



دانشکده برق و رباتیک
پایان نامه کارشناسی ارشد

دانشکده: برق و رباتیک

گروه: کنترل

شناسایی سیستم‌های مرتبه کسری در فضای حالت

دانشجو: حمید بهزاد

استاد راهنما:

دکتر حیدر طوسی‌ان شاندیز

استاد مشاور

دکتر محمد مهدی فاتح

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: بهمن ماه ۱۳۸۹

تقديم به :

پدر و مادر و همسر عزیز و فداکارم

و تقديم به:

همه دانش پژوهان

چکیده:

در این پایان نامه یک روش زیر فضایی نوین برای شناسایی مدل فضای حالتی یک سیستم چند ورودی _ چند خروجی کسری به کمک اطلاعات ورودی و خروجی تصادفی ارائه شده است. در این روش ابتدا از سیگنال آغشته به نویز به روش کسری و در حوزه زمان مشتق گرفته و به کمک آن معادله جبری ورودی خروجی ساخته شده است. سپس به کمک تجزیه QR ماتریس‌های فضای حالتی تخمین زده شده است.

مدل بدست آمده، مدلی از مرتبه کسری و پیوسته در زمان می‌باشد. به خاطر رفتار ذاتی دینامیکی از مرتبه کسری یک سیستم پیوسته در زمان، توصیف یک سیستم فیزیکی با کمک مدل پیوسته در زمان کسری و شناسایی آن با کمک اطلاعات نمونه برداری شده و به صورت مستقیم، دارای مزیت‌های زیادی است. همچنین با کمک این روش مدل‌سازی و کنترل مقاوم و دقیق‌تری خواهیم داشت.

به منظور اثبات ادعای خود، یک ربات انتخاب کرده و به هر دو روش صحیح و کسری، به شناسایی مدل آن پرداخته‌ایم. نتایج بیانگر اینست که روش کسری، دارای دقت بمراتب بالاتری نسبت به مدل صحیح است.

کلمات کلیدی: شناسایی - کسری - زیرفضایی - کنترل - روبات

فهرست مطالب

فصل اول

- ۱_۱) مقدمه ۲
- ۲_۱) توابع مورد استفاده در محاسبات کسری ۲
- ۱_۲_۱) تابع گاما ۲
- ۲_۲_۱) تابع گامای ناقص ۴
- ۳_۲_۱) تابع بتا ۵
- ۴_۲_۱) تابع خطا ۵
- ۵_۲_۱) تابع میتاگ لفلر ۶
- ۶_۲_۱) تابع آگراول ۸
- ۷_۲_۱) تابع روبونتوف هارتلی ۸
- ۸_۲_۱) تابع میلر راس ۸
- ۳_۱) انتگرال و مشتق از مرتبه کسری ۸
- ۱_۳_۱) انتگرال و مشتق کسری ریمان - لیوویل ۹
- ۲_۳_۱) انتگرال و مشتق مرتبه کسری گرانوالد - لتینکف ۹
- ۴_۱) تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال از مرتبه کسری ۱۱
- ۱_۴_۱) تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ۱۲
- ۲-۴-۱) تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان - لیوویل ۱۲
- ۳-۴-۱) تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو ۱۲
- ۴_۴_۱) تبدیل لاپلاس مشتق کسری گرانولد - لتینکف ۱۲

فصل دوم

- ۱_۲) مقدمه ۱۴

۱۴	۲-۲) مدل های متفاوت برای یک سیستم.....
۱۴	۲-۲-۱) مدل پیوسته
۱۵	۲-۲-۲) مدل های گسسته
۱۵	۲-۲-۳) مدل های ورودی و خروجی
۱۶	۲-۲-۴) تحقق فضای حالتی.....
۱۶	۲-۳) ارتباط بین فضای حالتی و فرم تابع تبدیل در سیستم های از مرتبه مضروب
۱۷	۲-۴) کنترل پذیری و رویت پذیری

فصل سوم

۲۰	۳-۱) مقدمه
۲۰	۳-۲) بررسی پایداری سیستم های کسری.....
۲۰	۳-۲-۱) پایداری در صفحه s
۲۱	۳-۲-۲) پایداری در صفحه w
۲۲	۳-۲-۳) معادل گذاری اپراتور لاپلاس کسری با مدل های گویا.....

فصل چهارم

۲۶	۴-۱) مقدمه
۲۶	۴-۲) مشکلات و پروسه شناسایی یک سیستم.....
۲۷	۴-۳) روش حداقل مربعات
۳۰	۴-۴) شناسایی مدل پیوسته در زمان به روش مستقیم
۳۰	۴-۴-۱) مدل معادله دیفرانسیلی
۳۱	۴-۴-۲) مشتقات ورودی و خروجی در حوزه زمان.....

- ۳۱ مدل‌های اندازه‌گیری نويز (۳_۴_۴)
- ۳۲ اساس شناسایی مدل پیوسته در زمان به روش مستقیم (۴_۴_۴)
- ۳۴ مزایای شناسایی مدل زمان پیوسته به صورت مستقیم و با کمک داده نمونه‌برداری شد (۵_۴_۴)
- ۳۵ روش زیر فضایی برای تخمین مدل فضای حالت (۵_۴)
- ۳۶ تخمین B و D (۱_۵_۴)
- ۳۷ بدست آوردن A و C از ماتریس رویت پذیری (۲_۵_۴)
- ۳۹ تخمین ماتریس رویت پذیری از سیستم آغشته به نويز (۳_۵_۴)
- ۳۹ محاسبه ماتریس رویت پذیری (۴_۵_۴)
- ۴۱ حذف عبارت U (۵_۵_۴)
- ۴۱ حذف عبارت نويز (۶_۵_۴)

فصل پنجم

- ۴۵ مقدمه (۱_۵)
- ۴۵ الگوریتم زیر فضایی برای شناسایی حوزه زمان از مرتبه کسری (۲_۵)
- ۴۶ تابع توزیع تصادفی (۳_۵)
- ۴۷ تابع آزمون (۱_۳_۵)
- ۴۷ توابع تعمیم یافته (۲_۳_۵)
- ۴۸ استفاده از توابع تعمیم یافته به منظور شناسایی (۳_۳_۵)
- ۴۹ مشتقات ورودی - خروجی معادله جبری (۴_۵)
- ۵۱ شناسایی سیستم (۵_۵)
- ۵۶ شبیه سازی (۶_۵)

فصل ششم

نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۶۸

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱) تغییرات تابع $\Gamma(x)$ را بازاء مقادیر مختلف x ۴
- شکل (۲-۱) تغییرات تابع میتاگ لفلر بازاء مقادیر مختلف x ۷
- شکل (۱-۳) ناحیه پایداری در صفحه s ۲۱
- شکل (۱-۵) خروجی واقعی و خروجی تخمین زده شده ۵۸
- شکل (۲-۵) روبات فانتوم ۵۹
- شکل (۳-۵) سیمولینک مطلب ۵۹
- شکل (۴-۵) پاسخ پله سیستم برای هر یک از بازوهای روبات ۶۱
- شکل (۵-۵) مراحل شناسایی ۶۲
- شکل (۶-۵) داده ورودی و خروجی روبات ۶۳
- شکل (۷-۵) خروجی واقعی و خروجی تخمین زده شده ۶۵
- شکل (۸-۵) بررسی صحت آزمایش با کمک اطلاعات آزمون ۶۶

فهرست جداول

جدول ۱-۳) پایداری سیستم‌ها در صفحه ω ۲۲

جدول ۲-۳) تقریب برخی از توان‌های کسری ۲۳

فصل اول

(۱_۱) مقدمه

ایده دیفرانسیل‌گیری با مرتبه کسری برای اولین بار در قرن ۱۹ به وسیله ریمن و لیوویل ایجاد شد. ایده اصلی آنها گسترش دیفرانسیل‌گیری نه تنها به کمک مرتبه‌های صحیح، بلکه به کمک مرتبه‌های غیرصحیح بود. در زمینه مطالعات انجام شده برای شناسایی سیستم‌ها بر روی سیستم‌های حقیقی مثل سیستم‌های الکترو مکانیکی [۱،۲]، گرمایی [۳،۴]، رفتار دیفرانسیلی از مرتبه کسری ذاتی، رویت شده است. بنابراین مدل‌های کلاسیک که بر اساس مرتبه‌های دیفرانسیلی صحیح هستند، برای بیان سیستم‌های کسری مناسب نمی‌باشند. در نتیجه کلاس دیگری به نام مدل‌های کسری از سال ۱۹۴۵ در حال رشد است [۵-۷] که بر اساس اهداف دیفرانسیلی کار می‌کند.

(۲_۱) توابع مورد استفاده در محاسبات کسری

(۱_۲_۱) تابع گاما:

یکی از توابع ابتدایی مورد استفاده در محاسبات کسری، تابع گامای اوپلر می‌باشد. این تابع توسعه یافته فاکتوریل بوده $(n!)$ که n می‌تواند مقادیر غیرصحیح را نیز اختیار کند. می‌توان تابع گاما را برای $Re(x) > 0$ به صورت زیر تعریف کرد: [۸]

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (۱_۱)$$

این تابع به صورت حدی نیز قابل تعریف است: [۸]

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad (۲_۱)$$

با مشتق‌گیری از عبارت $t^x e^{-t}$ که عبارت زیر انتگرال تابع گاما می‌باشد رابطه زیر نتیجه می‌شود: [۹]

$$\frac{d}{dt} (t^n e^{-t}) = x t^{x-1} e^{-t} - t^x e^{-t} \quad (۳_۱)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۳_۱) می‌توان چنین نتیجه گرفت که: [۹]

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt}(t^x e^{-t}) = \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

$$[t^x e^{-t}]_0^{\infty} = x\Gamma(x) - \Gamma(x+1) \quad (4_1)$$

رابطه (4_1) یکی از خواص مهم تابع گاما را بیان می‌کند یعنی [8,9]

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (5_1)$$

تابع گاما را می‌توان با رابطه زیر برای $Re(x) > 0$ تعریف کرد [8-12]

$$\Gamma(1) = 1 \quad (6_1)$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

تعریف (6_1) معادل تعریف فاکتوریل برای اعداد طبیعی می‌باشد، بنابراین برای هر عدد حقیقی مثبت

می‌توان گفت: [8,10]

$$x! = \Gamma(x+1) \quad (7_1)$$

خاصیت مهم دیگر تابع گاما وجود قطبهای ساده در $Z=0, -1, -2, \dots$ می‌باشد [8]

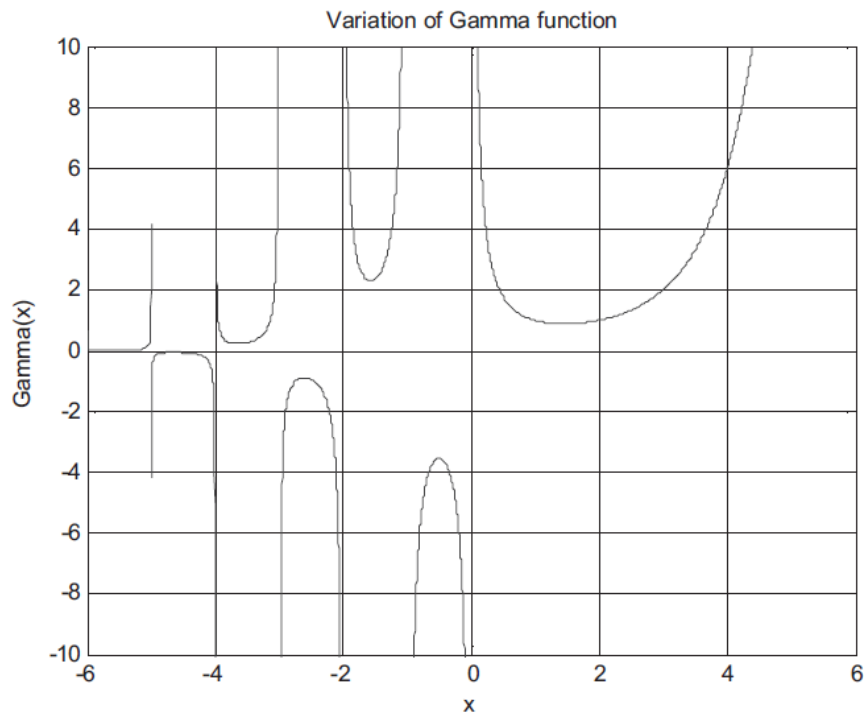
$$\Gamma(x) = \varphi(x) + \frac{-1}{0!} \frac{1}{0+x} + \frac{-1^1}{1!} \frac{1}{1+x} + \frac{-1^2}{2!} \frac{1}{2+x} + \dots \quad (8_1)$$

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

که نشان‌دهنده قطبهای ساده در 0 و -1 و -2 بوده و این بدین معنی است که تابع گاما در نقاط

صحیح منفی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و بنابراین در این نقاط ناپیوسته است. [8]

در شکل زیر تغییرات تابع $\Gamma(x)$ بازاء مقادیر مختلف x نشان داده شده است.



شکل (۱-۱) تغییرات تابع $\Gamma(x)$ را بازاء مقادیر مختلف x [۱۳]

۲-۲-۱) تابع گامای ناقص

یکی از توابع مورد استفاده در حساب کسری تابع گامای ناقص می باشد که به دو صورت قابل تعریف

است. یکی تابع گامای ناقص با حد بالا که به صورت زیر تعریف می شود: [۸]

$$\Gamma(z, x) = \int_x^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (9-1)$$

و دومی تابع گامای ناقص با حد پایین : [۸]

$$\gamma(z, x) = \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt \quad (10-1)$$

در هر دو مورد فوق x مقداری حقیقی و $x \geq 0$ و z مقداری مختلط و $Re(z) > 0$ می باشد. [۸]

تابع گامای ناقص، تابعی کامل هم نسبت به x و هم نسبت به z است. [۱۴]

در زیر به برخی خواص تابع گاما اشاره شده است: [۸]

$$\Gamma(z) = \Gamma(z, x) + \gamma(z, x)$$

$$\Gamma(z + 1, x) = z\Gamma(z, x) + x^z e^{-x} \quad (11-1)$$

$$\gamma(z + 1, x) = z\Gamma(z, x) - x^z e^{-x}$$

از این تابع به منظور محاسبه مشتقات و انتگرال‌های کسری مربوط به توابع متناوب مثل مطالعه پاسخ

سینوسی عملگرهای کسری استفاده می‌شود. [۸]

۳-۲-۱ تابع بتا

این تابع بعنوان انتگرال اولر^۱ شکل اول نیز شناخته می‌شود. تابع بتا وابستگی زیادی به تابع گاما داشته و

به صورت زیر تعریف می‌شود: [۸, ۱۰]

$$\beta(p, q) = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q \in \mathbb{R}^+ \quad (12-1)$$

۴-۲-۱ تابع خطا

تابع خطا یکی از توابع پر کاربرد در حساب کسری بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود: [۸, ۱۲]

$$erf(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (13-1)$$

همچنین این تابع به صورت سری نیز قابل توصیف است: [۸]

$$erf(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\gamma n+1}}{(\gamma n+1)n!} = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots \right) \quad (14-1)$$

متمم تابع خطا به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد: [۸]

$$erf(x) = 1 - erfc(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (15-1)$$

¹ Euler's integral

۵-۲-۱) تابع میتاگ لفلر^۲

همان طور که می دانیم تابع نمایی e^x در نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی (مرتبه صحیح) نقش مهمی

ایفا می کند. به طور مشابه تابع میتاگ لفلر چنین نقشی را در حساب کسری بعهدده دارد. [۸, ۱۰, ۱۲]

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (16-1)$$

برای تابع $E_\alpha[ax], \alpha > 0$ ، می توان میتاگ لفلر a را به صورت عددی مختلط $a =$

[۱۵] در نظر گرفت. $(|a| \exp(j\varphi))$

بازاء مقادیر صحیح α ، تابع میتاگ لفلر یک پارامتری، به توابعی آشنا تبدیل خواهد شد. [۱۶]

$$E_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$E_{1,1}(x) = e^x \quad (17-1)$$

$$E_{1/2}(x) = \cosh(\sqrt{x})$$

تابع میتاگ لفلر را می توان به صورت دو پارامتری نیز تعریف کرد: [۸, ۱۶]

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (18-1)$$

که در آن $E_{\alpha,1}(x)$ همان تابع میتاگ لفلر یک پارامتری می باشد. [۸]

تابع دو پارامتری میتاگ لفلر نیز در حالتی که α و β اعداد صحیح را اختیار کنند، تبدیل به توابعی

مشخص و آشنا می شود. [۸, ۱۶]

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$E_{1,2}(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$E_{1,3}(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad (19-1)$$

² Mittag-leffler function

$$E_{\gamma,1}(x^\gamma) = \cosh(x)$$

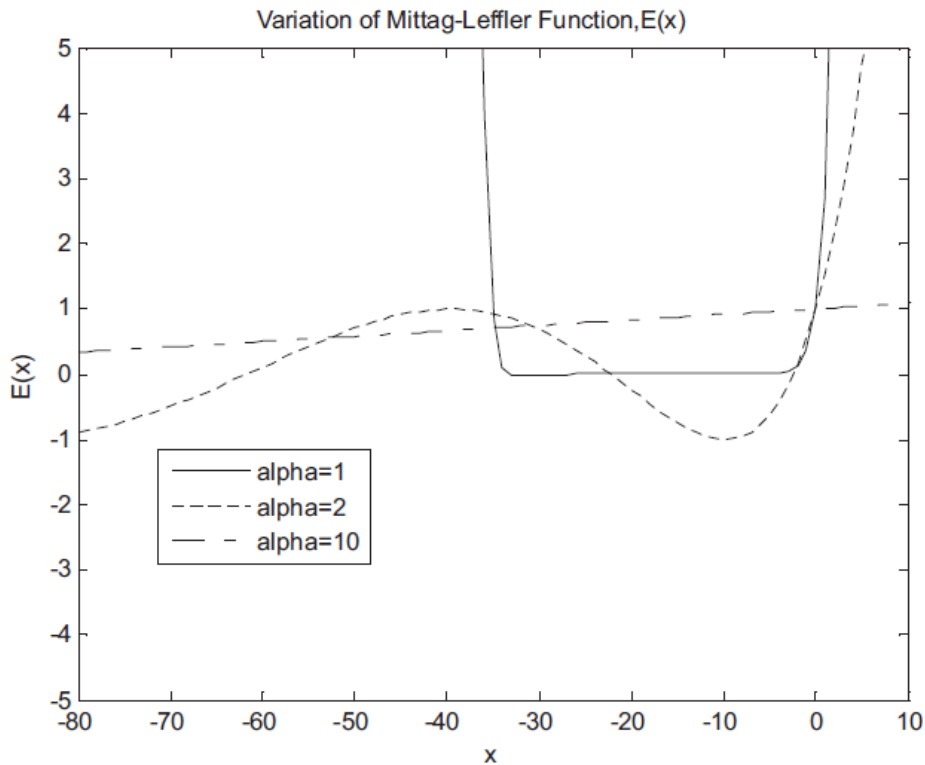
$$E_{\gamma,2}(x^\gamma) = \frac{\sinh(x)}{x}$$

لاپلاس تابع میتاگ لفلر نیز به صورت رابطه زیر قابل بیان می‌باشد. [۸]

$$t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha) \leftrightarrow \frac{s^{\alpha - \beta} k!}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \quad (20-1)$$

$$E_{\alpha, \beta}^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} E_{\alpha, \beta}$$

در شکل زیر می‌توان تغییرات تابع میتاگ لفلر را بازنه مقادیر مختلف x مشاهده کرد.



