مجله فنی و مهندسی مدرس- مهندسی مکانیک
دوره 10، شماره 3، پاییز 1389، ص‌ص 31-41
(دریافت مقاله: آذر 1386، پذیرش مقاله: آبان 1387)

حل کلّی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن *FG* با استفاده از نظریه الاستیسیته مستوی

مهدی قنّاد[1]، **غلامحسین رحیمی**[2*]، **سیامک اسماعیل‌زاده خادم**[3]

1- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
2- دانشیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
3- استاد بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
*تهران، صندوق پستی 143-14115، *rahimi_gh @modares.ac.ir*

چکیده- در این مقاله با استفاده از نظریه الاستیسیته‌ی مستوی (*PET*)، معادله‌ی حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن *FG* در حالت کلّی استخراج شده و سپس تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی استوانه به‌ازای ریشه‌های حقیقی، ریشه‌های مضاعف و ریشه‌های مختلط معادله مشخصه با در نظر گرفتن شرایط انتهایی متفاوت استوانه: دو سر باز، دو سر بسته- مقیّد و دو سر بسته- نامقیّد، به صورت تحلیلی (حل دقیق) به‌دست آمده است. تنش‌ها و جابه‌جایی با تغییرات ضرایب ناهمگنی بررسی و با حالت استوانه‌ی جدار ضخیم همگن مقایسه شده است. در این مقاله، روابط تحلیلی در وضعیت‌های متفاوت، به‌دست آمده و سپس با تنها وضعیت تحلیل شده توسّط یکی از پژوهشگران مقایسه و اشتباه مقاله‌ی ایشان تصحیح و تکمیل شده است. جنس استوانه، مادّه‌ی ناهمگن و همسانگرد با تغییرات مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به صورت توانی و با نسبت پواسون ثابت است.

کلید واژگان: استوانه‌ی جدار ضخیم، مادّه‌ی ناهمگن *FG*، الاستیسیته‌ی مستوی.

General Plane Elasticity Solution of Axisymmetric Functionally Graded Thick Cylindrical Shells

M. Ghannad [1], ***G.H. Rahimi*** [2*], ***S. Esmaeilzadeh Khadem*** [3].

1- Ph.D. Student of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
2- Assoc. Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
3- Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.

****P.O.B. 14115-143, Tehran, Iran, rahimi_gh @modares.ac.ir***

Abstract- *In this paper, an analytical formulation of FGM axisymmetric thick-walled cylinders based on the plane elasticity theory is presented. The stresses and displacements in thick cylindrical shells are calculated using the real, double and complex roots of characteristic equation. Solutions are obtained under generalized plane stress, plane strain and closed-ends cylinder assumptions. It is assumed that the material is isotropic and heterogeneous with constant Poisson's ratio and radially varying elastic modulus. The results have been compared with findings of the researcher (2001) [hoop stress is incorrect], and we have present corrected version as well as supplementary findings.*

Keywords: *Thick-walled cylinder, FGM, Plane elasticity.*

۱- مقدمه

پوسته‌ها به طور کلّی، سازه‌هایی خمیده هستند که در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، مطلوبیت ویژه‌ای دارند. مطالعه‌ی این رفتار از گذشته‌ای نه چندان دور مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته و به دلیل کاربرد فراوان، این توجه همچنان ادامه دارد. از میان انواع سازه‌های پوسته‌ای، پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک و جدار ضخیم، اهمّیت ویژه‌تری دارند و همواره پژوهشگران در پی اعمال تغییراتی بر روی ضخامت و مادّه‌ی این پوسته‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آنها را در برابر نیروهای وارد شده افزایش و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند.

لامه[1] نخستین بار در سال 1852 [1] با استفاده از نظریه الاستیسیته‌ی مستوی[2]، حل دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از مادّه‌ی همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت را ارائه کرد و توزیع تنش را در استوانه‌ی توخالی به‌دست آورد که آن در حلّ مسایل مختلف مهندسی استفاده شده و در متن کتب درسی گنجانیده شد [2].

لخنیتسکی[3] در سال 1950 [3] نظریه الاستیسیته‌ی اجسام مرکّب[4] را فرمول‌بندی کرد. در پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکّب به‌دلیل تغییر ناگهانی ساختار مادّه و یا ترکیب دو مادّه‌ی ناهمساز در کنار یکدیگر و درنتیجه تغییر ناگهانی در رفتار مواد، مسایل و نواقصی در پوسته به‌وجود می‌آید که تمرکز تنش و گسستگی در مرز لایه‌ها ایجاد می‌شود. مواد با تغییر تدریجی خواص (مکانیکی، حرارتی، مغناطیسی) یا *FGM*[5] توسّط نینو[6] و همکاران در سال 1984 [4] مطرح شد که پس از آن در سال‌های آخر قرن بیستم و شروع قرن جدید، مطالعات تحلیلی قابل توجهی بر روی سازه‌های ساخته شده از این مواد در نقاط مختلف جهان انجام شد.

فوکویی و یاماناکا[7] در سال 1992 [5] روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم *FGM* تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه‌ای[8] به کمک معادلات لامه استخراج و آنها را به روش عددی رانگ-کوتا حل کردند. اُباتا و نودا[9] در سال 1994 [6] تنش‌های حرارتی پایدار را در یک استوانه و یک کره‌ی توخالی *FGM* استخراج و مادّه‌ی بهینه را به‌دست آوردند. هورگان و چان[10] در سال 1999 [7] معادلات حاکم بر استوانه‌ی توخالی *FGM* را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع توانی مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را به‌ازای توان‌های مثبت به‌دست آوردند. هورگان و چان با همین منطق، تنش‌ها را در دیسک‌های دوّار نیز بررسی کردند [8].

