

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک
پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان

حل مستقیم عددی جریان لایه اختلاطی دو بعدی به روش تفاضل محدود فشرده

دانشجو :

احمد ضرغامی

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد مغربی

بهار ۱۳۸۶

بسمه تعالی

کمیته داوران متشکل از افراد زیر در تاریخ ۸۶/۱/۲۲ این پروژہ را با درجہ عالی تأیید نمودند.

اعضای کمیته دآوری

۱- جناب آقای دکتر محمد محسن شامردان داور و نماینده تحصیلات تکمیلی

۲- جناب آقای دکتر محمود فرزانه گرد داور

۳- جناب آقای دکتر محمد جواد مغربی استاد راهنما

نردبان این جهان ما تهی است
عاقبت این نردبان افتادنی است
لاجرم هر کس که بالاتر نشست
استخوانش سخت تر خواهد شکست

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که در تمامی این سالها حامی من بودند.

تقدیر و تشکر:

من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، بویژه استاد محترم جناب آقای دکتر محمد جواد مغربی که با ارائه راهنمایی‌های مدیرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین جای دارد از دوستان گرامی خود، آقایان مهندس محمدحسین دیبایی بناب و مهندس مجید فیض آبادی فراهانی نیز تشکر نمایم و از درگاه خداوند طلب موفقیت در تمامی مراحل زندگی را برای ایشان خواستارم.

بهار ۱۳۸۶

چکیده:

جریان لایه اختلاطی سیال با شرایط فیزیکی دلخواه به جهت آنکه دارای کاربردهای عملی و صنعتی فراوانی است در زمره مهمترین مباحث مکانیک سیالات قرار گرفته است و به همین دلیل از همان زمانیکه علم مکانیک سیالات بنا نهاده شده است، مبحث فوق مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است.

جریان اختلاطی صفحه‌ای در نتیجه یکی شدن دو جریان موازی سیال، که دارای سرعت‌های مختلف می‌باشند بوجود می‌آید. این دو جریان در انتهای یک صفحه جداکننده، که فرض می‌شود دارای ضخامت ناچیزی می‌باشد با هم مخلوط می‌شوند. در پایین دست این تلاقی، انتقال مومنوم بین دو جریان سیال صورت می‌گیرد. لایه اختلاطی در واقع به ناحیه‌ای که در آن فرایند یکی شدن اتفاق می‌افتد اطلاق می‌گردد.

در این بررسی سعی شده تا با کمک شبیه سازی عددی و به دور از هر گونه مدل سازی و یا فرضی برای ساده سازی، جریان لایه اختلاطی دو بعدی غیرقابل تراکم را به روش حل عددی مستقیم تحلیل کنیم و پدیده خود تشابهی در پروفیل سرعت و گردابه مورد بررسی قرار گیرد.

اغتشاشاتی نیز در ورودی جریان، منتج از حل پایداری لایه اختلاطی در سرعت عمود بر جریان قرار داده شده و ترم‌های تنش‌های رینولدز هم مورد بررسی قرار گرفته است. چگونگی ارتباط رشد ضخامت لایه با اغتشاشات ورودی نیز شرح داده شده است.

فهرست مطالب:

فصل اول: کلیات

- ۱-۱- مقدمه ۱
- ۲-۱- تحقیقات تجربی ۳
- ۳-۱- تحقیقات عددی ۵

فصل دوم: مقدمه ای بر شبیه سازی مستقیم عددی

- ۱-۲- مقدمه ۸
- ۲-۲- تاریخچه ۹
- ۳-۲- دیدگاه عددی ۱۰
- ۴-۲- روش طیفی ۱۱
- ۵-۲- شرایط مرزی ۱۲

فصل سوم: آنالیز پایداری خطی

- ۱-۳- مقدمه ۱۳
- ۲-۳- بدست آوردن معادله اور سامرفیلد ۱۶
- ۳-۳- حل معادله اور سامرفیلد ۲۳
- ۱-۳-۳- روشهای حل معادله پایداری ۲۳
- ۲-۳-۳- حل مساله مقدار ویژه ۲۶
- ۳-۳-۳- حل بردارهای ویژه سرعت ۲۷
- ۴-۳-۳- روش طیفی ۲۸
- ۱-۴-۳-۳- روش نگاشت طیفی ۳۰

۳۲	۴-۳- نتایج پایداری
	فصل چهارم: فرمول بندی ریاضی
۴۰	۴-۱- مقدمه
۴۱	۴-۲- معادلات حاکم
۴۴	۴-۳- شرایط مرزی
۴۷	۴-۴- شرایط اولیه
	فصل پنجم: روش عددی
۴۸	۵-۱- مقدمه
۵۰	۵-۲- محاسبه مشتقات مادی
۵۵	۵-۳- روش محدود کردن دامنه y
۵۷	۵-۴- انتگرال گیری
۵۹	۵-۵- پیشروی در زمان
۶۱	۵-۶- حل معادله پواسون
۶۲	۵-۷- ارزیابی کد و شبیه سازی عددی
۶۳	۵-۷-۱- معادله نفوذ وابسته به زمان
۶۵	۵-۷-۲- گردابه های استوارت
	فصل ششم: جریان لایه اختلاطی آرام
۶۸	۶-۱- مقدمه
۷۰	۶-۲- شبیه سازی جریان لایه اختلاطی آرام
	فصل هفتم: جریان لایه اختلاطی مغشوش

۷۵	۱-۷- مقدمه
۷۵	۲-۷- نتایج شبیه سازی
۷۶	۱-۲-۷- اغتشاشات ورودی
۸۱	۲-۲-۷- رشد ضخامت ورتیسیتته
۸۴	۳-۲-۷- بررسی خود تشابهی و توزیعات تنش رینولدز
۸۸	۳-۷- نتیجه گیری
۸۹	۴-۷- پیشنهادات
۹۰	ضمیمه الف: بدست آوردن شکل چرخشی معادله ناویر - استوکس
۹۲	مراجع

۷	شکل ۱-۱ - شکل شماتیک لایه اختلاطی دو بعدی.
۱۶	شکل ۱-۳ - نمای شماتیک لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی
۲۷	شکل ۲-۳ - نگاشت بین صفحات مختلط α و ω
۳۳	شکل ۳-۳ - مقایسه بین حل مکانی معادله اور سامرفیلد و نتایج میخالکه [5] برای پروفیل سرعت $U(y) = 0.5(1 + \tanh(y))$
۳۳	شکل ۳-۴ - عدد موج حقیقی و سرعت فاز برای حالت دو بعدی. (الف) شبیه سازی طیفی. (ب) نتایج میخالکه [5].
۳۴	شکل ۳-۵ - توزیع قسمت حقیقی تابع ویژه رایلی دو بعدی برای پروفیل سرعت $U(y) = 0.5(1 + \tanh(y))$.
۳۵	شکل ۳-۶ - توزیع قسمت موهومی تابع ویژه رایلی دو بعدی برای پروفیل سرعت $U(y) = 0.5(1 + \tanh(y))$. (الف) شبیه سازی طیفی. (ب) نتایج میخالکه.
۳۶	شکل ۳-۷ - مقایسه بین توابع ویژه $\varphi(y)$ ناپایدارترین مود اغتشاشی، برای حالت مکانی ($\beta = 0.2067$) و حالت زمانی ($\beta_r = 0.2223$)
۳۸	شکل ۳-۸ - مقایسه بین مولفه های (u) ناپایدارترین مود اغتشاشی غیر لزج (الف) شبیه سازی طیفی (ب) نتایج رینولدز و لاوری [6] برای پروفیل سرعت $U(y) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right)$ و $\lambda = \frac{1}{3}$ و $\beta = 0$ و $\alpha = 0.88869 - 0.12850i$
۳۹	شکل ۳-۹ - مقایسه بین مولفه های (v) ناپایدارترین مود اغتشاشی غیر لزج (الف) شبیه سازی طیفی (ب) نتایج رینولدز و لاوری [6] برای پروفیل سرعت $U(y) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right)$ و $\lambda = \frac{1}{3}$ و $\beta = 0$ و $\alpha = 0.88869 - 0.12850i$
۴۰	شکل ۳-۱۰ - تابع ویژه برای جریان سه بعدی لایه اختلاطی با پروفیل $U(y) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right)$ که در آن $\lambda = \frac{1}{3}$ و $\text{Re} = 200$ و $\theta = 30$ و $\omega = 0.3$ و $\alpha = 0.649548 - 0.180226i$
۴۱	شکل ۳-۱۱ - مولفه u برای جریان سه بعدی لایه اختلاطی با پروفیل $U(y) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right)$ که در آن $\lambda = \frac{1}{3}$ و $\text{Re} = 200$ و $\theta = 30$ و $\omega = 0.3$ و $\alpha = 0.649548 - 0.180226i$
۴۲	شکل ۳-۱۲ - مولفه v برای جریان سه بعدی لایه اختلاطی با پروفیل $U(y) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right)$ که در آن $\lambda = \frac{1}{3}$ و $\text{Re} = 200$ و $\theta = 30$ و $\omega = 0.3$ و $\alpha = 0.649548 - 0.180226i$

	آن $\lambda = \frac{1}{3}$ و $Re = 200$ و $\theta = 30$ و $\omega = 0.3$ و $\alpha = 0.649548 - 0.180226i$.
۴۲	شکل ۳-۱۳- مولفه 11 برای جریان سه بعدی لایه اختلاطی با پروفیل $U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right\}$ که در آن $\lambda = \frac{1}{3}$ و $Re = 200$ و $\theta = 30$ و $\omega = 0.3$ و $\alpha = 0.649548 - 0.180226i$.
۴۴	شکل ۴-۱- شکل شماتیک لایه اختلاطی دو بعدی توسعه یافته مکانی
۵۰	شکل ۴-۲- محدوده دامنه محاسباتی و شرایط مرزی.
۵۴	شکل ۵-۱- تقریب مشتق اول تابع $y = 3 \sin(2x) + x^2$.
۵۵	شکل ۵-۲- مرتبه دقت برای مشتق اول با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [2].
۵۷	شکل ۵-۳- تقریب مشتق دوم تابع $y = 3 \sin(2x) + x^2$.
۵۷	شکل ۵-۴- مرتبه دقت برای مشتق دوم با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [2].
۵۹	شکل ۵-۵- تقریب مشتق اول تابع $f(y) = e^{-y^2}$ با توجه به فشردگی سازی در جهت y با $\gamma = 1, \beta = 1$.
۶۰	شکل ۵-۶- تقریب مشتق دوم تابع $f(y) = e^{-y^2}$ با توجه به فشردگی سازی در جهت y با $\gamma = \beta = 1$.
۶۱	شکل ۵-۷- تقریب انتگرال تابع $f'(y) = -2ye^{-y^2}$ با شرایط مرزی $f(y(0)) = f(y(1)) = 0$ که به صورت $f(y) = e^{-y^2}$ می باشد.
۶۴	شکل ۵-۸- مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای $\frac{du}{dt} = -u(t)$ با $u(0) = 1$ [2].
۶۷	شکل ۵-۹- ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از زمان.
۶۷	شکل ۵-۹-۱- ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت x .
۶۸	شکل ۵-۹-۲- ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت y .
۷۰	شکل ۵-۱۰- ماکزیمم خطا در u و v برای تست گردابه های استوارت به صورت تابعی از زمان.
۷۱	شکل ۶-۱- پروفیل سرعت در لایه اختلاطی.
۷۲	شکل ۶-۲- هندسه لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی [7].
۷۲	شکل ۶-۳- توزیع سرعت در جریان اختلاطی در دستگاه مختصات خود تشابه برای ایستگاههای مختلف جریان [7].
۷۴	شکل ۶-۴- گذر زمانی u در Δ فاصله مسوی در طول L برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی بدون

	اغتشاش ورودی.
۷۴	شکل ۶-۵- گذر زمانی v در ۴ فاصله مساوی در طول L_1 برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی بدون اغتشاش ورودی.
۷۵	شکل ۶-۶- پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی بدون اغتشاش ورودی.
۷۶	شکل ۶-۷- پروفیل گردابه w در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی بدون اغتشاش ورودی.
۷۶	شکل ۶-۸- رشد ضخامت ورتیسیتته در جهت x برای جریان بدون اغتشاش.
۷۷	شکل ۶-۹- نمایش سرعت خط مرکزی u_m در جهت x .
۸۰	شکل ۷-۱- گذر زمانی u در $x = 50$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.
۸۰	شکل ۷-۲- گذر زمانی u در $x = 100$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.
۸۱	شکل ۷-۳- گذر زمانی u در $x = 150$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.
۸۱	شکل ۷-۴- گذر زمانی u در $x = 200$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.
۸۲	شکل ۷-۵- گذر زمانی v در $x = 0.50.100$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.
۷۹	شکل ۷-۶- گذر زمانی v در $x = 150$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.

۸۳	شکل ۷-۷- گذر زمانی v در $x = 200$ $y = 0$ برای شبیه‌سازی لایه‌اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.
۸۳	شکل ۷-۸- گذر زمانی u در $x = 97.5$ $y = 1.31$ برای شبیه‌سازی لایه‌اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.
۸۴	شکل ۷-۹- گذر زمانی v در $x = 97.5$ $y = 1.31$ برای شبیه‌سازی لایه‌اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.
۸۵	شکل ۷-۱۰- کانتورهای اسکالر لایه اختلاطی برای اغتشاشات مختلف ورودی در $t = 315$ [8].
۸۶	شکل ۷-۱۱- نیم ضخامت مومنتوم لایه اختلاطی برای اغتشاشات مختلف ورودی [8].
۸۶	شکل ۷-۱۲: کانتورهای اسکالر لایه اختلاطی.
۸۷	شکل ۷-۱۳- ضخامت مومنتوم لایه اختلاطی بدست آمده از شبیه‌سازی.
۸۸	شکل ۷-۱۴- پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.
۸۸	شکل ۷-۱۵- پروفیل سرعت v در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه‌اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.
۸۹	شکل ۷-۱۶- پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دوبعدی
۹۰	شکل ۷-۱۷- نمایش $\sqrt{u'^2} / \Delta u$ به y / δ_m .
۹۰	شکل ۷-۱۸- نمایش $\sqrt{v'^2} / \Delta u$ به y / δ_m .
۹۱	شکل ۷-۱۹- نمایش $\sqrt{u'v'} / \Delta u$ به y / δ_m .

فهرست علائم:

c	سرعت موج
c_i	نرخ رشد یا زوال اغتشاشات
c_r	سرعت فازی اغتشاشات
r	نسبت سرعت جریانهای آزاد
x	طول دامنه فیزیکی و محاسباتی
y	عرض دامنه فیزیکی
D	اپراتور مشتق
J	شماره گره
I	ماتریس واحد
N_x	تعداد نقاط شبکه در جهت x
N_y	تعداد نقاط شبکه در جهت y
P	فشار
Re	عدد رینولدز
U	سرعت جریان آزاد
α	ضریب مشتقات در روش تفاضل محدود فشرده و عدد موج
α_i	نرخ رشد مکانی اغتشاشات
α_r	قسمت حقیقی عدد موج
β	طول موج و پارامتر فشردگی یا انبساط نگاشت
δ_v	ضخامت ورتیسیته
φ	تابع ویژه
ν	لزجت سینماتیک
λ	طول موج اغتشاشات و شدت برش جریان لایه اختلاطی
θ	زاویه بین جهت جریان و جهت موج مورب
ρ	چگالی
ψ	تابع جریان
$\bar{\psi}$	عرض دامنه محاسباتی
ω	ورتیسیته

ω_t	نرخ رشد زمانی اغتشاشات
ω_r	سرعت زاویه‌ای اغتشاشات
Δt	گام زمانی
Δx	گام مکانی
ΔU	اختلاف سرعت جریانهای آزاد
∇	اپراتور گرل

فصل اول

کلیات

۱-۱- مقدمه :

جریان اختلاطی صفحه‌ای^۱ در نتیجه یکی شدن دو جریان موازی سیال، که دارای سرعت‌های مختلف می‌باشند بوجود می‌آید. این دو جریان در انتهای یک صفحه جداکننده^۲، که فرض می‌شود دارای ضخامت ناچیزی می‌باشد با هم مخلوط می‌شوند (شکل ۱-۱). در پایین دست این تلاقی، انتقال مومنوموم بین دو جریان سیال صورت می‌گیرد. لایه اختلاطی در واقع به ناحیه ای که در آن فرایند یکی‌شدن^۳ اتفاق می‌افتد اطلاق می‌گردد.

ساختار ساده تشکیل لایه اختلاطی دلیلی بر متعارف بودن این پدیده در طبیعت می‌باشد. در بسیاری از کاربردهای صنعتی با لایه اختلاطی مواجه می‌شویم. لبه فرار یک ایرفویل، لبه فرار پره توربین، لیزرهای شیمیایی و کوره‌های احتراق تنها معدود از مواردی هستند که در آنها با پدیده لایه اختلاطی مواجه

^۱ - Plane mixing layer

^۲ - Splitter plate

^۳ - Merging

می‌شویم. بنابراین فهم دقیق فرایندهای فیزیکی لایه اختلاطی در طراحی بهینه این وسایل نقش بسیار مهمی دارد.

از بعضی از پارامترها بصورت عمومی برای مشخص کردن خصوصیات این جریان استفاده می‌شود. یکی از این پارامترها نسبت سرعت جریان آزاد^۱ بوده که بصورت $r = U_2/U_1$ که $U_2 < U_1$ نشان داده می‌شود. این پارامتر شدت برش^۲ موجود در لایه را مشخص می‌کند. مقدار کوچک r بیانگر شدت برش بیشتر می‌باشد. محدوده r را بصورت $0 \leq r \leq 1$ تعریف می‌کنیم. مقدار $r = 0$ بیانگر حالت یک جریان بوده (یعنی یکی از جریانها در ابتدا ساکن است) و $r = 1$ بیانگر جریان یکنواخت بر روی یک جسم می‌باشد که بدین ترتیب این جریان در واقع یک جریان لایه اختلاطی نبوده بلکه بیشتر شبیه جریان برگشتی^۳ می‌باشد. پارامتر مهم دیگر در تعیین مشخصه های جریان لایه اختلاطی عدد رینولدز می‌باشد. برای لایه اختلاطی تراکم‌ناپذیر این پارامترها برای مشخص کردن مقیاس طولی و زمانی جریان کافی می‌باشند. همچنین تعدادی پارامترهای اضافی نیز وجود دارد که ممکن است در بعضی از مواقع برای توصیف وضعیت لایه اختلاطی بکار رود که می‌توان به نسبت چگالی دو سیال $\left(\rho_2/\rho_1\right)$ اشاره کرد که برای حالتی می‌باشد که در آن جریان بصورت لایه‌ای در نظر گرفته می‌شود.

^۱ - Free-Stream velocity ratio

^۲ - Shearing intensity

^۳ - Wake

۱-۲- تحقیقات تجربی

شاید بتوان گفت که اولین تحقیق تجربی در مورد لایه اختلاطی توسط لیپمان و لافر^۱ در سال ۱۹۴۷ انجام گرفت. بسیاری از کمیت‌های آماری در این تحقیق بدست آمدند. رشد در ضخامت لایه به همراه تنش برشی، سرعت، توزیع میکروسکوپی و کمیت‌های حاصله از معادله بالانس انرژی توربولانس، بخوبی تشریح شدند.

براون و روشکو^۲ در سال ۱۹۷۱، تحقیقی در زمینه تاثیرات چگالی در لایه اختلاطی انجام دادند. در این تحقیق، آنها حضور ساختاری را در سرتاسر لایه کشف کردند. در رینولدز پایین، وجود ساختارهایی که بخوبی شکل گرفته‌اند، یک واقعیت پذیرفته شده می‌باشد. همزمان با تحقیقات براون و روشکو، نتایج آزمایشگاهی منتشر شده توسط وینانت و برواند^۳ در سال ۱۹۷۴ مشخص کرد که جفت شدن گردابه‌ها، که عاملی اساسی در رشد لایه آرام می‌باشد، یک فاکتور مهم و کلی در رشد لایه اختلاطی در رینولدزهای متوسط می‌باشد. وجود این ساختارها در رینولدزهای بالا توسط دیموتاکیس^۴ و براون در سال ۱۹۷۶ به اثبات رسید.

^۱ - Liepmann & Laufer

^۲ - Brown & Roshko

^۳ - Winant & Brown

^۴ - Dimotakis

کنراد^۱ در ۱۹۷۶ حضور ناپایداریهای ثانویه، که منجر به تشکیل ساختارهای اضافی در لایه اختلاطی گازی می‌شود، را نشان داد. این ساختارها - گردابه‌های در جهت جریان^۲ - در نتیجه حرکت سه بعدی لایه و شدت یافتن آن بوسیله غلتک‌های بزرگ در جهت عرضی جریان^۳، مشخص می‌شوند.

مونگال^۴ و دیموتاکیس در سال ۱۹۸۴، اختلاط و واکنش بین دو واکنش دهنده (F_2 , H_2) را در لایه اختلاطی گازی بررسی کردند. اثرات نیروی خارجی^۵ بر روی این پدیده توسط روبرتز^۶ و روشکو در سال ۱۹۸۵ بررسی شد. نتایج آنها مشخص کرد تشکیل محصولات بوجود آمده در لایه، به عدد رینولدز جریان بسیار حساس می‌باشد. در رینولدزهای پایین، نیروی خارجی باعث افزایش اختلاط می‌شود در حالیکه در رینولدزهای بالا، اختلاط در نتیجه نیروی خارجی، می‌تواند بطور کامل متوقف شود. تحقیقات آزمایشگاهی جدید در زمینه حضور واکنش شیمیایی در لایه اختلاطی و افزایش دما در آن می‌باشد. که در حقیقت کوششی برای فهمیدن نحوه تبادل بین علم مکانیک سیالات و علم شیمی می‌باشد.

^۱ - Konrad

^۲ - *Stream wise vortex*

^۳ - *Span wise rollers*

^۴ - Mungal

^۵ - *forcing*

^۶ - Roberts

۱-۳- تحقیقات عددی

با پیشرفت در علم کامپیوتر و ظهور ابر کامپیوترها، تحقیقات عددی در زمینه های مختلف علم مکانیک سیالات، از جمله لایه اختلاطی، در کنار تحقیقات تجربی آغاز شد. در فهم صحیح فیزیک لایه اختلاطی، سه نگرش اساسی در زمینه شبیه سازی وجود دارد:

۱- روش ورتکس^۱.

۲- شبیه سازی لایه اختلاطی توسعه یافته زمانی^۲.

۳- شبیه سازی لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی^۳.

محاسبات اولیه بیشتر به روش ورتکس انجام می شد که این به دلیل حضور و اهمیت ورتیسیتته های بزرگ در این جریان بوده که بازدهی این روش عددی را تضمین می کرد.

اکتون^۴ در سال ۱۹۷۶ انباشتگی صفحه ورتکس را برای فهم نحوه رشد لایه اختلاطی، شبیه سازی کرد.