شکل (۲-۱) تغییرات تابع میتاگ لفلر بازنه مقادیر مختلف x [۱۳]

۶-۲-۱) تابع آگراوال^۳

این تابع عمومیت یافته شده تابع میتاگ لفلر بوده و به خاطر وجود تبدیل لاپلاس آن، مورد اهمیت

می‌باشد. [۸]

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+\frac{\beta-1}{\alpha}}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (21-1)$$

$$L\{E_{\alpha, \beta}(x^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha-1}} \quad (22-1)$$

۷-۲-۱) تابع روبونتوف_هارتلی^۴

این تابع، پاسخ ضربه، در معادلات دیفرانسیلی کسری بوده و در تحلیل سیستم‌های کنترل مورد استفاده

قرار می‌گیرد. [۸]

$$F_q(-a, x) = x^{q-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k x^{kq}}{\Gamma(kq+q)}, \quad q > 0 \quad (23-1)$$

۸-۲-۱) تابع میلر_راس^۵

این تابع بعنوان انتگرال مرتبه ν توابع نمایی شناخته می‌شود. [۸]

$$E_x(\nu, a) = \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} e^{ax} = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{\Gamma(\nu+k+1)} \quad (24-1)$$

۳-۱) انتگرال و مشتق از مرتبه کسری

۱-۳-۱) انتگرال و مشتق کسری ریمان_لیوویل^۶ [۹]

³ Agarwal function

⁴ Robotnov-Hartley Function

⁵ Miller-Ross Function

مفهوم انتگرال و مشتق کسری، از انتگرال و مشتق صحیح منتج می‌شود. با فرض قابل تعریف بودن $f(x)$ در بازه $x > 0$ انتگرال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(I f)(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (25_1)$$

با تکرار عمل انتگرال‌گیری از رابطه (25_1)، رابطه زیر حاصل خواهد شد.

$$(I^2 f)(x) = \int_0^x (I f)(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(s) ds \right) dt \quad (26_1)$$

با تکرار این روند انتگرال‌های از درجات بالاتر قابل حصول است.

$$(I^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x > 0. \quad (27_1)$$

فرمول (27_1) به فرمول کوشی معروف است. در این رابطه، n به اعداد صحیح مثبت محدود بوده و اولین عامل محدود کننده در این فرمول وجود تابع فاکتوریل می‌باشد که برای اعداد غیر صحیح بی معنی است. اما با توجه به تعریف تابع فاکتوریل اعداد غیر صحیح با تابع گاما، این محدودیت بر طرف می‌شود و با استفاده از تابع گاما به جای تابع فاکتوریل، می‌توان قید $n \in \mathbb{N}$ را به $n \in \mathbb{R}^+$ تغییر داد.

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = {}_a I_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_D^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0. \quad (28_1)$$

ریمان و لیوویل برای یافتن مشتق مرتبه کسری یک تابع، رابطه زیر را با استفاده از رابطه انتگرال مرتبه کسری (27_1) و در حالت $\alpha > 0$ بدست آوردند.

$${}_a D_t^{\alpha} f(t) = D^m I^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} dt \right] \quad (29_1)$$

$m =$ یک عدد طبیعی که در شرط $m-1 < \alpha < m$ صدق می‌کند.

۲-۳-۱) انتگرال و مشتق مرتبه کسری گرانوالد-لتینکف [۹]

⁶ Riemann-Liouville
⁷ Grunwald-Letnikov

از آنجا که فرمول مشتق مرتبه کسری ریمان لیوویل با ایده انتگرال گیری مکرر از یک تابع بدست آمده بود، ایده دنبال کردن دیدگاهی مشابه برای بدست آوردن فرمول مشتق نیز به ذهن برخی از ریاضی دان ها خطور کرد. گرانوالد و لتینکف از پیشتازان این ایده بودند. این دو ریاضی دان برای یافتن تعریف مناسب مشتق مرتبه کسری، از تعریف مشتق مرتبه اول استفاده کردند:

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (30-1)$$

با اعمال مجدد تعریف مشتق به رابطه (30-1)، رابطه زیر حاصل خواهد شد.

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1} \quad (31-1)$$

با انتخاب $h = h_1 = h_2$ می توان چنین نتیجه گرفت که :

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \quad (32-1)$$

و با ادامه این روند، می توان رابطه زیر را برای محاسبه مشتقات مکرر یک تابع بدست آورد.

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh) \quad , n \in N \quad (33-1)$$

این فرمول را می توان برای مقادیر غیر صحیح n نیز به کار برد، به شرط آن که ضرایب $\binom{n}{m}$ به جای تعریف شدن از طریق تابع فاکتوریل، با استفاده از تابع گاما تعریف شود. بنابراین مشتق مرتبه کسری را می توان به صورت رابطه زیر تعریف کرد.

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x - mh) \quad (34-1)$$

حد بالایی حاصل جمع در رابطه فوق باید به سمت بی نهایت میل کند و عبارت $\frac{t-a}{h}$ این خصوصیت را

دارد (t و a به ترتیب حد بالا و پایین مشتق گیری هستند). همان طور که فرمول انتگرال مرتبه کسری ریمان -

لیوویل، در تعریف مشتق مرتبه کسری نیز مورد استفاده قرار گرفت، فرمول مشتق گرانولد - لتینکف را می توان برای انتگرال گیری مرتبه کسری مورد استفاده قرار داد. ساده ترین تعبیر برای استفاده از این فرمول در انتگرال گیری، استفاده از آن برای $\alpha < 0$ می باشد. در این حالت باید عبارت $\binom{-a}{m}$ را در رابطه (۳۴-۱) جایگذاری نمود. این عبارت با استفاده از تابع گاما قابل تعریف است.

$$\binom{-a}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} \quad (35-1)$$

با توجه به رابطه (۳۵-۱) فرمول انتگرال گیری مرتبه کسری گرانولد - لتینکف به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$D^{-a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^a \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} f(x - mh) \quad (36-1)$$

۴-۱) تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال از مرتبه کسری

برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری نیاز به روش هایی مشابه روش حل معادلات دیفرانسیل عادی داریم. یکی از این روش ها استفاده از تبدیل های متداول مانند تبدیل لاپلاس است. [۱۲]

همان طور که می دانیم در اینجا بدنبال تبدیل لاپلاس $d^q f / dx^q$ برای تمام مقادیر q و کلیه توابع

مشتق پذیر و انتگرال پذیر f می باشیم. بنابر این طبق تعریف تبدیل لاپلاس داریم: [۱۷]

$$L \left\{ \frac{d^q f}{dx^q} \right\} = \int_0^{\infty} \exp(-sx) \frac{d^q f}{dx^q} dx \quad (37-1)$$

همچنین برای لاپلاس مشتق داریم: [۱۷]

$$L \left\{ \frac{d^q f}{dx^q} \right\} = s^q L\{f\} - \sum_{k=0}^{q-1} s^{q-1-k} \frac{d^k f}{dx^k} (0), \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (38-1)$$

و نیز تبدیل لاپلاس انتگرال به صورت زیر بیان می شود: [۱۷]

$$L \left\{ \frac{d^q f}{dx^q} \right\} = s^q L\{f\} \quad (39-1)$$

بنابراین می‌توان لاپلاس مشتق و انتگرال را به صورت رابطه زیر بیان کرد. [۱۷]

$$L\left\{\frac{d^q f}{dx^q}\right\} = s^q L\{f\} - \sum_{k=0}^{q-1} s^k \frac{d^{q-1-k} f}{dx^{q-1-k}}(\cdot), \quad q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (40-1)$$

حال اثبات می‌شود که رابطه (۴۰-۱) قابل گسترش برای مرتبه‌های کسری به صورت رابطه زیر می‌باشد

که از بیان این اثبات صرفنظر می‌شود. [۱۷]

$$L\left\{\frac{d^q f}{dx^q}\right\} = s^q L\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{q-1-k} f}{dx^{q-1-k}}(\cdot), \quad \text{all } q \quad (41-1)$$

n عددی صحیح است به گونه‌ای که $n-1 < q \leq n$.

در اینجا به تبدیل لاپلاس برخی توابع مورد استفاده، اشاره می‌شود.

۱-۴-۱) تبدیل لاپلاس انتگرال کسری [۱۴]

$$L\{I^a f(t)\} = s^{-a} F(s) \quad (42-1)$$

۲-۴-۱) تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان - لیوویل [۱۴]

$$L\{.D_t^a\} = s^a F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [.D_t^{a-k-1} f(t)], \quad m-1 \leq a < m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (43-1)$$

۳-۴-۱) تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو [۱۴]

$$L\{D^a f(t)\} = s^a F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{a-k-1} f^{(k)}(\cdot), \quad m-1 \leq a < m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (44-1)$$

۴-۴-۱) تبدیل لاپلاس مشتق کسری گراندول - لتنیف [۱۴]

$$L\{.D_t^a f(t)\} = s^a F(s) \quad (45-1)$$

فصل دوم

۱-۲ مقدمه

در این بخش سیستم‌هایی که با معادلات مرتبه کسری توصیف می‌شوند را آنالیز کرده و به بررسی برخی از عملگرهای کنترلی که از اپراتورهای کسری حاصل می‌شوند می‌پردازیم. این آنالیز مانند سیستم‌های از مرتبه طبیعی، در حوزه‌های مختلفی (زمان، لاپلاس و تبدیل z) انجام خواهد گرفت. در ادامه کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری سیستم‌ها به روش کسری نیز بررسی خواهند شد.

۲-۲ مدل های متفاوت برای یک سیستم

۱-۲-۲ مدل پیوسته

معادله یک سیستم دینامیکی از مرتبه کسری را می‌توان به فرم رابطه زیر نمایش داد. [۱۵]

$$H(D^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n})(y_1, y_2, \dots, y_l) = G(D^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n})(u_1, u_2, \dots, u_k) \quad (1-2)$$

در این رابطه y_i و u_i توابعی از زمان بوده و H و G یک قانون ترکیبی از عملگر مشتق کسری می‌باشند.

برای سیستم‌های یک متغیره و غیر متغیر با زمان، معادله فوق به صورت رابطه زیر ظاهر می‌شود.

$$H(D^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n})y(t) = G(D^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n})u(t) \quad (2-2)$$

اگر در این رابطه $H(D^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}) = \sum_{k=0}^n \alpha_k D^{\alpha_k}$ و $G(D^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k}$

تعریف شوند، آنگاه شکل گسترده رابطه (۲-۲) به صورت زیر بیان می‌شود که سیستم حاصل سیستمی خطی و متغیر با زمان می‌باشد.

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (3-2)$$

سیستم‌های به شکل رابطه (۳-۲) به دو دسته تقسیم می‌شوند، (۱) سیستم‌های با مرتبه مضروب و (۲)

سیستم‌های با مرتبه گویا که می‌توان آنها را به فرم زیر تعریف کرد.

تعریف (۱-۲) یک سیستم، از مرتبه مضروب گفته می‌شود چنانچه رتبه تمامی معادلات دیفرانسیل

سیستم، ضریبی از یک رتبه خاص α باشد. [۱۵]

با این تعریف سیستم رابطه (۲-۳) با شرط $k \in Z^+$ و $\alpha \in R^+$ و $\alpha_k = \beta = k\alpha$ سیستمی مضروب

بوده و معادلات دیفرانسیل آن به صورت زیر است.

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k D^{\alpha_k} y(t) = \sum_{k=0}^n b_k D^{\alpha_k} u(t) \quad (۴-۲)$$

تعریف (۲-۲) یک سیستم را سیستمی از مرتبه گویا نامند اگر این سیستم یک سیستم مرتبه مضروب

باشد و علاوه بر آن شرایط $\alpha = \frac{1}{q}$ و $q \in Z^+$ را ارضاء کند. [۱۵]

۲-۲-۲ مدل های گسسته

با استفاده از تعریف گرانولد _ لتینکف برای مشتقات کسری، سیستم‌های مرتبه کسری گسسته را

می‌توان با معادلات تفاضلی بیان کرد. [۱۵]

$$a_n \Delta_h^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \Delta_h^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 \Delta_h^{\alpha_0} y(t) = b_m \Delta_h^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} \Delta_h^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 \Delta_h^{\beta_0} u(t) \quad (۵-۲)$$

$\Delta_h^{\alpha_n}$ یک اپراتور تفاضلی از رتبه n با گام h می‌باشد که و به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\Delta_h^{\alpha_n} y(ih) = h^{-\alpha_n} (y(ih) - y(ih - h))^{\alpha_n} = \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{\alpha_n}{k} y(ih - k) \quad (۶-۲)$$

۳-۲-۲ مدل های ورودی و خروجی

با اعمال تبدیل لاپلاس به رابطه (۲-۳) و با فرض شرایط اولیه صفر وهمچنین با اعمال تبدیل Z به رابطه

(۵-۲) تابع کسری سیستم برای حالت پیوسته و گسسته در زمان حاصل می‌شود [۱۵]

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + \dots + b_1 s^{\beta_1}}{a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_1 s^{\alpha_1}} \quad (7-2)$$

$$G(z) = \frac{b_m (w(z^{-1}))^{\beta_m} + \dots + b_1 (w(z^{-1}))^{\beta_1}}{a_n (w(z^{-1}))^{\alpha_n} + \dots + a_1 (w(z^{-1}))^{\alpha_1}} \quad (8-2)$$

که $w(z^{-1})$ تبدیل Z عملگر Δ_h^1 است.

در سیستم‌های پیوسته با مرتبه مضروب، تابع تبدیل سیستم، به صورت رابطه زیر خواهد بود.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=1}^m a_k (s^{\alpha})^k}{\sum_{k=1}^n b_k (s^{\alpha})^k} \quad (9-2)$$

با تغییر متغیر $\lambda = s^{\alpha}$ به صورت تابعی گویا مانند رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=1}^m a_k \lambda^k}{\sum_{k=1}^n b_k \lambda^k} \quad (10-2)$$

۴-۲-۲) تحقق فضای حالت

همانند سیستم‌های مرتبه صحیح، برای سیستم‌های مرتبه کسری چند متغیره نیز تحقق فضای حالتی

تعریف می‌شود. [۱۵]

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (11-2)$$

که $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_n]$ و $u \in R^p$ بردار ورودی، $x \in R^q$ بردار حالت، $y \in R^r$ بردار خروجی،

$A \in R^{q \times q}$ ماتریس حالت، $B \in R^{r \times p}$ ماتریس ورودی، $C \in R^{r \times q}$ ماتریس انتقال حالت مستقیم می‌باشد.

۳-۲) ارتباط بین فضای حالت و فرم تابع تبدیل در سیستم‌های از مرتبه مضروب

برای سیستم تک متغیره با مرتبه مضروب که تحقق فضای حالتی آن به فرم رابطه (۱۱-۲) است، با

اعمال تبدیل لاپلاس و استفاده از تعریف کاپوتو برای مشتقات کسری می‌توان تابع تبدیل سیستم را بدست

آورد. [۱۵]

$$Y(s) = G(s)U(s) = C(s\bar{\alpha}I - A)^{-1}B + D \quad (۱۲_۲)$$

در این وضعیت حالت های سیستم به صورت رابطه زیر محاسبه می شوند.

$$x(t) = L^{-1}\{x(s)\} = L^{-1}\{(s\bar{\alpha}I - A)^{-1}BU(s) + (s\bar{\alpha}I - A)^{-1}x(\cdot)\} \quad (۱۳_۲)$$

با تعریف $\Phi(t) = L^{-1}\{(s\bar{\alpha}I - A)^{-1}\}$ ، $t \geq 0$ می توان نتیجه گرفت که :

$$x(t) = \Phi(t)x(\cdot) + \Phi(t)*[Bu(I)] = \Phi(t)x(\cdot) + \int_0^t \Phi(t + \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (۱۴_۲)$$

$\Phi(t)$ ماتریس گذار بوده وبا استفاده از رابطه (۱۵_۲) محاسبه می شود.

$$\Phi(t) = E_{\alpha}(At^{\alpha}) \quad (۱۵_۲)$$

۴_۲ کنترل پذیری و رویت پذیری

شرایط کنترل پذیری و رویت پذیری برای سیستم های از مرتبه مضروب را می توان در مرجع [۱۸] بدون اثبات مشاهده کرد. اثبات این شرایط مشابه با روش اثبات آن در سیستم های با رتبه صحیح است. بنابراین در این قسمت تنها به بیان کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم ها می پردازیم.