توتونچو و اُزترک[11] در سال 2001 [9] حل دقیق مخازن تحت فشار استوانه‌ای و کروی جدار ثابت *FGM* را ارائه کردند. ایشان استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع توانی مدول الاستیسیته $E = E_o \bar{r}^{\beta}$ در راستای شعاعی، تحلیل و توزیع تنش شعاعی و محیطی را به ازای توان‌های مثبت و منفی ثابت ناهمگنی در محدوده‌ی $-2 \le \beta \le 2$ به ازای ریشه‌های مثبت معادله‌ی مشخصه بررسی کردند. در مقاله‌ی ایشان رابطه و نمودار مربوط به تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی اشتباه دارد که در برخی از پژوهش‌های پسین استفاده شده است. جبّاری، سهراب‌پور و اسلامی در سال 2003 [10] حل عمومی تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه‌ی توخالی تحت بارهای پایدار نامتقارن محوری را با توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی ارائه کردند. اراسلان و آکیز[12]

1. *Lamé*
2. *Plane Elasticity Theory (PET)*
3. *Lekhnitskii*
4. *Composite Bodies*
5. *Functionally Graded Materials (FGM)*
6. *Niino*

7. *Fukui & Yamanaka*
8. *Plane Strain*
9. *Obata & Noda*
10. *Horgan & Chan*
11. *Tutuncu & Ozturk*
12. *Eraslan & Akis*

در سال 2006 حل محور و دیسک توپر دوّار را در حالت‌های تنش صفحه‌ای[1] و کرنش صفحه‌ای با خواص پیوسته‌ی مکانیکی به صورت نمایی و سهمی [11] و حل الاستیک-پلاستیک لوله‌ی تحت فشار را در حالت کرنش صفحه‌ای [12] بررسی کردند. ژیفای و هونگ‌جون[2] در سال 2006 [13] حل دقیق استوانه‌های توخالی با تغییرات خطی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را با روش چند لایه‌ای کردن استوانه، که هر کدام از لایه‌ها به صورت همگن با خواص مکانیکی ثابت (همگن و همسانگرد) در نظر گرفته شده‌اند، ارائه کردند. ایشان در سال 2007 [14] همانند گذشته با در نظر گرفتن تغییرات خواص مکانیکی به صورت خطی و توانی، استوانه‌ی *FGM* را با روش چند لایه‌ای کردن استوانه، تحلیل و با حل توتونچو (2001) مقایسه کردند و در نتیجه به دلیل تفاوت نمودارها، پی به اشتباه مقاله‌ی مورد نظر بردند. توتونچو در سال 2007 [15] مشابه مقاله‌ی پیشین ولی با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به صورت نمایی، توزیع تنش‌ها را در یک استوانه‌ی ناهمگن به‌دست آورد. در مقاله‌ی حاضر، تنش‌ها و جابه‌جایی در استوانه‌های جدار ضخیم *FGM* متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت‌های مختلف به‌دست آمده است.

۲- روابط اساسی

در نظریه الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور استوانه، متقارن می‌باشند و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند. تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند، به‌عبارت دیگر، تغییر مکان شعاعی فقط تابع شعاع $u_r(r)$ است.

1. Plane Stress
2. Zhifei & Hongjun

بنابراین تنش طولی σ_x و کرنش طولی ε_x دارای مقادیر ثابتند و تنش‌های عمودی، تنش‌های اصلی هستند.

$$\sigma_\theta > \sigma_x > \sigma_r \tag{1}$$

معادله‌ی تعادل تنش در غیاب نیروهای حجمی برابر است با:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{2}$$

و روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری.

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad , \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \tag{3}$$

و روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(r) \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \tag{4}$$

A و B تابع نسبت پواسون ($\upsilon = const.$) هستند و براساس شرایط انتهایی استوانه تعریف می‌شوند. مدول الاستیک به صورت توانی، تابعی از شعاع فرض می‌شود.

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n = E_i \bar{r}^n \quad و \quad \bar{r} = \frac{r}{r_i} \tag{5}$$

E_i و r_i مدول الاستیک و شعاع در سطح داخلی استوانه و n ثابت ناهمگنی مادّه‌ی آن است. بدیهی است که اگر $n = 0$ باشد، مدول الاستیک ثابت می‌ماند، یعنی مادّه همگن است.

با جایگزینی روابط (3 و 4) در رابطه‌ی (2).

$$\begin{gathered} \frac{d}{dr}\left[E(r)\left(A\frac{du_r}{dr} + B\frac{u_r}{r} \right) \right] \\ + \frac{1}{r}\left[E(r)(A-B)\left(\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right) \right] = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

$$E(r) \neq 0$$

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (n+1) r \frac{du_r}{dr} + \left(n\frac{B}{A} - 1 \right) u_r = 0 \tag{7}$$

معادله‌ی (7) یک معادله‌ی اویلر- کوشی است.

$$r^2u_r'' + (n+1)ru_r' + (n\upsilon^* - 1)u_r = 0 \tag{8}$$

مقدار $\upsilon^* = \frac{B}{A}$ بر اساس شرایط انتهایی استوانه تعریف می‌شود. اگر در معادله‌ی (7) مقدار $u_r(r) = r^m$ گذاشته شود، معادله مشخصه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$m^2 + nm + (n\upsilon^* - 1) = 0 \tag{9}$$

و ریشه‌های معادله مشخصه.