آشورت^۵ در سال ۱۹۷۹ اولین کسی بود که نتایج خود را در مورد لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی به روش ورتکس منتشر کرد.

در شبیه سازی لایه اختلاطی توسعه یافته زمانی، دامنه محاسباتی به طرف پایین دست جریان با

سرعت متوسط لایه جابجا می شود. جریان سپس در محاسبات در گام زمانی اجازه توسعه می یابد. اولین

^۱ - Vortex method

^۲ - Time-developing layer

^۳ - Spatially-developing layer

^۴ - Acton

^۵ - Ashurts

شبهه سازی با این نگرش در سال ۱۹۷۸ توسط منصور^۱ و همکاران انجام شد. نتایج حاصله از تحقیقات وی نشان داد که مکانیزم جفت شدن گردابه ها، دلیل بر رشد لایه می باشد. شبهه سازی وی، حضور رفتار خود مشابهی^۲ را در مومنتوم متوسط و مرتبه اول متغیرهای جریان، نشان داد.

کین^۳ در سال ۱۹۸۱ این تحقیق را با اعمال یک تابع تطبیق^۴، که منجر به محدود شدن دامنه فیزیکی جریان آزاد در جهت z ، از $z \rightarrow \pm\infty$ به یک دامنه محدود محاسباتی شد، ادامه داد. نتایج وی اشاره‌ای به تشکیل تاثیرات سه بعدی ناشی از بی نظمی های در جهت عرضی جریان، در گردابه‌های اولیه داشت.

رایلی و متکالف^۵ در سال ۱۹۸۰ شبهه سازی توسعه یافته مکانی را با افزایش میزان تراکم شبکه بندی گسترش داد. نتایج آنها تقابل بین اغتشاشات هارمونیک و تاثیرات این اغتشاشات بر روی رشد لایه را مشخص کرد. شبهه سازی وی حضور موده‌های زیر هارمونی^۶ و نقش مهم آنها را در توسعه لایه مشخص کرد. در تحقیقات اخیر، معادله انتقال بعضی اجزا، به شبهه سازی توسعه یافته زمانی انجام گرفته توسط رایلی، اضافه شد. در این تحقیقات رشد لایه واکنشی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این تحقیقات نشان داد که آزاد شدن گرما منجر به کاهش ضخامت لایه می شود.

شبهه سازی توسعه یافته مکانی از دو روش قبلی مشکل تر می باشد. تنها با استفاده از ابر کامپیوترها امکان این نوع شبهه سازی ممکن می باشد. در بسیاری از این نوع شبهه سازیها، مساله محدود به مسایل

^۱ - Mansour .et al.

^۲ - Self- similarity

^۳ - Cain . et al.

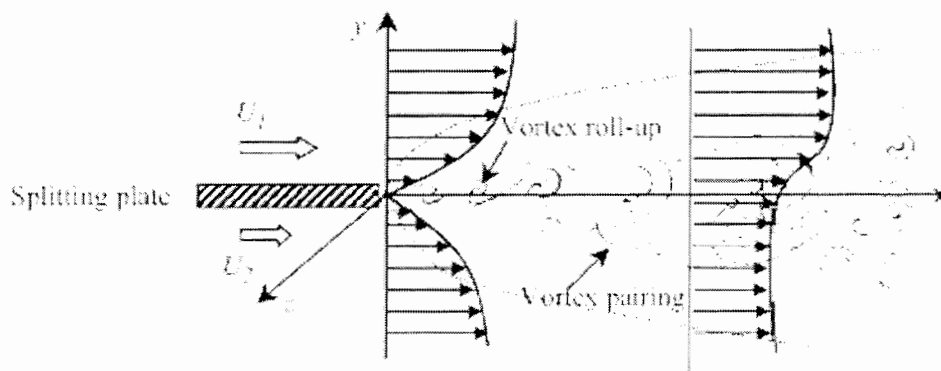
^۴ - Mapping

^۵ - Riley & Metcalfe

^۶ - Sub harmonic

دوبعدی می‌باشد. منصور در سال ۱۹۸۵ از یک روش جالب برای حل استفاده کرد. او روش ورتکس را در محدوده اولیه لایه استفاده نمود، سپس شبکه‌بندی اویلری را در انتهای محدوده اعمال کرد تا بدین ترتیب محاسبات جزئیات حوزه جریان در ناحیه عمل متقابل گردابه‌ها امکان پذیر گردد.

گرین استین^۱ و همکاران در سال ۱۹۸۶ شبیه‌سازی لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی را با استفاده از تفاضل محدود^۲ انجام دادند. در این نوع شبیه‌سازیها از شبکه بندی و تعداد گره‌های زیاد استفاده نشد. تحقیقات جدید در زمینه شبیه‌سازی توسعه یافته زمانی لایه اختلاطی اجباری^۳ و لایه اختلاطی واکنشی^۴ می‌باشد.



شکل ۱-۱- شکل شماتیک لایه اختلاطی دو بعدی.

^۱ - Grinstein .et al.
^۲ - Finite difference
^۳ - forced mixing layer
^۴ - Interaction layer

فصل دوم

مقدمه ای بر شبیه سازی مستقیم عددی

۲-۱- مقدمه :

حل جریان توربولانس، بعثت پیچیدگی ماهیت جریان و نبود امکانات کافی در گذشته چندان مورد توجه نبوده است، زیرا یک حل تحلیلی، حتی برای ساده ترین جریانهای توربولانس وجود ندارد. یک توصیف کامل از جریان توربولانس که در آن متغیرهای جریان (یعنی سرعت و فشار)، بعنوان توابعی از زمان یا مکان شناخته شوند، تنها با حل عددی معادله ناویر-استوکس ممکن می باشد. حل عددی استفاده شده در این تحقیق، شبیه سازی مستقیم عددی^۱ یا به اختصار **D.N.S** می باشد.

هدف اصلی **D.N.S** حل معادلات برای جریان توربولانس بدون استفاده از هیچگونه مدل توربولانسی می باشد و برای این منظور می بایستی معادلات ناویر-استوکس بدون هیچگونه ساده سازی مورد استفاده قرار گیرند.

^۱ - Direct Numerical Simulation

در حال حاضر با ظهور ابرکامپیوترها می توان جریانهای توربولانس کاملاً توسعه یافته را به کمک روشهای **D.N.S** بطور دقیق تحلیل کنیم و خواص آنرا بدست آوریم. جهت گسسته سازی یک شبکه بندی دقیق و کامل مورد احتیاج است. بنابراین، اجرای هر برنامه **D.N.S** احتیاج به مدت زمان طولانی دارد. بنابراین، تا امروز محاسبات **D.N.S** فقط تا رینولدزهای متوسط امکان پذیر بوده است.

۲-۲- تاریخچه :

استفاده از **D.N.S** برای اولین بار توسط اورزاگ و پترسون^۱ در سال ۱۹۷۲ در مرکز تحقیقات اتمسفریک آمریکا صورت گرفت. این اشخاص از روش طیفی^۲ برای انجام^۳ 32 محاسبه جریان توربولانس ایزوتروپیک در $Re = 35$ (بر اساس مقیاسهای تیلور)، استفاده کردند.

گام مهم بعدی در این زمینه توسط روگالو^۳ در سال ۱۹۸۱ برداشته شد. تحقیقات بعدی توسط اسپالارت^۴ انجام گرفت. او با استفاده از یک روش ابتکاری، جریان لایه مرزی توربولانس را بر روی یک صفحه تخت، تحت گرادیان فشارهای مختلف حل کرد.

جریانات محدود به دیواره مانند جریان تراکم پذیر در کانال و لایه مرزی توربولانس در دهه اخیر مورد توجه قرار گرفته است. به تازگی از **D.N.S** جهت بررسی لایه اختلاطی توربولانس با سرعت زیاد و عمل متقابل بین موجهای شوک و توربولانس استفاده می شود.

^۱ - Orszag & Patterson

^۲ - Spectral Method

^۳ - Rogallo

^۴ - Spalart

۲-۳- دیدگاه عددی :

جهت تحلیل جریانهای پیچیده تر به کمک **D.N.S** احتیاج به کامپیوترهایی با حافظه و سرعت بیشتر و همچنین استفاده از برنامه های هوشمندتر و الگوریتم های سریعتر می باشد.

برای جریانهای پرریودیک از روش **FFT**^۱ در جهت شبیه سازی زمانی^۲ استفاده می شود، در حالیکه برای استفاده از شبیه سازی مکانی^۳ استفاده از روشهای تفاضل محدود مرتبه بالا^۴، معمول می باشد.

اخیراً از روش تفاضل محدود فشرده مرتبه بالا **Lele** در بسیاری از روشهای **D.N.S** استفاده شده است. المانهای طیفی^۵ و روشهای جمعی^۶، جهت گسسته سازی مکانی در هندسه های پیچیده بکار می رود. از چندجمله ایهای چبیشف در جریانهای غیر پرریودیک، لایه مرزی و کانال استفاده می شود.

در گام زمانی از روشهایی همچون رانج^۷ - کوتا^۸، کرانک^۹ - نیکلسون^{۱۰}، آدامز^{۱۱} - بشفورد^{۱۲} و... استفاده می شود. معمولاً معادلات پواسون یا هلمهولتز (شرایط مرزی دیریشله و نیومن) در طی استفاده از **D.N.S** بایستی حل شوند. الگوریتم های مختلفی تاکنون برای حل معادلات پواسون و هلمهولتز آزمایش و استفاده شده است.

^۱ - Fast Fourier Transformation

^۲ - Temporal

^۳ - Spatial

^۴ - High order finite difference

^۵ - Spectral elements

^۶ - Collocation method

^۷ - Runge - Kutta

^۸ - Crank - Nicolson

^۹ - Adams - Bashford

۲-۴- روش طیفی^۱:

مساله اصلی در هر روش عددی، محاسبه دقیق مشتق‌ها می‌باشد و این علت اصلی استفاده تقریباً تمام **D.N.S** های انجام شده اخیر در زمینه توربولانس، از روش طیفی می‌باشد. زیرا این روش، یک روش بسیار دقیق و یک ابزار مناسب جهت محاسبه مشتق‌های عبارات گسسته شده می‌باشد. روش طیفی یک فضای واقعی با استفاده از سریهای توابع متعامد برای شبیه سازی فراهم می‌آورد.

$$f(x_j) = \sum_n^{N-1} Q_{n,j} \hat{f}_n \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-2)$$

انتخاب معمول برای توابع متعامد استفاده از سریهای فوریه^۲ است. ممکن است این انتخاب کمی پیچیده به نظر برسد، اما با این انتخاب مشتق‌های مکانی f به راحتی محاسبه می‌شوند.

$$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}_n e^{i\omega_n j} \quad \& \quad f_j = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}_n e^{-i\omega_n j} \quad (2-2)$$

عبارت بالا به ترتیب تبدیل معکوس فوریه و تبدیل فوریه می‌باشد. حال با مشتق‌گیری f داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{n=0}^{N-1} i\omega_n \hat{f}_n e^{i\omega_n j} \quad (3-2)$$

بنابراین برای محاسبه مشتق‌های f رابطه (۱-۲) تبدیل فوریه را محاسبه می‌کند، رابطه (۲-۲) محاسبه

ضرایب جدید فوریه و رابطه (۳-۲) محاسبه تبدیل معکوس فوریه سریهای جدید را انجام می‌دهد.

^۱ - Spectral Method

^۲ - Fourier Series

۲-۵- شرایط مرزی^۱:

در **D.N.S**، انتخاب شرایط مرزی یک انتخاب مهم و حساس می باشد. انتخاب شرایط مرزی در مرزهای آزاد یک برآورد مشکل می باشد. برای جریانات تراکم ناپذیر که دارای جهات آماری هموزن می باشند، مانند جهت عرضی لایه مرزی دو بعدی، معمولاً شرایط مرزی پریرودیک اعمال می شوند. اما بسیاری از جریانات پیچیده توسعه یافته، در جهت جریان غیر هموزن بوده، که بنابراین احتیاج به انتخاب شرایط مرزی مناسب دارند.

همچنین تراکم پذیر بودن جریان، واکنش پذیری سیال و تولید حرارت در سیال منجر به اعمال شرایط مرزی اضافی می شوند.

^۱ - Boundary condition

فصل سوم

آنالیز پایداری خطی

۳-۱- مقدمه :

در سیالات لزج می‌توان ثابت کرد که جریان آرام هنگامی که عدد رینولدز آن از مقدار بحرانی بیشتر می‌شود، ناپایدار می‌گردد، ولی نمی‌توان آشفتگی جریان را پیش بینی نمود. لذا فقط می‌توان گذرش^۱ - فرآیند تبدیل جریان آرام به مغشوش - را بصورت کیفی شرح دهیم و توصیفی از تغییرات در زمان و مکان و حدود تغییرات رینولدز بحرانی، برای تبدیل جریان آرام به آشفته را بیان نمود [18].

مسأله انتقال جریان از حالت آرام به مغشوش، در سالهای اخیر موضوع تحقیقات بسیاری از دانشمندان علم مکانیک بوده است. اولین سری آزمایشات دقیق در مورد پدیده انتقال توسط هاگن^۲ (۱۸۳۹) انجام گرفت. آزمایشات دقیق تر و با جزئیات بیشتر توسط رینولدز^۳ (۱۸۸۳) صورت گرفت. تئوری پایداری خطی،

^۱ - Transition
^۲ - Hagen
^۳ - O. Reynolds

بر مبنای استفاده از روشهای جدید عددی و آزمایشگاهی، برای بدست آوردن فهمی دقیق از این پدیده می‌باشد.

لایه برشی مورد مطالعه در این پژوهش، لایه اختلاطی می‌باشد. این لایه در اثر اختلاط دو جریان با سرعتهای متفاوت که در ابتدا بوسیله یک صفحه جداکننده^۱ از یکدیگر جدا هستند، شکل می‌گیرد. نمای شماتیک لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی در شکل ۳-۱ نشان داده شده است. هرچه گرادیان سرعت بین دو جریان بیشتر باشد، شدت اختلاط نیز بیشتر است. جریان لایه اختلاطی جزء جریانهای برشی آزاد^۲ یا جریانهای بدون مرز^۳ به حساب می‌آید. بر طبق تئوری رایلی^۴ (۱۸۸۰) شرط لازم برای ناپایداری جریان غیر لزج، داشتن نقطه عطف در پروفیل سرعت می‌باشد. در اعداد رینولدز بالا، جریان لایه اختلاطی و بطور کلی، تمام جریانات برشی آزاد، تقریباً به صورت موازی می‌باشد لذا می‌توان از آنالیز پایداری خطی غیرلزج در تحلیل جریانات برشی آزاد استفاده کرد. در این تحقیق، لایه اختلاطی در قالب یک جریان ناپایدار غیرلزج، با مرزهای نامحدود در جهت متقاطع جریان^۵، بررسی می‌شود. جریان به صورت دو بعدی غیر قابل تراکم و هموزن در نظر گرفته شده است. هنگامی که جریان لایه اختلاطی در اولین مراحل از تکامل آن، توسعه می‌یابد، شرایط مرزی ورودی با استفاده از حل معادله اور _ سامرفیلد، که در واقع یک مسأله مقدار ویژه می‌باشد، مشخص می‌گردد.

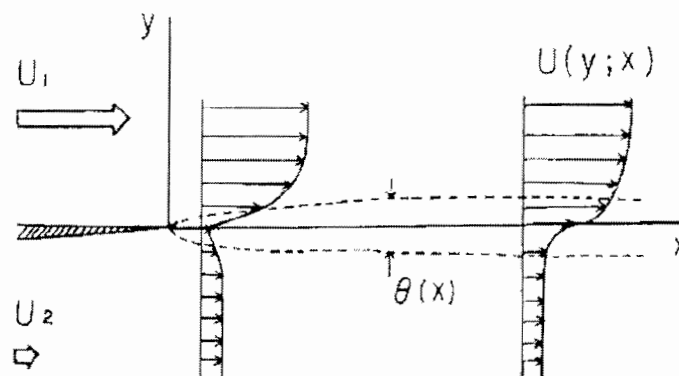
^۱ - Splitter plate

^۲ - Free shear layers

^۳ - Free bounded layers

^۴ - Rayleigh

^۵ - Cross stream



شکل ۱-۳ - نمای شماتیک لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی

۲-۳ - بدست آوردن معادلات اور - سامرفیلد:

تئوری آنالیز پایداری خطی بر مبنای معادلات خطی شده ناویر- استوکس می‌باشد. برای این منظور

فرض می‌شود معادله ناویر- استوکس بوسیله مقیاسهای مناسب طول و سرعت بی‌بعد شده‌اند. برای بدست

آوردن معادله اور - سامرفیلد فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

- مولفه‌های سرعت و فشار را به یک مولفه متوسط، $(U(y)\underline{i}, P(x, y, z))$ و یک مولفه اغتشاشی

$(\underline{u}'(x, y, z, t), p'(x, y, z, t))$ تجزیه می‌کنیم.

$$\underline{u}(x, y, z, t) = U(y)\underline{i} + \underline{u}'(x, y, z, t), \quad (1-3)$$

$$p(x, y, z, t) = P(x, y, z) + p'(x, y, z, t). \quad (2-3)$$

که i بردار واحد در جهت اصلی جریان می‌باشد.

• مولفه های اغتشاشی بسیار کوچک می باشند، بطوریکه از جملات غیرخطی این مولفه ها می توان صرف نظر کرد.

• مولفه های متوسط، جوابهای مستقل از زمان معادله ناویر استوکس می باشند.

بنابراین معادلات حرکت و پیوستگی خطی شده عبارتند از:

$$\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \underline{u}'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} \underline{i} = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \underline{u}', \quad (3-3)$$

$$\nabla \cdot \underline{u}' = 0. \quad (4-3)$$

با فرض اینکه مولفه های اغتشاشاتی سرعت و فشار بصورت موجهای حرکتی باشند، خواهیم داشت:

$$\underline{u}'(x, y, z, t) = \hat{u}(y) \cdot \exp\{i(\alpha x + \beta z - \omega t)\}, \quad (5-3)$$

$$p'(x, t) = \hat{p}(y) \cdot \exp\{i(\alpha x + \beta z - \omega t)\}. \quad (6-3)$$

مقادیر ثابت $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ و $\omega = \omega_r + i\omega_i$ در واقع اعداد مختلط هستند. α_r عدد موج، ω_r فرکانس

سیکلی یا سرعت زاویه ای اغتشاشات، α_i نرخ رشد مکانی^۱، ω_i نرخ رشد زمانی^۲ و β طول موج در جهت

عرضی جریان^۳ (Z) می باشد.

بدون از دست دادن جامعیت مسأله، می توان فرض کرد $\omega_r > 0$. اگر $\alpha_i = 0$ فرض شود، آنگاه تقویت

اغتشاشات فقط به y و t وابسته خواهد بود، که به آن حالت زمانی گفته می شود. واگر $\omega_i = 0$ در

نظر گرفته شود، به آن حالت مکانی، اطلاق می گردد. برای حالت اغتشاشات خنثی، $\alpha_i = \omega_i = 0$ بوده،

^۱ - Spatial

^۲ - Temporal

^۳ - Span wise

که دو حالت زمانی و مکانی دارای حل یکسان می‌باشد [5]. رابطه بین α و ω و سرعت موج بصورت زیر می‌باشد:

$$c = \frac{\omega}{\alpha}. \quad (7-3)$$

با جایگذاری معادلات (3-5) و (3-6) در معادلات خطی شده حرکت، معادلات زیر برای موده‌های ویژه سرعت و فشار $(\hat{u}(y), \hat{p}(y))$ بدست می‌آید.

$$i\alpha(U-c)\hat{u} + U\hat{v} = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}}[\hat{u}'' - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{u}], \quad (8-3)$$

$$i\alpha(U-c)\hat{v} = -D\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}}[\hat{v}'' - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{v}], \quad (9-3)$$

$$i\alpha(U-c)\hat{w} = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}}[\hat{w}'' - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{w}], \quad (10-3)$$

$$i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{v}) + D\hat{p} = 0. \quad (11-3)$$

D مشتق اول در جهت عمود بر جریان می‌باشد.

- تئوری اسکوایر!

این تئوری بیان می‌کند که « اگر یک موج سه بعدی بصورت $\hat{u}(y) \cdot \exp\{i(\alpha x + \beta z - \omega t)\}$ در یک مقدار مشخص از رینولدز باعث ناپایداری گردد، برای موج دو بعدی، عدد رینولدز ناپایداری، کمتر است.» به بیان دیگر، اگر Rc_3 ، رینولدز بحرانی اغتشاش سه بعدی و Rc_2 ، رینولدز بحرانی اغتشاش دو بعدی و θ زاویه بین جهت جریان و جهت موج جلویی (موج مورب) باشد، آنگاه:

$$Rc_3 = \frac{Rc_2}{\cos\theta}$$

¹ - Squire theory

که در آن :

$$\theta = \tan^{-1}(v_x/v_z) \quad (12-3)$$

v_x و v_z سرعت موج در جهت جریان^۱ و جهت عرضی جریان می‌باشند. زاویه مورب همچنین با عدد

موج مکانی، بصورت زیر مرتبط می‌شود :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda_x/T}{\lambda_z/T}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\pi/\alpha_r}{2\pi/\beta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (13-3)$$

تبدیلات اسکواایربصورت زیر می‌باشند.

$$\tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad (14-3)$$

$$\tilde{\alpha}\tilde{u} = \alpha\hat{u} + \beta\hat{w}, \quad (15-3)$$

$$\tilde{p} = (\tilde{\alpha}/\alpha)\hat{p}. \quad (16-3)$$

با استفاده از این تبدیلات، مولفه عرضی مود ویژه سرعت، (\hat{w}) ، از معادلات (۳-۸) تا (۳-۱۱) حذف

می‌شود و داریم:

$$i\tilde{\alpha}(U - \tilde{c})\tilde{u} + U\tilde{v} = -i\tilde{\alpha}\tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}}[\tilde{u}'' - \tilde{\alpha}^2\tilde{u}], \quad (17-3)$$

$$i\tilde{\alpha}(U - \tilde{c})\tilde{v} = -D\tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}}[\tilde{v}'' - \tilde{\alpha}^2\tilde{v}], \quad (18-3)$$

$$i\tilde{\alpha}\tilde{u} + D\tilde{v} = 0. \quad (19-3)$$

^۱ - Stream wise

که در آن :

$$\tilde{v} = \hat{v}, \quad \tilde{c} = \hat{c}, \quad \tilde{Re} = \text{Re} \left(\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}} \right)$$

با تعریف تابع جریان بصورت

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) \exp(i\tilde{\alpha}(x - \tilde{c}t)). \quad (20-3)$$

رابطه بین تابع جریان و مولفه های دو بعدی سرعت بصورت زیر خواهد بود.

$$u(x, y, t) = \tilde{u}(y) \cdot \exp(i\tilde{\alpha}(x - \tilde{c}t)) = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (21-3)$$

$$v(x, y, t) = \tilde{v}(y) \cdot \exp(i\tilde{\alpha}(x - \tilde{c}t)) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (22-3)$$

رابطه بین تابع ویژه (ϕ) و مودهای ویژه سرعت و فشار عبارت است از:

$$\tilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (23-3)$$

$$\tilde{v} = -i\tilde{\alpha}\phi, \quad (24-3)$$

$$\tilde{p} = U' \phi - (U - \tilde{c})\phi' - \frac{1}{\tilde{\alpha} \tilde{Re}} (\phi''' - \tilde{\alpha}^2 \phi'). \quad (25-3)$$

انتخاب تابع جریان بصورت دلخواه نخواهد بود، بلکه باید دقیقاً معادله پیوستگی را ارضاء کند و به شکل

موج حرکتی معرفی شود. حال مسأله مقدار ویژه که تحت عنوان معادله اور _ سامرفیلد شناخته

می شود، به سادگی با جایگزینی توابع ویژه سرعت و فشار (معادلات (22-3) و (23-3)) در معادله (16-3)

بدست می آید.

$$(U - \tilde{c})(\phi'' - \tilde{\alpha}^2 \phi) - U'' \phi = \frac{-i}{\alpha \text{Re}} [\phi'''' - 2\tilde{\alpha}^2 \phi'' + \tilde{\alpha}^4 \phi] \quad (26-3)$$

باید توجه داشت که $D = d/dy$, $\alpha Re = \bar{\alpha} Re$. از آنجاییکه معادله اور - سامرفیلد یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۴ می باشد، که احتیاج به چهار شرط مرزی دارد، که این شرایط مرزی برای جریانهای برشی آزاد بصورت عدم وجود اغتشاش و گرادیان اغتشاش در مرزهای جریان آزاد ($\pm\infty$) می باشد. از این رو شرایط مرزی دیریشله و نیومن برای معادله اور - سامرفیلد در نظر گرفته می شود.

$$\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = 0 \quad (27-3)$$

$$\varphi'(+\infty) = \varphi'(-\infty) = 0 \quad (28-3)$$

فرم ماتریسی معادله اور - سامر فیلد بصورت زیر خواهد بود :

$$A\varphi = \bar{c}\varphi \quad (29-3)$$

که :

$$A = (D^2 - \bar{\alpha}^2 I)^{-1} \left[\Lambda_v (D^2 - \bar{\alpha}^2 I) - \Lambda_v + \frac{i}{\alpha Re} (D^2 - \bar{\alpha}^2 I) \right] \quad (30-3)$$

معادله (۲۹-۳) یک مسأله مقدار ویژه می باشد، که در آن:

- I ماتریس واحد از مرتبه N می باشد.
- N تعداد نقاطی که برای گسسته سازی در جهت y استفاده شده است.
- ماتریسهای قطری بوده که مقادیر U'' , U در مختصات گسسته y بر روی قطر اصلی آنها قرار دارد.