تعریف (۳_۲) سیستمی را کنترل پذیر گوئیم اگر اعمال یک بردار کنترل، باعث بردن سیستم از حالت

اولیه $x(t_0)$ به حالت نهایی $x(t_f)$ در زمان محدود شود. [۱۹,۲۰]

شرایط کنترل پذیری برای سیستم های از مرتبه کسری و مرتبه صحیح یکسان می باشد. در سیستم های

مرتبه کسری غیر متغیر با زمان خطی ماتریس کنترل پذیری به صورت $C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$

تعریف می شود و این سیستم ها در صورتی کنترل پذیر است که ماتریس C ، از رتبه کامل باشد. [۱۵]

تعریف (۴_۲) یک سیستم مشاهده پذیر است اگر هر حالت $x(t_0)$ سیستم را بتوان با مشاهده $y(t)$ در

یک بازه محدود تعیین کرد. [۱۹,۲۰]

شرایط مشاهده پذیری برای سیستم‌های کسری و مرتبه صحیح یکسان می‌باشد. در سیستم‌های مرتبه کسری غیرمتغیر با زمان خطی ماتریس مشاهده‌پذیری به صورت $O = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T$ تعریف می‌شود و این سیستم‌ها در صورتی مشاهده‌پذیر هستند که ماتریس O از رتبه کامل باشد. [۱۵]

فصل سوم

۳-۱) مقدمه

نظریه پایداری نقشی اساسی و مفهومی بسیار مهم و پرکاربرد در مهندسی سیستم‌ها دارد و مسائل مختلفی در خصوص پایداری در سیستم‌های دینامیکی مطرح می‌شود. در این فصل به بررسی پایداری سیستم‌های کسری پرداخته می‌شود.

۳-۲) بررسی پایداری سیستم‌های کسری

۳-۲-۱) پایداری در صفحه s

طبق قضیه پایداری، یک سیستم وقتی پایدار است که کلیه قطب‌های آن در سمت چپ محور $j\omega$ باشد. این خاصیت برای سیستم‌های کسری نیز برقرار است. بدین معنی که به منظور بررسی پایداری تابع تبدیل $G(s) = \frac{b}{s^q + 1}$ ($0 < q < 1$) نیاز به بررسی نقاطی است که در آن مخرج تابع تبدیل صفر می‌شود.

مثال ۳-۱)

در تابع تبدیل زیر بازاء چه نقاطی مخرج صفر است.

$$G(s) = \frac{b}{s^{0.5} + 1}$$

پاسخ: در این تابع مخرج در $s = 1 + j0 = \exp(\pm j2\pi)$ صفر می‌شود. [۸]

قضیه زیر شرایط پایداری توابع از مرتبه کسری را در صفحه s بیان می‌کند. [۲۱]

قضیه ۳-۱) تابع انتقال $F(s) = S(s^\gamma) = \frac{T(s^\gamma)}{R(s^\gamma)}$ از مرتبه γ که در آن T و R دو چند جمله‌ای

نسبت به هم اول می‌باشند، پایدار **BIBO** است اگر و فقط اگر

$$0 < \gamma < 2 \quad (۳-۱)$$

و برای تمامی مقادیر $s \in \mathcal{C}$ به گونه ای که $R(s) = 0$ باشد، داشته باشیم

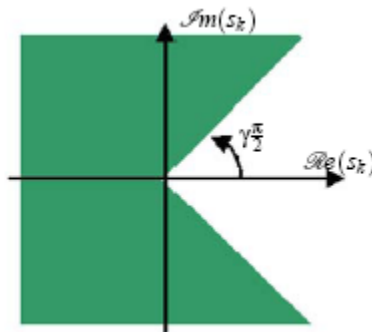
$$|\arg(s)| < \gamma \frac{\pi}{2} \quad (۳-۲)$$

ناحیه پایداری که به وسیله این قضیه پیشنهاد شده در شکل زیر نشان داده شده است و بیان می‌کند

(۱) وقتی γ به سمت صفر میل کند، ناحیه پایداری کل صفحه s می‌باشد.

(۲) بجز $\gamma = 1$ ناحیه پایداری معادل پایداری روث-هرویتز^۸ می‌باشد.

(۳) هنگامی که γ به سمت ۲ میل کند، ناحیه پایداری محور حقیقی منفی می‌باشد.



شکل (۱-۳) ناحیه پایداری در صفحه s [۲۱]

۲-۲-۳ پایداری در صفحه ω

از آنجا که بررسی پایداری سیستم در صفحه s مشکل می‌باشد، بدین منظور پایداری در صفحه دیگری

به نام ω بررسی می‌شود.

صفحه ω به صورت زیر تعریف می‌شود. [۸]

$$\omega = \rho e^{j\varphi} = \alpha + j\beta \quad (۳-۳)$$

$$s = r e^{j\theta} \quad (۴-۳)$$

$$\omega = s^q = (r e^{j\theta})^q = r^q e^{jq\theta} = \rho e^{j\varphi} \quad (۵-۳)$$

با کمک رابطه (۵-۳) زوایا و خطوط صفحه s به صفحه ω نگاشت داده می‌شوند. می‌توان با کمک جدول

زیر به بررسی پایداری سیستم‌های کسری پرداخت. [۸]

⁸ Routh-hurwitz

جدول (۱-۳) پایداری سیستم‌ها در صفحه (ω) [۸]

تعداد قطب‌ها	ناحیه صفحه ω	ناحیه صفحه s	ویژگی‌های
۱	ω	$Re(s) > 0$	پاسخ زمانی ناپایدار
۲		$Re(s) < 0$	پایدار زیر میرای نوسانی
۳		محور حقیقی	پایدار فرامیرا
		منفی	
۴		سطح ریمان	پایدار بسیار فرامیرا
		ثانویه	
۵		سطح ریمان	پایدار بسیار فرامیرا
		ثانویه	بسیار فرامیرا

۳-۲-۳) معادل گذاری اپراتور لاپلاس کسری با مدل های گویا

از آنجا که نیاز است سیستم کسری، از لحاظ عملی قابل پیاده‌سازی باشد، لذا اپراتور کسری S^{γ} به کمک توابع گویا مدل‌سازی شد [۲۱]. در این حالت مدل کسری و تخمین گویای آن دارای دینامیک‌های یکسانی می‌باشند [۲۱]. روش‌های مختلفی برای این نوع تخمین وجود دارد که در اینجا به دو مورد آن اشاره می‌شود.

الف) روش کارسون [۸]

در این روش به کمک تقریب نیوتن، ریشه‌های چند جمله بدست می‌آیند. در رابطه زیر نقطه شروع

$H(s) = (G(s))^q$ بوده و با قرار دادن $q=1/p$ و $m=p/2$ و نیز $H_i(s) = 1$ تابع تخمین زده می‌شود.

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(p-m)(H_{i-1}(s))^{\frac{1}{2}} + (p+m)G(s)}{(p+m)(H_{i-1}(s))^{\frac{1}{2}} + (p-m)G(s)} \quad (6-3)$$

در جدول زیر تقریب برای برخی از توان‌های کسری حساب شده است.

جدول ۲-۳ تقریب برخی از توان‌های کسری [۸]

پراتور کسری لایان	تقریب مجزا
$\frac{1}{s^{0.1}}$	$\frac{220.4s^4 + 5004s^3 + 5038s^2 234.5s + 0.4840}{s^5 + 359.8s^4 + 5742s^3 + 4247s^2 147.7s + 0.2099}$
$\frac{1}{s^{0.2}}$	$\frac{60.95s^4 + 816.9s^3 + 582.8s^2 + 23.24s + 0.04934}{s^5 + 134.0s^4 + 956.5s^3 + 383.5s^2 + 8.953s + 0.01821}$
$\frac{1}{s^{0.3}}$	$\frac{23.76s^4 + 224.9s^3 + 129.1s^2 4.733s + 0.01052}{s^5 + 64.51s^4 + 252.2s^3 + 63.61s^2 + 1.104s + 0.002276}$
$\frac{1}{s^{0.4}}$	$\frac{25.00s^4 + 558.5s^3 + 664.2s^2 + 44.15s + 0.1562}{s^5 + 125.6s^4 + 840.6s^3 + 317.2s^2 + 7.428s + 0.02343}$
$\frac{1}{s^{0.5}}$	$\frac{15.97s^4 + 593.2s^3 + 1080s^2 + 135.4s + 1}{s^5 + 134.3s^4 + 1072s^3 + 543.4s^2 + 20.10s + 0.1259}$
$\frac{1}{s^{0.6}}$	$\frac{8.579s^4 + 255.6s^3 + 405.3s^2 35.93s + 0.1696}{s^5 + 94.22s^4 + 472.9s^3 + 134.8s^2 + 2.639s + 0.009882}$
$\frac{1}{s^{0.7}}$	$\frac{5.406s^4 + 177.6s^3 + 209.6s^2 + 9.197s + 0.01450}{s^5 + 88.12s^4 279.2s^3 + 33.30s^2 + 1.927s + 0.0002276}$
$\frac{1}{s^{0.8}}$	$\frac{5.235s^3 + 1453s^2 + 5306s + 254.9}{s^4 + 658.1s^3 + 5700s^2 + 658.2s + 1}$
$\frac{1}{s^{0.9}}$	$\frac{1.766s^2 + 38.27s + 4.914}{s^3 + 36.15s^2 + 7.789s + 0.01000}$

ب) روش اوستلپ [۲۲]

این روش یکی از روش‌های پرکاربرد به منظور تخمین s^{γ} در بازه فرکانسی $[\omega_A, \omega_B]$ می‌باشد.

$$s^{-\gamma} \rightarrow S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-\gamma} = \frac{C.}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_A}}{1 + \frac{s}{\omega_B}} \right)^{1-\gamma} \approx \frac{C.}{s} \prod_{k=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}} \quad (\gamma_2)$$

$$\omega_k = \alpha \omega_{k-1}, \omega_{k+1} = \zeta \omega_k$$

$$\gamma = 1 - \frac{\log \alpha}{\log \alpha \zeta}$$

α و ζ پارامترهایی حقیقی هستند که وابسته به مرتبه دیفرانسیلی γ می باشند. هرچه N بزرگتر

باشد، تخمین دقیق تر می باشد.

فصل چہارم

۱-۴ مقدمه

سیستم‌های دینامیکی در دنیای فیزیکی ذاتا پیوسته در زمان هستند در حالیکه بهترین روش‌های شناسایی سیستم‌ها بر اساس روش‌های گسسته در زمان می‌باشد. به خاطر توجه کمی که به روش‌های پیوسته در زمان شده است، اکثر محققان از این روش‌ها بی‌اطلاع هستند. [۲۳]

۲-۴ مشکلات و پروسه شناسایی یک سیستم

یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان پیوسته با ورودی u و خروجی y به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۲۳]

$$y(t) = G(p)u(t) + \xi(t) \quad (1-4)$$

که در آن G تابع تبدیل و p عملگر دیفرانسیل حوزه زمان و $\xi(t)$ نشان دهنده خطا یا اغتشاش می‌باشد. فرض بر اینست که ورودی $\{u(t), t_1 < t < t_N\}$ به سیستم اعمال شده و از ورودی و خروجی هر دو در بازه‌های زمانی گسسته t_1, \dots, t_N نمونه‌برداری شده است. سیگنال‌های نمونه‌برداری شده با $\{u(t_k); y(t_k)\}$ نشان داده می‌شوند.

هدف تعیین یک مدل زمان پیوسته با کمک N نمونه اندازه‌گیری شده از ورودی و خروجی می‌باشد.

عناصر اصلی برای شناسایی یک سیستم به روش پارامتری شامل موارد زیر است:

(۱) طرح آزمایش برای اکتساب داده

(۲) انتخاب ساختار مدل

(۳) تخمین پارامترها

(۴) تعیین اعتبار مدل

شناسایی سیستم‌ها در حوزه زمان به دو روش عمده تقسیم می‌شوند:

(۱) روش غیر مستقیم:

در این روش ابتدا مدل گسسته در زمان محاسبه شده و سپس به مدل پیوسته در زمان تبدیل می‌شود
(۲) روش مستقیم:

در این روش مستقیماً مدل پیوسته در زمان محاسبه می‌شود.

بدون توجه به مدل و نوع شناسایی یک سیستم، هدف از شناسایی یک سیستم بدست آوردن پارامترهای مجهول برای آن سیستم می‌باشد. یکی از روش‌ها برای تخمین پارامترهای یک سیستم استفاده از روش حداقل میانگین مربعات خطا^۹ می‌باشد که در زیر بیان شده است.

۳-۴) روش حداقل مربعات [۲۳، ۲۴، ۲۵]

در اواخر قرن هجدهم، کارل فردریک گوس^{۱۰} قانون حداقل مربعات را تنظیم و آن را برای مشخص کردن مدارهای سیارات بزرگ و کوچک به کار برد. براساس این قاعده، پارامترهای مجهول یک مدل ریاضی، باید چنان انتخاب شوند که مجموع مربعات اختلاف بین مشاهده واقعی و مقادیر محاسبه شده ضرب در اعدادی که درجه دقت را اندازه گیری می‌کنند، کمینه شود. حداقل مربعات را می‌توان برای مسائل مختلفی به کار برد. این روش، بخصوص برای مدل ریاضی ذیل، بسیار ساده است:

$$y(i) = \varphi_1(i)\theta_1^\circ + \varphi_2(i)\theta_2^\circ + \dots + \varphi_n(i)\theta_n^\circ = \varphi^T(i)\theta^\circ \quad (۲-۴)$$

که در آن y متغیر مشاهده شده، $\theta_1^\circ, \theta_2^\circ, \dots, \theta_n^\circ$ پارامترهای مجهول و $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ توابع معلومی هستند که ممکن است به متغیرهای معلوم دیگری وابسته باشند. بردارهای $\theta^\circ = [\theta_1^\circ, \theta_2^\circ, \dots, \theta_n^\circ]^T$ و $\varphi^T(i) = [\varphi_1(i) \ \varphi_2(i) \ \dots \ \varphi_n(i)]$ را در نظر بگیرید. مدل فوق با متغیر i اندیس‌گذاری شده که اغلب زمان را مشخص می‌کند. معمولاً فرض می‌شود که مجموعه اندیس‌ها مجموعه‌ای گسسته باشد. متغیرهای φ_i ، متغیرهای رگرسیون یا رگرسورها نامیده می‌شود و مدل معادله (۲-۴) مدل رگرسیون خوانده می‌شود. زوج

^۹ -Least Mean Square(LMS)

^{۱۰} carl friedrich gauss

مشاهدات رگرسورها، یعنی: $\{(y(i), \varphi(i)), i = 1, 2, \dots, t\}$ ، به کمک آزمایش به دست می‌آیند. مساله اساسی، تعیین پارامترها به شکلی است که خروجی‌های حاصل از معادله (۳-۴)، تا آنجا که ممکن است به متغیرهای اندازه گیری شده $y(i)$ (با معیار حداقل مربعات) نزدیک باشند. به عبارت دیگر پارامتر θ باید به گونه‌ای انتخاب شود که تابع معیار حداقل مربعات زیر را کمینه کند.

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (y(i) - \varphi^T(i)\theta)^2 \quad (3-4)$$

از آنجا که متغیر اندازه گیری شده y نسبت به پارامترهای θ° خطی و معیار حداقل مربعات از درجه دوم است، مساله، دارای پاسخی تحلیلی است. برای این کار نمادهای زیر را در نظر بگیرید:

$$y(t) = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(t)]^T$$

$$E(t) = [\varepsilon(1) \ \varepsilon(2) \ \dots \ \varepsilon(t)]^T$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(t) \end{bmatrix}$$

$$P(t) = (\Phi^T(t)\Phi(t))^{-1} = (\sum_{i=1}^t \varphi(i)\varphi^T(i))^{-1} \quad (4-4)$$

که مانده‌های $\varepsilon(i)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon(i) = y(i) - \hat{y}(i) = y(i) - \varphi^T(i)\theta \quad (5-4)$$

خطای حداقل مربعات بدین صورت نوشته می‌شود:

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \varepsilon^2(i) = \frac{1}{2} E^T E = \frac{1}{2} \|E\|^2 \quad (6-4)$$

که:

$$E = Y - \hat{Y} = Y - \Phi\theta \quad (7-4)$$

حل مساله حداقل مربعات به کمک قضیه ذیل ارائه می‌شود.

قضیه (۱-۴) تخمین حداقل مربعات

تابع معادله (۳-۴) به ازای پارامترهای $\hat{\theta}$ ، کمینه است که $\hat{\theta}$ در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T y \quad (8_4)$$

اگر ماتریس $\Phi^T \Phi$ غیر منفرد باشد این مقدار کمینه یکتاست و داریم:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \quad (9_4)$$

معیار معادله (۳_۴) را می توان به این شکل نوشت:

$$rV(\theta, t) = E^T E = (y - \Phi \theta)^T (y - \Phi \theta) = y^T \cdot y - y^T \Phi \theta - \theta^T \Phi^T y + \theta^T \Phi^T \Phi \theta \quad (10_4)$$

چون ماتریس $\Phi^T \Phi$ همواره معین نامنفی می باشد تابع V دارای یک حداقل است. این حداقل را از روش های مختلفی می توان بدست آورد. یکی از روش های مشتق گیری از معادله (۱۰_۴) نسبت به θ است. مشتق وقتی برابر صفر است که شرط معادله (۸_۴) برآورده شود. روش دیگر یافتن حداقل، کامل کردن مربع است. داریم:

$$\begin{aligned} rV(\theta, t) &= y^T y - y^T \Phi \theta - \theta^T \Phi^T y + \theta^T \Phi^T \Phi \theta + y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y - \\ & y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \\ &= y^T (I - \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T) y + \\ & (\theta - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y)^T \Phi^T \Phi (\theta - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y) \end{aligned} \quad (11_4)$$

در این معادله جمله اول سمت راست، مستقل از θ است و جمله دوم همواره مثبت است. در نتیجه مقدار کمینه تابع معیار به ازای $\theta = \hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$ به دست می آید و قضیه ثابت می شود.