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-n \pm \sqrt{\Delta}\right) \quad \& \quad \Delta = n^2 - 4(n\upsilon^* - 1) \tag{10}$$

بر اساس مقادیر مختلف Δ ریشه‌های معادله مشخصه، ممکن است: 1- ریشه‌های حقیقی، 2- ریشه‌های مضاعف و 3- ریشه‌های مختلط باشند که در هر کدام از این حالت‌ها، شرایط انتهایی استوانه می‌تواند: الف- تنش صفحه‌ای، ب- کرنش صفحه‌ای و پ- استوانه بسته باشد.

۳- شرایط انتهایی استوانه

دو سر استوانه با حفظ شرایط نظریه الاستیسیته‌ی مستوی (تحلیل دو بعدی مسایل) می‌تواند باز یا بسته باشد، یعنی تنش و کرنش طولی، مقداری ثابت دارند.

(الف) تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز):

$\sigma_x = 0$ و $\varepsilon_x \neq 0$

$$A = \frac{1}{1-\upsilon^2} \quad و \quad B = \frac{\upsilon}{1-\upsilon^2} \quad \Rightarrow \upsilon^* = \frac{B}{A} = \upsilon \tag{11}$$

(ب) کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته و مقیّد):

$\sigma_x \neq 0$ و $\varepsilon_x = 0$

$$A = \frac{1-\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \quad و \quad B = \frac{\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \quad \Rightarrow \upsilon^* = \frac{B}{A} = \frac{\upsilon}{1-\upsilon} \tag{12}$$

(پ) استوانه‌ی بسته[1] (استوانه با دو سر بسته و نامقیّد):

$\sigma_x \neq 0$ و $\varepsilon_x \neq 0$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-2\upsilon}\varepsilon_x \tag{13}$$

$$A = \frac{2-\upsilon}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \quad و \quad B = \frac{3\upsilon}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \quad \Rightarrow \upsilon^* = \frac{B}{A} = \frac{3\upsilon}{2-\upsilon} \tag{14}$$

۴- حل استوانه‌های ناهمگن

اکنون معادله‌ی (7) را با در نظر گرفتن ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط و لحاظ کردن شرایط انتهایی استوانه، حل کرده و در هر کدام از حالت‌های به‌دست آمده، روابط پارامتری تنش شعاعی، تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را استخراج می‌کنیم.

۴-۱- ریشه‌های حقیقی

اگر در رابطه‌ی (10)، $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های حقیقی می‌شود.

$$m_1 = -\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad و \quad m_2 = -\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \Delta = n^2 - 4(n\upsilon^* - 1) \tag{15}$$

پاسخ معادله‌ی (8) در این حالت:

$$u_r(r) = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} \tag{16}$$

ε_r و ε_θ را با استفاده از معادلات (3) به‌دست آورده و در معادله‌ی (4) می‌گذاریم.

$$\sigma_r = E_i \bar{r}^n \left[C_1(Am_1 + B) r^{m_1 - 1} + C_2 (Am_2 + B) r^{m_2 - 1} \right] \tag{17}$$

با اعمال بارگذاری در سطح داخلی و خارجی استوانه.

$$\sigma_r \Big|_{r=r_i} = -P \quad و \quad \sigma_r \Big|_{r=r_o} = 0 \tag{18}$$

1. Closed Cylinder

در نتیجه ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{Pk^{m_2} r_i^{(1-m_1)}}{E_i \left(Am_1 + B\right)\left(k^{m_2} - k^{m_1}\right)} \\ k = r_o / r_i \\ C_2 = \dfrac{Pk^{m_1} r_i^{(1-m_2)}}{E_i \left(Am_2 + B\right)\left(k^{m_2} - k^{m_1}\right)} \end{cases} \quad (19)$$

C_1 و C_2 را در معادلات (16 و 4) می‌گذاریم.

$$\sigma_r = \frac{P\bar{r}^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left(k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right) \quad (1\text{-}20)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P\bar{r}^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left(\frac{A + Bm_1}{Am_1 + B}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{A + Bm_2}{Am_2 + B}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right) \quad (2\text{-}20)$$

$$u_r = \frac{Pr_i}{E_i (k^{m_1} - k^{m_2})}\left(\frac{1}{Am_1 + B}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{1}{Am_2 + B}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right) \quad (3\text{-}20)$$

ملاحظه می‌شود که σ_r مستقیماً به A و B وابسته نیست، ولیکن به υ^* و ثابت ناهمگنی n بستگی دارد. σ_θ و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند. اکنون معادلات (20) با توجه به شرایط انتهایی استوانه، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

(الف) تنش صفحه‌ای:

$$\sigma_\theta = \frac{P\bar{r}^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left[\frac{1 + \upsilon m_1}{m_1 + \upsilon}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{1 + \upsilon m_2}{m_2 + \upsilon}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (1\text{-}21)$$

$$u_r = \frac{Pr_i\left(1 - \upsilon^2\right)}{E_i\left(k^{m_1} - k^{m_2}\right)}\left[\frac{1}{m_1 + \upsilon}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{1}{m_2 + \upsilon}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (2\text{-}21)$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

$$\sigma_\theta = \frac{P\bar{r}^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left[\frac{(1-\upsilon) + \upsilon m_1}{(1-\upsilon)m_1 + \upsilon}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{(1-\upsilon) + \upsilon m_2}{(1-\upsilon)m_2 + \upsilon}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (1\text{-}22)$$

$$u_r = \frac{Pr_i(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{E_i\left(k^{m_1} - k^{m_2}\right)}\left[\frac{1}{(1-\upsilon)m_1 + \upsilon}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{1}{(1-\upsilon)m_2 + \upsilon}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (2\text{-}22)$$