یک فرض ساده کننده در معادله اور-سامرفیلد زمانی است که عدد رینولدز بسیار بزرگ باشد ($Re \rightarrow \infty$)، یا اینکه اثر لزجت از بین رفته باشد ($\nu \rightarrow 0$)، در اینصورت با حذف جملات مربوط به ویسکوزیته در معادله اور-سامرفیلد به معادله (۳-۳۱) که به معادله رایلی مشهور می‌باشد، خواهیم رسید:

$$\varphi'' - \left(\frac{U''}{U - \bar{c}} + \bar{\alpha}^2 \right) \varphi = 0 \quad (3-31)$$

این معادله از مرتبه دو می‌باشد. لذا برای حل تنها به دو شرط مرزی نیاز داریم.

در حل دو بعدی معادله اور-سامرفیلد، که در این پژوهش برای جریان لایه اختلاطی مورد استفاده قرار گرفته است، مولفه های اغتشاشی سرعت و فشار (معادلات (۳-۵) و (۳-۶)) به شکل زیر کاهش می‌یابند:

$$\underline{u}'(x, y, t) = \underline{\hat{u}}(y) \cdot \exp\{i(\alpha x - \omega t)\}, \quad (3-32)$$

$$p'(x, t) = \hat{p}(y) \cdot \exp\{i(\alpha x - \omega t)\}. \quad (3-33)$$

در این حالت، تبدیلات اسکوییر بصورت زیر خواهند بود.

$$\bar{\alpha}^2 = \alpha^2, \quad (3-34)$$

$$\bar{u} = \hat{u}, \quad (3-35)$$

$$\bar{p} = \hat{p}. \quad (3-36)$$

همانطور که ملاحظه می شود، در حل دو بعدی معادله اور- سامرفیلد نیازی به استفاده از تبدیلات اسکوایر نمی باشد. همچنین مقدار θ برابر صفر می شود. برای حل مکانی معادله اور- سامرفیلد باید معادله (۳-۲۹) را در قالب کلی زمانی و با عدد موج مختلط بیان کنیم.

۳-۳ - حل معادله اور سامرفیلد :

۳-۳-۱- روشهای حل معادله پایداری

همانطور که می دانیم معادله اور- سامرفیلد برای محاسبه پایداری جریانات لزج مورد استفاده قرار می گیرد، برای حل این معادله مقدار ویژه، دو روش وجود دارد.

الف : پایداری زمانی.

ب : پایداری مکانی.

الف - پایداری زمانی^۱:

اگر رشد اغتشاشات در زمان در نظر گرفته شود در این صورت طول موج اغتشاشات $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ یک مقدار حقیقی و معلوم است. در این حالت معادله اور-سامرفیلد برای هر جفت از عددهای α و Re به یک معادله‌ای که دارای تابع ویژه $v(y)$ و مقادیر ویژه $c = c_r + c_i$ می‌باشد، تبدیل می‌گردد. در این صورت مساله مقدار ویژه، بصورت پارامتری زیر معرفی می‌شود.

$$f(\text{Re}, U, \alpha, c_i, c_r) = 0 \quad (37-3)$$

که در آن c_r سرعت فازی اغتشاشات و c_i نشانگر نرخ رشد یا دمپ شدن اغتشاشات می‌باشد. در این صورت داریم:

$$v'(y) = \hat{v}(y) \exp\{i\alpha(x - ct)\} \quad (38-3)$$

با توجه به اینکه جمله $\exp(i\alpha x)$ یک جمله پریودیک است:

$$v'(y) = A_1 \hat{v}(y) \exp(\alpha c_r t + \alpha c_i t) \Rightarrow v'(y) = A \hat{v}(y) \exp(\alpha c_r t) \quad (39-3)$$

و از آن نتیجه می‌گیریم که رابطه رشد اغتشاشات و c_i به صورت زیر می‌باشد:

$$c_i > 0 \Leftrightarrow \text{رشد اغتشاشات نسبت به زمان و ناپایداری.}$$

$$c_i = 0 \Leftrightarrow \text{حالت خنثی.}$$

$$c_i < 0 \Leftrightarrow \text{دمپ اغتشاشات نسبت به زمان و پایداری.}$$

^۱ - Temporal Stability

ب - پایداری مکانی^۱:

اگر رشد اغتشاشات در مکان در نظر گرفته شود در این صورت فرکانس امواج یک مقدار حقیقی و معلوم می‌شود و عدد موج یک مقدار مختلط است.

$$f(\text{Re}, U, \omega, \alpha_r, \alpha_i) = 0 \quad (40-3)$$

$$v'(y) = \hat{v}(y) \exp\{i\alpha(x - ct)\} \quad (41-3)$$

که در آن ω معلوم و $\exp(i\alpha_r x)$ یک جمله پریودیک است در نتیجه داریم:

$$v'(y) = A_1 \hat{v}(y) \exp(i\alpha_r x + i\alpha_i x) \Rightarrow v'(y) = A \hat{v}(y) \exp(-\alpha_i t) \quad (42-3)$$

و از آن نتیجه می‌گیریم که رابطه رشد اغتشاشات و α_i به صورت زیر می‌باشد:

$\alpha_i < 0 \Leftrightarrow$ رشد امواج نسبت به مکان و ناپایداری.

$\alpha_i > 0 \Leftrightarrow$ دمپ امواج و پایداری.

$\alpha_i = 0 \Leftrightarrow$ حالت خنثی.

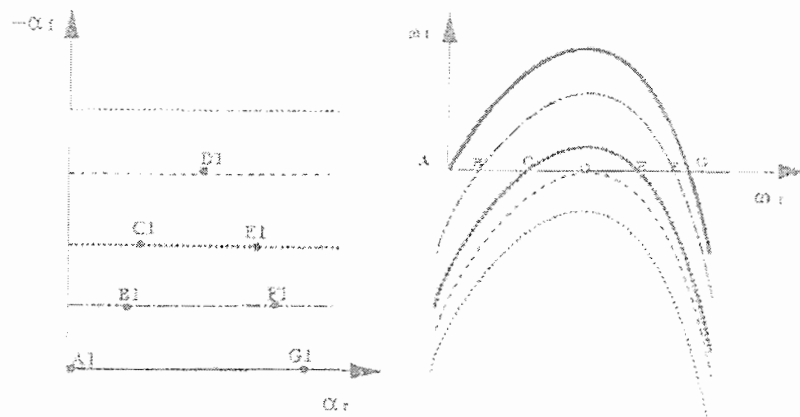
^۱ - Spatial Stability

۳-۳-۲- حل مسأله مقدار ویژه :

همانطور که در بخش قبلی مشخص شد، هیچ حل مستقیمی برای مسأله مقدار ویژه مکانی وجود ندارد و این بدلیل آن است که امکان ارزیابی ماتریس A در معادله (۳-۲۹) وجود ندارد. اما از یک نگرش نگاهت مختلط برای حل مکانی می‌توان استفاده کرد. ابتدا بایستی معادله اور-سامرفیلد زمانی برای عدد موجهای مختلط متفاوت حل شود و فرکانس زاویه ای (ω) محاسبه شود. بنابراین از یک نگاهت در ناحیه ای از فضای مختلط α (دوتایی های (α_r, α_i)) و ناحیه ای در فضای مختلط ω (دوتایی های (ω_r, ω_i)) استفاده کنیم باید توجه شود $\omega = \alpha c$ ، که در آن c شامل N مقدار ویژه مختلف می‌باشد.

نمای شماتیک از این نگاهت در شکل ۳-۲ نشان داده شده است [2]. با توجه به هر α ، یک حل زمانی معادله اور-سامرفیلد برای ω وجود دارد. حل معادله مکانی اور-سامرفیلد (مقدار ویژه) در واقع عدد موجهای مکانی وابسته به فرکانسهایی با قسمت موهومی صفر می‌باشد.

وابستگی متقارن بین α های مختلف $(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1)$ و (A, B, C, D, E, F, G) ω در شکل ۳-۲ تشریح شده است. بنابراین در پی مشخص شدن θ , Re , $U(y)$ و فرکانس، می‌توان به سادگی عدد موج مکانی را بدست آورد. بردارهای ویژه که وابسته به مقادیر ویژه مکانی هستند نیز به راحتی بدست می‌آیند.



شکل ۳-۲- نگاشت بین صفحات مختلط α و ω [۲].

۳-۳-۳- حل بردارهای ویژه سرعت :

با استفاده از فرضیات جریان موازی، حضور اغتشاشات سرعت و فشار بصورت موجهای حرکتی (معادلات (۳۲-۳) و (۳۳-۳))، بردارهای ویژه سرعت و فشار دو بعدی، مستقیماً با ارزیابی سمت راست معادلات (۲۳-۳) و (۲۴-۳) و (۲۵-۳) محاسبه می‌شود. استخراج \bar{u} ، \bar{v} از معادلات (۸-۳) و (۹-۳) نیاز به حل معادله ماتریسی مختلط دارد که به راحتی قابل حصول است. در این پژوهش محاسبات پایداری خطی در فضای فیزیکی y ، با استفاده از روش نگاشت طیفی انجام گرفته است، که جزئیات آن در بخش بعدی تشریح می‌شود.

۳-۳-۴- روش طیفی^۱:

روش طیفی به همراه روش تفاضل محدود و المان محدود، یکی از سه روش اصلی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌باشد. اگر حلی برای یک معادله دیفرانسیل معمولی یا جزئی با دقت بالا در یک محدود ساده^۲ با داده‌های هموار^۳ نیاز باشد، معمولاً روش طیفی بهترین گزینه است. از مزایای روش طیفی، دقت بسیار بالای این روش در مقایسه با روشهای المان محدود و تفاضل محدود می‌باشد.

مرحله اول در روش طیفی این است که یک تابع تخمین انتخاب کنیم. انتخاب سریهای فوریه معمول است، اما اگر تابع حقیقی، متناوب نباشد با مشکل روبرو می‌شود بنابراین تخمین چند جمله‌ای پیشنهاد بهتری می‌باشد. چند جمله‌ایهای «لژاندری»^۴ و «چبیشف»^۵ یک انتخاب عمومی می‌باشد. فرم چند جمله‌ای چبیشف بصورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\varphi(\eta) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\eta) \quad (43-3)$$

که در آن T_n با معادله زیر بدست می‌آید:

$$T_n(\eta) = \cos\left(\frac{n}{\cos(\eta)}\right) \quad (44-3)$$

چند جمله‌ایهای چبیشف در بازه $[-1, 1]$ به ازای جمیع نقاط η_i قرار می‌گیرد.

$$\eta_i = \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (45-3)$$

^۱ - Spectral method

^۲ - Simple domain

^۳ - Smooth data

^۴ - Legendre polynomial

^۵ - Chebyshev polynomial

تئوری ماتریس تفاضل چیشف:

برای هر $N \geq 1$ ماتریس دیفرانسیل طیفی چیشف D_N با $(N+1) \times (N+1)$ سطر و ستون که از 0 تا

N نشان داده می شود، بصورت زیر می باشد:

$$\left. \begin{aligned} D_{ii}^l &= -\frac{\eta_i}{2(1-\eta_i^2)} \\ D_{ij}^l &= -\frac{c_j (-1)^{(i+j)}}{c_i (\eta_j - \eta_i)} \quad \text{if } i \neq j \text{ with } c_0 = 2, c_i = 1 \\ D_{ij}^k &= (D_{ij}^l)^k \end{aligned} \right\} \quad (46-3)$$

$$D_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2+1}{6} & & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline & \frac{2(-1)^j}{1-x_j} & \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1-x_i} & \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N-i}}{1+x_i} \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N-j}}{1+x_j} & \frac{2N^2+1}{6} \\ \hline \end{array}$$

۳-۳-۴-۱ - روش نگاشت طیفی^۱

عملگرهای مشتق ارائه شده فقط در بازه $\eta = [-1, 1]$ تعریف گردیده‌اند، ولی چون قلمرو فیزیکی لایه اختلاطی $(-\infty, +\infty)$ می‌باشد، لذا نیاز به یک تغییر متغیر و یا به عبارتی، نگاشتی برای تبدیل قلمرو فیزیکی به قلمرو محاسباتی $[-1, 1]$ داریم.

نگاشت مورد نظر باید خصوصیات زیر را داشته باشد :

۱- نگاشت باید یک‌به‌یک باشد، یعنی خطوط شبکه هم خانواده نباید یکدیگر را قطع کنند.

۲- از نقطه نظر عددی، در مناطقی که گرادیانهای شدید جریان وجود دارد، بایستی توزیع نقاط شبکه، متراکم، هموار و اعوجاج شبکه کم باشد.

۳- خطوط شبکه باید متعامد و یا تقریباً متعامد باشند.

تبدیل مثلثاتی مورد استفاده در این تحقیق، بصورت زیر می‌باشد که دامنه فیزیکی $(-\infty \leq y \leq \infty)$ را به محدوده محاسباتی $(-1 \leq \eta \leq 1)$ تصویر می‌کند.

$$y = \beta \tan(\pi\eta/2) \quad (3-47)$$

ضریب β در معادله فوق پارامتر فشردگی یا تراکم نگاشت می‌باشد. با انتخاب مناسب β ، این تبدیل، شبکه بندی را در نقاط نزدیک به مرکز جریان، که بیشتر مورد توجه می‌باشد، متمرکز می‌کند و اطلاعات دقیق تری از مرکز لایه اختلاطی به ما می‌دهد.

^۱ - Mapping spectral method

تبدیلات معادلات دیفرانسیل، برای نگاشت محدوده فیزیکی به محدوده محاسباتی طبق قوانین زنجیره‌ای برای مشتقات پاره‌ای بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = f'(y) \quad , \quad D_{ij}^1(y) = D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (48-3)$$

$$D_{ij}^2(y) = D_{ij}^2(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \quad (49-3)$$

$$D_{ij}^3(y) = D_{ij}^3(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^3 + 3D_{ij}^2(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} \quad (50-3)$$

$$D_{ij}^4(y) = D_{ij}^4(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^4 + 6D_{ij}^3(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D_{ij}^2(\eta) \left[3 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} \right] + D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} \quad (51-3)$$

حال مسأله مقدار ویژه (۲۹-۳) با استفاده از مشتق‌های پاره‌ای فوق حل می‌شود. شرایط مرزی در دامنه محاسباتی بصورت زیر خواهد بود:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \quad (52-3)$$

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = 0 \quad (53-3)$$

حال مسأله بطور کامل محدود می‌شود و تحلیل پایداری خطی در یک پروفیل سرعت داده شده، می‌تواند انجام گیرد.

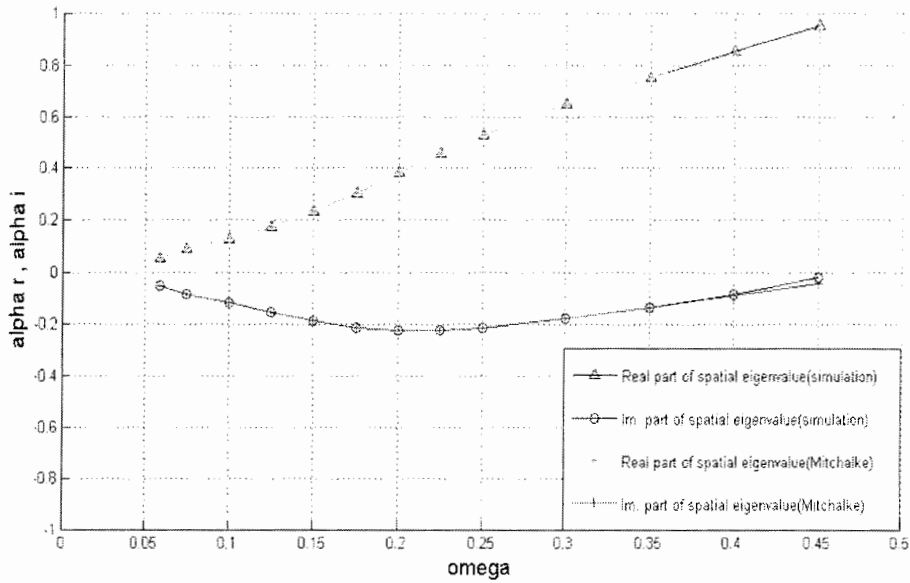
۳-۴ - نتایج پایداری :

پروفیل سرعت جریان اصلی در آنالیز پایداری خطی مکانی لایه اختلاطی دوبعدی بصورت زیر در نظر گرفته شده است :

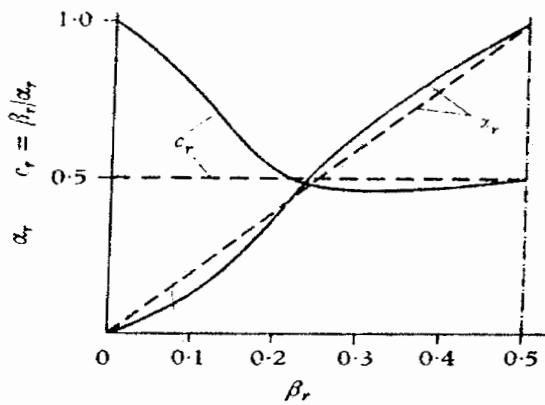
$$U(y) = 0.5(1 + \tanh(y)) \quad (3-54)$$

نتایج حل معادله اور _ سامرفیلد، با نتایج بدست آمده توسط میخالکه [5] برای لایه برشی غیر لزج دوبعدی توسعه یافته مکانی، مقایسه گردیده است. میخالکه از انتگرال گیری عددی برای حل معادله رایلی (اور _ سامر فیلد غیر لزج) استفاده کرد. در شکل ۳-۳ نتایج بدست آمده از روش طیفی با نتایج میخالکه مقایسه شده است.

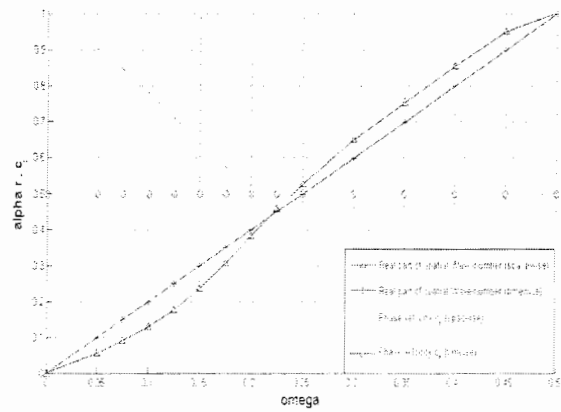
قسمت حقیقی عدد موج (α_r) به همراه سرعت فاز $c_r = \beta_r / \alpha_r$ نسبت به β_r در شکل ۳-۴ نشان داده شده است.



شکل ۳-۳ - مقایسه بین حل مکانی معادله اور _ سامرفیلد و نتایج میشالکه [5] برای پروفیل سرعت $U(y) = 0.5(1 + \tanh(y))$



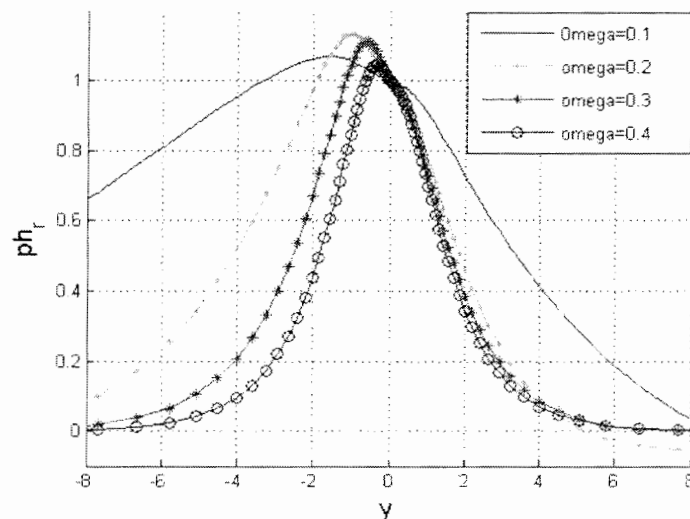
(ب)



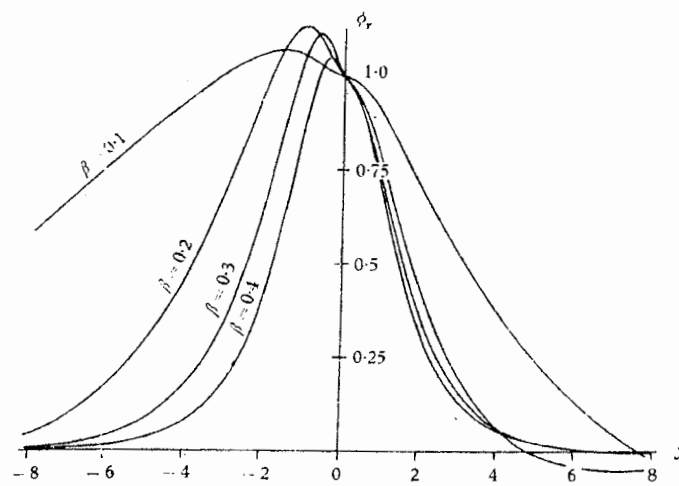
(الف)

شکل ۴-۲ - عدد موج حقیقی و سرعت فاز برای حالت دو بعدی. (الف) شبیه سازی طیفی. (ب) نتایج میشالکه [5].