قضیه (۲_۴) تخمین حداقل مربعات بازگشتی^{۱۱}

فرض کنید ماتریس $\Phi(t)$ دارای رتبه کامل باشد، این بدان معناست که $\Phi^T(t)\Phi(t)$ برای تمام $t \geq t_0$ غیر منفرد است. با داشتن $\hat{\theta}(t)$ و $P(t) = (\Phi^T(t)\Phi(t))^{-1}$ ، تخمین حداقل مربعات $\hat{\theta}$ ، معادلات بازگشتی ذیل را برآورد می سازد [۲۴]

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t) (y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1)) \quad (12_4)$$

^{۱۱} Recursive Least Square

$$K(t) = P(t)\varphi(t) = P(t-1)\varphi(t)(I + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t))^{-1} \quad (13_4)$$

$$\begin{aligned} P(t) &= P(t-1) - P(t-1)\varphi(t)(I + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t))^{-1}\varphi^T(t)P(t-1) \\ &= (I + K(t)\varphi^T(t))P(t-1) \end{aligned} \quad (14_4)$$

۴-۴ شناسایی مدل پیوسته در زمان به روش مستقیم [۲۳]

۴-۴-۱ مدل معادله دیفرانسیلی

یک مدل زمان پیوسته را می‌توان به صورت معادله دیفرانسیلی زیر در نظر گرفت

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_m u(t) + v(t) \quad (15_4)$$

که در آن $\frac{d^i x(t)}{dt^i}$ بیانگر i امین مشتق سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ بوده که می‌توان آن را به صورت

زیر نوشت:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_m u(t) + v(t) \quad (16_4)$$

می‌توان رابطه فوق را به صورت عملگر دیفرانسیلی پیوسته در زمان به صورت زیر نوشت:

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) + v(t) \quad (17_4)$$

$$y(t) = \frac{B(p)}{A(p)}u(t) + \xi(t); \quad \xi(t) = \frac{1}{A(p)}v(t) \quad (18_4)$$

$$B(P) = b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_0$$

$$A(P) = P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_0 \quad (19_4)$$

در این رابطه p نماینده عملگر دیفرانسیلی است. در لحظه دلخواه $t = t_k$ می‌توان رابطه (۱۶-۴) را

به صورت رگرسیون و به فرم زیر نوشت:

$$y^{(n)}(t_k) = \varphi^T(t_k)\theta + v(t_k) \quad (20-4)$$

$$\varphi^T(t_k) = [-y^{(n-1)}(t_k) \dots - y(t_k)u^{(m)}(t_k) \dots u(t_k)$$

$$\theta^T = [a_1 \dots a_n \ b. \dots b_m]$$

بر خلاف معادله تفاضلی در حالت گسسته که فقط اطلاعات ورودی و خروجی نمونه برداری شده ظاهر

می شود، در اینجا نیاز به مشتقات ورودی و خروجی داریم که در اکثر سیستم ها قابل اندازه گیری نیست.

۲-۴-۴) مشتقات ورودی و خروجی در حوزه زمان

اولین مشکل در شناسایی پیوسته در زمان، اندازه گیری مشتقات ورودی و خروجی است. روش های

مختلفی برای اندازه گیری این مشتقات وجود دارد که هر کدام ویژگی های مربوط به خود را دارد. یکی از این

روش ها روش فیلتر متغیر حالت^{۱۲} است که در ادامه می آید.

۳-۴-۴) مدل های اندازه گیری نوین

مشکل بعدی در شناسایی پیوسته در زمان، فرایند تصادفی پیوسته در زمان است. اگرچه می توان نوین را

در حالت پیوسته مدل کرد، ولی مشکل در استفاده از نوین سفید پیوسته در زمان و مشتقات آن است. بنابراین

مدلی که متشکل از نوین باشد به صورت زیر نوشته می شود:

$$x(t) = G(p)u(t) \quad (21-4a)$$

$$\xi(t_k) = H(q^{-1})e(t_k) \quad (21-4b)$$

$$y(t_k) = x(t_k) + \xi(t_k) \quad (21-4c)$$

$$y(t_k) = G(p)u(t_k) + H(q^{-1})e(t_k) \quad (21-4d)$$

^{۱۲} state – variable filter(SVF)

۴-۴-۴) اساس شناسایی مدل پیوسته در زمان به روش مستقیم

تابع تبدیل پیوسته در زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$A(p)x(t) = B(p)u(t) \quad (۲۲-۴)$$

فرض کنید فیلتر متغیر حالت با عملگر $F(p)$ به هر دو طرف رابطه فوق اعمال شود:

$$A(p)F(p)x(t) = B(p)F(p)u(t) \quad (۲۳-۴)$$

که در آن فیلتر متغیر حالت با مرتبه حداقل به فرم زیر می باشد:

$$F(p) = \frac{1}{(p+\lambda)^n} \quad (۲۴-۴)$$

در این رابطه λ پارامتری است که پهنای باند فیلتر را معلوم می کند.

می توان رابطه (۲۳-۴) را به صورت گسترده شده زیر نوشت:

$$\left(\frac{p^n}{(p+\lambda)^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{(p+\lambda)^n} + \dots + a_n \frac{1}{(p+\lambda)^n} \right) x(t) = \left(b \cdot \frac{p^m}{(p+\lambda)^n} + \dots + b_m \frac{1}{(p+\lambda)^n} \right) u(t) \quad (۲۵-۴)$$

فرض کنید $F_i(p)$ for $i = 0, 1, \dots, n$ مجموعه ای از فیلترها باشد که به صورت زیر تعریف

می شود:

$$F_i(p) = \frac{p^i}{(p+\lambda)^n} \quad (۲۶-۴)$$

با توجه به تعریف (۲۶-۴) می توان رابطه (۲۵-۴) را به صورت زیر نوشت:

$$\left(F_n(p) + a_1 F_{n-1}(p) + \dots + a_n F_0(p) \right) x(t) = \left(b \cdot F_m(p) + \dots + b_m F_0(p) \right) u(t) \quad (۲۷-۴)$$

و در نهایت رابطه (۲۷-۴) به صورت زیر قابل بیان است:

$$x_f^{(n)}(t) + a_1 x_f^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x_f^{(\cdot)}(t) = b_1 u_f^{(m)}(t) + \dots + b_m u_f^{(\cdot)}(t) \quad (28-4)$$

$$x_f^{(i)}(t) = f_i(t) * x(t)$$

$$u_f^{(i)}(t) = f_i(t) * u(t)$$

که در آن $f_i(t)$ بیانگر پاسخ ضربه فیلتر بوده و * نشان دهنده عملگر کانولوشن است. خروجی‌های

فیلتر $(x_f^{(i)}(t), u_f^{(i)}(t))$ مشتقات زمانی فیلتر شده ورودی و خروجی را در پهنای باند مطلوب مشخص

می‌کند.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که در آن نویز جمع شونده با خروجی وجود داشته باشد. در این حالت

رابطه رگرسیون خطی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_f^{(n)}(t_k) = \varphi_f^T(t_k)\theta + \eta(t_k) \quad (29-4)$$

که در آن $\eta(t_k)$ نویز فیلتر شده است که از اندازه‌گیری نویز خروجی $\xi(t_k)$ و فیلتر کردن آن به

وسیله عملگر فیلترینگ، بدست می‌آید.

$$\varphi_f^T(t_k) = [-y_f^{(n-1)}(t_k) \dots -y_f^{(\cdot)}(t_k) \quad u_f^{(m)}(t_k) \dots u_f^{(\cdot)}(t_k)]$$

$$\theta = [a_1 \dots a_n \quad b_1 \dots b_m]^T$$

حال با کمک N نمونه موجود از ورودی و خروجی در لحظات t_1, \dots, t_N که الزاما دارای فواصل

یکنواختی نیستند، می‌توان پارامترهای مجهول سیستم را به روش حداقل مربعات بر پایه فیلتر متغیر حالت

بدست آورد.

$$\hat{\theta}_{LSSVF} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_f(t_k) \varphi_f^T(t_k) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_f(t_k) y_f^n(t_k) \quad (30-4)$$

مثال ۱-۴

سیستم مرتبه یک زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(1)}(t) + a_1 y(t) = b \cdot u(t) + v(t) \quad (31-4)$$

با اعمال فیلتر متغیر حالت به هر دو طرف رابطه داریم:

$$\left(\frac{p}{p+\lambda} + a_1 \frac{1}{p+\lambda}\right) y(t) = b \cdot \frac{1}{p+\lambda} u(t) + \frac{1}{p+\lambda} v(t) \quad (32-4)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$(F_1(p) + a_1 F_1(p)) y(t) = b \cdot F_1(p) u(t) + F_1(p) v(t) \quad (33-4)$$

رابطه (33-4) برای لحظه $t = t_k$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$y_f^{(1)}(t_k) + a_1 y_f(t_k) = b \cdot u_f(t_k) + \eta(t_k) \quad (34-4)$$

و با نوشتن این رابطه به فرم رگرسیون داریم:

$$y_f^{(1)}(t_k) = [-y_f(t_k) \ u_f(t_k)] \begin{bmatrix} a_1 \\ b \end{bmatrix} + \eta(t_k) \quad (35-4)$$

اکنون با توجه به (30-4) و با کمک N نمونه موجود از ورودی و خروجی در لحظات t_1, \dots, t_N که

الزاما دارای فواصل یکنواختی نیستند، تخمین پارامترهای سیستم به روش حداقل مربعات بر پایه فیلتر متغیر

حالت به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_f^{(1)}(t_k) & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_f(t_k) u_f(t_k) \\ -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_f(t_k) u_f(t_k) & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_f^2(t_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_f^{(1)}(t_k) y_f(t_k) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_f^{(1)}(t_k) u_f(t_k) \end{bmatrix} \quad (36-4)$$

۴-۴-۵) مزایای شناسایی مدل زمان پیوسته به صورت مستقیم و با کمک داده نمونه‌برداری

شده

ویژگی‌های زیادی در توصیف یک سیستم فیزیکی با کمک مدل‌های پیوسته در زمان وجود دارد. در اینجا

فرض بر اینست که آهنگ نمونه‌برداری به اندازه کافی سریع است تا بتوان مدل پیوسته در زمان را از داده نمونه‌برداری شده بدست آورد.

همچنین نباید این حقیقت را فراموش کرد که مدل‌های گسسته در زمان برای طراحی و شبیه‌سازی سیستم‌های کنترل در محیط دیجیتال مناسب‌تر هستند ولی به علت اینکه مدل گسسته، ناشی از اندازه‌گیری اطلاعات با ثابت زمانی مشخصی است، لذا مدل بدست آمده در کاربردهای آتی فقط برای آن ثابت زمانی معتبر است. از طرف دیگر اگر در مدل زمان پیوسته، اطلاعات با سرعت بالا نمونه برداری شده باشند، آنگاه می‌توان این مدل را با هر ثابت زمانی، به مدل گسسته دلخواه تبدیل کرد.

در زیر به بعضی از ویژگی‌های شناسایی پیوسته در زمان در مقایسه با حالت گسسته اشاره شده

است: [۲۳]

(۱) دید فیزیکی نسبت به خواص سیستم

(۲) فیلترینگ ذاتی اطلاعات

(۳) نمونه‌برداری اطلاعات به صورت غیر یکنواخت

(۴) تبدیل مدل پیوسته به گسسته

(۵) حساسیت سیستم‌های گسسته در زمان در سرعت‌های نمونه‌برداری بالا

۵-۴ روش زیر فضایی برای تخمین مدل فضای حالت

سیستم زمان پیوسته فضای حالتی زیر را در نظر بگیرید، بگونه‌ای که $y(t) \in R^p, x(t) \in$

$w(t) \in R^n, v(t) \in R^p$ و ورودی سیستم و $u(t) \in R^m$ به ترتیب بردارهای خروجی، حالت و ورودی سیستم و

به ترتیب نویز اندازه‌گیری و نویز سیستم باشند. [۲۳، ۲۷]

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (۳۷-۴)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \quad (۳۸-۴)$$

هدف بدست آوردن ماتریس های (A, B, C, D) می باشد. فرض بر اینست که مدل فضای حالتی،

دارای تحقق حداقل است. می توان رابطه ورودی-خروجی را به شکل زیر نیز نوشت: [۲۳، ۲۷]

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t+1) &= T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t) + \tilde{w}(t) \\ y(t) &= CT\tilde{x} + Du(t) + v(t)\end{aligned}\quad (39-4)$$

که در آن ماتریس T ، ماتریسی معکوس پذیر بوده و داریم:

$$\tilde{x} = T^{-1}x(t)$$

اگر \hat{A} و \hat{C} معلوم باشند، می توان B و D را با روش حداقل مربعات تخمین زد. [۲۷]

$$y(t) = \hat{C}(qI - \hat{A})^{-1}Bu(t) + Du(t) + v(t) \quad (40-4)$$

$$\hat{y}(t|B, D) = \hat{C}(qI - \hat{A})^{-1}Bu(t) + Du(t) \quad (41-4)$$

اگر ماتریس رویت پذیری معلوم باشد، آنگاه می توان A و C را بدست آورد. [۲۳، ۲۷]

$$O_r = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \quad (42-4)$$

ماتریس رویت پذیری را می توان با کمک داده ورودی و خروجی و به روش حداقل مربعات بدست آورد.

با بدست آوردن ماتریس رویت پذیری، حالت های $x(t)$ سیستم بدست آمده و خواص آماری نویز $w(t)$ و

$v(t)$ نیز بدست می آید. [۲۷]

حال هر یک از مراحل فوق در زیر به نحوی کامل تر توضیح می دهیم:

۴-۵-۱) تخمین D و B [۲۷]

با معلوم بودن \hat{A} و \hat{C} ، مدل ساختار زیر را خواهد داشت:

$$\hat{y}(t|B, D) = \hat{C}(qI - \hat{A})^{-1}Bu(t) + Du(t) \quad (43-4)$$

که این مدل نسبت به B و D خطی است. اگر سیستم در حالت حلقه باز عمل کرده و نویز غیرسفید به صورت زیر باشد، می توان B و D را تخمین زد:

$$v(t) = C(qI - A)^{-1}w(t) + v(t) \quad (44-4)$$

مدل رگرسیون خطی تخمین زن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{y}(t) = \varphi(t)\theta = \varphi(t) \begin{bmatrix} Vec(B) \\ Vec(D) \end{bmatrix} \quad (45-4)$$

در این رابطه $\varphi(t)$ ماتریسی با بعد $p^*(mn+mp)$ است. همچنین vec عملگری است که یک ماتریس با قرار دادن ستون های آن بر روی همدیگر، به فرم برداری می نویسد. فرض کنید $r=(k-1)n+j$. برای یافتن r امین $(r \leq mn)$ ستون $\varphi(t)$ که نشان دهنده r امین درایه θ یعنی درایه $B_{j,k}$ است، از رابطه (45-4) نسبت به این درایه مشتق گرفته و داریم:

$$\varphi_r(t) = \hat{C}(qI - \hat{A})^{-1}E_j u_k(t) \quad (46-4)$$

که E_j بردار ستونی است که j امین درایه آن مساوی یک بوده و بقیه صفر است. برای سطرهای $r > mn$ نیز روش مشابه همین است.

۴-۵-۲) بدست آوردن A و C از ماتریس رویت پذیری [۲۳،۲۷]

ماتریس G را با ابعاد $pr \times n^*$ را در نظر بگیرید. می خواهیم A و C را به کمک G بدست بیاوریم. ابتدا فرض کنید مرتبه سیستم برای ما معلوم است.

$$G = O_r \quad (47-4)$$

بنابراین $n^* = n$ بوده و C از رابطه زیر بدست می آید:

$$\hat{C} = O_r(1:p, 1:n) \quad (48-4)$$

به طریق مشابه می توان \hat{A} را از رابطه زیر بدست آورد:

$$O_r(p+1:pr, 1:n) = O_r(1:p(r-1), 1:n)\hat{A} \quad (49-4)$$

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که در آن مرتبه سیستم نامشخص بوده و سیستم حداکثر از مرتبه n^* (تعداد ستون های G) باشد. این بدین معنی است که :

$$G = O_r \tilde{T} \quad (50-4)$$

ماتریس \tilde{T} ماتریسی نامشخص ولی با رتبه کامل و با ابعاد $n \times n^*$ می باشد که n نیز برای ما نامشخص است. اگر G دارای رتبه n باشد، روش مستقیم برای بدست آوردن این رتبه، حذف $n^* - n$ ستون آخر از G و سپس عمل کردن مانند روش بالا است.

می توان برای حذف کردن این ستون های اضافی از روش تجزیه به مقادیر تکین^{۱۳} کمک گرفت: [۲۳، ۲۷]

$$G = USV^T = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \sigma_2 & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_3 & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \sigma_{n^*} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} V^T \quad (51-4)$$

$$G = USV^T = U_1 S_1 V_1^T \quad (52-4)$$

$$U \in R^{pr \times pr}, \quad V \in R^{n^* \times n^*}, \quad S \in R^{pr \times n^*}$$

$$U_1 \in R^{pr \times n}, \quad V_1 \in R^{n \times pr}, \quad S_1 \in R^{n \times n}$$

با توجه به رابطه (۵۰-۴) داریم

$$O_r \tilde{T} = U_1 S_1 V_1^T \quad (53-4)$$

که با ضرب کردن رابطه از راست در V_1 داریم:

$$O_r \tilde{T} V_1 = O_r T = U_1 S_1 \quad (54-4)$$

^{۱۳} Singular value decomposition(SVD)

$$T = \tilde{T}V_1 \quad (55-4)$$

اکنون توانستیم ماتریس رویت پذیری را در یک پایه فضای حالت بدست بیاوریم. در نتیجه می توانیم قرار

دهیم $\hat{O}_r = U_1 S_1$ یا $\hat{O}_r = U_1$ یا هر ماتریسی که به شکل زیر نوشته شود:

$$\hat{O}_r = U_1 R \quad (56-4)$$

۴-۵-۳) تخمین ماتریس رویت پذیری از سیستم آغشته به نویز [۲۳]

فرض کنید ماتریس $G \in R^{pr \times n^*}$ تخمین نویزی از ماتریس رویت پذیری واقعی باشد:

$$G = O_r \tilde{T} + E_N \quad (57-4)$$

که در آن E_N مقداری کوچک بوده و با میل کردن N به بینهایت، به سمت صفر میل می کند. رتبه

O_r نامعلوم بوده در حالیکه ماتریس نویز E_N دارای رتبه کامل است. با تجزیه G به مقادیر تکین به فرم زیر:

$$G = USV^T \quad (58-4)$$

به علت وجود نویز، ماتریس S دارای مقادیر تکین $\sigma_k; k = 1, \dots, \min(n^*, pr)$ غیر صفر بوده که n

سطر اول آن مربوط به O_r و مابقی آن مربوط به E_N است. اگر نویز به اندازه کافی کوچک باشد، می توان

انتظار داشت که در ماتریس S قسمت دوم از اول، کوچکتر بوده و قابل حذف باشد. بنابراین آن قسمت ها را

حذف کرده و به جای آن صفر قرار داده و U_1 و S_1 را مشخص کنید. اکنون می توانید با کمک \hat{O}_r ، ماتریس های

\hat{A} و \hat{C} را بدست بیاورید.