(پ) استوانه‌ی بسته:

$$\sigma_\theta = \frac{P\bar{r}^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left[\frac{(2-\upsilon) + 3\upsilon m_1}{(2-\upsilon)m_1 + 3\upsilon}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{(2-\upsilon) + 3\upsilon m_2}{(2-\upsilon)m_2 + 3\upsilon}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (1\text{-}23)$$

$$u_r = \frac{2Pr_i(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{E_i(k^{m_1} - k^{m_2})}\left[\frac{1}{(2-\upsilon)m_1 + 3\upsilon}k^{m_2}\bar{r}^{m_1} - \frac{1}{(2-\upsilon)m_2 + 3\upsilon}k^{m_1}\bar{r}^{m_2}\right] \quad (2\text{-}23)$$

مرجع [9] تنش شعاعی و تنش محیطی را فقط به ازای $\Delta > 0$ در حالت کرنش صفحه‌ای به‌ست آورده است. σ_r (رابطه‌ی 9 مقاله) را درست و σ_θ (رابطه‌ی 10 مقاله) را نادرست به‌دست آورده است. برای تصحیح رابطه، به جای $\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta}$ باید $\left(\frac{rR}{a}\right)^{\beta-1}$ را بر اساس نمادهای مقاله‌ی مذکور قرار داد. نمودار (2) مرجع مذکور اشتباه است که در انتهای این مقاله، صحیح آن نشان داده می‌شود.

۴-۲- ریشه‌های مضاعف

اگر در رابطه‌ی (10)، $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های مضاعف می‌شود.

$$m_1 = m_2 = m = -\frac{n}{2} \tag{24}$$

پاسخ معادله‌ی (8) در این حالت:

$$u_r(r) = \left(C_1 + C_2 \ln r\right) r^m \tag{25}$$

ε_r و ε_θ را با استفاده از معادلات (3) به‌دست آورده و در معادله‌ی (4) می‌گذاریم.

(26)

$$\sigma_r = E_i \bar{r}^n \left\{ C_1\left(Am+B\right) + C_2\left[A + \left(Am+B\right)\ln r\right]\right\} r^{m-1}$$

با اعمال شرایط بارگذاری (رابطه‌ی 18)، در نتیجه ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{P\left[A + \left(Am+B\right)\ln r_o\right]}{E_i\left(Am+B\right)^2 \left(\ln k\right) r_i^{m-1}} \\ k = \dfrac{r_o}{r_i} \\ C_2 = \dfrac{P}{E_i\left(Am+B\right)\left(\ln k\right) r_i^{m-1}} \end{cases} \tag{27}$$

C_1 و C_2 را در معادلات (25 و 4) می‌گذاریم.

$$\sigma_r = -\frac{P\bar{r}^{(m+n-1)}}{\ln k}\left(\ln\frac{k}{\bar{r}}\right) \tag{1-28}$$

(2-28)

$$\sigma_\theta = \frac{P\bar{r}^{(m+n-1)}}{\ln k}\left[\frac{B^2 - A^2}{\left(Am+B\right)^2} - \frac{A+Bm}{Am+B}\ln\frac{k}{\bar{r}}\right]$$

$$u_r = -\frac{P r_i\, \bar{r}^m}{E_i\left(Am+B\right)\ln k}\left(\frac{A}{Am+B} + \ln\frac{k}{\bar{r}}\right) \tag{3-28}$$

ملاحظه می‌شود که مشابه حالت پیشین σ_r مستقیماً به A و B وابسته نیست، ولیکن به υ^* و ثابت ناهمگنی n بستگی دارد. σ_θ و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند. اکنون معادلات (28) با توجه به شرایط انتهایی استوانه، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

(الف) تنش صفحه‌ای:

$$\sigma_\theta = -\frac{P\bar{r}^{(m+n-1)}}{\ln k}\left[\frac{1-\upsilon^2}{\left(m+\upsilon\right)^2} + \frac{1+\upsilon m}{m+\upsilon}\ln\frac{k}{\bar{r}}\right] \tag{1-29}$$

$$u_r = -\frac{P r_i\, \bar{r}^m\left(1-\upsilon^2\right)}{E_i\left(m+\upsilon\right)\ln k}\left(\frac{1}{m+\upsilon} + \ln\frac{k}{\bar{r}}\right) \tag{2-29}$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

(1-30)

$$\sigma_\theta = -\frac{P\bar{r}^{(m+n-1)}}{\ln k}\left\{\frac{1-2\upsilon}{\left[\left(1-\upsilon\right)m+\upsilon\right]^2} + \frac{\left(1-\upsilon\right)+\upsilon m}{\left(1-\upsilon\right)m+\upsilon}\ln\frac{k}{\bar{r}}\right\}$$

(2-30)

$$u_r = -\frac{P r_i\, \bar{r}^m\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}{E_i\left[\left(1-\upsilon\right)m+\upsilon\right]\ln k}\left[\frac{1-\upsilon}{\left(1-\upsilon\right)m+\upsilon} + \ln\frac{k}{\bar{r}}\right]$$

(پ) استوانه‌ی بسته:

$$\sigma_\theta = -\frac{P\bar{r}^{(m+n-1)}}{\ln k}\left\{\frac{4\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}{\left[\left(2-\upsilon\right)m+3\upsilon\right]^2} + \frac{\left(2-\upsilon\right)+3\upsilon m}{\left(2-\upsilon\right)m+3\upsilon}\ln\frac{k}{\bar{r}}\right\} \tag{1-31}$$