شکل ۳-۵ و ۳-۶ مقایسه بین قسمتهای حقیقی و موهومی تابع ویژه معادله رایلی در فرکانسهای مختلف را نشان می‌دهد. در این نتایج مقادیر اولیه با فاکتور مختلط $(1/[\varphi_r(0) + i\varphi_i(0)])$ نرمالایز شده‌اند. مشاهده می‌شود که یک تطابق عالی بین نتایج بدست آمده از روش طیفی با نتایج میثالکه برقرار می‌باشد.



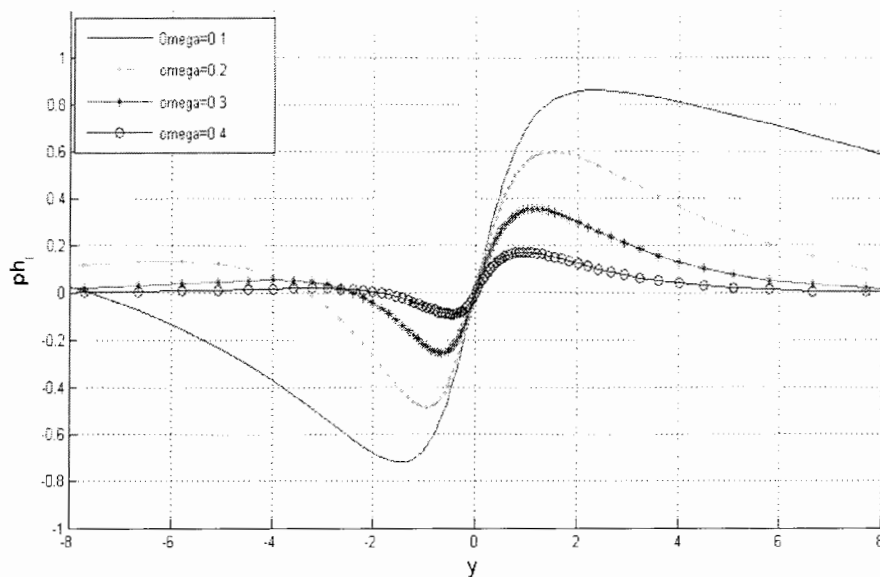
(الف)



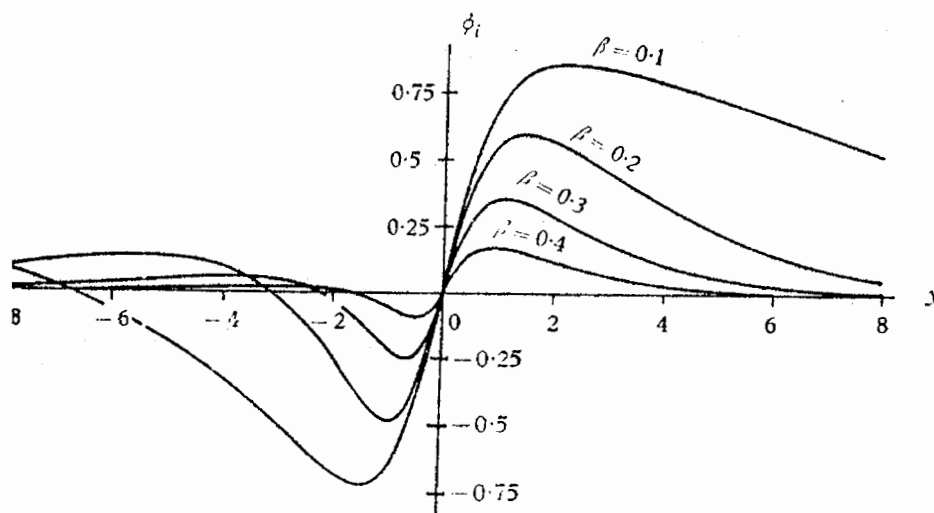
(ب)

شکل ۳-۵- توزیع قسمت حقیقی تابع ویژه رایلی دو بعدی برای پروفیل سرعت $U(y) = 0.5(1 + \tanh(y))$

(الف) شبیه سازی طیفی. (ب) نتایج میثالکه [5].



(الف)

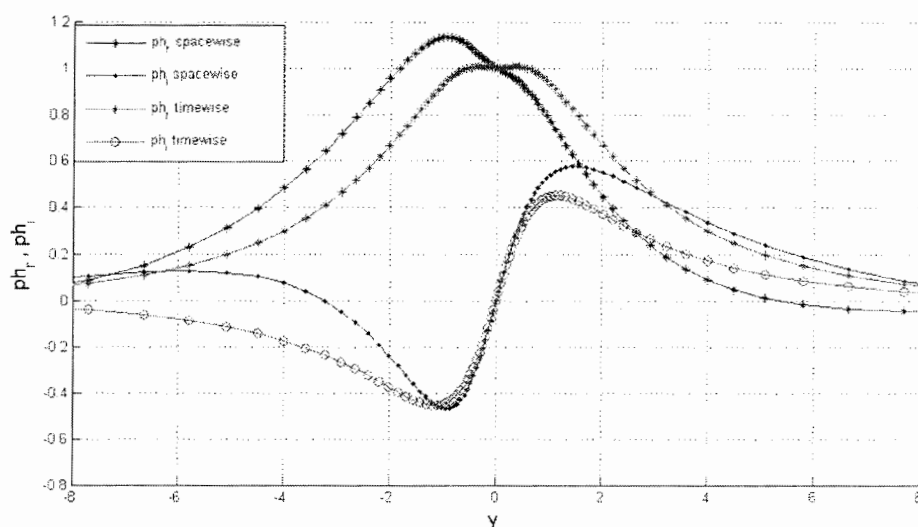


(ب)

شکل ۶-۳- توزیع قسمت موهومی تابع ویژه رایلی دو بعدی برای پروفیل سرعت $U(y) = 0.5(1 + \tanh(y))$

(الف) شبیه سازی طیفی. (ب) نتایج میثالکه [5].

مقایسه بین توابع ویژه برای ناپایدارترین مود اغتشاشی برای هر دو حالت مکانی ($\beta = 0.2067$) و حالت زمانی ($\beta_r = 0.2223$) در شکل ۷-۳ نشان داده شده است.



شکل ۷-۳- مقایسه بین توابع ویژه $\phi(y)$ ناپایدارترین مود اغتشاشی، برای حالت مکانی ($\beta = 0.2067$) و حالت

زمانی ($\beta_r = 0.2223$).

همانطور که دیده می شود بر خلاف حالت زمانی، $\phi_r(y)$ متقارن و $\phi_i(y)$ پادمقارن نمی باشند.

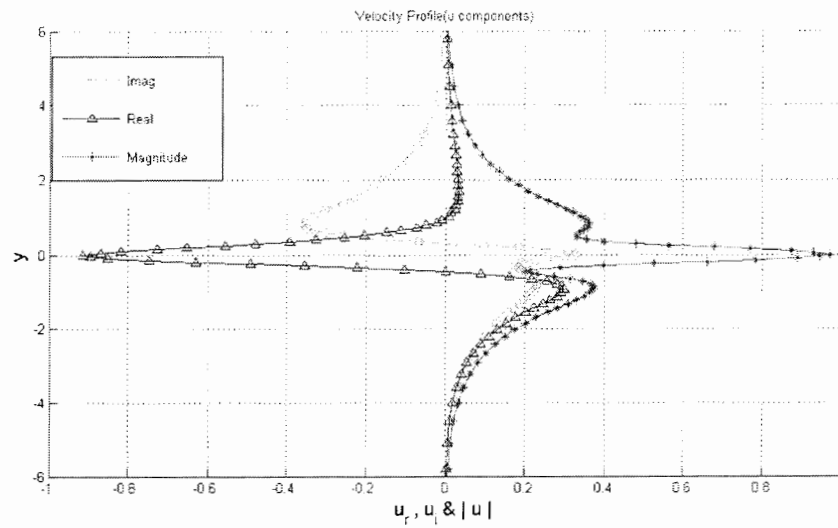
در شکل ۸-۳ و ۹-۳ مولفه سرعت در جهت جریان (u) و جهت متقاطع جریان (v) مربوط به

ناپایدارترین مود، برای پروفیل سرعت $U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right\}$ برای حالت دوبعدی، نشان داده شده‌اند. نتایج بدست آمده با نتایج رینولدز و لاوری¹ [6] مقایسه شده‌اند، که صحت و دقت روش حل استفاده شده را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که پروفیل‌های سرعت تابع ویژه، در مرزهای آزاد، صفر و در مرکز لایه اختلاطی دارای بیشترین تغییرات می‌باشند. مولفه‌های سرعت با فاکتور بزرگترین مقدار خود، بی‌بعد شده‌اند.

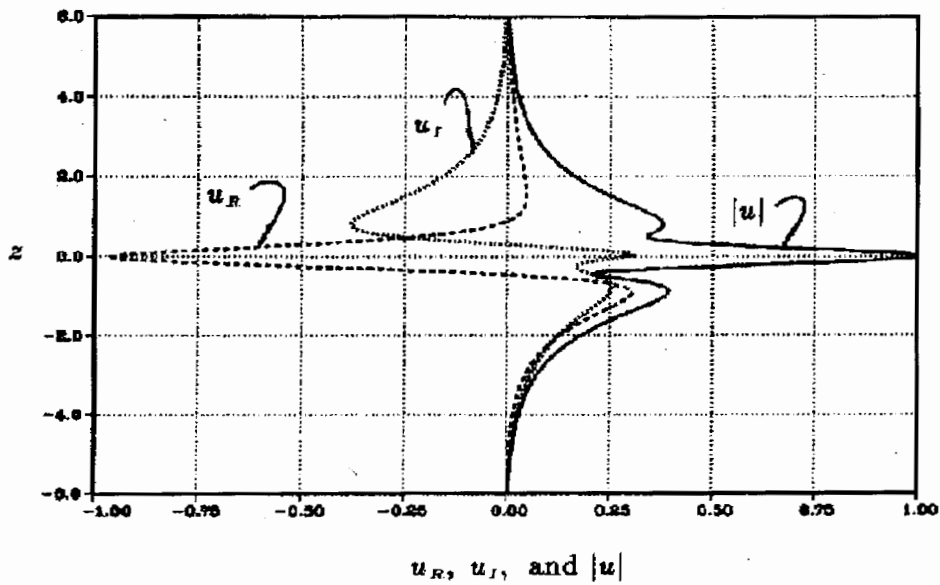
همانطور که گفته شد از آنجایی که حل مکانی توابع ویژه متقارن و پادمقارن نمی‌باشند، از اینرو مولفه‌های تابع ویژه u و v نیز پادمقارن و متقارن نمی‌باشند.

در هر شبیه‌سازی مکانی لایه اختلاطی با نیروهای اغتشاشی تصادفی در مرز ورودی، مشخص بودن سرعت در جهت متقاطع جریان در شرایط مرزی ورودی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا می‌بایستی سرعت در جهت متقاطع جریان در مرزهای آزاد $(\pm\infty)$ صفر باشد و یا بعبارت دیگر شرایط حل پذیری ارضاء شود بنابراین هر نیروی اغتشاشی که از معادله اور-سامرفیلد بدست می‌آید، در صورتیکه از مولفه سرعت متقاطع جریان (v) به عنوان نیرو استفاده کند می‌تواند برای مشخص کردن مرز ورودی دامنه محاسباتی به کار رود. در شبیه‌سازیهای مستقیم عددی لایه اختلاطی از v به عنوان نیروی اغتشاشی استفاده می‌شود زیرا v در شرط مرزی ورودی در حالت متقارن، نامتقارن و یا ترکیبی از این دو، شرایط حل پذیری را ارضاء می‌کند [2].

¹ - W.C.Reynolds . P.S.Lowery



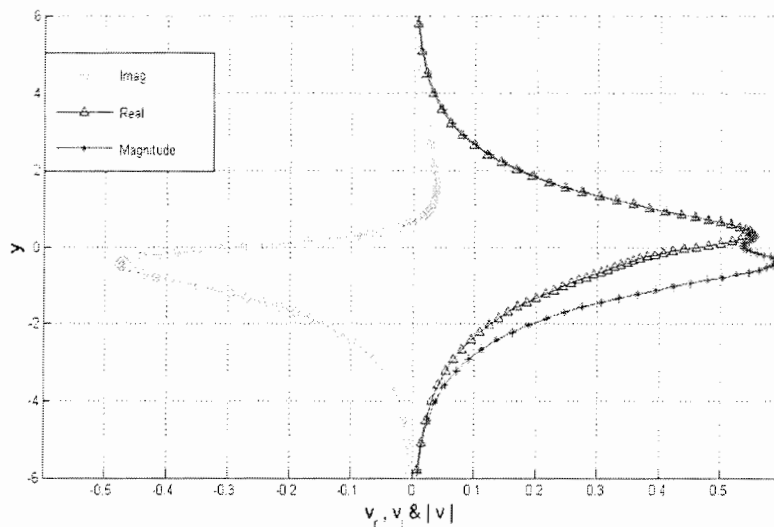
(الف)



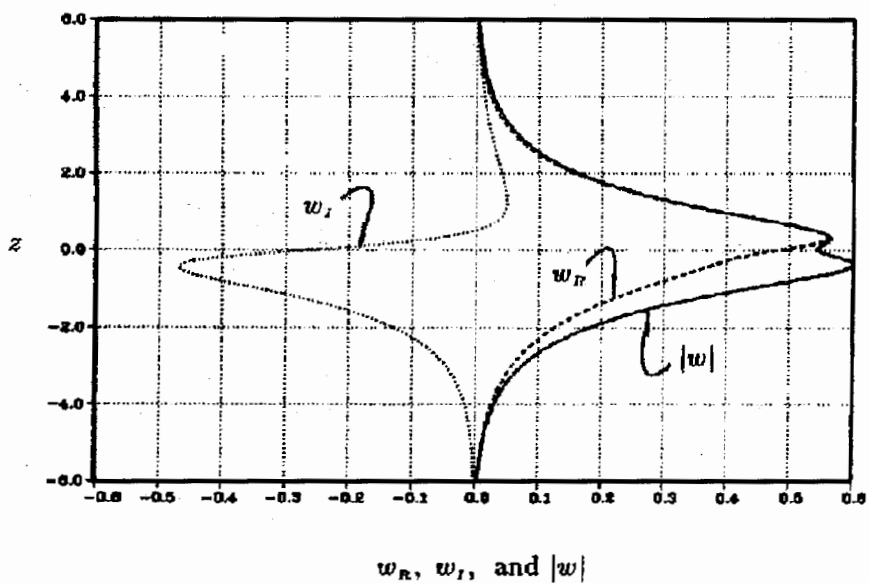
(ب)

شکل ۳-۸ - مقایسه بین مولفه های (u) ناپایدارترین مود اغتشاشی غیر لزج (الف) شبیه سازی طیفی (ب) نتایج رینولدز

ولادری [6] برای پروفیل سرعت $U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right\}$ و $\lambda = \frac{1}{3}$ و $\alpha = 0.88869 - 0.12850i$ و $\beta = 0$.



(الف)



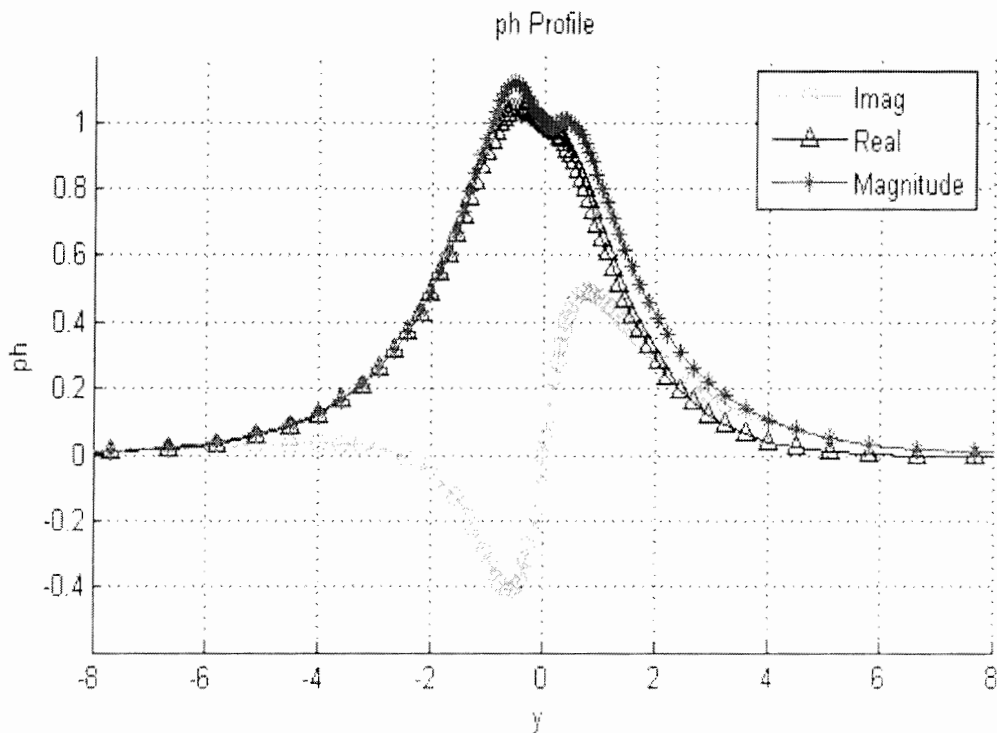
(ب)

شکل ۳-۹- مقایسه بین مولفه های (۱) ناپایدارترین مود اغتشاشی غیر لزج (الف) شبیه سازی طیفی (ب) نتایج رینولدز

ولاوری [6] برای پروفیل سرعت $U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right\}$ و $\lambda = \frac{1}{3}$ و $\alpha = 0.88869 - 0.12850i$ و $\beta = 0$.

در انتها آنالیز پایداری خطی برای جریان لایه اختلاطی سه بعدی توسعه یافته مکانی با پروفیل سرعت
 $U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right\}$ که در آن $\lambda = \frac{1}{3}$ می‌باشد، نیز انجام گرفته‌است که نتایج آن در زیر نشان
 داده شده‌است.

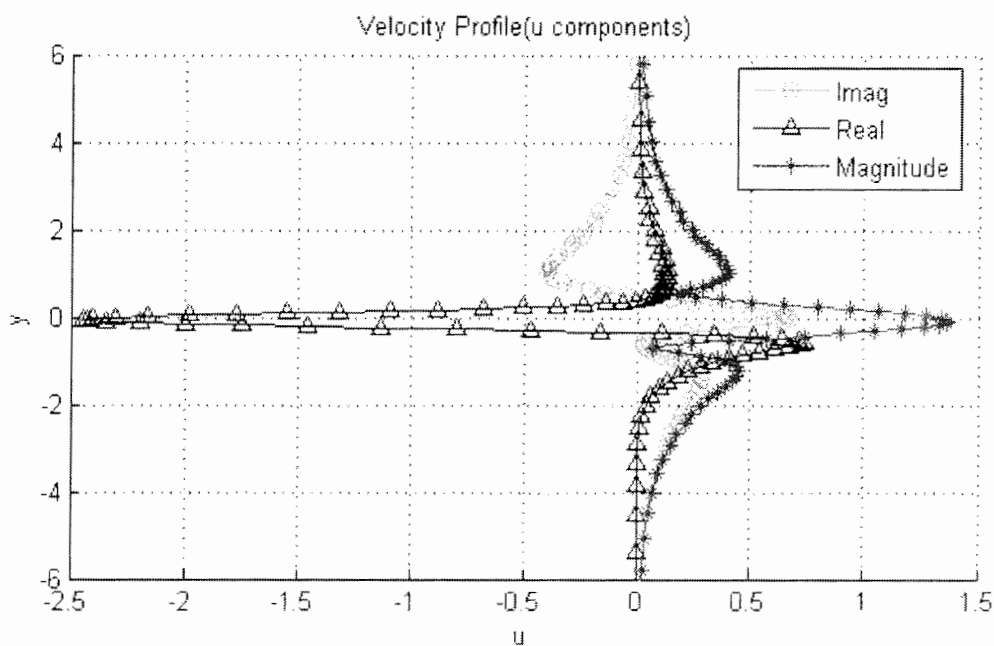
در شکل ۳-۱۰ قسمت‌های حقیقی و موهومی و بزرگی تابع ویژه معادله اور - سامرفیلد در فرکانس
 $\omega = 0.3$ را برای ناپایدارترین مود، نشان می‌دهد. در این نتایج مقادیر اولیه با فاکتور مختلط
 $(1/[\varphi_r(0) + i\varphi_i(0)])$ بی‌بعد شده‌اند. در اینجا $\text{Re} = 200$ و $\theta = 30$ در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۳-۱۰ - تابع ویژه برای جریان سه بعدی لایه اختلاطی با پروفیل $U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right\}$ که در آن $\lambda = \frac{1}{3}$ و

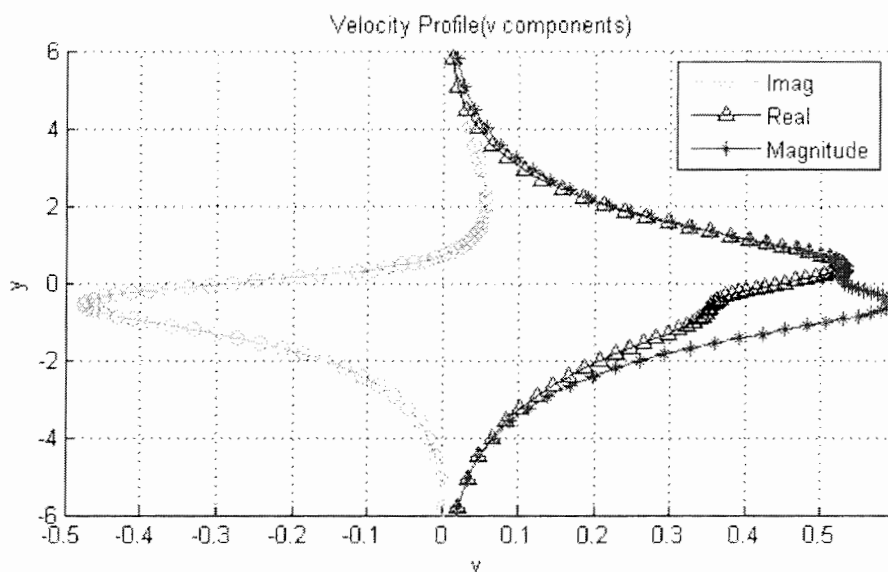
$$\alpha = 0.649548 - 0.180226i \quad \omega = 0.3 \quad \theta = 30 \quad \text{Re} = 200$$

در شکل‌های ۱۱-۳ و ۱۲-۳ و ۱۳-۳ مولفه سرعت در جهت جریان (u) و جهت متقاطع جریان (v) و جهت عرضی جریان (w) مربوط به ناپایداریترین مود، برای پروفیل سرعت $U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right\}$ برای حالت سه بعدی، نشان داده شده‌اند. مولفه‌های سرعت با فاکتور بزرگترین مقدار خود، بی‌بعد شده‌اند.