می توان در اینجا به جای استفاده از تجزیه به مقادیر تکین، از روش های دیگری هم مثل تجزیه

مثلی-متعامد^{۱۴} نیز برای حذف نویز استفاده کرد. [۲۳، ۲۵]

۴-۵-۴) محاسبه ماتریس رویت پذیری [۲۳، ۲۷]

^{۱۴} Orthogonal triangular decomposition (QR)

با کمک رابطه (۳۸_۴) داریم:

$$\begin{aligned}
 y(t+k) &= Cx(t+k) + Du(t+k) + v(t+k) \\
 &= CAx(t+k-1) + CBu(t+k-1) + Cw(t+k-1) \\
 &\quad + Du(t+k) + v(t+k) \\
 &= \dots \\
 &= CA^k x(t) + CA^{k-1} Bu(t) + CA^{k-r} Bu(t+1) + \dots \\
 &\quad + CBu(t+k-1) + Du(t+k) \\
 &\quad + CA^{k-1} w(t) + CA^{k-r} w(t+1) + \dots \\
 &\quad + Cw(t+k-1) + v(t+k)
 \end{aligned} \tag{۵۹_۴}$$

اکنون با کمک بردارهای:

$$Y_r(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ \vdots \\ y(t+r-1) \end{bmatrix}, \quad U_r(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+r-1) \end{bmatrix}$$

و جمع آوری (۵۹_۴) به صورت زیر:

$$Y_r(t) = O_r x(t) + S_r U_r(t) + V(t) \tag{۶۰_۴}$$

$$S_r = \begin{bmatrix} D & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ CB & D & \dots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{r-r} B & CA^{r-r} B & \dots & CB & D \end{bmatrix} \tag{۶۱_۴}$$

که اجزاء بلوک k ام از $V(t)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 V_t(t) &= CA^{k-r} w(t) + CA^{k-r} w(t+1) + \dots \\
 &\quad + Cw(t+k-r) + v(t+k-1)
 \end{aligned} \tag{۶۲_۴}$$

حال می‌خواهیم با کمک (۶۰_۴) ماتریس رویت‌پذیری O_r یا ماتریس $O_r T$ را برای T نامعلوم تخمین

بزنیم. ایده کار اینست که طرفین رابطه (۶۰_۴) را در یک مقدار به نحوی ضرب کنیم که اثر U_r از بین برود

همچنین بتوان اثر نویز V را به صورت مجانبی حذف کرد. بدین منظور ورودی‌ها و خروجی‌های

کنیم: $y(t), u(t), t = 1, \dots, N + r - 1$ در دسترس هستند. برای شروع ابتدا ماتریس‌های زیر را تعریف می

$$\begin{aligned} Y &= [Y_r(1) \ Y_r(2) \ \dots \ Y_r(N)] \\ X &= [x(1) \ x(2) \ \dots \ x(N)] \\ U &= [U_r(1) \ U_r(2) \ \dots \ U_r(N)] \\ V &= [V(1) \ V(2) \ \dots \ V(N)] \end{aligned}$$

اکنون می‌توان رابطه (۴_۶۰) را به صورت زیر بیان کرد:

$$Y = O_r X + S_r U + V \quad (۴_۶۳)$$

[۲۷] حذف عبارت U (۴_۵_۵)

ماتریس $N \times N$ به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\Pi_{U^T}^\perp = I - U^T (U U^T)^{-1} U \quad (۴_۶۴)$$

تصویر این ماتریس نسبت به U متعامد است، یعنی:

$$U \Pi_{U^T}^\perp = U - U U^T (U U^T)^{-1} U = 0 \quad (۴_۶۵)$$

بنابراین با ضرب کردن (۴_۶۳) از راست با $\Pi_{U^T}^\perp$ عبارت U حذف خواهد شد:

$$Y \Pi_{U^T}^\perp = O_r X \Pi_{U^T}^\perp + V \Pi_{U^T}^\perp \quad (۴_۶۶)$$

[۲۷] حذف عبارت نویز (۴_۵_۶)

مشکل بعدی حذف نویز است. چون این جمله از نویز تشکیل شده است، ایده اصلی حذف نویز به کمک

یک ماتریس ایده مناسبی است. ماتریس $(S \geq N) \ S \times N$ زیر را در نظر بگیرید:

$$\Phi = [\varphi_s(1) \ \varphi_s(2) \ \dots \ \varphi_s(N)] \quad (۴_۶۷)$$

که $\varphi_s(t)$ برداری است که هنوز نامشخص است. با ضرب کردن طرفین رابطه (۶۶-۴) از راست در

Φ^T و نرمالیزه کردن آن با N داریم :

$$G = \frac{1}{N} Y \prod_{U^T}^\perp \Phi^T = O_r \frac{1}{N} X \prod_{U^T}^\perp \Phi^T + \frac{1}{N} V \prod_{U^T}^\perp \Phi^T \stackrel{\text{def}}{=} O_r \tilde{T}_N + V_N \quad (۶۸-۴)$$

در اینجا \tilde{T}_N یک ماتریس $n \times s$ می باشد. اکنون فرض کنید که بتوان $\varphi_s(t)$ را به صورت زیر پیدا

کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} V \prod_{U^T}^\perp \Phi^T = \cdot \quad (۶۹-۴a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{T}_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} V \prod_{U^T}^\perp \Phi^T = \tilde{T} \quad (۶۹-۴b)$$

آنگاه می توان (۶۸-۴) را به صورت زیر نوشت:

$$G = \frac{1}{N} Y \prod_{U^T}^\perp \Phi^T = O_r \tilde{T} + E_N \quad (۷۰-۴)$$

$$E_N = O_r (\tilde{T}_N - \tilde{T}) + V_N \rightarrow \cdot \text{ as } N \rightarrow \infty$$

در این صورت به کمک روابط (۵۸-۴) ماتریس های A و C را بدست آورد.

اکنون تنها مشکل، دستیابی به معادله (۶۹-۴) می باشد. با توجه به تعریف (۶۴-۴) برای $\prod_{U^T}^\perp$ و نوشتن

ضرب ماتریس ها به صورت جمع، داریم: [۲۷]

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} V \prod_{U^T}^\perp \Phi^T &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N V(t) \varphi_s^T(t) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N V(t) U_r^T(t) \\ &\times \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N U_r(t) U_r^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N U_r(t) \varphi_s^T(t) \end{aligned} \quad (۷۱-۴)$$

تحت شرایطی، می توان گفت که این مجموع ها به سمت تعریف میانگین میل می کنند.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} V \prod_{U^T}^\perp \Phi^T = \bar{E} V(t) \varphi_s^T(t) - \bar{E} V(t) U_r^T(t) R_u^{-1} \bar{E} U_r(t) \varphi_s^T(t) \quad (۷۲-۴)$$

که در آن

$$R_u = \bar{E} U_r(t) U_r^T(t)$$

ماتریس کوواریانس ورودی است. اکنون فرض کنید ورودی u در حالت حلقه باز باشد. در این حالت

ورودی مستقل از نویز V است. لذا $EV(t)U_r^T(t) = 0$. حال اگر ورودی تحریک کامل باشد آنگاه عبارت دوم رابطه (۷۲-۴) صفر خواهد بود. حال شرط اینکه عبارت اول صفر باشد اینست که $V(t)$ و $\varphi_s(t)$ ناهمبسته باشند. $V(t)$ طبق رابطه (۶۲-۴) از نویز سفید و از زمان t به بعد ساخته شده است. لذا هر انتخابی از $\varphi_s(t)$ برای داده‌های قبل از t رابطه (۶۹-۴a) را برآورده می‌کند. یکی از انتخاب‌های $\varphi_s(t)$ می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\varphi_s(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-s_1) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-s_r) \end{bmatrix} \quad (۷۳-۴)$$

بنابراین اثر نویز نیز حذف شد.

فصل پنجم

۵_۱) مقدمه

امروزه مهندسين کنترل به دنبال کنترل دقيق، شبیه‌سازی و یا ساخت با مهندسی معکوس بوده و به منظور نیل به این هدف در حال تلاش برای دستیابی به مدل دقیق‌تری از سیستم‌ها می‌باشند. روش‌های زیادی در نظریه شناسایی سیستم‌ها به منظور برطرف کردن این نیاز ارائه شده است ولی اکثر این روش‌ها مبتنی بر بدست آوردن مدل مرتبه صحیح می‌باشد. نباید فراموش کرد که غالباً مدل سیستم‌های واقعی از مرتبه کسری می‌باشند. به همین جهت مناسب‌ترین روش برای شناسایی یک سیستم بدست آوردن مدل مرتبه کسری برای آن است. با شناسایی یک سیستم به روش کسری مدلی دقیق‌تر از آن سیستم خواهیم داشت، در نتیجه کنترل، شبیه‌سازی و یا ساخت آن دقیق‌تر خواهد بود.

در اینجا با کمک روش زیر فضایی که در فصل قبل توضیح داده شد، الگوریتمی به منظور بدست آوردن مدلی کسری برای یک سیستم ارائه شده است. این الگوریتم بر پایه روش ارائه شده در [۲۸] می‌باشد. با کمک این الگوریتم می‌توان مدل فضای حالتی پیوسته در زمان از مرتبه کسری و با هر تعداد ورودی و خروجی برای سیستم‌ها را بدست آورد.

در نهایت به منظور بررسی صحت الگوریتم، روش بدست آمده بر روی یک بازوی روبات فانتوم آزمایش شده و با روش مشابه مرتبه صحیح آن مقایسه شده است.

۵_۲) الگوریتم زیر فضایی برای شناسایی حوزه زمان از مرتبه کسری

سیستم زمان پیوسته فضای حالتی از مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید، بگونه‌ای که $y(t) \in R^l, x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$ به ترتیب بردارهای های خروجی، حالت و ورودی سیستم بوده و $w(t) \in R^n, v(t) \in R^l$ به ترتیب نویز سیستم و نویز اندازه‌گیری می‌باشند.

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (1-5)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \quad (2-5)$$

در این رابطه w, v نویز سفید با میانگین صفر و ماتریس کواریانس به صورت زیر هستند:

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(t) & v^T(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta(t-s) \quad (3-5)$$

فرض بر این است که ورودی $u(t)$ مستقل از نویزهای سیستم بوده و هدف بدست آوردن مرتبه سیستم (α) و ماتریس های (A, B, C, D) می باشد.

۳-۵) تابع توزیع تصادفی

علازم این که توابعی مثل تابع یکه در در نظریه توابع کلاسیک تعریف نمی شود ولی فیزیک دانان مدت هاست که از این توابع استفاده میکنند. [۲۹]

ساده ترین نوع توابع یکه تابع ضربه $\delta(x - x_0)$ می باشد. این تابع همه جا صفر است غیر از نقطه x_0 که مقدار آن بینهایت بوده و سطح زیر انتگرال این تابع یک است. اگرچه طبق تعریف توابع کلاسیک، این شرایط متناقض می باشند. [۲۹]

توابع یکه معمولا به عنوان توابع میانی و یا در یک انتگرال و به عنوان ضریب یک تابع خوش رفتار^{۱۵} استفاده می شوند. بنابراین نیازی به بررسی خواص توابع یکه نیست بلکه تنها کفایت بفهمیم که هدف از انتگرال گیری حاصل ضرب یک تابع یکه در تابع خوش رفتار چیست. برای مثال به جای اینکه بخواهیم پی به خواص تابع دلتا ببریم کفایت بدانیم که برای هر تابع خوش رفتار $\varphi(x)$ داریم: [۲۹]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0) \quad (4-5)$$

به عبارت دیگر برای هر تابع یکه که با یک تابع خوش رفتار مرتبط باشد، می توان یک عدد متناظر

¹⁵ Well posed

پیدا کرد. برای مثال برای تابع دلتا، عدد $\varphi(x)$ ، متناظر با تابع خوش رفتار $\varphi(x)$ است. [۲۹]

معمولا توابع جمع پذیر در این مفهوم جای می گیرند، زیرا با داشتن تابع جمع پذیر $f(x)$ می توان انتگرال حاصل ضرب $f(x)$ را در یک تابع خوش رفتار محاسبه کرد. بنابراین تعریف توابع عمومیت یافته شامل توابع یکه و یکسری توابع رایج می باشد.

۵-۳-۱) تابع آزمون [۲۹]

ابتدا به بررسی توابع خوش رفتار می پردازیم. مجموعه K از همه توابع حقیقی $\varphi(x)$ با مشتقات پیوسته از هر مرتبه ای و برد محدود را در نظر بگیرید، بدین معنی که این تابع خارج از محدوده ای مشخص، به صفر میل میکند.

این توابع، توابع آزمون نامیده شده و K فضای توابع آزمون است. با جمع یا ضرب کردن توابع آزمون در اعداد حقیقی، توابع آزمون جدید ایجاد می شود. می توان به عنوان مثالی از توابع آزمون، به تابع نمایی زیر اشاره کرد:

$$\varphi(x, a) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{a^2}{a^2-r^2}\right) & \text{for } r < a \\ 0 & \text{for } r \geq a \end{cases} \quad (5-5)$$

۵-۳-۲) توابع تعمیم یافته [۲۹، ۳۰]

تابع f بر روی K تابعی خطی و پیوسته نامیده می شود اگر بتوان قانونی پیدا کرد که طبق آن هر $\varphi(x)$ در K را به یک عدد حقیقی (f, φ) مرتبط کند به گونه ای که :

(۱) برای هر دو عدد حقیقی α_1, α_2 و هر دو تابع $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ در K داشته باشیم

$$(f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2) \quad (6-5)$$

(۲) اگر رشته $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ در K به سمت صفر میل کرد، انگاه رشته

$(f, \varphi_1), (f, \varphi_2), \dots, (f, \varphi_n), \dots$ به صفر میل کند.

۳-۳-۵) استفاده از توابع تعمیم یافته به منظور شناسایی [۳۱،۳۲]

فرض کنید (Ω, F, P) سه گانه احتمال بوده و D بیانگر فضای توابع با مقدار حقیقی غیر تصادفی C^∞ اسکالر، $\{\varphi(t)\}$ بر روی R (اعداد حقیقی) باشد بگونه‌ای که دارای برد فشرده است. در نظریه توزیع، تابع $\varphi(t)$ تابع آزمون نامیده می‌شود.

در این تعریف Ω بیانگر فضای نمونه، F بیانگر میدان‌های σ^{16} و P اندازه احتمال می‌باشد.

یک تابع تصادفی خطی و پیوسته بر روی D ، توزیع تصادفی یا تابع تصادفی تعمیم یافته به ترتیب از دید ایتو^{۱۷} یا گلفاند و ویلنکین^{۱۸} نامیده می‌شود و مجموع آنها با D' (فضای دوگانه) نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر تابع توزیع تصادفی، نگاشتی قابل اندازه‌گیری از فضای احتمال (Ω, F, P) به فضای توابع توزیع \mathcal{A} بر روی فاصله یکه بسته I است.

فرایند تصادفی پیوسته برداری حقیقی $\{y(t, w), -\infty < t < \infty, w \in \Omega\}$ که با تابع توزیع

تصادفی $y(\phi)$ شناخته شده است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\varphi(t)dt \quad (\varphi \in \mathcal{D}) \quad (7-5)$$

با تبدیل انتگرال این تابع به صورت کسری داریم:

$$y(\varphi) = -_{\infty}D_{\infty}^{-\alpha}(y(t)\varphi(t)) \quad (\varphi \in D) \quad (8-5)$$

تابع توزیع تصادفی $y(\phi)$ فرایندی گوسی نامیده می‌شود، اگر برای هر تابع $\phi(t) \in D$ متغیر تصادفی

$y(\phi)$ گوسی باشد. برای $\phi \in D$ ، مشتقات مرتبه اول و دوم با کمک مشتقات زنجیره‌ای، به صورت زیر

¹⁶ σ -field

¹⁷ Ito (1953)

¹⁸ Gelfand and Vilenkin (1964)

محاسبه می‌شوند:

$$D^\alpha y(\varphi) = {}_{-\infty}D_\infty^{-\alpha} \left(D^\alpha(y(t)).\varphi(t) \right) =$$

$$- {}_{-\infty}D_\infty^{-\alpha} (y(t).D^\alpha \varphi(t)) = -y(D^\alpha \varphi(t)) \quad (9_5)$$

$$D^{\gamma\alpha} y(\varphi) = {}_{-\infty}D_\infty^{-\alpha} (D^{\gamma\alpha}(y(t)).\varphi(t)) = - {}_{-\infty}D_\infty^{-\alpha} (D^\alpha(y(t)).D^\alpha(\varphi(t))) =$$

$$- {}_{-\infty}D_\infty^{-\alpha} (y(t).D^{\gamma\alpha} \varphi(t)) = y(D^{\gamma\alpha} \varphi(t)) \quad (10_5)$$

و در حالت کلی مشتق مرتبه $k\alpha$ ام فرایند تصادفی $y(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D^{k\alpha} y(\varphi) = {}_{-\infty}D_\infty^{-\alpha} \left(D^{k\alpha}(y(t)).\varphi(t) \right) = (-1)^k {}_{-\infty}D_\infty^{-\alpha} \left(y(t).D^{k\alpha}(\varphi(t)) \right) =$$

$$(-1)^k y(D^{k\alpha} \varphi(t)) \quad (11_5)$$

۴_۵) مشتقات معادله جبری ورودی - خروجی

فرض کنید $\{t_j, j = 1, 2, \dots, N\}, (-\infty < t_j < \infty)$ ثابت‌های زمانی باشد و $\varphi(t; t_j)$ $(-\infty < t < \infty)$ تابع اسکالر C^∞ با برد فشرده حول t_j باشد، یعنی $\varphi(t; t_j) \in D$. انگاه برای $\varphi(t; t_j)$ دلخواه، توزیع تصادفی فرایند اتفاقی $y(t)$ از رابطه (۲_۵) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y(\varphi)(t_j) = Cx(\varphi)(t_j) + Du(\varphi)(t_j) + v(\varphi)(t_j) \quad (12_5)$$

که در آن $y(\varphi)(t_j) = {}_{-\infty}D_\infty^{-\alpha}(y(t)\varphi(t, t_j))$ و $x(\varphi)(t_j)$ ، $u(\varphi)(t_j)$ و $v(\varphi)(t_j)$ به طور مشابه بدست می‌آیند.