(2-31)

$$u_r = -\frac{2P r_i\, \bar{r}^m\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}{E_i\left[\left(2-\upsilon\right)m+3\upsilon\right]\ln k}\left[\frac{2-\upsilon}{\left(2-\upsilon\right)m+3\upsilon} + \ln\frac{k}{\bar{r}}\right]$$

۴-۳- ریشه‌های مختلط

اگر در رابطه‌ی (10)، $\Delta < 0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های مختلط می‌شود.

$$m_1 = z + iy \quad \text{و} \quad m_2 = z - iy$$
$$z = -\frac{n}{2} \qquad y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \& \quad \Delta = n^2 - 4\left(n\upsilon^* - 1\right) \tag{32}$$

پاسخ معادله‌ی (8) در این حالت:

$$u_r(r)=\left[C_1\cos(y\ln r)+C_2\sin(y\ln r)\right]r^z \tag{33}$$

ε_r و ε_θ را با استفاده از معادلات (3) به‌دست آورده و در معادله‌ی (4) می‌گذاریم.

(34)

$$\sigma_r=E_i\bar{r}^n\left\{C_1\left[(Az+B)\cos(y\ln r)-Ay\sin(y\ln r)\right]+C_2\left[(Az+B)\sin(y\ln r)+Ay\cos(y\ln r)\right]\right\}r^{z-1}$$

با اعمال شرایط بارگذاری (رابطه‌ی 18)، در نتیجه ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

(35)

$$\begin{cases} C_1=-\dfrac{Pr_i^{(1-z)}}{E_iD}\left[(Az+B)\sin(y\ln r_o)+Ay\cos(y\ln r_o)\right] \\ C_2=\dfrac{Pr_i^{(1-z)}}{E_iD}\left[(Az+B)\cos(y\ln r_o)-Ay\sin(y\ln r_o)\right] \end{cases}$$

که در آن:

$$k=\frac{r_o}{r_i} \quad \text{و} \quad D=\left[(Az+B)^2+A^2y^2\right]\sin(y\ln k) \tag{36}$$

C_1 و C_2 را در معادلات (33 و 4) می‌گذاریم.

$$\sigma_r=-\frac{P\bar{r}^{(z+n-1)}}{\sin(y\ln k)}\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right) \tag{1-37}$$

(2-37)

$$\sigma_\theta=-\frac{P\bar{r}^{(z+n-1)}}{D}\left\{\left(A^2-B^2\right)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+\left[AB\left(z^2+y^2+1\right)+\left(A^2+B^2\right)z\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\}$$

(3-37)

$$u_r=-\frac{Pr_i\bar{r}^z}{E_iD}\left[(Az+B)\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+Ay\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right]$$

ملاحظه می‌شود که σ_r مستقیماً به A و B وابسته نیست، ولیکن به υ^* و ثابت ناهمگنی n بستگی دارد. σ_θ و u_r به A و B وابستگی مستقیم دارند. اکنون معادلات (37) با توجه به شرایط انتهایی استوانه، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

(الف) تنش صفحه‌ای:

(1-38)

$$\sigma_\theta=-\frac{P\bar{r}^{(z+n-1)}}{\left[(z+\upsilon)^2+y^2\right]\sin(y\ln k)}\left\{\left(1-\upsilon^2\right)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+\left[\upsilon\left(z^2+y^2+1\right)+\left(1+\upsilon^2\right)z\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\}$$

(2-38)

$$u_r=-\frac{Pr_i\bar{r}^z\left(1-\upsilon^2\right)}{E_i\left[(z+\upsilon)^2+y^2\right]\sin(y\ln k)}\left[(z+\upsilon)\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right]$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

(1-39)

$$\sigma_\theta=-\frac{P\bar{r}^{(z+n-1)}}{\left[\left[(1-\upsilon)z+\upsilon\right]^2+(1-\upsilon)^2y^2\right]\sin(y\ln k)}\times\left\{(1-2\upsilon)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+\left[\upsilon(1-\upsilon)\left(z^2+y^2+1\right)+\left(1-2\upsilon+2\upsilon^2\right)z\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\}$$

(2-39)

$$u_r=-\frac{Pr_i\bar{r}^z(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{E_i\left[\left[(1-\upsilon)z+\upsilon\right]^2+(1-\upsilon)^2y^2\right]\sin(y\ln k)}\times\left\{\left[(1-\upsilon)z+\upsilon\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+(1-\upsilon)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\}$$

(پ) استوانه‌ی بسته:

(1-40)

$$\sigma_\theta=-\frac{P\bar{r}^{(z+n-1)}}{\left[\left[(2-\upsilon)z+3\upsilon\right]^2+(2-\upsilon)^2y^2\right]\sin(y\ln k)}\times\left\{4(1+\upsilon)(1-2\upsilon)y\cos\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)+\left[3\upsilon(2-\upsilon)\times\left(z^2+y^2+1\right)+2\left(2-2\upsilon+5\upsilon^2\right)z\right]\sin\left(y\ln\frac{k}{\bar{r}}\right)\right\}$$

(2-40)

$$u_r = -\frac{2 P r_i \bar{r}^{z} (1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{E_i \left[\left[(2-\upsilon) z + 3\upsilon \right]^2 + (2-\upsilon)^2 y^2 \right] sin(y \, ln \, k)} \times$$
$$\left\{ \left[(2-\upsilon) z + 3\upsilon \right] sin\left(y \, ln \frac{k}{\bar{r}} \right) + (2-\upsilon) y \, cos\left(y \, ln \frac{k}{\bar{r}} \right) \right\}$$