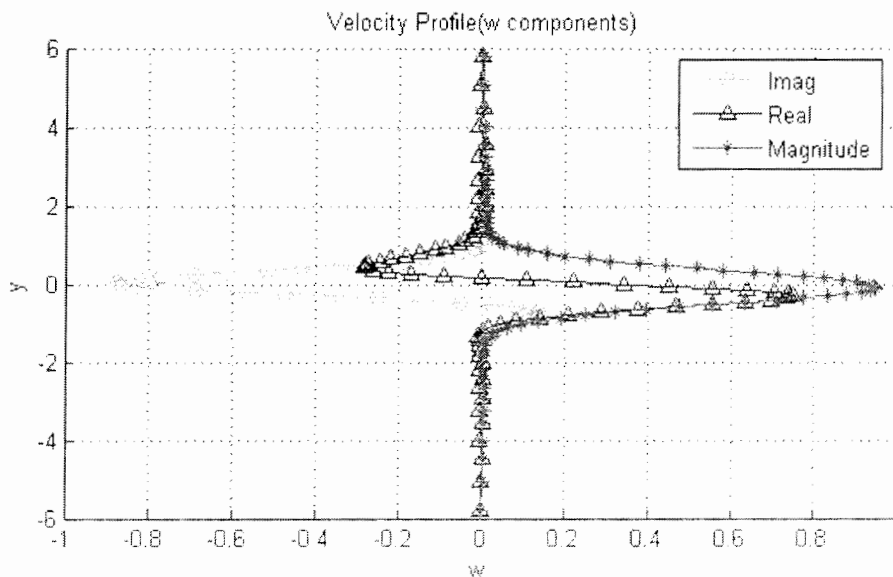
شکل ۱۱-۳- مولفه u برای جریان سه بعدی لایه اختلاطی با پروفیل $U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right\}$ که در آن $\lambda = \frac{1}{3}$ و

$$\alpha = 0.649548 - 0.180226i \text{ و } \omega = 0.3 \text{ و } \theta = 30 \text{ و } \text{Re} = 200$$



شکل ۳-۱۲- مولفه v برای جریان سه بعدی لایه اختلاطی با پروفیل $U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right\}$ که در آن $\lambda = \frac{1}{3}$ و

$$\alpha = 0.649548 - 0.180226i, \omega = 0.3, \theta = 30, \text{Re} = 200$$



شکل ۳-۱۳- مولفه w برای جریان سه بعدی لایه اختلاطی با پروفیل $U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2z) \right\}$ که در آن $\lambda = \frac{1}{3}$ و

$$\alpha = 0.649548 - 0.180226i, \omega = 0.3, \theta = 30, \text{Re} = 200$$

فصل چهارم

فرمول بندی ریاضی

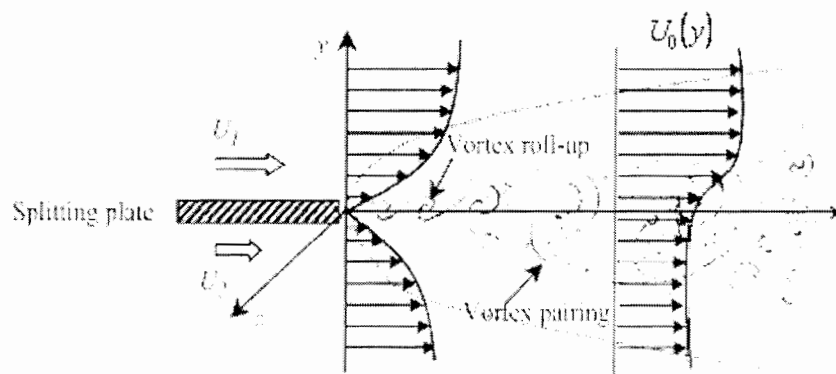
۴-۱- مقدمه :

در این فصل معادلات حاکم^۱، شرایط مرزی و شرایط اولیه بکار رفته در محاسبات شبیه‌سازی مستقیم لایه اختلاطی صفحه‌ای تشریح می‌شود. معادلات حاکم از معادلات ناویر - استوکس غیر قابل تراکم بدست می‌آیند. این معادلات در یک دامنه محاسباتی که در جهت x محدود و در جهت y نامحدود می‌باشد، حل می‌شوند. در جهت x از روش تفاضل محدود فشرده مرتبه بالا و در جهت y از روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی مرتبه بالا^۲ استفاده شده‌است. تمام پارامترها بوسیله مقیاس طولی و سرعت مناسب بی‌بعد شده‌اند. تمام طولها بوسیله ضخامت ورتیسیتته δ_{cs} مربوط به پروفیل سرعت اصلی^۳، بی‌بعد شده‌اند. بی‌بعدسازی زمانی نیز بر اساس $\delta_{cs} / \Delta U$ انجام شده است که در آن $\Delta U = U_1 - U_2$ ، اختلاف سرعت در جریاتهای آزاد می‌باشد ($U_1 > U_2$). جمله فشار نیز بوسیله $\rho \Delta U^2$ بی‌بعد شده است. عدد رینولدز براساس این پارامترها بصورت $Re = \Delta U \delta_{cs} / \nu$ می‌باشد که در آن ν ویسکوزیته سینماتیک^۴ می‌باشد.

-
- 1- Governing equations
 - 2- High order mapped compact finite difference
 - 3- Base flow
 - 4- Kinematics viscosity

۲-۴- معادلات حاکم :

نمای شماتیک لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی، سیستم مختصات و دامنه محاسباتی در شکل ۱-۴ مجدداً نشان داده شده است. در این دامنه معادلات حاکم برای جریان لایه اختلاطی دوبعدی غیرقابل تراکم حل می‌شوند. پروفیل ورودی جریان لایه اختلاطی با $U_0(y)$ نشان داده می‌شود، که بر روی دامنه محاسباتی اعمال می‌شود. جریان لایه اختلاطی در جهت x بصورت مکانی^۱ توسعه می‌یابد.



شکل ۱-۴- شکل شماتیک لایه اختلاطی دو بعدی توسعه یافته مکانی.

1- Spatial

با اعمال قانون دوم نیوتن برای ذرات سیال نیوتنی به معادلات حرکت می‌رسیم. این معادلات که به معادلات ناویر _ استوکس معروف می‌باشند، به همراه معادله بقای جرم، بعنوان معادلات حاکم برای جریان تراکم ناپذیر لایه اختلاطی معرفی می‌شوند. معادلات حاکم بوسیله سرعت مشخصه ΔU و طول مشخصه δ_{ω_0} بی بعد شده‌اند.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{H} - \nabla \left(p + \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{U}, \quad (1-4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (2-4)$$

که بردار $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) = \mathbf{U} \times \omega$ شامل جملات غیرخطی بوده و $\text{Re} = \frac{\Delta U \delta_{\omega_0}}{\nu}$ می‌باشد.

یکی از مشکلات اصلی در حل معادله ناویر _ استوکس، نبود اطلاعات در مورد فشار در مرزها می‌باشد. برای رفع این مشکل بایستی از شبکه بندی بسیار ریز و متراکم برای گسسته‌سازی استفاده کنیم (که منجر به ارزیابی متغیرهای مختلف در نقاط مختلف شبکه می‌شود.) و یا اینکه جمله فشار را از معادله ناویر _ استوکس حذف کنیم.

با استفاده از روابط ریاضی شرح داده شده در پیوست (الف) جمله فشار از معادله ناویر _ استوکس حذف شده و به شکل چرخشی¹ معادله ناویر _ استوکس می‌رسیم .

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega, \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \mathbf{U}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \mathbf{U}. \quad (4-4)$$

¹-Rotational form

این معادلات در واقع معادلات تکامل یافته‌ای هستند که برای پیشرفت زمانی^۱ در شبیه‌سازی استفاده می‌شود. سرعت لحظه‌ای $\mathbf{U} = (U, V)$ ، برای حالت دوبعدی بصورت ترکیبی از سرعت جریان اصلی $(U_0(y), 0)$ و سرعت محاسباتی $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ نوشته می‌شود.

$$U(x, y, t) = u(x, y, t) + U_0(y), \quad (5-4)$$

$$V(x, y, t) = v(x, y, t). \quad (6-4)$$

با جایگزینی معادله (5-4) در معادله (3-4) و (4-4)، برای مولفه در جهت جریان^۲ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_1 - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_2 + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 U, \quad (7-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_1 = \frac{\partial}{\partial y} H_3 + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega_1. \quad (8-4)$$

باید توجه داشت که برای حالت دوبعدی $\omega_1 = \omega_2 = H_3 = 0$. لذا معادله (8-4) از محاسبات حذف

می‌گردد. معادله (7-4) به همراه شرط مرزی خروجی بصورت جابجایی^۳، معادلات اصلی برای پیشرفت

زمانی شبیه‌سازی می‌باشند. سرعت در جهت متقاطع جریان، v ، با استفاده مستقیم از معادله پیوستگی

بدست می‌آید.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (9-4)$$

مولفه ورتیسیتته ω_3 ، با استفاده از تعریف آن بدست می‌آید.

$$\omega_3 = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (10-4)$$

1- Time advancement

2- Stream wise component

3- Convective

هنگامی که معادلات حاکم بصورت مستقیم و بدون استفاده از هیچگونه مدلسازی حل شوند، به روش حل، شبیه سازی مستقیم عددی یا به اختصار **D.N.S** گفته می‌شود.

۴-۳- شرایط مرزی :

معادله (۷-۴) یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه چهارم می‌باشد، از اینرو احتیاج به ۴ شرط مرزی دارد. مولفه سرعت u در ورودی ($x=0$) و در خروجی ($x=L_x$) باید مشخص شوند. با استفاده از معادله پیوستگی، $\frac{\partial u}{\partial x}$ در مرز خروجی مشخص می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (۱۱-۴)$$

این شرایط مرزی به ترتیب شرایط مرزی دیریشله^۱ و شرایط مرزی نیومن^۲ می‌باشند. شرایط مرزی در جهت معکوس^۳ صفر در نظر گرفته می‌شود.

در شبیه‌سازی عددی، مولفه سرعت لحظه‌ای در مرز ورودی با استفاده از یک پروفیل سرعت تانژانت هایپربولیک، به همراه سرعت اغتشاشی (محاسباتی) می‌باشد (معادله (۵-۴)). اغتشاشات بصورت موج حرکتی معرفی می‌شوند. پروفیل سرعت جریان اصلی، بصورت زیر معرفی می‌شود:

$$U(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \tanh(2\tau) \right\} \quad (۱۲-۴)$$

1- Dirichlet
2- Newmann
3- Inverse

که در آن $\lambda \equiv \left(\frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \right)$ بیانگر شدت برش در لایه اختلاطی می‌باشد. عدد 2 در آرگومان \tanh ، برای

اینکه ضخامت ورتیسسته پروفیل را متناسب با بی‌بعد کردن ضمنی y روی δ_{ω_0} نماید، لازم می‌باشد.

قسمت اغتشاشی که ترکیبی از مودهای ویژه خطی می‌باشد، از محاسبات تحلیل پایداری خطی بدست

می‌آید و برای شرایط مرزی ورودی اعمال می‌شود.

به بیان دیگر:

$$v(x, y, t) = A \cdot \text{Real} \left[V(y) e^{i(-\omega t)} \right] = A \cdot \text{Real} \left[(V_r + iV_i) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right] \quad (13-4)$$

که در آن $V(y)$ ، تابع ویژه سرعت مربوط به ناپایدارترین مود معادله اور _ سامرفیلد می‌باشد. A بعنوان

ضریب نیروی دوبعدی¹ مربوط به فرکانس اصلی و ناپایدارترین مود می‌باشد.

در خروجی از شرایط مرزی جابجایی استفاده می‌شود. شرایط مرزی می‌بایست بازگشت ناپذیر² باشند تا از

برگشت جریان به دامنه محاسباتی و خطا در محاسبات جلوگیری بعمل آید. از شرایط مرزی انتقالی برای

تولید شرایط مرزی دیریشه برای تمام مولفه‌های سرعت استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (14-4)$$

در این رابطه ψ با هر کدام از مولفه‌های سرعت جایگزین می‌شود. در این معادله c سرعت جابجایی

ساختارهای با مقیاس بزرگ³ درون لایه می‌باشد. هدف از استفاده از این شرط مرزی این است که به

سیال اجازه داده شود در یک حالت طبیعی دامنه محاسباتی را ترک کند. از اینرو از سرعت جابجایی

1- Forcing

2- Non-Reflective

3- Large scale structure

منطبق بر سرعت غلتکهای عرضی جریان^۱ استفاده شده است. تحقیقات نشان داده است که این غلتکها در جریان لایه اختلاطی به طرف پایین دست جریان با سرعت متوسط لایه جابجا می‌شوند. بنابراین c بصورت $c = \bar{U} = (U_1 + U_2)/2$ تعریف می‌شود.

لانگ^۲ در (۱۹۸۵) نشان داد، وقتی که ساختارهای بزرگ تقریباً با سرعت متوسط جریانهای آزاد، \bar{U} ، جابجا می‌شوند، ساختارهای ریز^۳ با سرعتی متفاوت، چیزی نزدیک به سرعت متوسط موضعی لایه اختلاطی، جابجا می‌شوند.

در جریانات با رینولدز پایین که در این تحقیق شبیه سازی شده است، ساختارهای کوچک در واقع بطور نسبی بزرگ هستند. علاوه بر این، ناحیه تحت تأثیر شرایط مرزی خروجی، محدود به یک فاصله نزدیک بالادست صفحه خروجی - در حدود اندازه ضخامت لایه - می‌شود. بنابراین انتخاب $c = \bar{U}$ برای این شبیه سازی بسیار مناسب به نظر می‌رسد.

همچنین سرعت موج که از تئوری پایداری خطی پیش‌بینی می‌شود، متناسب با سرعت جابجایی c در مرز خروجی لایه اختلاطی شبیه‌سازی شده می‌باشد [2]. استفاده از سرعت متوسط جریان آزاد در مرز خروجی از ایجاد جریان برگشتی جلوگیری بعمل می‌آورد. شکل ۴-۲ دامنه محاسباتی و شرایط مرزی را نشان می‌دهد.

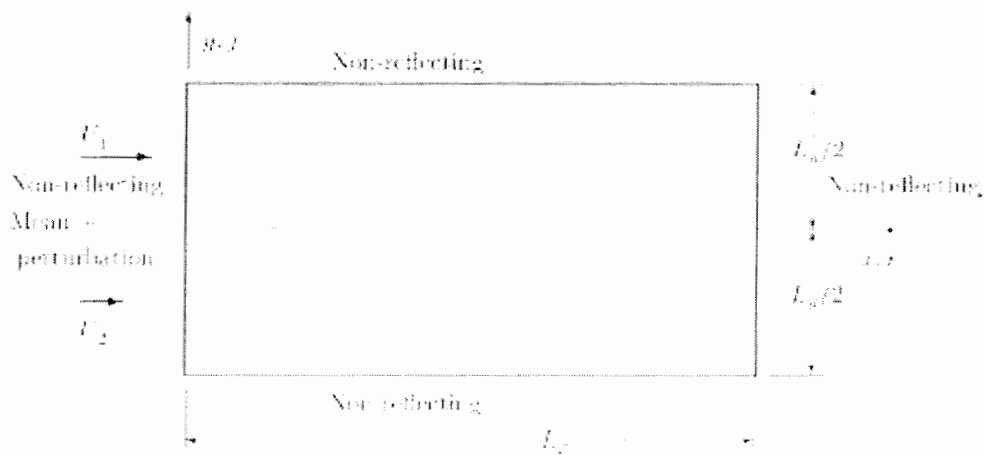
1- *Span wise rollers*

2- *Lang*

3- *Small scale structures*

۴-۴- شرایط اولیه :

پروفیل سرعت متوسط تانژانت هایپربولیک بطور یکنواخت در تمام ایستگاههای x ، شرط اولیه برای جریان دوبعدی لایه اختلاطی غیراجباری می باشد. از همین شرط برای شرط اولیه جریان اجباری لایه اختلاطی استفاده می شود. بر مبنای مطالعات آماری، این شرط اولیه برای شبیه سازی جریان اجباری و غیراجباری لایه اختلاطی مناسب می باشد. به بیان دیگر، هر ذره در ورودی ($x = 0$)، باید که مجاز به خروج از مرزها ($x = L_x$)، باشد. جریان لایه اختلاطی همچنین بایستی به حالت ایستای آماری^۱، هنگامیکه مولفه های سرعت متوسط، مستقل از زمان می باشند، برسد.



شکل ۴-۲- محدوده دامنه محاسباتی و شرایط مرزی.

1- Statistical stationary

فصل پنجم

روش عددی

۵-۱- مقدمه :

همانطور که قبلاً اشاره شد برای حل معادلات ناویر - استوکس از روش عددی اختلاف محدود فشرده در دو جهت x و y استفاده می‌شود. در این فصل توضیحاتی به تفصیل در مورد این روش ارائه می‌شود.

الگوریتم کاری برای حل معادله ناویر استوکس با توجه به ۴ شرط مرزی و یک شرط اولیه در زیر توضیح داده شده است:

۱. با توجه به شرط اولیه مشخص برای u ، مقدار v محاسبه می‌شود.

۲. با توجه به اینکه $\omega = \nabla \times U$ است و برای حالت دوبعدی $\omega_1 = 0$ و $\omega_2 = 0$ است، مقدار

$$\omega_3 = \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

حساب می‌شود.

۳. بنا به تعریف $H = U \times \omega$ می‌باشد که برای حالت دو بعدی $H_3 = 0$ است

مولفه‌های $H_1 = V \cdot \omega$ و $H_2 = -U \cdot \omega$ محاسبه می‌شود.

۴. محاسبه جملات غیر خطی در معادله که به صورت $\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y}$ است.

۵. محاسبه جملات لزجتی در معادله که به صورت $\frac{1}{Re} \nabla^4 U$ است.
۶. بعد از محاسبه طرف راست معادله ناویر استوکس، با توجه به روش رانج کوتای مرتبه سوم، طرف راست معادله $\nabla^2 u = R$ محاسبه می‌شود.
۷. با مشخص شدن R ، معادله پواسون فوق در فرم گسسته حل می‌گردد. حل این معادله در فرم ماتریسی به شکل $A \Delta u + \Delta u B = C$ می‌باشد که طبق الگوریتم ارایه شده توسط استوارت [10]، مقدار Δu از آن استخراج می‌شود تمام مراحل ذکر شده در بالا برای یک گام زمانی است که از u تولید شده در مرحله قبل به عنوان شرط اولیه استفاده می‌شود.
۸. با مشخص شدن Δu که تفاضل u در دو زیر مرحله زمانی است، u جدید بدست می‌آید.
۹. تمام مراحل ذکر شده در بالا برای یک زیر دامنه زمانی است که از u تولید شده در مرحله قبل به عنوان شرط اولیه برای زیر مرحله جدید استفاده می‌شود.
- برای حل معادله ۴-۱ و طبق الگوریتم بالا، ما باید قادر به انجام اعمال زیر باشیم:
- ۱- محاسبه مشتقات مادی
 - ۲- انتگرال گیری از معادله پیوستگی به منظور بدست آوردن ۷ از معادله ۴-۲.
 - ۳- محاسبه جملات غیرخطی.
 - ۴- حل معادله پواسون [9] برای حالت دو بعدی.
 - ۵- پیشرفت زمانی (بدست آوردن داده های جدید که در اصل آنها به صورت شرط اولیه برای زمان بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت).

۵-۲- محاسبه مشتقات مادی

مشتقات مادی با بکار بردن طرح اختلاف محدوده فشرده استاندارد ارائه شده توسط لیله [16] محاسبه شده است. لیلی^۱ مشتق اول تابع $f(x)$ را به طور ضمنی^۲ مطابق معادله (۱-۵) بیان کرده است.

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha + 2}{3h}(f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12h}(f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (1-5)$$

که علامت پریم نمایانگر مشتق اول، j بیان کننده تعداد گره $(1 \leq j \leq J)$ و $h = \Delta x = Lx/Nx$ است که $Nx = J - 1$ است.

اگر در معادله فوق، $\alpha = 1/4$ یا $\alpha = 1/3$ قرار داده شود به طرحهایی با مرتبه خطای چهارم و ششم می‌رسیم. برای جلوگیری از ناهنجار بودن ماتریس طرف چپ معادله فوق، طرفین آن را در $1/\alpha$ ضرب می‌کنیم.

نتیجه به صورت زیر می‌شود:

$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \frac{1 + 2/\alpha}{3h}(f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4 - 1/\alpha}{12h}(f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (2-5)$$

در مرزها یعنی جایی که $j = 0$ یا $j = J$ است یک طرح مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{1}{2h}(-5f_1 + 4f_2 + f_3) \quad (3-5)$$

$$f'_j + 2f'_{j-1} = \frac{1}{2h}(5f_j - 4f_{j-1} - f_{j-2}) \quad (4-5)$$

در همسایگی مرزها یعنی جایی که $j = 1$ یا $j = J - 1$ است از معادله (۲-۵) درحالتی که $\alpha = 1/4$ است استفاده می‌شود.