حال برای مشتق‌گیری از رابطه (۲_۵) در حضور اغتشاش بدین صورت عمل می‌کنیم که با مشتق‌گیری از رابطه (۲_۵) نسبت به t و ضرب طرفین رابطه در $\varphi(t, t_j)$ و در نهایت با انتگرال‌گیری از این رابطه در بازه $(-\infty, \infty)$ داریم:

$$- {}_{-\infty}D_\infty^{-\alpha} (D^\alpha(y(t))\varphi(t, t_j)) = C {}_{-\infty}D_\infty^{-\alpha} (D^\alpha(x(t))\varphi(t, t_j))$$

$$+D_{-\infty}D_{\infty}^{-\alpha}(D^{\alpha}(u(t))\varphi(t, t_j)) + {}_{-\infty}D_{\infty}^{-\alpha}(D^{\alpha}(v(t))\varphi(t, t_j)) \quad (13-5)$$

حال با توجه به روابط (1-5) و (11-5) داریم:

$$\begin{aligned} -y(D^{\alpha}\varphi)(t_j) &= CAx(\varphi)(t_j) + CBu(\varphi)(t_j) - Du(D^{\alpha}\varphi)(t_j) \\ +Cw(\varphi)(t_j) - v(D^{\alpha}\varphi)(t_j). \end{aligned} \quad (14-5)$$

و به طریق مشابه مشتق مرتبه 2α نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} y(D^{2\alpha}\varphi)(t_j) &= CA^2x(\varphi)(t_j) + CABu(\varphi)(t_j) \\ -CBu(D^{\alpha}\varphi)(t_j) + Du(D^{2\alpha}\varphi)(t_j) \\ +CAw(\varphi)(t_j) - Cw(D^{\alpha}\varphi)(t_j) + v(D^{2\alpha}\varphi)(t_j) \end{aligned} \quad (15-5)$$

با تکرار این عمل به اندازه $\alpha(i-1)$ مرتبه، مشتق مرتبه $\alpha(i-1)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} &-(1)^{i-1}y(D^{(i-1)\alpha}\varphi)(t_j) \\ &= CA^{i-1}x(\varphi)(t_j) + CA^{i-2}Bu(\varphi)(t_j) - CA^{i-2}Bu(D^{\alpha}\varphi)(t_j) \\ &+ \dots + (-1)^{i-1}Du(D^{(i-1)\alpha}\varphi)(t_j) + CA^{i-2}w(\varphi)(t_j) \\ &- CA^{i-2}w(D^{\alpha}\varphi)(t_j) + \dots + (-1)^{i-2}Cw(D^{(i-2)\alpha}\varphi)(t_j) + \\ &(-1)^{i-1}v(D^{(i-1)\alpha}\varphi)(t_j) \end{aligned} \quad (16-5)$$

و در نهایت رابطه ورودی-خروجی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y(\varphi)(t_j) = \Gamma_i x(\varphi)(t_j) + H_i u(\varphi)(t_j) + \Sigma_i w(\varphi)(t_j) + v(\varphi)(t_j) \quad (17-5)$$

که $y(\varphi)(t_j)$ به صورت زیر است:

$$y(\varphi)(t_j) = [y^T(\varphi)(t_j), y^T(D^{\alpha}\varphi)(t_j), \dots, (-1)^{i-1}y^T(D^{(i-1)\alpha}\varphi)(t_j)]^T \quad (18-5)$$

$$\Sigma_i \in \mathbb{R}^{i\ell \times \text{in}} \quad \text{و } H_i \text{ و } \Gamma_i \text{ و } \text{بوده } y(\varphi)(t_j) \text{ مشابه } w(\varphi)(t_j) \text{ و } v(\varphi)(t_j) \text{ و } u(\varphi)(t_j)$$

ساختار زیر را دارد:

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C & \cdot & \dots & \cdot \\ CA & C & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2} & CA^{i-3} & \dots & \cdot \end{bmatrix} \quad (19_5)$$

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \quad (20_5)$$

$$H_i = \begin{bmatrix} D & \cdot & \dots & \cdot \\ CB & D & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & D \end{bmatrix} \quad (21_5)$$

بنابر این با مرتب کردن بردار ستونی خروجی (۱۷_۵) به صورت سطری (j=۱ to N) رابطه جبری

ورودی خروجی به صورت زیر بدست می آید:

$$y_i(\varphi) = \Gamma_i X_i(\varphi) + H_i U_i(\varphi) + \Sigma_i W_i(\varphi) + V_i(\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}) \quad (22_5)$$

که در آن ماتریس‌های حالت و خروجی به صورت زیر می‌باشند:

$$X_i(\varphi) = [x(\varphi)(t_1), x(\varphi)(t_r), \dots, x(\varphi)(t_N)] \quad (n \times N)$$

$$Y_i(\varphi) = [y(\varphi)(t_1), y(\varphi)(t_r), \dots, y(\varphi)(t_N)] \quad (il \times N),$$

و $U_i(\varphi) \in R^{im \times N}$, $W_i(\varphi) \in R^{in \times N}$ و $V_i(\varphi) \in R^{il \times N}$ مشابه $Y_i(\varphi)$ بدست می‌آیند.

۵_۵ شناسایی سیستم

در این بخش به بررسی نحوه حذف نویز برای بدست آوردن (A,B,C,D) می‌پردازیم. این روش توسعه

یافته روش اوهسامی و همکاران^{۱۹} به مرتبه کسری می‌باشد.

نظریه (۱) فرض کنید $\{u(t)\}$, $\{w(t)\}$, $\{v(t)\}$ فرایندهای تصادفی مستقل با میانگین صفر باشند.

با انتخاب $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ و با فرض اینکه $U_h(\varphi) \in R^{hm \times N}$ ماتریسی با توزیع تصادفی وبا ساختاری مشابه

¹⁹ Ohsumi etal(2002)

$U_i(\varphi) \in R^{im \times N}$ باشد که فقط در تابع آزمون $\varphi(t, t_j)$ و تعداد بلوک‌های سطری i با هم متفاوت باشند،

انگاه

$$\frac{1}{N} W_i(\varphi) U_h^T(\psi) \rightarrow \cdot, \frac{1}{N} V_i(\varphi) U_h^T(\psi) \rightarrow \cdot \text{ as } N \rightarrow \infty \quad (23-5)$$

اثبات:

با توجه به روابط زیر :

$$W_i(\varphi) = [(-1)^k w(D^{k\alpha} \varphi(t_j))]_{k=0,1,\dots,i-1; j=1,2,\dots,N} \quad (24-5)$$

$$U_h(\psi) = [(-1)^p u(D^{p\alpha} \psi(t_j))]_{p=0,1,\dots,h-1; j=1,2,\dots,N} \quad (25-5)$$

برای (k,p) امین المان از ماتریس $\frac{1}{N} W_i(\varphi) U_h^T(\psi)$ داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} [W_i(\varphi) U_h^T(\psi)]_{kp} \\ &= \frac{1}{N} [(-1)^k w(D^{k\alpha} \varphi)(t_1), \dots, (-1)^k w(D^{k\alpha} \varphi)(t_N)] \\ & \times [(-1)^p u(D^{p\alpha} \psi)(t_1), \dots, (-1)^p u(D^{p\alpha} \psi)(t_N)]^T \\ &= (-1)^{k+p} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w(D^{k\alpha} \varphi)(t_j) u^T(D^{p\alpha} \psi)(t_j) \end{aligned} \quad (26-5)$$

که برای p و K ثابت :

$$Z(t_j) = w(D^{k\alpha} \varphi)(t_j) u^T(D^{p\alpha} \psi)(t_j). \quad (27-5)$$

این رشته یک فرایند ایستا است.

بنابراین اثبات، خلاصه می‌شود به نشان دادن دو مورد زیر:

(۱) ارگودیسیتی^{۲۰} برای $Z(t_j)$ برقرار بوده و

(۲) $E\{Z(t_j)\}$ صفر باشد.

برای اثبات (۱) کافیت کوواریانس تابع $Z(t_j + \tau) - E\{Z(t_j + \tau)\}$

²⁰ ergodicity

$$\tau)\}][Z(t_j) - E\{Z(t_j)\}]^T\}$$

را یافته و نشان دهیم که با میل دادن $|\tau|$ به سمت بینهایت، کواریانس به سمت صفر میل می کند.

بنابراین میانگین $Z(t_j)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} E\{Z(t_j)\} &= E\{w(D^{k\alpha}\varphi)(t_j)u^T(D^{p\alpha}\psi)(t_j)\} \\ &= E\left\{-\infty D_{\infty}^{-\alpha}\left(w(t)D^{k\alpha}\varphi(t, t_j)\right)-\infty D_{\infty}^{-\alpha}\left(u^T(t)D^{p\alpha}\psi(s, t_j)\right)\right\} \\ &-\infty D_{\infty}^{-\alpha}-\infty D_{\infty}^{-\alpha}E\{w(t)u^T(s)\}D^{k\alpha}\varphi(t, t_j)D^{p\alpha}\psi(s, t_j) = \cdot \end{aligned} \quad (28-5)$$

که در آن $\{u(t)\}$ و $\{w(t)\}$ به صورت فرایندهای اتفاقی با میانگین صفر می باشند. بنابراین

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E\{Z(t_j + \tau)Z^T(t_j)\} \\ &= E\left\{[w(D^{k\alpha}\varphi)(t_j + \tau)u^T(D^{p\alpha}\psi)(t_j + \tau)] \times [w(D^{k\alpha}\varphi)(t_j)u^T(D^{p\alpha}\psi)(t_j)]^T\right\} \\ &= \left[-\infty D_{\infty}^{-\alpha}-\infty D_{\infty}^{-\alpha}(r_u(s_1 - s_2) \times D^{p\alpha}\psi(s_1, t_j + \tau)D^{p\alpha}\psi(s_2, t_j))\right] \\ &\times Q-\infty D_{\infty}^{-\alpha}(D^{k\alpha}\varphi(s_2, t_j + \tau)D^{k\alpha}\varphi(s_1, t_j)) \end{aligned} \quad (29-5)$$

که در آن $r_u(s_1 - s_2) = E\{u^T(s_1)u(s_2)\}$ با توجه به اینکه برای $-\infty < \tau < \infty$

$|r_u(\tau)| \leq c_1$ برای عبارت داخل براکت برای رابطه آخر داریم:

$$\begin{aligned} &\left|-\infty D_{\infty}^{-\alpha}-\infty D_{\infty}^{-\alpha}(r_u(s_1 - s_2)D^{p\alpha}\psi(s_1, t_j + \tau)D^{p\alpha}\psi(s_2, t_j))\right| \\ &\leq -\infty D_{\infty}^{-\alpha}-\infty D_{\infty}^{-\alpha}|r_u(s_1 - s_2)D^{p\alpha}\psi(s_1, t_j + \tau)| \times |D^{p\alpha}\psi(s_2, t_j)| \\ &\leq c_1 \left[-\infty D_{\infty}^{-\alpha}|D^{p\alpha}\psi(s_1, t_j + \tau)|\right] \times \left[-\infty D_{\infty}^{-\alpha}|D^{p\alpha}\psi(s_2, t_j)|\right] \leq c_2(const) \end{aligned} \quad (30-5)$$

از طرف دیگر آخرین انتگرال در (29-5) به صورت زیر می باشد:

$$-\infty D_{\infty}^{-\alpha}(D^{k\alpha}(\varphi(s_2, t_j + \tau))D^{k\alpha}(\varphi(s_1, t_j))) \rightarrow \cdot as |\tau| \rightarrow \infty \quad (31-5)$$

بنابراین $D^{k\alpha}\varphi(\cdot, \cdot)$ دارای برد فشرده می باشد.

و در نتیجه با توجه به نتایج (30-5) و (31-5) داریم:

$$R_z(\tau) \rightarrow \cdot as |\tau| \rightarrow \infty \quad (32-5)$$

بنابراین ارگودیسیتی

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Z(t_j) \rightarrow E\{Z(t_j)\} \quad (N \rightarrow \infty) \quad (33-5)$$

برای عبارت تصادفی $Z(t_j)$ در رابطه (27-5) برقرار بوده و این بیانگر اینست که

$$\frac{1}{N} [w_i(\varphi) U_h^T(\psi)]_{kp} = (-1)^{k+p} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Z(t_j) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (-1)^{k+p} E\{Z(t_j)\} \quad (34-5)$$

قسمت دوم، با توجه به رابطه (28-5) برقرار بوده و بنابراین رابطه (23-5)، رابطه‌ای صحیح می‌باشد.

به طور مشابه، ادعای دوم نیز برقرار می‌باشد.

نظریه (2) با انتخاب $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ و با در نظر گرفتن $U_h(\psi)$ به صورت رابطه نظریه 1، وبا اعمال

تجزیه QR به شکل زیر :

$$\begin{bmatrix} U_i(\varphi) \\ U_h(\psi) \\ Y_i(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdot & \cdot \\ L_{21} & L_{22} & \cdot \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{L1}^T \\ Q_{L2}^T \\ Q_{L3}^T \end{bmatrix} \quad (35-5)$$

آنگاه روابط زیر برای N بزرگ برقرار است:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} L_{31} = \Gamma_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} X_i(\varphi) Q_{L1} \right\} + H_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} L_{11} \right\} \quad (36-5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} L_{32} = \Gamma_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} X_i(\varphi) Q_{L2} \right\} \quad (37-5)$$

که در آن ماتریس بدون نویز بوده و شامل $span_{col}\{\Gamma_i\}$ می‌باشد.

اثبات:

با ضرب کردن هر دو طرف رابطه (22-5) به ترتیب در $\frac{1}{\sqrt{N}} Q_{L2}$ و $\frac{1}{\sqrt{N}} Q_{L1}$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} Y_i(\varphi) Q_{L1} &= \Gamma_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} X_i(\varphi) Q_{L1} \right\} + H_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} U_i(\varphi) Q_{L1} \right\} = \\ &\Sigma_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_i(\varphi) Q_{L1} \right\} + \frac{1}{\sqrt{N}} v_i(\varphi) Q_{L1} \end{aligned} \quad (38-5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} Y_i(\varphi) Q_{L2} = \Gamma_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} X_i(\varphi) Q_{L1} \right\} + H_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} U_i(\varphi) Q_{L2} \right\} =$$

$$\Sigma_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_i(\varphi) Q_{L_2} \right\} + \frac{1}{\sqrt{N}} v_i(\varphi) Q_{L_2} \quad (39-5)$$

با جمع کردن این دو در یک رابطه، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} Y_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] &= \Gamma_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} X_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] \right\} + H_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} U_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] \right\} \\ &+ \Sigma_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] \right\} + \frac{1}{\sqrt{N}} v_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] \end{aligned} \quad (40-5)$$

حال با توجه به رابطه (35-5)

$$[Q_{L_1}, Q_{L_2}] = U_h^T(\psi) \begin{bmatrix} L_{21}^T \\ L_{22}^T \end{bmatrix}^+ \quad (41-5)$$

که در آن + بیانگر شبه معکوس مور-پنروس²¹ می باشد، عبارت سوم در سمت راست تساوی (40-5)

به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\Sigma_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] \right\} = \sqrt{N} \Sigma_i \left\{ \frac{1}{N} W_i(\varphi) U_h^T(\psi) \right\} \begin{bmatrix} L_{21}^T \\ L_{22}^T \end{bmatrix}^+ \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \cdot \quad (42-5)$$

که در آن میل کردن رابطه به سمت صفر با $N \rightarrow \infty$ در نظریه یک اثبات شد. مشابه همین روش برای

عبارت چهارم سمت راست تساوی نیز برقرار است.

بنابراین برای N های بزرگ رابطه (40-5) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} Y_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] = \frac{1}{\sqrt{N}} \Gamma_i X_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] + \frac{1}{\sqrt{N}} H_i U_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] \quad (43-5)$$

حال با توجه به (35-5) عبارت سمت چپ تساوی به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} Y_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] = \frac{1}{\sqrt{N}} (L_{31} Q_{L_1}^T + L_{32} Q_{L_2}^T + L_{33} Q_{L_3}^T)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] \frac{1}{\sqrt{N}} [L_{31}, L_{32}] \quad (44-5)$$

و برای عبارت دوم سمت راست تساوی داریم :

$$\frac{1}{\sqrt{N}} H_i U_i(\varphi)[Q_{L_1}, Q_{L_2}] = \frac{1}{\sqrt{N}} H_i L_{11} Q_{L_1}^T [Q_{L_1}, Q_{L_2}] = \frac{1}{\sqrt{N}} H_i [L_{11}, \cdot] \quad (45-5)$$

²¹ Moor-Penrose

بنابراین رابطه (۴۳-۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} [L_{31}, L_{32}] = \frac{1}{\sqrt{N}} [\Gamma_i X_i(\varphi) Q_{L1}, \Gamma_i X_i(\varphi) Q_{L2}] + \frac{1}{\sqrt{N}} [H_i L_{11}, 0] \quad (46-5)$$

و با تبدیل کردن رابطه فوق به دو بلوک ماتریسی، روابط (۳۶-۵) و (۳۷-۵) بدست می‌آیند.

۵-۶) شبیه سازی

به منظور پیاده سازی الگوریتم شناسایی دو آزمون ارائه شده است که در هر دو آزمون ماتریس‌های فضای حالتی (A, B, C, D) و مرتبه کسری سیستم (α) مورد شناسایی قرار می‌گیرد.

الگوریتم مورد نظر قادر است که بین کلیه $\alpha \in (0, 2)$ ، بهینه‌ترین مقدار α را بطریقی انتخاب نماید که رابطه (۴۷-۵) در حداقل ممکن قرار داشته باشد. [۳۴]

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \frac{1}{2} \|\hat{y}_c(\alpha) - y_c\|_2^2 \quad (47-5)$$

همچنین تابعی که به عنوان تابع آزمون در نظر گرفته شده است تابع گوسی زیر بوده و σ در این رابطه برابر $1/4$ می‌باشد.

$$\varphi(t; t_j) = \exp\left\{-\frac{(t-t_j)^2}{2\sigma}\right\} \quad (\sigma > 0) \quad (48-5)$$

در این دو مثال فرض بر این است که حالت‌های سیستم در دسترس قرار دارند.