۵- حل استوانه‌های همگن

در استوانه‌های همگن و همسانگرد، مدول الاستیک و نسبت پواسون، هر دو ثابت هستند. اگر در معادله‌ی (5) مقدار $n = 0$ گذاشته شود، مادّه‌ی همگن به‌دست می‌آید.

$$E = E_i = const. \tag{41}$$

و معادله‌ی اویلر-کوشی:

$$r^2 u_r'' + r u_r' - u_r = 0 \tag{42}$$

معادله مشخصه و ریشه‌های آن:

$$m^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; m_{1,2} = \pm 1 \tag{43}$$

مشاهده می‌شود که ریشه‌های معادله مشخصه، حقیقی هستند و از این رو پاسخ‌ها در مجموعه‌ی $\Delta > 0$ قرار می‌گیرند. اگر در معادله‌ی (16) و بقیه‌ی معادلات، به جای $m_1 = +1$ و $m_2 = -1$ گذاشته شود، همان روابط شناخته شده‌ی استوانه‌های همگن به‌دست می‌آیند.

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \tag{44}$$

با اعمال شرایط بارگذاری، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{P}{E(A+B)(k^2-1)} \\ C_2 = \dfrac{P r_o^2}{E(A-B)(k^2-1)} \end{cases} \tag{45}$$

C_1 و C_2 را در معادلات (44 و 4) می‌گذاریم.

$$\sigma_r^H = \frac{P}{k^2-1}\left(1 - \frac{k^2}{\bar{r}^2}\right) \tag{1-46}$$

$$\sigma_\theta^H = \frac{P}{k^2-1}\left(1 + \frac{k^2}{\bar{r}^2}\right) \tag{2-46}$$

$$u_r^H = \frac{P r_i \bar{r}}{E(k^2-1)}\left[\frac{1}{A+B} + \left(\frac{1}{A-B}\right)\frac{k^2}{\bar{r}^2}\right] \tag{3-46}$$

ملاحظه می‌شود که σ_r و σ_θ به A و B وابسته نیست و نیز به E وابستگی ندارد. در حقیقت تنش شعاعی و تنش محیطی ایجاد شده برای استوانه‌های همگن و همسانگرد با مدول الاستیک متفاوت تحت فشار ثابت و هندسه‌ی یکسان، به یک میزان است که این مقدار مستقل از شرایط انتهایی استوانه است. ولیکن u_r به A و B و نیز E وابستگی مستقیم دارد، یعنی مقدار جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ها با شرایط بالا، با تغییر مدول الاستیک و شرایط انتهایی، یکسان نیست. اکنون معادله‌ی (3-46) را در شرایط انتهایی استوانه، به صورت زیر می‌نویسیم.

(الف) تنش صفحه‌ای:

$$u_r^H = \frac{P r_i \bar{r}}{E(k^2-1)}\left[(1-\upsilon) + (1+\upsilon)\frac{k^2}{\bar{r}^2}\right] \tag{47}$$

(ب) کرنش صفحه‌ای:

$$u_r^H = \frac{P r_i \bar{r}(1+\upsilon)}{E(k^2-1)}\left[(1-2\upsilon) + \frac{k^2}{\bar{r}^2}\right] \tag{48}$$

(پ) استوانه‌ی بسته:

$$u_r^H = \frac{P r_i \bar{r}}{E(k^2-1)}\left[(1-2\upsilon) + (1+\upsilon)\frac{k^2}{\bar{r}^2}\right] \tag{49}$$

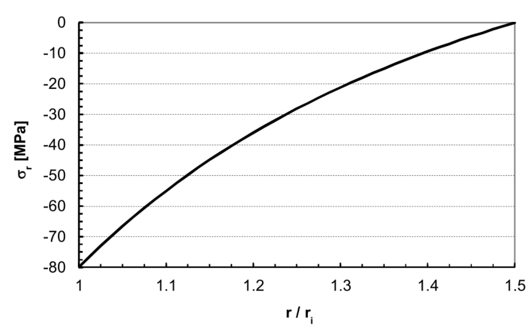
۶- بررسی نتایج

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج عددی، یک استوانه‌ی جدار ضخیم با مشخصات زیر را با توزیع متفاوت مدول الاستیک در امتداد جدار در نظر می‌گیریم. استوانه‌ی جدار ثابت به شعاع داخلی $r_i = 40\ mm$ و شعاع خارجی $r_o = 60\ mm$ تحت فشار

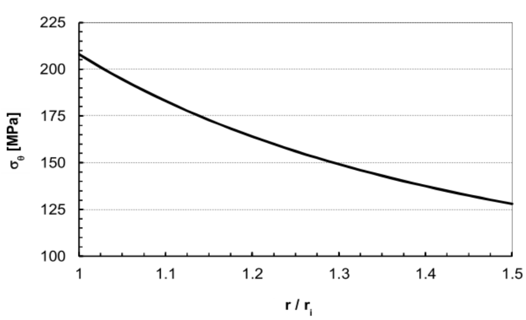
یکنواخت داخلی $P = 80\,MPa$ قرار گرفته است. مدول الاستیک سطح داخلی استوانه $E_i = 200\,GPa$ و نسبت پواسون $\upsilon = 0/3$ می‌باشد.