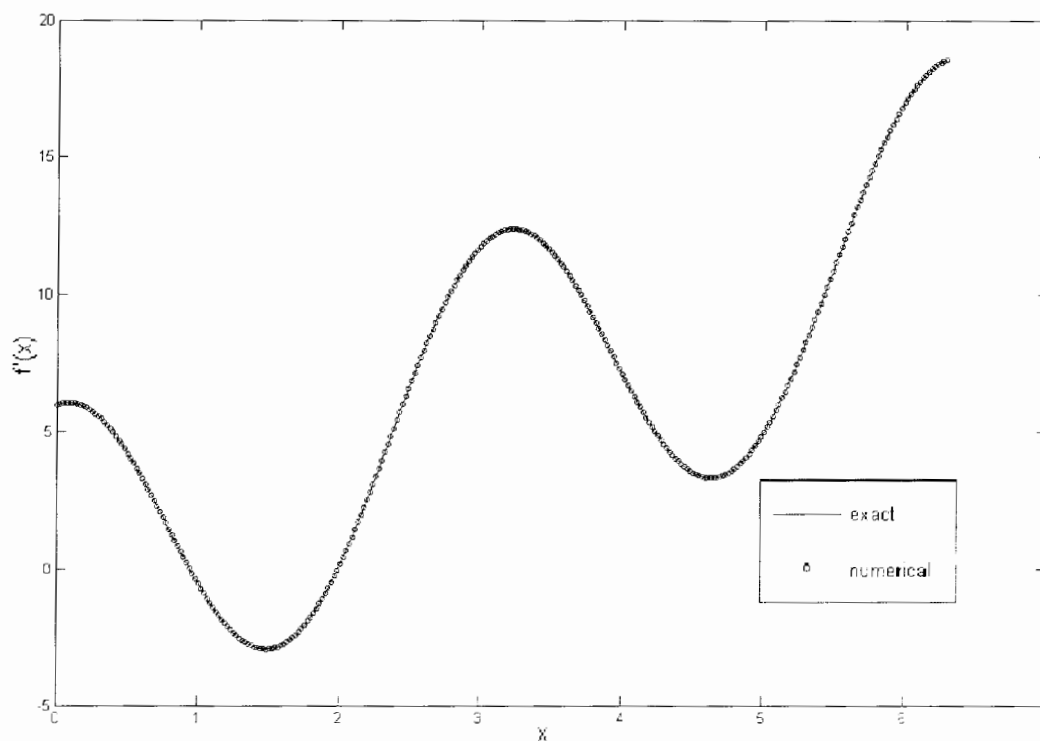
1- S.K.Lele
2- Implicitly

همانطور که توسط لیلی بحث شده است، با قرار دادن $\alpha' = (16\alpha + 32)/(40\alpha - 1)$ به جای α در

معادله (۲-۵) برای گره‌های $j=2$ و $j=J-2$ می‌توان پایداری و بقای عددی معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} f(u)$

را تضمین کرد. در شکل ۱-۵ می‌توان میزان دقت آن را برای تابعی به فرم $y = 3\sin(2x) + x^2$ ملاحظه کرد.

انتظار داریم که طرحی با مرتبه خطای سوم در مرز و مرتبه خطای ششم در گره‌های مرکزی داشته باشیم. شکل ۲-۵ مرتبه دقت را نشان می‌دهد [2].

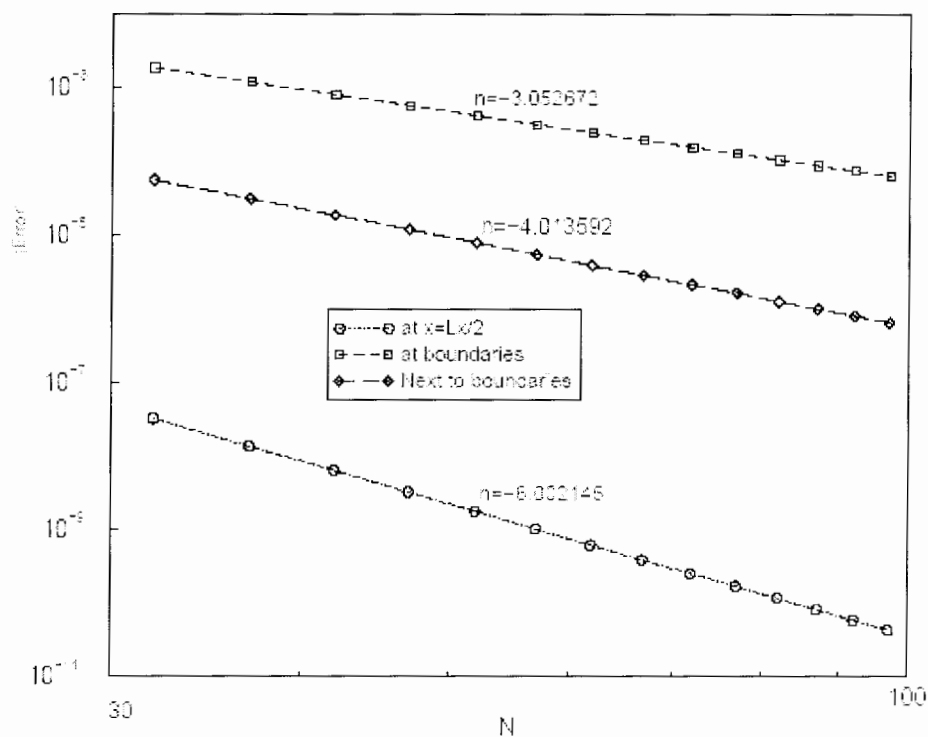


شکل ۱-۵: تقریب مشتق اول تابع $y = 3\sin(2x) + x^2$.

معادله (۵-۵) مشتق دوم تابع $f(x)$ را نشان می دهد که یک طرح اختلاف محدود فشرده و با دقت مرتبه چهارم است.

$$\alpha f''_{j-1} + f''_j + \alpha f''_{j+1} = \frac{4(1-\alpha)}{3h^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) + \frac{10\alpha - 1}{12h^2}(f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2}) \quad (5-5)$$

که در آن $\alpha = 1/4$ است. در اینجا مسئله ناهنجاری هم مورد توجه قرار گرفته است و معادله در $1/\alpha$ ضرب شده است.



شکل ۵-۲: مرتبه دقت برای مشتق اول با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [2].

در مرزها از یک طرح مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f_1'' + 11f_2'' = \frac{1}{h^2}(13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - f_4) \quad (6-5)$$

$$f_J'' + 11f_{J-1}'' = \frac{1}{h^2}(13f_J - 27f_{J-1} + 15f_{J-2} - f_{J-3}) \quad (7-5)$$

با مشتق گیری از معادله (3-5) معادله (8-5) تولید می شود.

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{1}{2h}(-5f_1' + 4f_2' + f_3') = \frac{-3}{h}f_1' + \frac{1}{2h}(f_1' + 4f_2' + f_3') \quad (8-5)$$

اگر جمله طرف راست معادله (8-5) را با معادله (1-5) در حالتی که $\alpha = 1/4$ جایگزین کنیم داریم:

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{-3}{h}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0} - \frac{3}{2h^2}(f_1 - f_3) \quad (9-5)$$

روش مشابهی می توان برای گره J به کار برد.

$$f_J'' + 2f_{J-1}'' = \frac{3}{h}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=J,h} - \frac{3}{2h^2}(f_J - f_{J-2}) \quad (10-5)$$

نزدیک مرزها یعنی جاییکه $z = 1$ و $z = J - 1$ است از طرح اختلاف محدوده فشرده مرتبه دوم

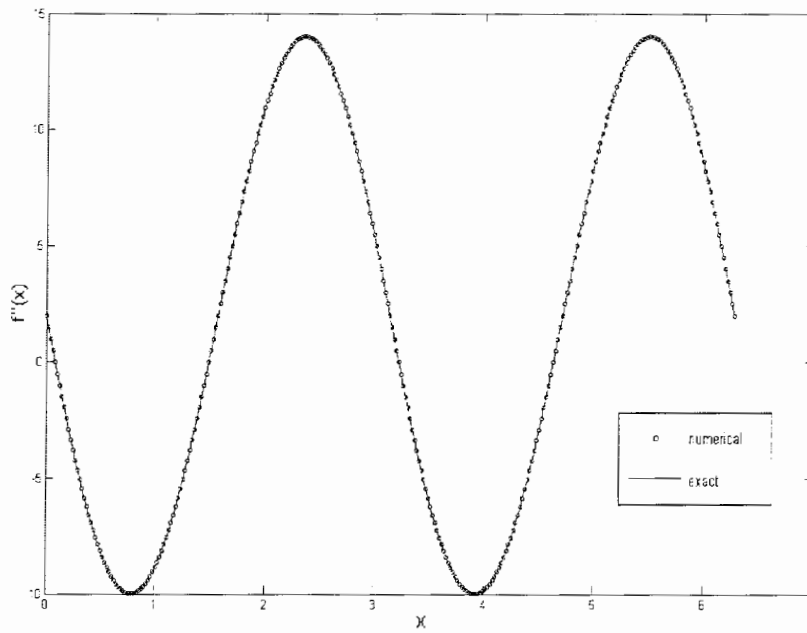
استفاده شده است که با جایگزینی $\alpha = 1/10$ در معادله (5-5) بدست می آید.

در شکل 3-5 مقایسه بین نتایج عددی مشتق دوم و مقدار حقیقی تابع $y = 3\sin(2x) + x^2$ را

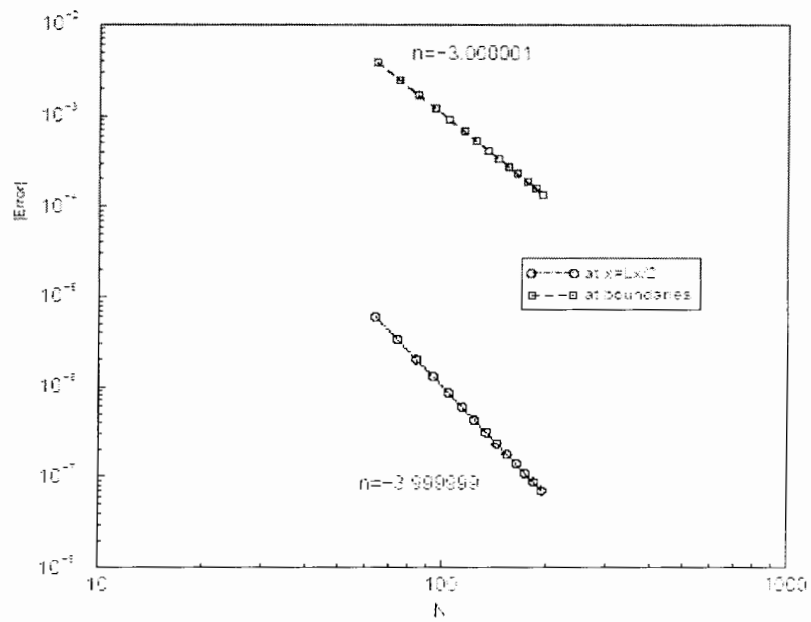
می توانید ملاحظه کنید. میزان خطا نیز در شکل 4-5 برای گره های مرزی و گره های داخلی ترسیم شده

است [2]. برای محاسبه مشتقات چهارم هم می توان اپراتور مشتق دوم را دوبار اعمال کرد که در طرف

راست معادله ناویر استوکس و در قسمت جمله های لزجتی وجود دارد.



شکل ۳-۵: تقریب مشتق دوم تابع $y = 3\sin(2x) + x^2$.



شکل ۴-۵: مرتبه دقت برای مشتق دوم با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [2].

۵-۳- روش محدود کردن دامنه y

جریان لایه اختلاطی جریانی آزاد و دور از مرزهای صلب می‌باشد و در نتیجه در جهت y نباید هیچگونه محدودیت مادی داشته باشیم، یعنی $-\infty \leq y \leq \infty$ می‌باشد. برای گنجاندن y در یک دامنه محاسباتی از یک تابع یک‌به‌یک مثلثاتی استفاده می‌کنیم که مختصات فیزیکی y تبدیل به مختصات محاسباتی $1 \leq \zeta \leq -1$ می‌شود. فواصل گره‌ها در مجموعه محدود شده یک اندازه و یکنواخت می‌باشند ولی در مجموعه فیزیکی این فواصل متساوی نیستند و در ناحیه ای بیشتر متمرکزند. رابطه مورد استفاده بین مکان گره‌های موجود در مجموعه محاسباتی و مجموعه فیزیکی به وسیله معادله (۵-۱۱) بیان شده است.

$$y = \beta \tan(\pi\zeta / 2) \quad (۵-۱۱)$$

که β پارامتر مربوط به کنترل میزان کشیدگی و انقباض است. برای مشتق‌گیری تابع f نسبت به y به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{d\zeta} \times \frac{d\zeta}{dy} = \frac{2}{\pi\beta} \cos^2(\pi\zeta / 2) \frac{df}{d\zeta} \quad (۵-۱۲)$$

با برابر قرار دادن $\lambda_1 = \frac{2}{\pi\beta} \cos^2(\pi\zeta / 2)$ داریم:

$$\frac{df}{dy} = \lambda_1 \frac{df}{d\zeta} \quad (۵-۱۳)$$

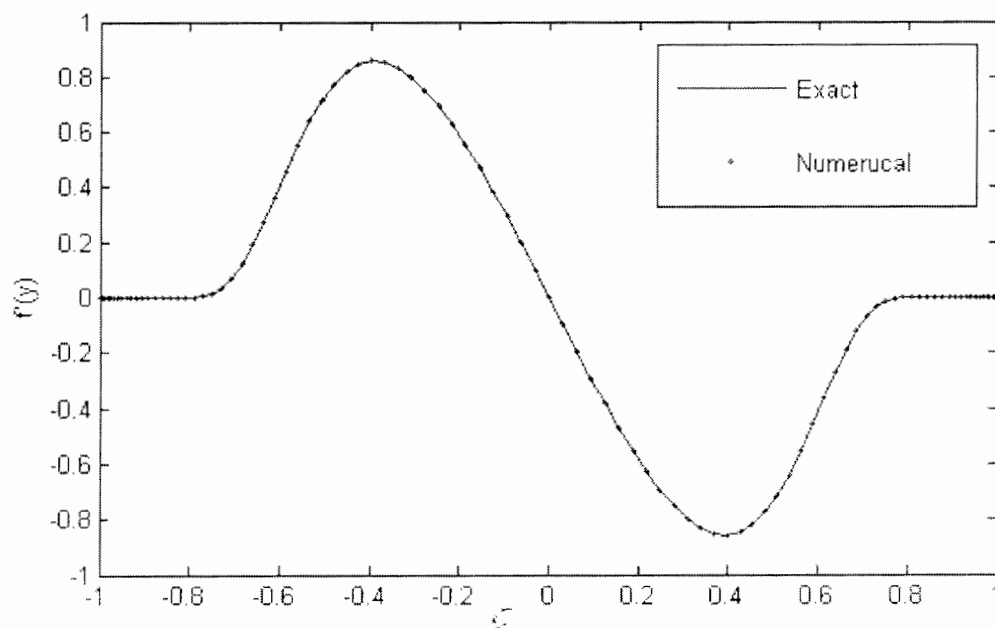
برای محاسبه مشتق دوم نیز به صورتی مشابه عمل می‌کنیم:

$$\frac{d^2f}{dy^2} = \lambda_2 \frac{d^2f}{d\zeta^2} + \lambda_3 \frac{df}{d\zeta} \quad (۵-۱۴)$$

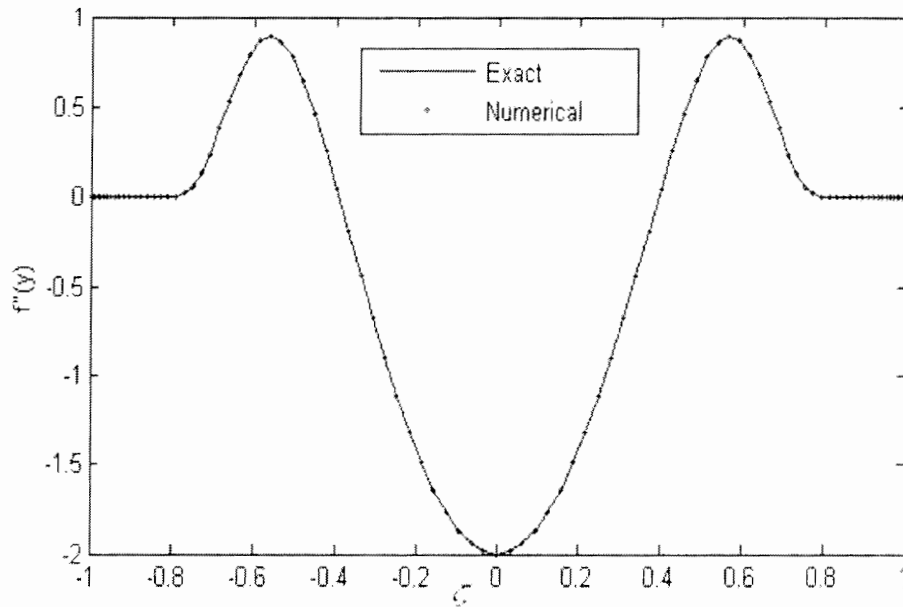
$$\lambda_2 = \lambda_1^2 \quad (۵-۱۴)$$

$$\lambda_3 = -\frac{4}{\pi\beta^2} \sin(\pi\zeta/2) \cos^3(\pi\zeta/2) \quad (15-5)$$

در شکل های ۴-۵ و ۴-۶ می توان نتیجه این روش مشتق گیری را با توجه به محدود کردن موجود و $N_y = 100$ و $\beta = 1$ ملاحظه نمایید.



شکل ۵-۵: تقریب مشتق اول تابع $f(y) = e^{-y^2}$ با توجه به فشردگی سازی در جهت y با $\gamma = 1, \beta = 1$.



شکل ۴-۵: تقریب مشتق دوم تابع $f(y) = e^{-y^2}$ با توجه به فشردگی در جهت y با $\gamma = \beta = 1$.

۴-۵- انتگرال گیری از معادله پیوستگی

با حل معادله (۴-۴) می توان $u(x, y, t)$ را بدست آورد. برای محاسبه سرعت در جهت عرضی v از

معادله پیوستگی بهره می گیریم. طبق معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (۱۶-۵)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (۱۷-۵)$$

چنانچه از طرح اختلاف محدود فشرده استفاده کنیم که ماتریس سمت راست معادله (۵-۲) دارای عناصر صفر بر روی قطر اصلی است و با این وضع نمی‌توان به انتگرال‌گیری پرداخت. جهت غلبه بر این مشکل با مشتق‌گیری از دو طرف معادله بر حسب y ، معادله (۵-۱۸) بدست می‌آید.

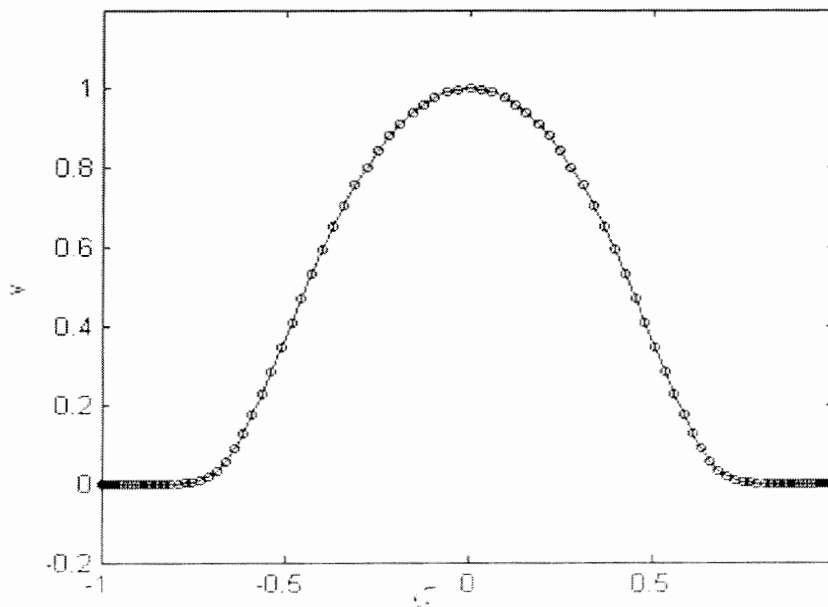
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (۵-۱۸)$$

با وجود دو شرط مرزی برای v به صورت $y = \pm\infty \rightarrow v = 0$ این معادله حل می‌شود. چنانچه از معادله (۵-۱۴)، بجای طرف چپ معادله (۵-۱۸) استفاده شود و برای $d^2v/d\zeta^2$ و $dv/d\zeta$ از معادل آن مطابق طرح اختلاف محدود فشرده استفاده گردد، آنگاه می‌توان با اعمال شرایط مرزی

$$v(x, y = \pm\infty, t = 0)$$

مبادرت به حل نمود

نتایج مربوط به انتگرال‌گیری در شکل ۵-۷ آمده است.



شکل ۵-۷: تقریب انتگرال تابع $f'(y) = -2ye^{-y^2}$ با شرایط مرزی $f(y(0)) = f(y(1)) = 0$ که به

صورت $f(y) = e^{-y^2}$ می‌باشد.

۵-۵- پیشروی در زمان:

طرح اختلاف زمانی رانج کوتای مرتبه سوم فشرده به وسیله رای [22]^۱ بیان شده است که برای پیشرفت زمانی به کار برده می‌شود. برای پیشروی زمانی معادله‌ای به صورت معادله (۵-۱۹)، مطابق با جدول ۵-۱ می‌توان فرآیند را انجام داد.

جدول ۵-۱: طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم.

زمان	اولین موقعیت	دومین موقعیت
t^n	u^n	$R(u^n)$
$t' = t^n + c_1 \Delta t$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$R' = R(u')$
$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$R'' = R(u'')$
$t^{n+1} = t'' + \Delta t$	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \quad (۵-۱۹)$$

برای پیشروی زمانی معادله مدل فوق به اندازه Δt ، طرف راست معادله باید در سه مرحله زمانی محاسبه گردد. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به اندازه $(c_i + d_i) \Delta t$ جلو می‌رود و u به وسیله یک

^۱ A.Wray

ترکیب خطی از R در مرحله زمانی حال و R در مرحله زمانی گذشته محاسبه می‌گردد. بعد از گذشت مرحله سوم، زمان به اندازه Δt و مقدار u محاسبه شده برابر مقدار u بعد از گذر از یک Δt زمانی است.

برای محاسبه ضرایب با معادل قرار دادن ضرایب حاصل از سری تیلور با طرح می‌توان اقدام نمود.