در شبیه سازی‌ها، گسسته سازی با زمان Δt انجام شده و نمونه برداری با زمان $t_j (j = 1, 2, \dots, N)$ انجام می‌شود به طوری که تغییرات t_j به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$t_{j+1} = t_j + M\Delta t \quad (49-5)$$

آزمون اول

به منظور بررسی صحت الگوریتم، سیستم یک ورودی-یک خروجی با مرتبه کسری $\alpha = 0.7$ زیر در نظر گرفته شده است:

$$d^{\cdot y}x/dt^{\cdot y} = -\cdot \cdot \Delta x(t) - \cdot \cdot \Delta u(t) + \cdot \cdot \Delta w(t)$$

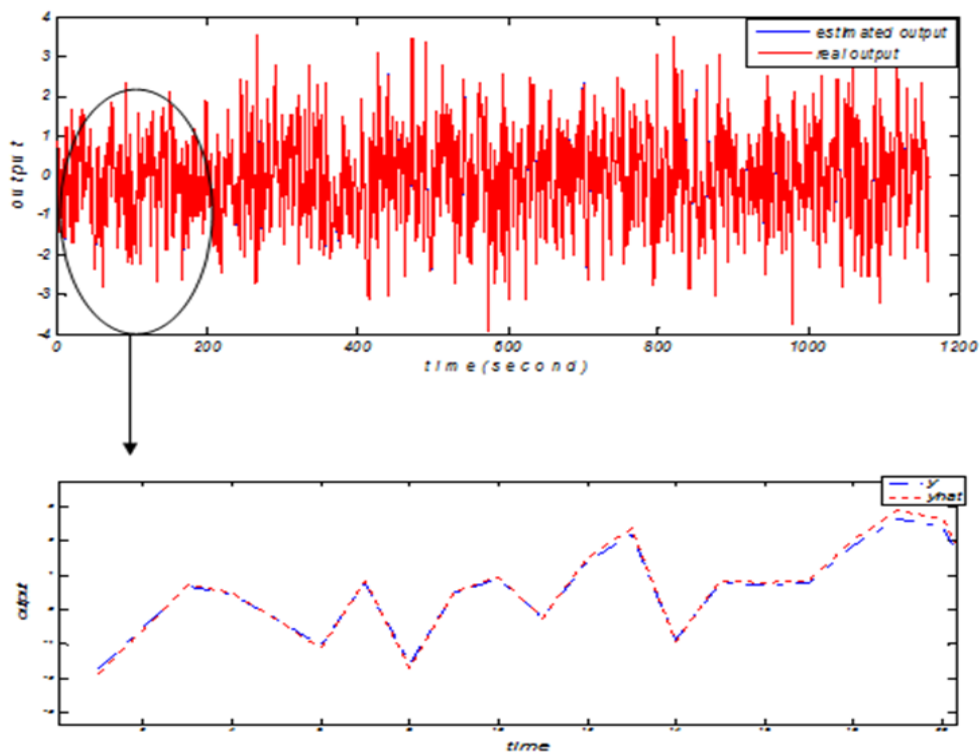
$$y(t) = x(t) - \cdot \cdot \Delta u(t) + \cdot \cdot \Delta v(t) \quad (5-5)$$

همچنین در این آزمون نویز سفید با میانگین صفر و پارامترهای واریانس $Q=R=1$ و $S=0$ به عنوان ورودی برای این سیستم فرض شده است. مدل پیوسته سیستم با زمان $\Delta t = 0.01$ به مدل گسسته تبدیل شده و سپس با زمان $M\Delta t = 1$ از سیستم نمونه برداری شده است.

تعداد نمونه‌های انتخاب شده برابر $N=1000$ بوده، همچنین تعدادسطرهای بلوکی $i=2$ و $h=4$ می‌باشد. این آزمون به تعداد صد مرتبه به روش مونت کارلو تکرار شده است. شکل (5-1) میزان تطابق پاسخ تخمین زده شده با پاسخ خروجی را نشان می‌دهد. نتایج حاصله از آزمون نشان می‌دهد که مرتبه کسری سیستم (α) ، با مقدار 0.69 و ماتریس‌های چهارگانه سیستم (A, B, C, D) ، به صورت زیر تخمین زده شده است.

$$\hat{A} = -10.2152 \quad \hat{B} = -1.4022$$

$$\hat{C} = 1.0064 \quad \hat{D} = -1.1999$$



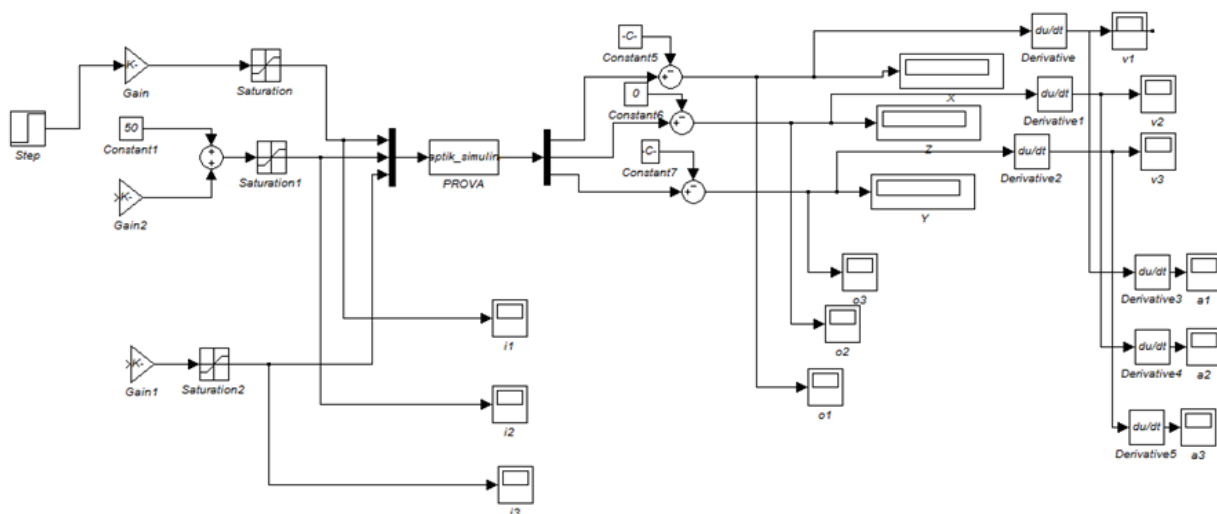
شکل ۵-۱) میزان تطابق پاسخ تخمین زده شده با پاسخ خروجی

آزمون دوم

در آزمون دوم یک روبات ۴ بازو (که تنها ۳ بازوی آن فعال است) به نام فانتوم مدل امنی^{۲۲} (شکل ۵-۲) را انتخاب کرده و به دو روش صحیح و کسری مورد شناسایی قرار گرفته و نتایج با هم مقایسه گردید. معیار مقایسه دو آزمون بر اساس کمینه نمودن خطای خروجی می باشد. در این آزمایش نمونه برداری با ثابت زمانی $M\Delta t = 0.625$ انجام شده و $\Delta t = 0.00625$ S در نظر گرفته شده است. لینک ارتباطی بین کامپیوتر و بازو کارت iee ۱۳۹۴ بوده و به منظور برقراری ارتباط از “Real-time work shop” سیمولینک مطلب استفاده شده است. (شکل ۵-۳)



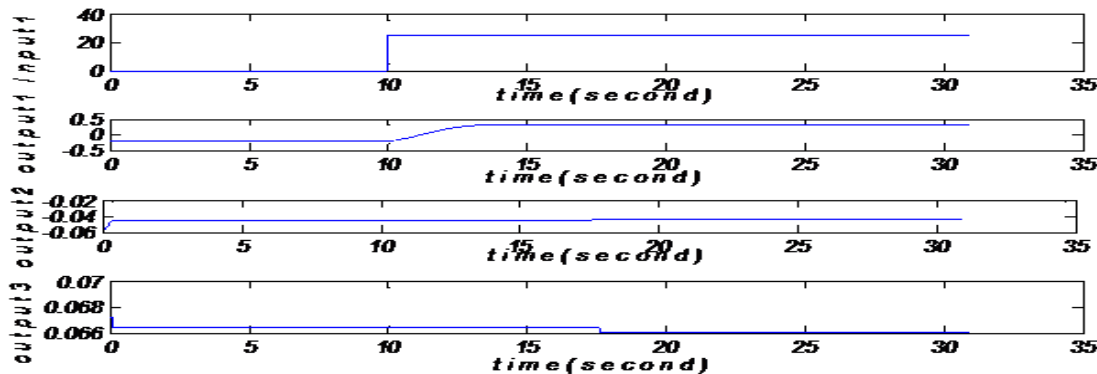
شکل ۵-۲) روبات فانٹوم



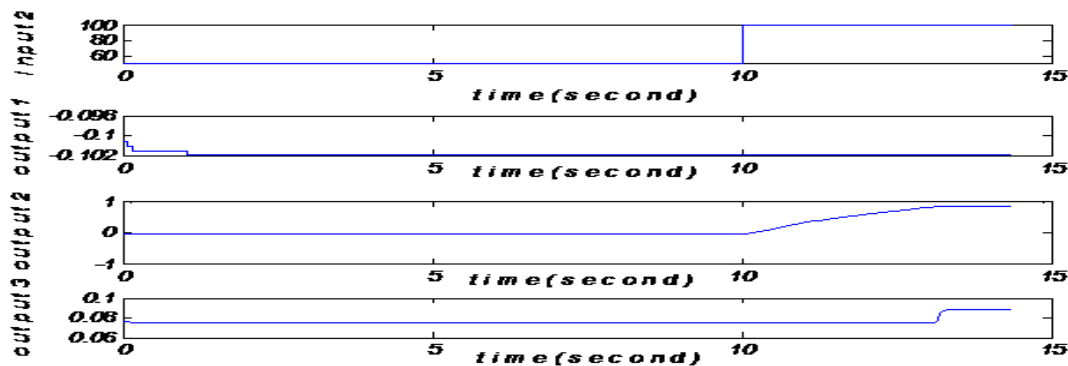
شکل ۵-۳) "Real-time work shop" سیمولینک مطلب

روبات مذکور به صورت حلقه باز بوده و بدون کنترلر می‌باشد. به منظور بررسی نویز سنسورها، سرعت سیستم و میزان تاخیر بین ورودی و پاسخ سیستم، به هر یک از بازوها به طور جداگانه یک پله اعمال شده و پاسخ زمانی سیستم بررسی شده است. ورودی اعمال شده از نوع گشتاور و خروجی اندازه گیری از نوع زاویه می‌باشد. (شکل ۵-۳)

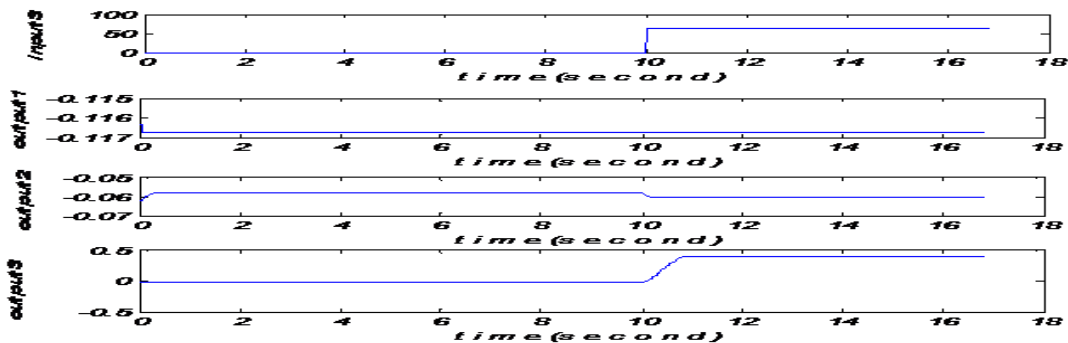
همانطور که در شکل (۴-۵) دیده می‌شود در هر سه بازو نویز و تاخیر صفر بوده و سرعت پاسخ (ثابت زمانی) برای بازوی اول $\tau = 2.9S$ و برای بازوی دوم و سوم به ترتیب برابر $0.7S$ و $0.5S$ می‌باشد. با توجه به اینکه خروجی‌ها تقریباً از هم مستقل می‌باشند، لذا می‌توان سیستم را به صورت سه سیستم یک ورودی - یک خروجی مستقل در نظر گرفت.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۴-۵) پاسخ پله سیستم برای هر یک از بازوهای روبات (الف) اعمال پله به ورودی یک و اندازه گیری

خروجی‌ها (ب) اعمال پله به ورودی دو و اندازه‌گیری خروجی‌ها (ج) اعمال پله به ورودی سه و اندازه‌گیری خروجی‌ها

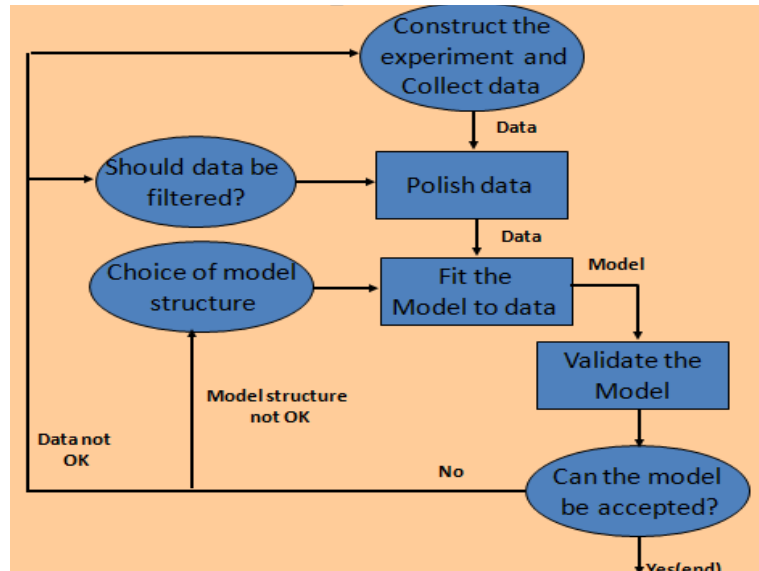
در مرحله بعدی ورودی تحریک کامل^{۲۳} به نحوی برای سیستم انتخاب می‌شود که بتواند همه مودهای سیستم را تحریک کند. ورودی انتخاب شده به صورت سیگنال تصادفی دو مقداری^{۲۴} می‌باشد.

پس از نمونه برداری، اطلاعات مورد بررسی قرار گرفتند تا در صورت مشاهده اطلاعات غلط، از بین رفته یا وجود اثرات غیر خطی در آن‌ها، اطلاعات پیش‌پردازش شوند.

وقتی یک ورودی متناوب به سیستمی اعمال می‌شود، انتظار می‌رود خروجی‌ها در تناوب یکسان باشند، لذا پس از بررسی خروجی‌ها، اگر تفاوتی مشاهده شد، به منزله نویز یا خطا بوده و می‌توان با اندازه‌گیری میانگین خروجی‌ها، خطا را به حداقل ممکن رساند و لذا به منظور بررسی میزان نویز سنسورهای خروجی، ورودی تصادفی دو مقداری انتخاب شده با دوره تناوب ۳ به بازو اعمال شده است بنحوی که ورودی اول به طول ۶۳ نمونه و ورودی دوم و سوم به طول ۱۲۷ نمونه بوده و لذا تعداد کل نمونه‌ها برابر $N=KM=189$ برای ورودی یک و $N=381$ برای ورودی‌های ۲ و ۳ می‌باشد. می‌توان برای مشاهده مراحل شناسایی به شکل (۵-۵) مراجعه کرد.

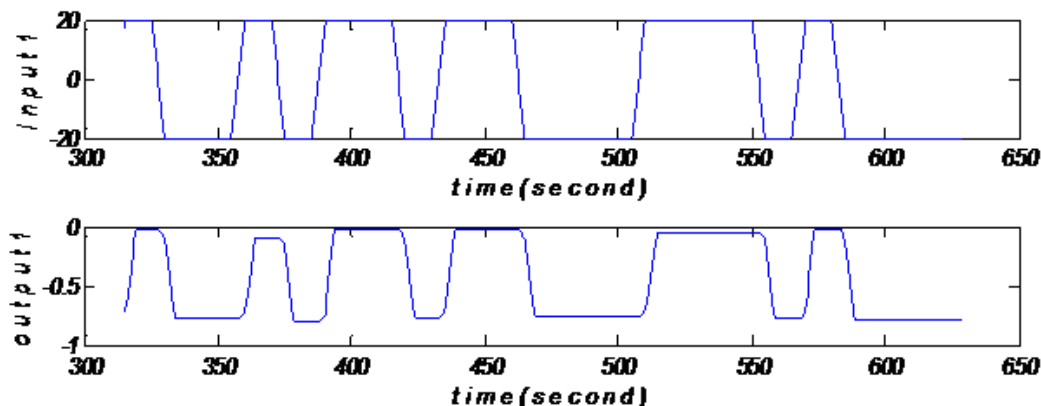
²³ Persistent Exciting (PE)

²⁴ Pseudo Random Binary Signal (PRBS)