۶-۱- استوانه‌ی همگن

تنش‌های شعاعی و محیطی در استوانه‌های همگن و همسانگرد مستقل از خواص مکانیکی و شرایط انتهایی استوانه می‌باشند، ولیکن جابه‌جایی شعاعی به آنها وابسته است. شکل 1 توزیع تنش شعاعی فشاری را بر اساس رابطه‌ی (46-1) و شکل 2 توزیع تنش محیطی کششی را بر اساس رابطه‌ی (46-2) در استوانه نسبت به شعاع بی‌بعد $\bar{r} = \dfrac{r}{r_i}$ نشان می‌دهد. جابه‌جایی شعاعی در شکل 3 براساس روابط 47، 48 و 49 در همان استوانه، نشانگر آنست که مقدار جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی باز (تنش صفحه‌ای) بیشترین و در استوانه‌ی بسته (نامقیّد) کمترین است.



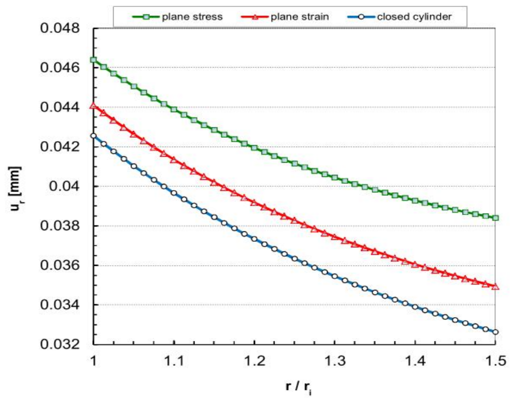
شکل ۱ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی همگن



شکل ۲ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی همگن

۶-۲- استوانه‌ی ناهمگن

در استوانه‌های ناهمگن و همسانگرد، تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی، مستقل از خواص مکانیکی و شرایط انتهایی استوانه نیستند، بلکه از طریق n و $\upsilon^* = \dfrac{B}{A}$ به خواص مکانیکی و شرایط دو سر استوانه وابسته می‌شوند.



شکل ۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی همگن

مدول الاستیک استوانه در راستای شعاع با تابع توانی $E(r) = E_i \bar{r}^n$ تعریف که n در محدوده‌ی $-2 \le n \le 2$ [15،14،13،9] در نظر گرفته می‌شود. شکل 4 توزیع مدول الاستیک را نسبت به شعاع استوانه $\dfrac{E}{E_i} = \left(\dfrac{r}{r_i}\right)^n$ به ازای مقادیر صحیح n نشان می‌دهد. نسبت پواسون استوانه، ثابت $0 < \upsilon < 0/5$ می‌باشد که بر اساس آن $0 < \upsilon^* < 1$ می‌شود. در این مقاله، $\upsilon = 0/3$ در نظر گرفته شده که مقدار υ^* بر اساس شرایط انتهایی برابر است با:

$$\upsilon^* = \begin{cases} 0/3 & \text{تنش صفحه‌ای} \\ 0/4286 & \text{کرنش صفحه‌ای} \\ 0/5294 & \text{استوانه‌ی بسته} \end{cases} \qquad (50)$$

توزیع نرمال تنش‌ها و جابه‌جایی در شرایط انتهایی مختلف، تفاوت قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر ندارند، از این رو نمودارهای اشکال 4 تا 7 برای حالت استوانه‌ی بسته رسم شده که نتایج همانند نتایج دو حالت دیگر است.

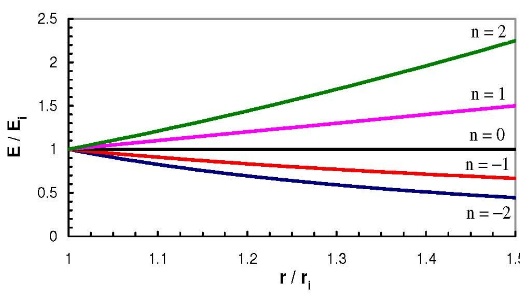
شکل 5 توزیع نرمال تنش شعاعی استوانه‌ی ناهمگن را نسبت به استوانه‌ی همگن نشان می‌دهد. این نسبت در لایه‌ی داخل و لایه‌ی خارج استوانه یک است (در [9] و [14] در لایه‌ی خارجی یک رسم نشده است)، یعنی رفتار مادّه‌ی ناهمگن همانند رفتار مادّه‌ی همگن می‌باشد. در جدار استوانه به ازای $n<0$ تنش شعاعی، کاهش و به ازای $n>0$ تنش شعاعی افزایش می‌یابد. میزان کاهش یا افزایش تنش به مقدار $|n|$ بستگی دارد.

شکل 6 توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را نسبت به استوانه‌ی همگن نشان می‌دهد. این نسبت در لایه‌ی داخل استوانه یک نیست (در مرجع [9] این نمودار مشابه نمودار تنش شعاعی رسم شده ولیکن در مرجع [14] اصلاح شده است). تنش محیطی به ازای $n<0$ در نیمه‌ی داخلی جدار، بیشتر از مادّه‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جدار، کمتر از مادّه‌ی همگن می‌باشد و به ازای $n>0$ برعکس در نیمه‌ی داخلی جدار، کمتر از مادّه-ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جدار، بیشتر از مادّه‌ی همگن است. تنش محیطی (تنش بیشینه) در حالت $n=1$ در طول جدار استوانه تقریباً ثابت می‌ماند که از نظر کنترل تنش در استوانه جدار ضخیم، می‌تواند امتیاز ویژه‌ای باشد. در محدوده‌ی لایه‌ی میانی استوانه، رفتار تنش محیطی همانند رفتار مادّه‌ی همگن می‌شود.