داریم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

$$c_1^2 c_2 + c_3 (c_1 + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2}))^2 + c_1^2 d_3 = 1/3$$

$$c_1 c_2 + c_3 (\frac{d_2}{c_2} (1 + \frac{d_3}{c_3}) + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2})) = 1/2$$

$$c_1 c_2 c_3 = 1/6$$

برای یک خانواده از حل فوق $d_1 = 0$ بدست می‌آید. نتیجه به صورت زیر است:

$$c_1 = 8/15 \quad d_1 = 0$$

$$c_2 = 5/12 \quad d_2 = -17/60$$

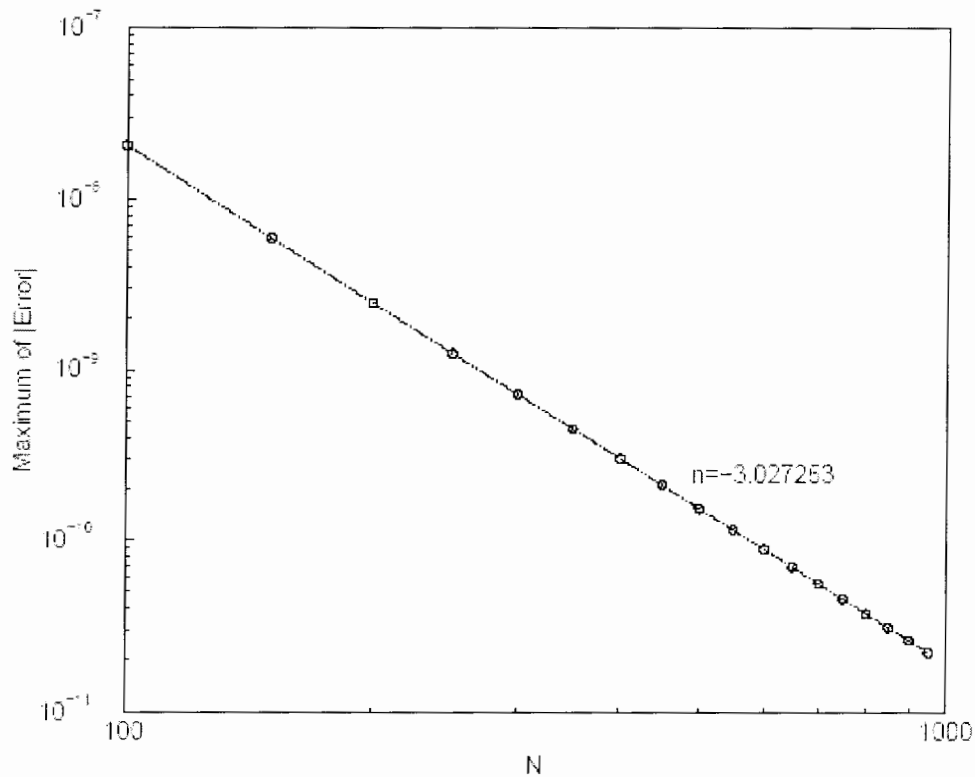
$$c_3 = 3/4 \quad d_3 = -5/12$$

تست زیر برای تعیین دقت طرح مذکور انجام شده است. $u(t) = e^{-t}$ همراه با شرط اولیه

$u(0) = 1$ یک حل تحلیلی برای معادله (۲۰-۵) است.

$$\frac{du}{dt} = -u(t) \quad (20-5)$$

ماکزیمم خطا بین نتایج عددی و حل واقعی در شکل ۸-۵ رسم شده است که به روشنی نشان دهنده صحیح بودن دقت مرتبه سوم این طرح می‌باشد [2].



شکل ۸-۵: مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای $\frac{du}{dt} = -u(t)$ با $u(0) = 1$ [2].

۵-۶- حل معادله پواسون

بعد از محاسبه طرف راست معادله ناویر استوکس و پیشروی در زمان، مقدار $\nabla^2 u$ بدست می‌آید. پس داریم:

$$\nabla^2 u = C \quad (۵-۲۱)$$

که C معلوم می باشد و مقدار u مجهول است. با بسط معادله داریم:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C \quad (22-5)$$

با جایگزین کردن اپراتور های مشتقات دوم در جهات x و y معادله زیر بدست می آید:

$$(D2X.u^T)^T + D2Y.u = C \quad (23-5)$$

توجه کنید که برای اعمال اپراتور مشتق دوم در جهت X باید تابع مفعول را ترانسپوز کرده و در ماتریس اپراتور $D2X$ ضرب کرده و در نهایت از نتیجه ضرب دو ماتریس، یک ترانسپوز گرفته شود. با توجه به اینکه:

$$(ST)^T = T^T S^T \quad (24-5)$$

پس معادله (23-5) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$u.D2X^T + D2Y.u = C \quad (25-5)$$

بارتلز^[9] چگونگی روش حل معادله ماتریسی $AX + XB = C$ را ارائه کرده است که در اینجا $A = D2Y$ و $B = D2X^T$ است و در نهایت u بدست می آید.

1- Bartlez.R.H.

۵-۷- ارزیابی کد و شبیه سازی عددی:

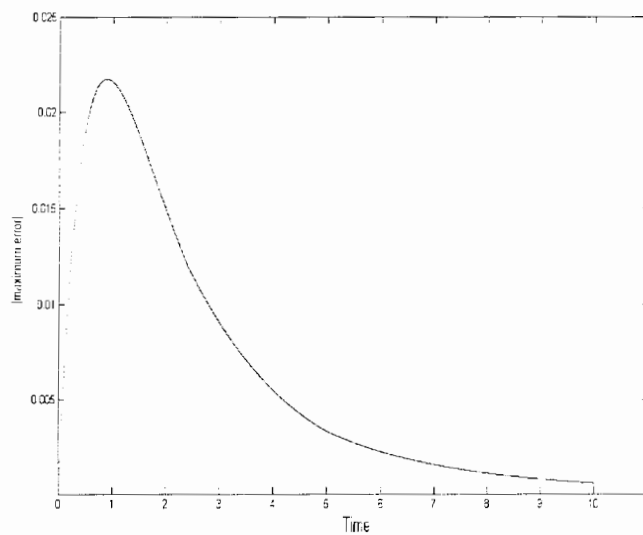
به منظور تست و ارزیابی صحت برنامه نوشته شده، درحالی که قسمتهای مختلف کد فعال هستند، نتایج را با بعضی از حل‌های دقیق معادله ناویر استوکس در حالات خاص تست و مقایسه می‌کنیم.

۵-۷-۱- معادله نفوذ وابسته به زمان

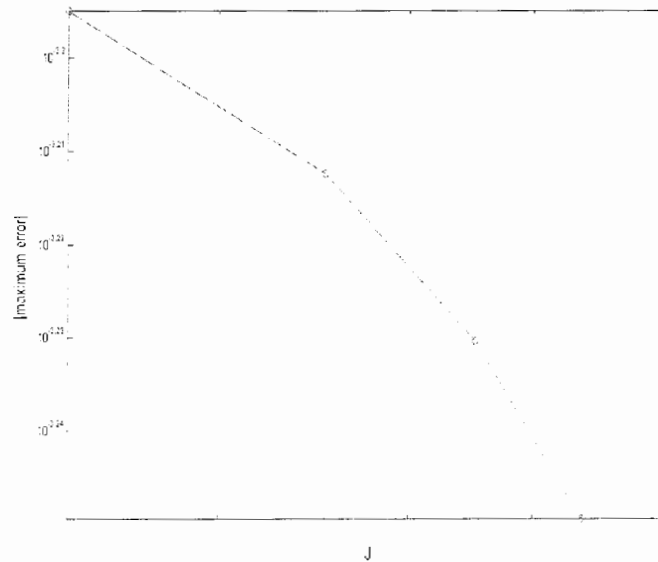
حل معادله ناویر استوکس (۴-۱) با توجه به پیشرفت در زمانی در برنامه عددی با حل واقعی معادله نفوذ تست شده است. معادله نفوذ مربوط به حالتی است که $H = 0$ است. یک حل خاص برای معادله نفوذ به صورت زیر است [2].

$$u(x, y, t) = \cos(x) \times \frac{y-1}{\left(1 + \frac{4t}{\text{Re}}\right)^{1.5}} \times \exp(-2t/\text{Re}) \times \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{1 + \frac{4t}{\text{Re}}}\right) \quad (۵-۲۶)$$

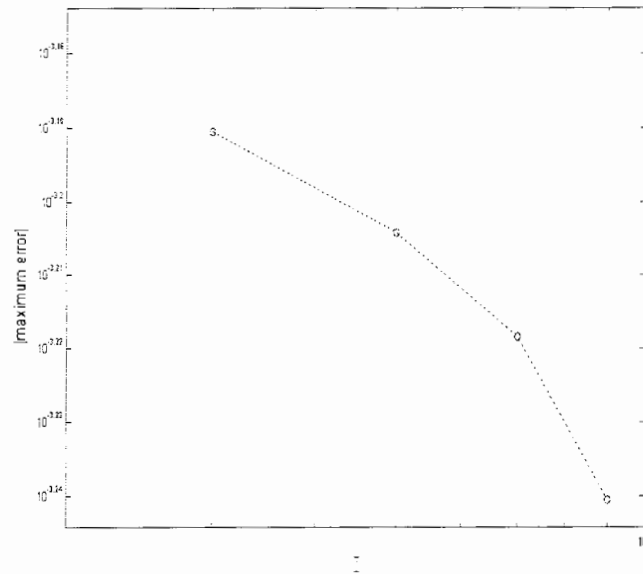
برای انجام این تست بایستی از این معادله برای تولید شرط مرزی و شرط اولیه استفاده نمود. در نتیجه شرط مرزی خروجی جابجایی و تشکیل جمله‌های غیر خطی در این تست نمی‌توانند ارزیابی شوند. ولی حل معادله پواسون و کیفیت پیشرفت در زمان ارزیابی می‌شوند. توجه کنید که u شرط پایداری را ارضاء می‌کند و حل می‌تواند برای شبیه سازی جریان لایه اختلاطی کاملاً لزج مورد استفاده قرار گیرد. پارامترها در این تست به صورت $L_x = 2\pi/3$ و $\beta = 4$ و $\text{Re} = 10$ و $t = 20$ و $N_x = 45$ و $N_y = 40$ می‌باشند. شکل ۵-۹ دقت حل وابسته به زمان برای u را نشان می‌دهد. شکل‌های ۵-۹-۱ و ۵-۹-۲ هم مقدار ماکزیمم خطا به صورت تابعی از تعداد گره‌ها در جهات x و y را ترسیم کرده است [۲].



شکل ۵-۹: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از زمان.



شکل ۵-۹-۱: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت x .



شکل ۵-۹-۲: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت y .

۵-۷-۲- گردابه های استوارت

استوارت^۱ در سال ۱۹۶۷ یک حل دقیق برای معادله ناویر استوکس غیر لزج^۲ برای لایه های اختلاطی دوبعدی معرفی کرد. جریان در جهت اصلی جریان پریودیک بوده که با سرعت متوسط لایه c ، به سمت پایین دست جریان حرکت می کند. حل به صورت تابع جریان ψ است که مولفه های سرعت $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ و

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ است [2].}$$

$$\psi(x, y, t) = cy + \ln(a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)) \quad (۲۷-۵)$$

^۱ Stewart

^۲ *Inviscid*

در اینجا $b = \sqrt{a^2 - 1}$.. براحتی می‌توان نشان داد که معادله بالا، معادله جابجایی را ارضاء می‌کند که c برابر سرعت جابجایی موج است. در نتیجه حل استوارت می‌تواند برای ارزیابی صحت شرط مرزی خروجی جابجایی مورد استفاده قرار گیرد. در این تست تشکیل جمله لزج تست نمی‌شود ولی برای ارزیابی تشکیل جمله‌های غیرخطی و پیشروی محاسبات در زمان مناسب است.

مؤلفه‌های سرعت v, u و همچنین مؤلفه ورتیسیتته ω_y ، با مشتق‌گیری از رابطه فوق بدست

می‌آیند [6].

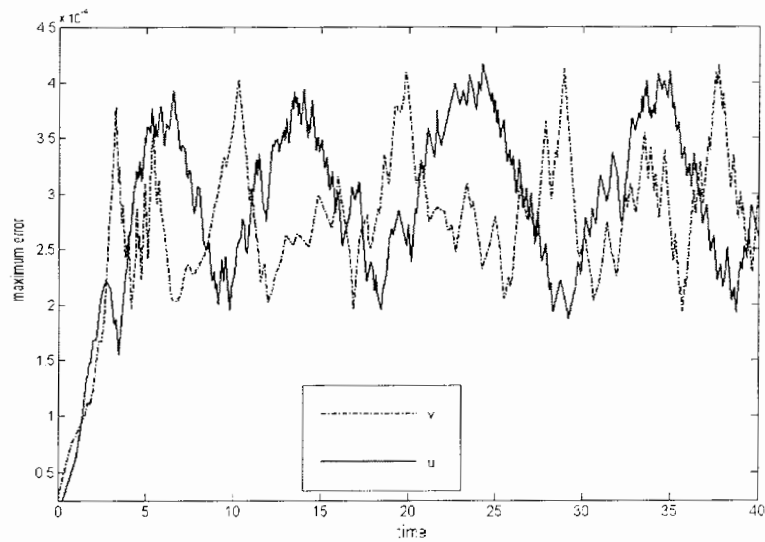
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = c + \frac{a \sinh(y - y_0)}{a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)} \quad (28-5)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{b \sin(x - ct)}{a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)} \quad (29-5)$$

$$\omega_y = \frac{1}{[a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)]^2} \quad (30-5)$$

به این نکته بایستی توجه شود که مؤلفه سرعت در جهت جریان نمی‌تواند حل پایداری داشته باشد. برای رفع این مشکل $\tanh(y - y_0)$ را به آن اضافه و کسر می‌کنیم. قسمت پایدار آن یعنی $a \sinh(y - y_0) / (a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)) - \tanh(y - y_0)$ را به صورت شرط اولیه و شرط مرزی ورودی در نظر می‌گیریم. باقیمانده عبارت به عنوان جریان اولیه محسوب می‌شود. پارامترها به صورت $L_x = 2\pi$ و $\beta = 3$ و $Re = 10^9$ و $c = 1$ و $b = 0.5$ در نظر گرفته می‌شود تا جریان بصورت موثر ایده‌آل باقی بماند. به عبارت دیگر با در نظر گرفتن $Re = 10^9$ جمله غیر خطی در مقایسه با جمله لزجی کاملاً غالب خواهد بود.

شکل ۵-۱۰ دقت حل وابسته به زمان را برای u و v نشان می‌دهد.



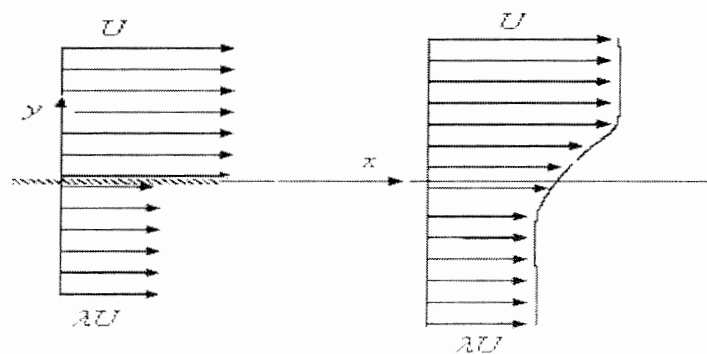
شکل ۵-۱۰: ماکزیمم خطا در u و v برای تست گردابه های استوارت به صورت تابعی از زمان.

فصل ششم

جریان لایه اختلاطی آرام

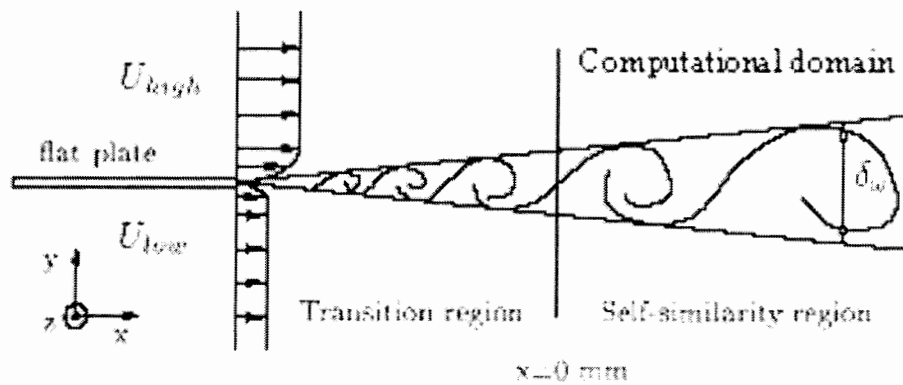
۱-۶- مقدمه :

شلیختینگ [18] حل معادله لایه مرزی را برای لایه اختلاطی دو بعدی بین دو جریان با سرعت‌های مختلف را به صورت تحلیلی انجام داد. وی فرض کرد که ابتدا دو جریان بصورت موازی و با سرعت‌های مختلف U و λU در $x=0$ با یکدیگر مخلوط می‌شوند. جریانها بدون اغتشاش در نظر گرفته شده‌اند. برای مقادیر کم لزجت ν ، انتقال مومنوم بین سرعتها، در یک ناحیه اختلاطی باریک رخ می‌هد، بطوریکه در این لایه مولفه سرعت در جهت عمود بر جریان ν ، در مقایسه با مولفه سرعت در جهت اصلی جریان u ، کوچک می‌باشد (شکل ۱-۶). بنابراین معادله لایه مرزی بدون مولفه فشار، معتبر خواهد بود. بنابراین با بی بعد سازی متغیرها، یک حل تشابهی برای این مساله وجود دارد (شکل ۲-۶).



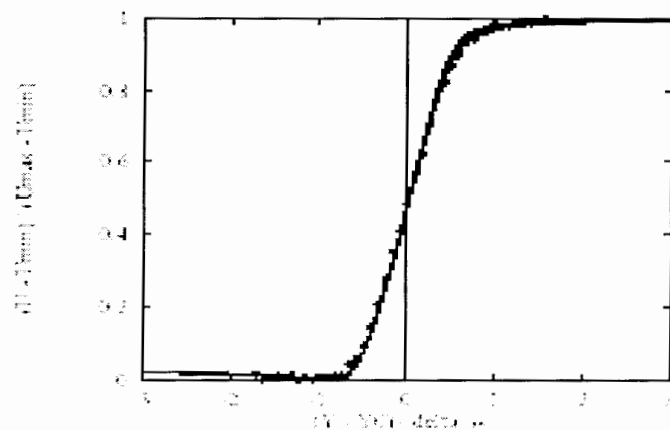
شکل ۱-۶: پروفیل سرعت در لایه اختلاطی.

پروفیل سرعت ورودی جریان لایه اختلاطی در اولین مراحل از تکامل لایه، بر روی دامنه محاسباتی اعمال می‌شود ($x = 0\text{mm}$). در این ناحیه بدلیل توسعه یافته بودن جریان، شاهد رفتار خودتشابهی برای جریان خواهیم بود.



شکل ۶-۲: هندسه لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی.

شکل ۶-۳ توزیع سرعت جریان لایه اختلاطی را در دستگاه مختصات خودتشابه نشان می‌دهد. در اینجا از δ_w و $\Delta U = U_{high} - U_{low}$ به ترتیب برای بی بعدسازی طول و سرعت استفاده شده است [7].



شکل ۶-۳: توزیع سرعت در جریان اختلاطی در دستگاه مختصات خود تشابه برای ایستگاههای مختلف جریان [7].

۶-۲- شبیه سازی جریان لایه اختلاطی آرام :

برای شبیه سازی جریان لایه اختلاطی بدون اغتشاشات ورودی، دامنه محاسباتی بصورت

$$0 \leq x \leq 200 \text{ و } -\infty < y < +\infty \text{ در نظر گرفته شده است. نسبت سرعت برای این حالت، } (r \equiv U_2/U_1),$$

برابر با 0.5 فرض شده است. این مقدار بیانگر یک شدت برش مابین حالت لایه اختلاطی یک جریانه^۱

(یعنی $U_2 = 0$) و حالت جریان دنباله صفحه جداکننده^۲ می باشد. سرعت متوسط لایه $(\bar{U} = \frac{1}{2}[U_1 + U_2])$

برابر با 1.5 می باشد. پارامترهای دیگر مورد استفاده در این شبیه سازی عبارتند از $Re = 300$ و $\beta = 1$

$$\text{و } \nu = 0.01 \text{ و } N_x = 240 \text{ و } N_y = 100 \text{ و } \Delta t = 0.1\Delta x.$$

انتظار داریم که سرعت لحظه ای در هر نقطه ای از دامنه به یک حالت پایدار برسد. این موضوع

کاملاً و به وضوح در شکل های ۴-۶ و ۵-۶ نشان داده شده است که تاریخچه ای از سرعت های u و v

در مکان های معادل و متساوی در جهت جریان نمایش داده شده است.