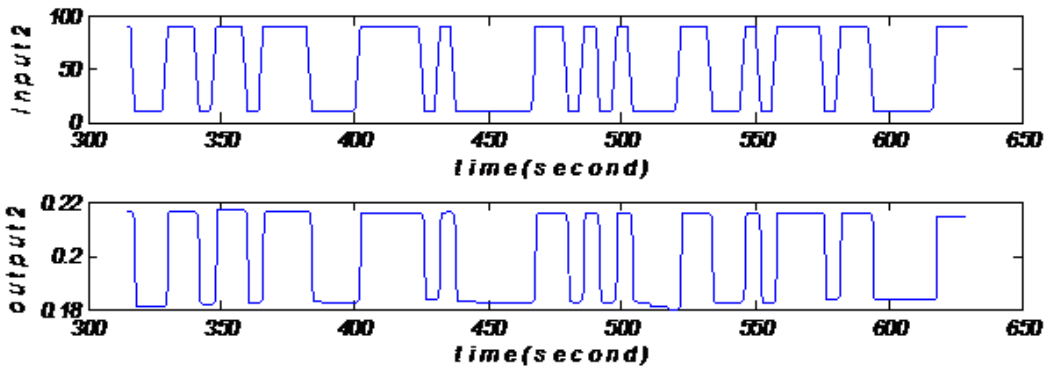


شکل ۵-۵) مراحل شناسایی

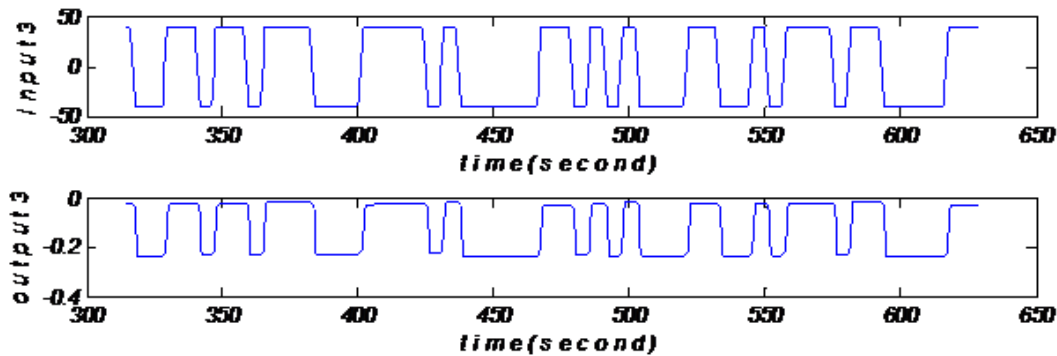
همچنین از آنجا که ورودی تصادفی دو مقداری، پالسی با عرض متغیر می باشد، لذا باید فرکانس ورودی بر اساس ثابت زمانی سیستم انتخاب شود تا بازو بتواند به ورودی اعمال شده پاسخ دهد. با توجه به ثابت زمانی اندازه‌گیری شده برای بازوها، داده‌های ورودی با در نظر گرفتن ثابت زمانی سیستم، بر روی محور زمان پخش شده‌اند. داده اندازه‌گیری شده برای یک تناوب در شکل (۵-۶) قابل مشاهده است. با توجه به اینکه مدل روبات، مدلی غیر خطی بوده و مدل فضای حالتی در نظر گرفته شده خطی است، لذا نقطه‌ای را به عنوان نقطه کار در نظر گرفته و حول آن نقطه، دامنه ورودی به بازو به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته شده است تا روبات از حالت خطی خود خارج نشود.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۵-۶) داده ورودی و خروجی روبات الف) بازوی یک (ب) بازوی دو (ج) بازوی سه

یکی از مشکلات شناسایی سیستم‌های چند ورودی- چند خروجی به روش کسری، انتخاب مرتبه یکسان (α) برای همه ورودی‌ها است، به گونه‌ای که بازاء این α مشترک، خطای همه خروجی‌ها کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. در واقع برای سیستم‌هایی که دارای کوپلاژ هستند به ناچار باید بین انتخاب α و حداقل خطای خروجی مصالحه شود، ولی همان طور که در شکل (۴-۵) نشان داده شد، خروجی‌های این روبات از هم مجزا بوده و لذا می‌توان سیستم را دکوپله در نظر گرفت. بنابراین می‌توان برای هر یک از ورودی‌ها مقدار α را مجزا بدست آورد که در نتیجه مدل دقیق‌تری خواهیم داشت. به همین منظور در مرحله آخر به منظور شناسایی بازو، به هر یک از بازو‌ها به طور جداگانه ورودی اعمال شده و اثر آن در خروجی اندازه‌گیری شده است.

در شکل (۷-۵) خروجی واقعی، خروجی تخمین زده شده با مرتبه صحیح و خروجی تخمینی با مرتبه

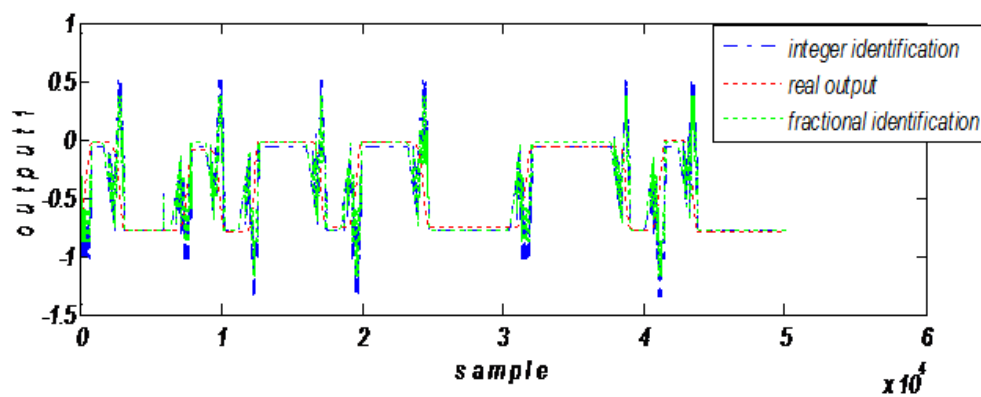
کسری برای هر سه بازو مقایسه شده است. همان طور که در شکل دیده می‌شود خروجی از مرتبه کسری دارای پاسخی بمراتب بهتر از مرتبه صحیح است. در این شبیه‌سازی ماتریس‌های ماتریس کسری فضای حالتی مدل روبات به صورت زیر بدست آمد:

$$\begin{bmatrix} d^{0.1}x/dt^{0.1} \\ d^{0.4}x/dt^{0.4} \\ d^{0.5}x/dt^{0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4982 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -4.5101 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -6.3623 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9.433 \times 10^{-5} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.0037 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0.1544 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.8342 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -3.1104 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2.0509 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

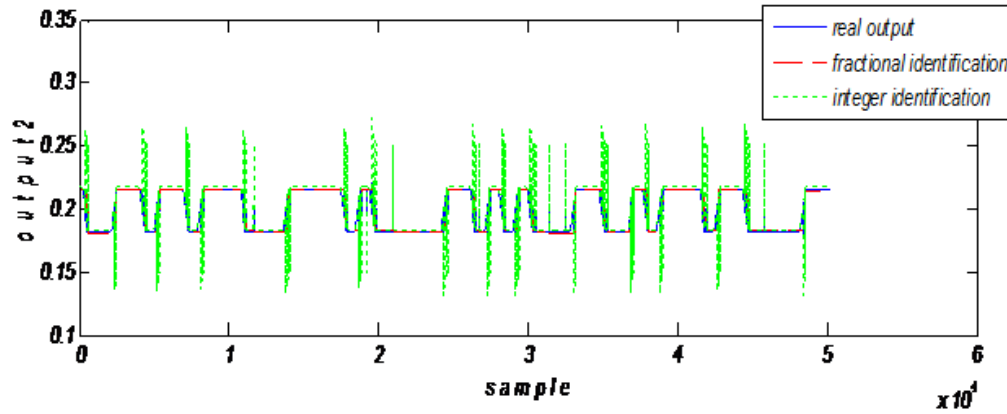
برای اطمینان از صحت آزمایش، آزمایش مجدد با کمک اطلاعات امتحان^{۲۵}، بررسی شد. در شکل (۸-۵)

نتایج ناشی از این آزمایش قابل بررسی است.

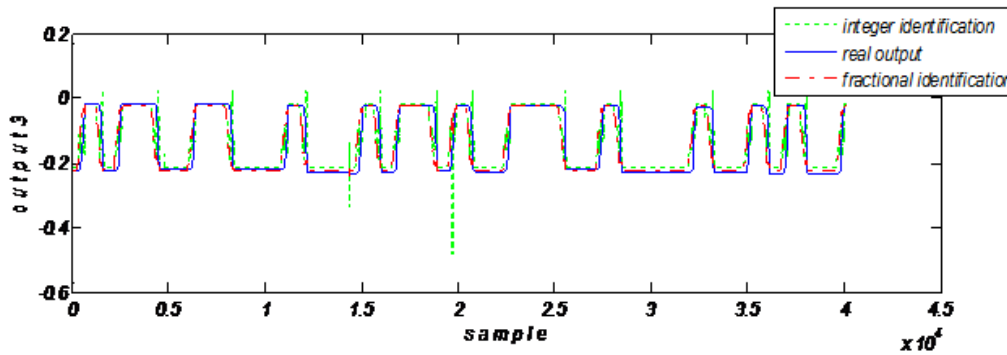


(الف)

²⁵ Test data

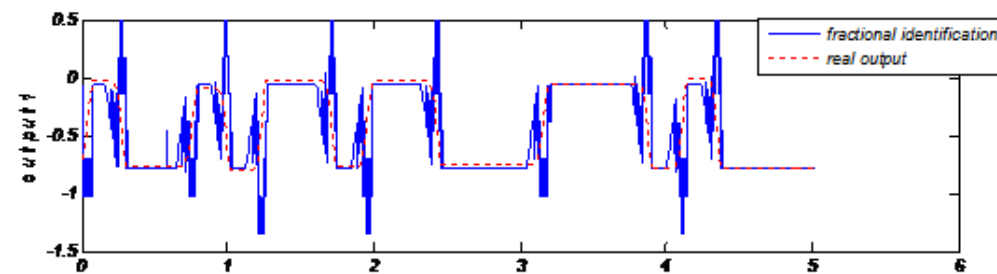


(ب)

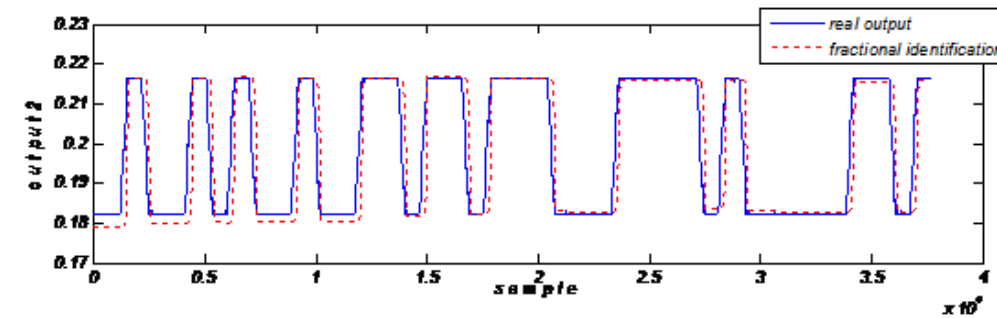


(ج)

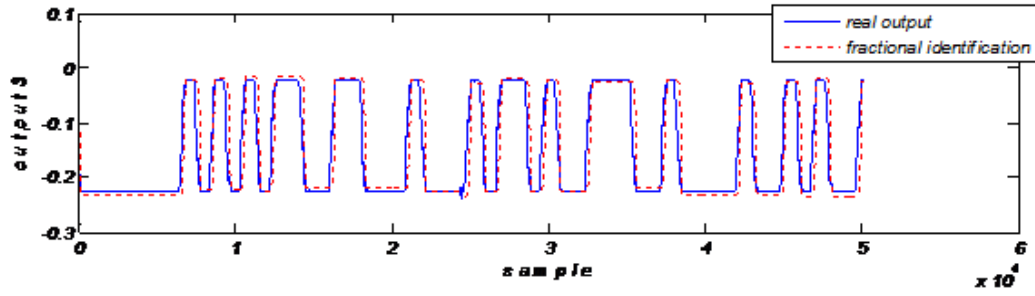
شکل ۵-۷) خروجی واقعی و خروجی تخمین زده شده الف) بازوی یک ب) بازوی دو ج) بازوی سه



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۵-۸) بررسی صحت آزمایش با کمک اطلاعات آزمون الف) خروجی یک ب) خروجی دو ج) خروجی سه

فصل ششم

۶-۱) خلاصه کار و نتیجه گیری

در این پایان نامه در ابتدا پس از آشنایی با ریاضیات کسری، مدل فضای حالتی یک سیستم کسری و شرایط پایداری آن بررسی شد. همچنین روش شناسایی زیرفضایی پیوسته در زمان توضیح داده شد و مزایای شناسایی پیوسته در زمان نسبت به گسسته در زمان نیز بیان شد. سپس برپایه روش زیر فضایی توضیح داده شده روشی بدست آمد که بر اساس آن، با حفظ شرایط پایداری، به شناسایی مدل فضای حالتی کسری پیوسته در زمان یک سیستم چندورودی-چند خروجی غلی رگم وجود اغتشاش پرداخته شده است. الگوریتم فوق ابتدا بر روی یک مدل فرضی امتحان شده و در نهایت به منظور اطمینان از درستی روش، روباتی انتخاب شده و به دو روش کسری و صحیح شناسایی شده و پاسخها با هم مقایسه شدند. نتایج حاکی از اینست که روش کسری پاسخی به مراتب دقیق تر از روش صحیح دارد.

۶-۲) پیشنهادات

- ۱) در مثالهای ارائه شده، حالت‌های سیستم در دسترس بودند و لذا نیازی به تخمین حالتها نداشتیم ولی در اکثر سیستمها تخمین حالتها اجتناب ناپذیر است. برای برطرف شدن این مشکل، می‌بایست کالمن فیلتر کسری را طراحی نمود.
- ۲) با توجه به دکوپله بودن خروجی‌های این روبات از یکدیگر، ما توانستیم برای هر بازو درجه‌ای جداگانه بدست بیاوریم، ولی در بسیاری از سیستمها این عمل امکان پذیر نبوده و دو راه پیش رو داریم، راه اول اینست که بین مرتبه بهینه و حداقل میانگین خطای همه خروجیها مصالحه کنیم و راه دوم اینکه به دنبال روشی باشیم تا بتوان برای هر یک از حالتها مرتبه‌ای جداگانه علاوه تداخل بین خروجیها بدست آورد.

Reference:

- [1] Ichise, M., Nagayanagi, Y., and Kojima, T., (1971), "An analog simulation of non integer order transfer functions for analysis of electrode processes", *Journal of Electroanalytical Chemistry Interfacial Electrochemistry* 33, 253.
- [2] Darling, R. and Newman J., (1997), "On the short behavior of porous intercalation electrodes", *Journal of Electrochemical Society* 144(9), 3057–3063.
- [3] Battaglia, J. L., Cois, O., Puigsegur, L., and Oustaloup, A., (2001), "Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model", *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44(14), 2671–2680.
- [4] AOUN et al (2004) "Numerical Simulations of Fractional Systems: An Overview of Existing Methods and Improvements" Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- [5] Bode, H. W. (1945), "Network Analysis and Feedback Amplifiers Design", Nostrand, New York,
- [6] Tustin, A., Allanson, J. T., Layton, J. M., and Jakeways, R. J., (1958), "The design of systems for automatic control of the position of massive object", in *Proceedings of Institution of Electrical Engineers*, 105, Part C, Suppl. 1.
- [7] Shantanu Das (2008) "Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls" ISBN 978-3-540-72702-6 Springer Berlin Heidelberg New York
- [8] خاتمی زعلیزاده ی، (۱۳۸۱) "دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری" مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۲۹
- [9] Loverro A. (2004) "Fractional Calculus :History, Definitions & Applications for Engineer", Dep. Of Aerospace & Mechanical Eng., Univ. Of Notre Dame, US
- [10] Vinagre, B.M., (2002) "Historical introduction of Fractional Calculus", *Fractional Calculus Application in Automatic Control*, P9, Las Vegas, USA
- [11] Debnath, L., (2002) "Fractional Calculus Fundamentals", Dep. Of Mathematics, Univ. of Pan American, Texas, USA
- [12] Krishna et al., (2008), "Time Domain Response Calculations of Fractance Device of order 1/2" 'J. of Active and Passive Electronic Devices.
- [13] Krishna¹, B. T., Reddy², K. V. V. S. and Kumari S. S., (2008) "Time Domain Response Calculations of Fractance Device of order 1/2" *J. of Active and Passive Electronic Devices*,

[۱۴] مالک ه، پرین ن، (۱۳۸۶) ، پایان نامه کارشناسی ارشد : "بررسی پایداری سیستم های مرتبه کسری" دانشکده

[15] Vinagre, B.M., Mpnje, C.A., Calderson, A.j, (2002), "Frctional Order System & Fractional Order Control Actions" , *Fractional Calculus Applications in Automatic Control* , Las Vegas, USA

[16] علوی ع. (1382) ، پایان نامه کارشناسی ارشد: "حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری" مجله

فرهنگ و اندیشه ریاضی ، شماره 29

[17] Keith B. O., Spanier.j., (2006) "the fractional calculus ;theory and application of differentiation and integration to arbitrary order"

[18] Matignon, D., Novel, N.D., "Some Result On Controllability & Observability Of Finite Dimensional Fractional Differential Systems", <http://www.sig.enst.fr/matignon>

[19] Zadeh, L., Desoer, C.A., (1963) "Linear System Theory" McGraw-Hill

[20] Ogata, K., (1992) "system Dynamics", Prentice-Hall, 2nd

[21] Malti.R., Victor.S., Nicolas.O., Oustaloup.A., (2007), " SYSTEM IDENTIFICATION USING FRACTIONAL MODELS: STATE OF THE ART" *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*

[22] Si-Ammour a, Djennoune. S., Bettayeb.S. ,(2009), "A sliding mode control for linear fractional systems with input and state delays" *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 14, 2310–2318

[23] Garnier.H. , Wang.L., (2007) " Identification of Continuous-time Models from Sampled Data" *springer*

[24] Astrom.k.j, Wittenmark.B (1994) "adaptive control" (2nd edition)

[25] Tohru.K., (2005), " Subspace Methods for System Identification" *Springer*

[26] VAN OVERSCHEE. P., DE MOOR .B., (1996) " SUBSPACE IDENTIFICATION FOR LINEAR SYSTEMS" *KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS*

[27] Ljung L., (1999) "system identification theory for the user" *Prentice Hall Information and System science Series*

[28] Ohsumi .A. , Kameyam. K. , Yamaguchi .K., (2001), " Subspace identification for continuous-time stochastic systems via distribution-based approach" *Automatica* 38 (2002) 63_79

[29] Gelfand i.m., Shilov G.E (1963)“generalized functions,1963”Academic press,newyork and London volume1

[30]Yaglom.A.M, (1962),“an introduction to the stationary random functions” Prentice Hall

[31] DUBINS L. E. , FREEDMAN D. A.,(1963), “RANDOM DISTRIBUTION FUNCTIONS” Communicated by J. L. Doob.

[32] Ito K.,(1954),“stationary random distributions”Memories of the college of science universityof Kyoto,series A,Vol XXVIII, Mathematics No.3

[33] Gelfand i.m., Vilenkin.N.Ya,(1964) “generalized functions” Academic press , newyork and London volume4

[34] Thomassin M, Malti R , (2009) “Subspace method for continuous-time fractional system identification” 15th IFAC Symposium on System Identification, SYSID 2009, Saint Malo France