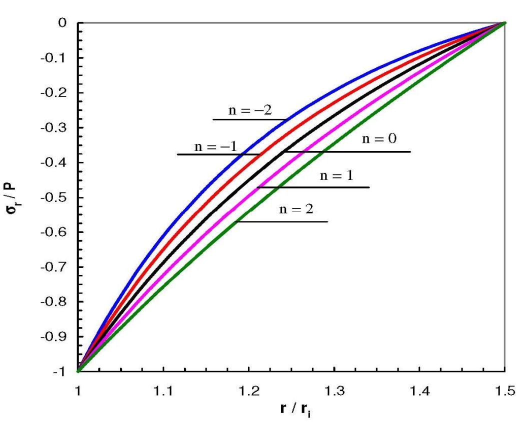
شکل 7 توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی ناهمگن را نسبت به استوانه‌ی همگن نشان می‌دهد. این نسبت به ازای n های مختلف در هیچ حالتی یک نمی-شود. به ازای $n<0$ جابه‌جایی استوانه نسبت به مادّه‌ی همگن بیشتر است و به ازای $n>0$ کمتر می‌شود، ولیکن این نسبت در طول جدار تقریباً ثابت می‌ماند، یعنی تغییرات جابه‌جایی در مادّه‌ی ناهمگن مشابه تغییرات جابه‌جایی در مادّه‌ی همگن است و میزان تفاوت به مقدار $|n|$ بستگی دارد.

۷- نتیجه‌گیری

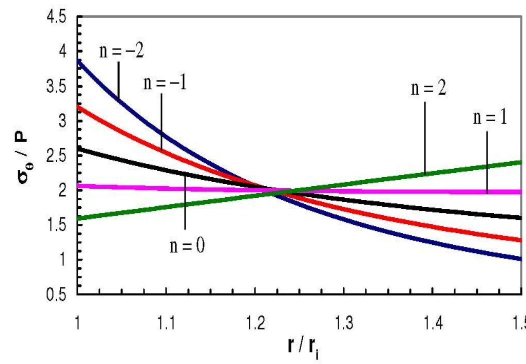
می‌توان نتیجه گرفت که به ازای n مثبت یا منفی، تنش محیطی در یک نیمه، کاهش و در نیمه‌ی دیگر افزایش می‌یابد. به ازای n مثبت، تنش شعاعی افزایش و جابه-جایی شعاعی کاهش نشان می‌دهد و به ازای n منفی، تنش شعاعی کاهش و جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد (در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته) و هر چقدر $|n|$ بزرگتر باشد، تغییرات بیشتر مشاهده می‌شود. بنابراین به ازای $n=\pm1$ حدود 20% تغییرات در رفتار مادّه نسبت به مادّه‌ی همگن مشاهده می‌شود که برحسب نیاز به کاهش جابه‌جایی یا تنش در استوانه‌ی ناهمگن، می‌توان از مقدار مثبت یا منفی آن استفاده کرد.



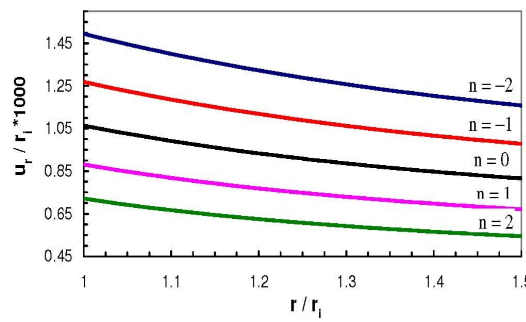
شکل ۴ توزیع مدول الاستیک در راستای شعاعی



شکل ۵ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن



شکل ۶ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن



شکل ۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن

۸- منابع

[1] *Timoshenko S.P.; Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed., New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1976.*

[2] *Timoshenko S.P., Goodier J.N.; Theory of Elasticity, 3rd ed., New York, McGraw-Hill, 1983.*

[3] *Lekhnitskii S.G.; Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Moscow, Mir Pub., 1981.*

[4] *Koizumi M.; FGM activities in Japan, Composites: Part B (Eng.); 28, 1997, 1-4.*

[5] *Fukui Y., Yamanaka N.; Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure, JSME, Ser. I: Solid Mech.; 35(4), 1992, 379-385.*

[6] *Obata Y., Noda N.; Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a sphere of a functionally gradient material, J. Thermal Stresses; 17(3),1994, 471-487.*

[7] *Horgan C.O., Chan A.M.; The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, J. Elasticity; 55,1999, 43-59.*

[8] *Horgan C.O., Chan A.M.; The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks, J. Elasticity; 55,1999, 219-230.*

[9] *Tutuncu N., Ozturk M.; Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels, composites: Part B (Eng.); 32, 2001, 683-686.*

[10] *Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; General solution for mechanical and thermal stresses in a nonaxisymmeteic steady-state loads, J. App. Mech.; 70, 2003, 111-118.*

[11] *Eraslan A.N., Akis T.; On the plane strain and plane stress solution of functionally graded solid shaft and solid disk problems, Acta Mechanica; 181, 2006, 43-63.*

[12] *Eraslan A.N., Akis T.; Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic–plastic pressurized tube, Int. J. Pressure Vessels & Piping; 83, 2006, 635-644.*

[13] *Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, Mech. Res. Comm.; 33, 2006, 681-691.*

[14] *Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, J. Composite Struc.; 79, 2007, 140-147.*

[15] *Tutuncu N.; Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, J. Eng. Struc.; 29, 2007, 2032-2.*