را حل کنید.

۲۲. جواب مسئله زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \ ; & 0<x<\pi \ ,t>0 \\ u(x,0)=0 \quad u_t(x,0)=2\sin x & 0<x<\pi \\ u(0,t)=0 \quad u(\pi,t)=0 & t>0 \end{cases}$$

۲۳. جواب پایدار مسئله زیر کدام است

$$\begin{cases} u_{tt}-2u_{xx}=0 \ ; \\ u(x,0)=25 \ ; \\ u(0,t)=1 \ , \quad u(3,t)=40 \ ; \end{cases}$$

۲۴. درمسئله مقدار اولیه- کرانه ای زیر $u(x,t)$ در نقطه $x=0.5,\ t=7$ را حساب کنید .(راهنمایی:از روش دالامبر کمک بگیرید.)

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ ; & 0<x<1\ ,t>0 \\ u(x,0)=\begin{cases}2x\ , & 0\le x<\frac{1}{3} \\ 1-x & \frac{1}{3}\le x\le 1\end{cases} & u_x(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=0=u(1,t)=0 & t>0 \end{cases}$$

۲۵. جواب مسئله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ ; \\ u(x,0)=0 \quad u_t(x,0)=k\,sin3\,x-\frac{k}{2}sin6x \\ u(0,t)=0=u(\pi,t)=0 \quad t>0 \end{cases}$$

۲۶. برای حل معادابه حرارت با شرایط زیر با فرض $u(x,t)=\sum A_n(t)sin\frac{n\pi x}{l}$ که در آن $A_n(t)$ از معادله دیفرانسیل $A'_n\,(t)+\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2A_n(t)=B_n(t)$ بدست می آید مقدار $B_n(t)$ را حساب کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x,t)\ , \quad u(0,t)=u(l.t)=0\ \ ;$$