دلایل مستند زیادی در مورد تشابه پروفیل های سرعت متوسط جریان لایه اختلاطی در مقاطع

مختلف وجود دارد. برای جریان لایه اختلاطی با پروفیل سرعت تانژانت هایپربولیک، وقتی که سرعت ها

به وسیله اختلاف سرعت دو جریان، ΔU ، و فواصل (ابعاد) به وسیله ضخامت ورتیسیتته، δ_ω ، بی بعد

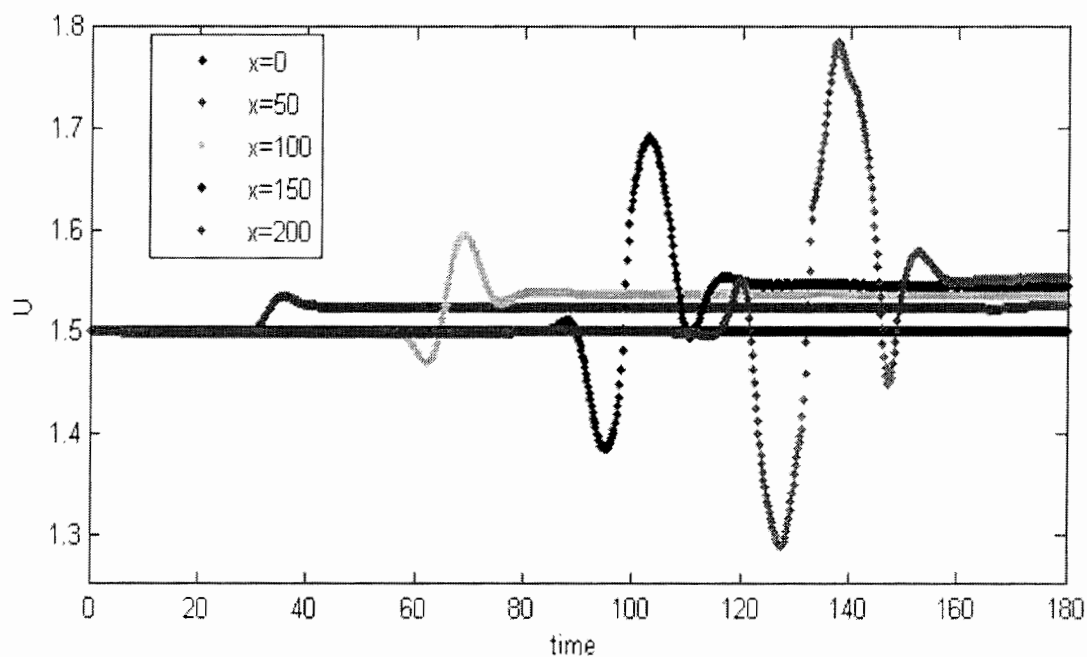
می شوند، پروفیل های سرعت دارای تشابه هندسی با هم می شوند. لازم به یادآوری است که رشد ضخامت

ورتیسیتته بصورت زیر تعریف می شود [7]:

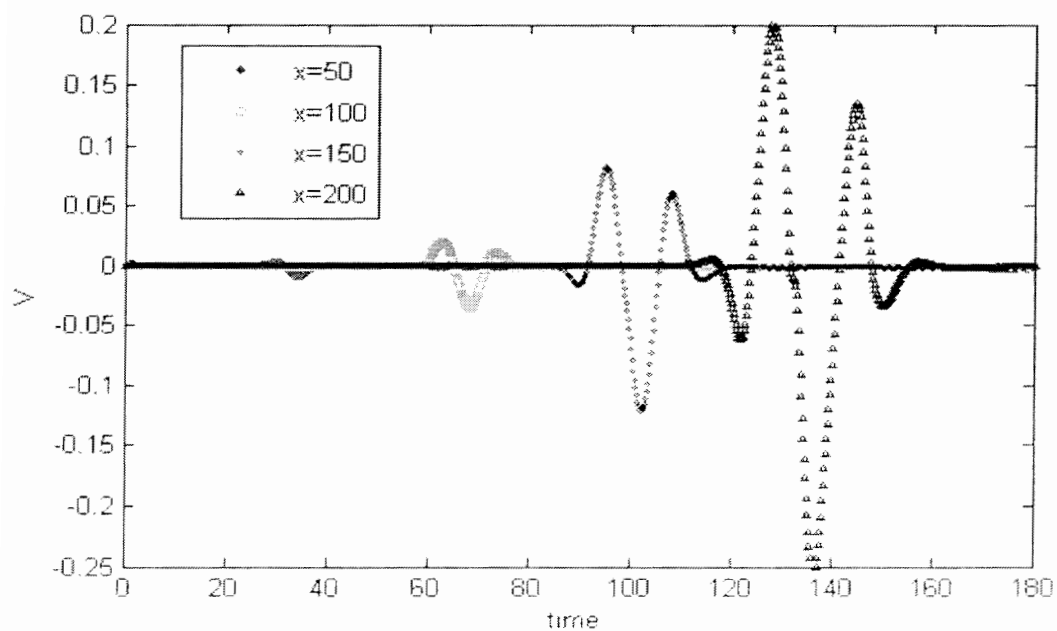
$$\delta_\omega = \frac{\Delta U}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{\max}} \quad (1-6)$$

^۱- single-stream

^۲- splitter-plate wake



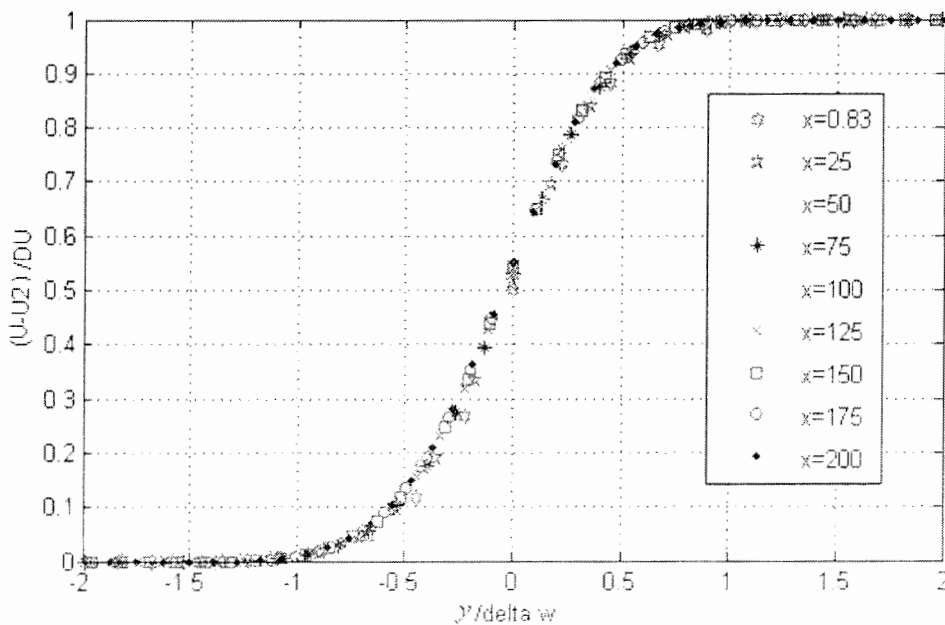
شکل ۴-۶: گذر زمانی u در ۵ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی بدون اغتشاش ورودی.



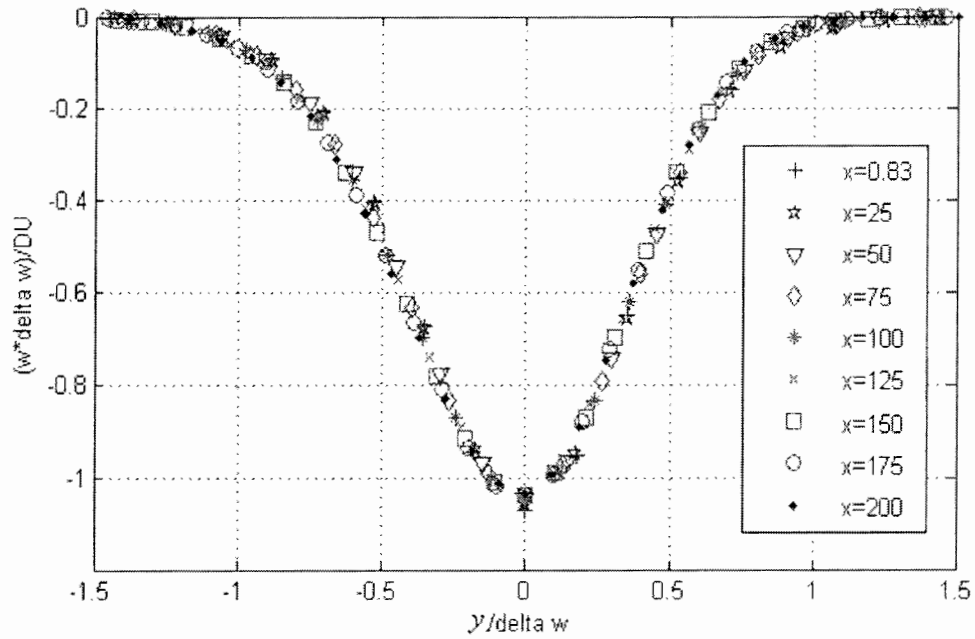
شکل ۵-۶: گذر زمانی v در ۴ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی بدون اغتشاش ورودی.

رفتار خودتشابهی سرعت جریان لایه اختلاطی آرام در شکل ۶-۶ برای نقاط مختلف نشان داده شده است. در شکل ۶-۷ هم می توان خود تشابهی گردابه های لایه اختلاطی را دید که ω با $\delta_{99}/\Delta U$ بی بعد شده است.

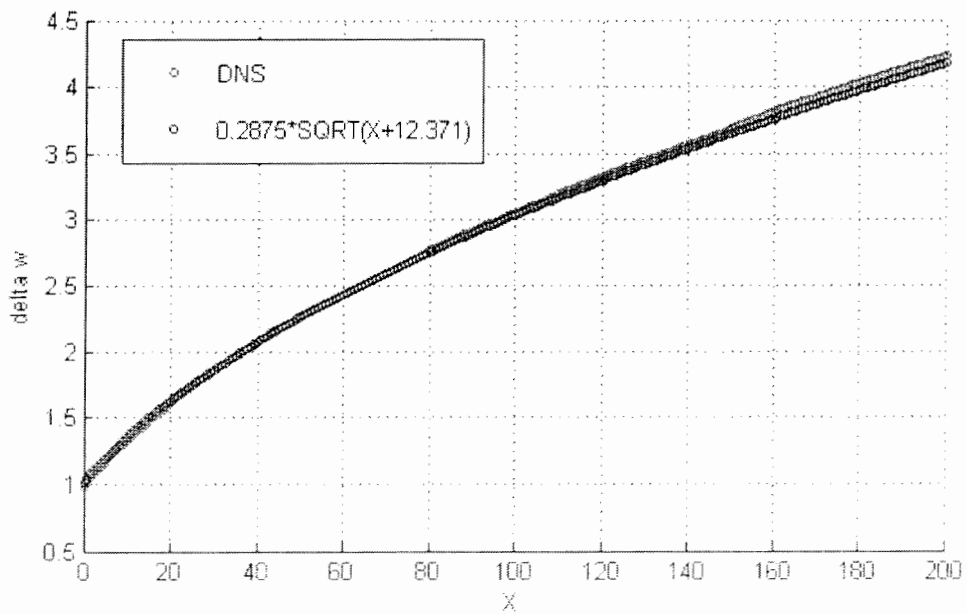
طبق نتایج تئوری، ضخامت ورتیسسته در جریان لایه اختلاطی بدون اغتشاش ورودی متناسب با $x^{0.5}$ می باشد. در شکل ۶-۸ رشد ضخامت لایه اختلاطی بدست آمده از شبیه سازی با منحنی $a\sqrt{x-x_0}$ که در آن $a = 0.2875$ و $x_0 = -12.371$ می باشد، مقایسه شده اند. شکل بیانگر تطبیق خوب نتایج بدست آمده از شبیه سازی با نتایج تئوری می باشد. همانطور که ملاحظه می شود، در انتهای دامنه محاسباتی، اختلافی بین نتایج شبیه سازی با منحنی وجود دارد که این اختلاف بدلیل دقیق نبودن شرط مرزی خروجی می باشد. بدین صورت که سرعت متوسط جریان در نظر گرفته شده در شبیه سازی (c) در معادله (۴-۱۴)، کاملاً منطبق بر سرعت واقعی جابجایی ساختارهای با مقیاس بزرگ در جریان نمی باشد.



شکل ۶-۶: پروفیل سرعت U در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی بدون اغتشاش ورودی.

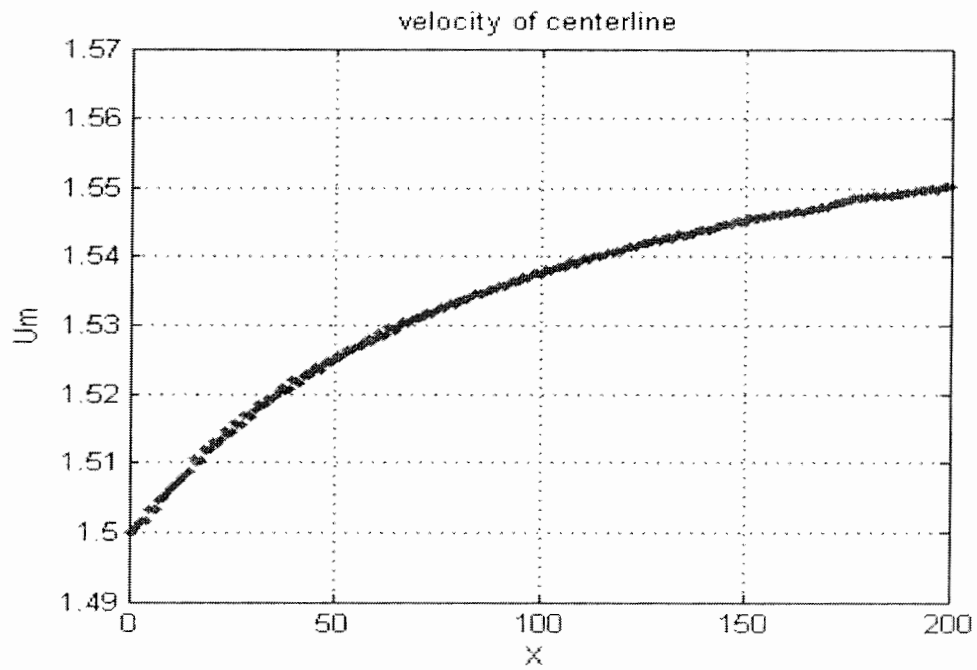


شکل ۶-۷: پروفیل گردابه w در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی بدون اغتشاش ورودی.



شکل ۶-۸: رشد ضخامت ورتیسیتته در جهت x برای جریان بدون اغتشاش.

در شکل ۹-۶ سرعت خط مرکزی جریان لایه اختلاطی نشان داده شده است.



شکل ۹-۶: نمایش سرعت خط مرکزی u_m در جهت x .

فصل هفتم

جریان لایه اختلاطی مغشوش

۷-۱- مقدمه :

در این بخش یک لایه اختلاطی دو بعدی را در حالتی توسعه می‌دهیم که یک اغتشاش در ورودی قرار می‌دهیم. این اغتشاش در اصل تابع ویژه سرعت در جهت y منتج از حل معادله اورسامرفیلد و تحلیل پایداری خطی جریان لایه اختلاطی می‌باشد (معادله ۴-۱۳).

همانطور که در فصل سوم اشاره شد، در شبیه‌سازیهای مستقیم عددی لایه اختلاطی از مولفه سرعت متقاطع جریان (۷) به عنوان نیرو استفاده می‌شود. زیرا ۷ در شرط مرزی ورودی در حالت متقارن، نامتقارن و یا ترکیبی از این دو، شرایط حل پذیری را ارضاء می‌کند. برای جزئیات به مرجع [2] رجوع شود.

۷-۲- نتایج شبیه سازی :

در قسمت نتایج شبیه سازی مستقیم عددی برای لایه اختلاطی همراه با اغتشاشات ورودی شرح داده می‌شود.

۷-۲-۱- اغتشاشات ورودی

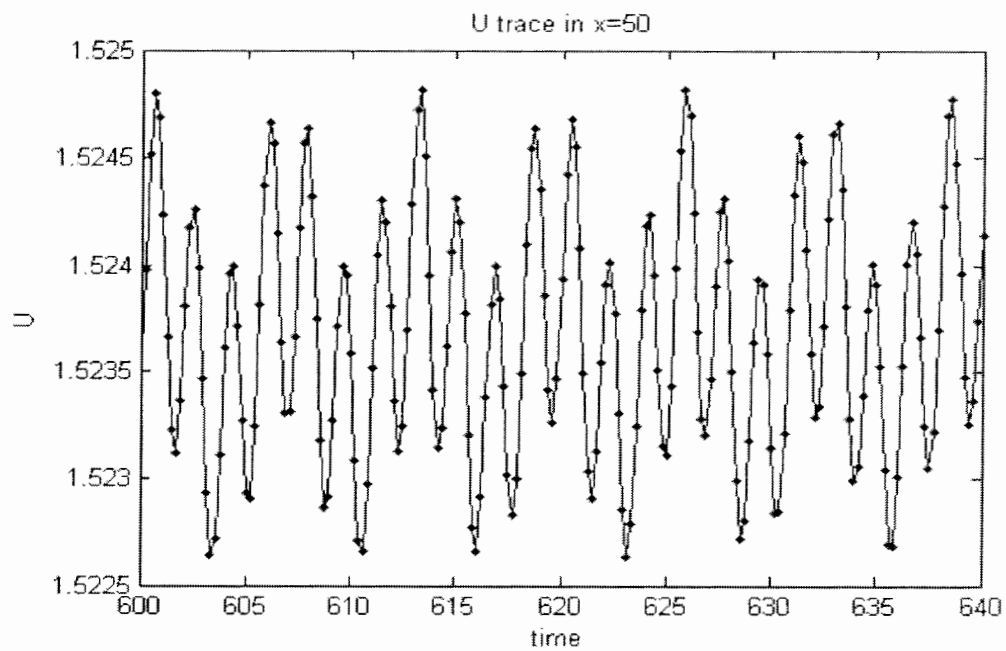
با توجه به ناپایداریترین مود بدست آمده از تحلیل پایداری جریان، برای فرکانس $\omega = 0.3$ مولفه‌های اغتشاش u و v بدست آمده‌اند. سرعت لحظه‌ای در شبیه سازی همراه با اغتشاشات باید به صورت آماری ساکن^۱ برسد و در این حالت سرعت متوسط مستقل از زمان است. گذر زمانی u و v در ۴ فاصله مساوی در جهت طول L_x و مرکز لایه در شکل‌های ۷-۱ تا ۷-۷ نشان داده‌اند. گذر زمانی u و v در $x = 97.5$ و $y = +1.31$ نیز در شکل‌های ۷-۸ و ۷-۹ نشان داده شده است.

با توجه این شکل‌ها می‌توان ملاحظه کرد که مولفه‌های سرعت u و v به یک حالت پایدار ایستایی رسیده‌اند و مقادیر متوسط آنها به لحاظ آماری نسبت به زمان تغییراتی ندارد. همچنین می‌توان مشاهده نمود که لایه کاملاً پرپودیک می‌باشد که این بخاطر نیروی خارجی اعمالی در ابتدای لایه می‌باشد.

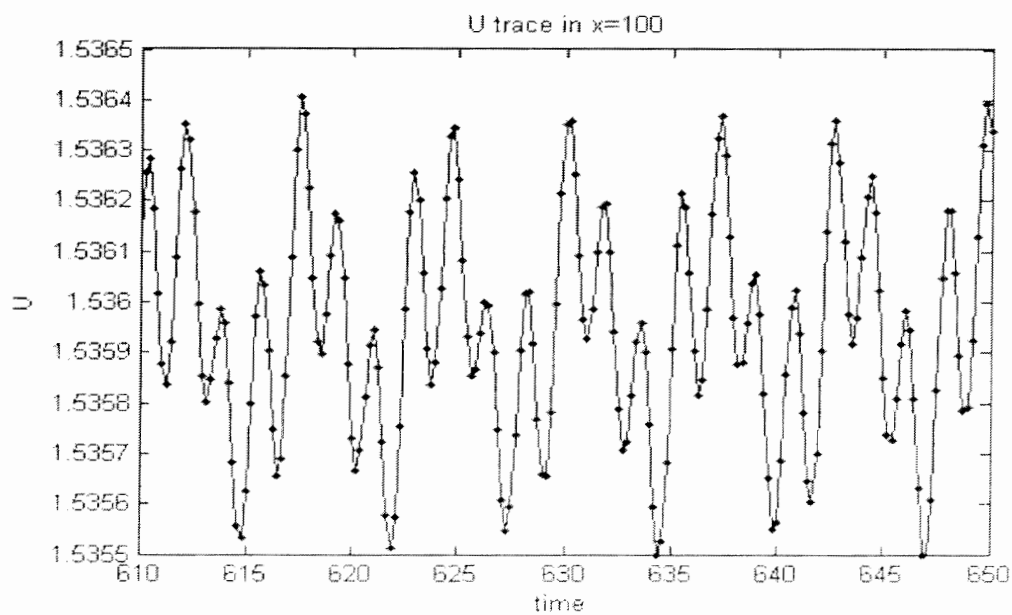
باید توجه داشت که فاصله زمانی قله تا قله^۲ در این منحنی‌ها، حرکت ساختارهای لایه را نشان می‌دهد. با این فاصله زمانی Δt ، همراه با سرعت جابجایی فرضی این ساختارها $\bar{U} = c$ ، می‌توان اندازه و مقیاس ساختارها را تخمین زد.

1 -Statistically Steady

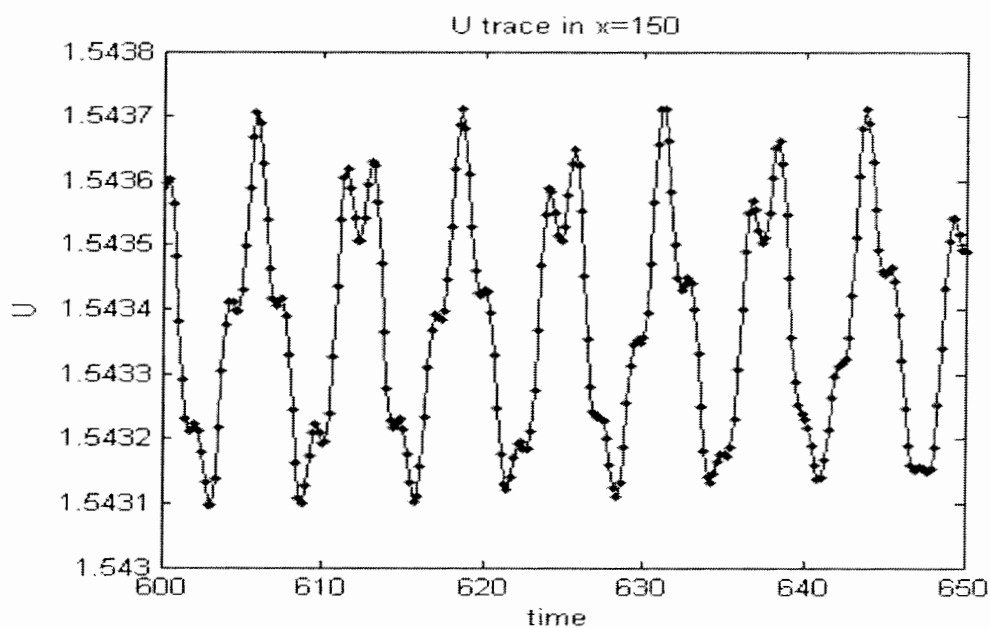
2 -peak-to-peak



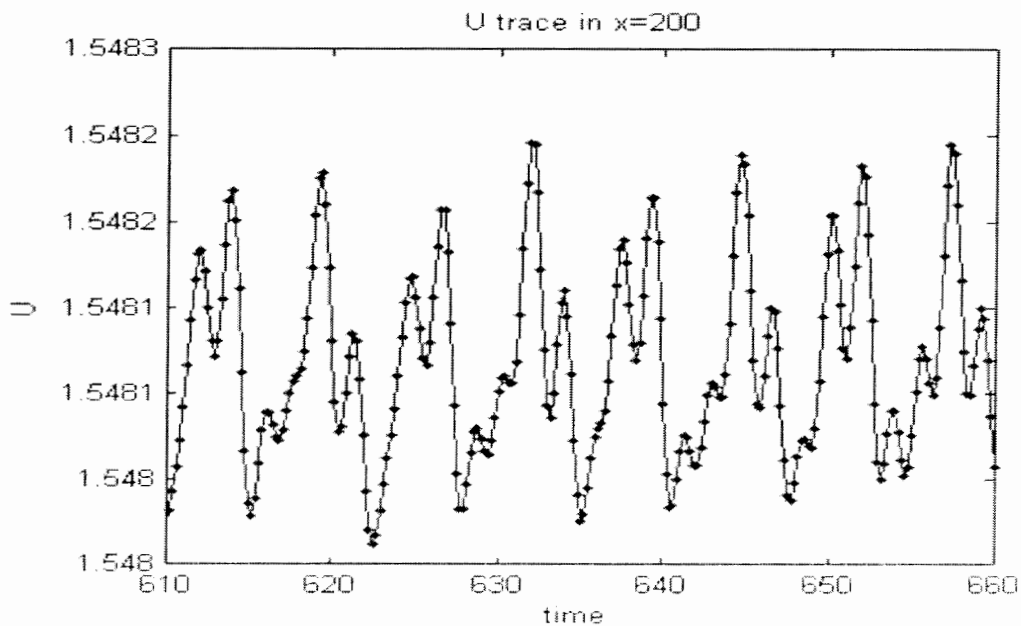
شکل ۷-۱: گذر زمانی u در $x = 50$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.



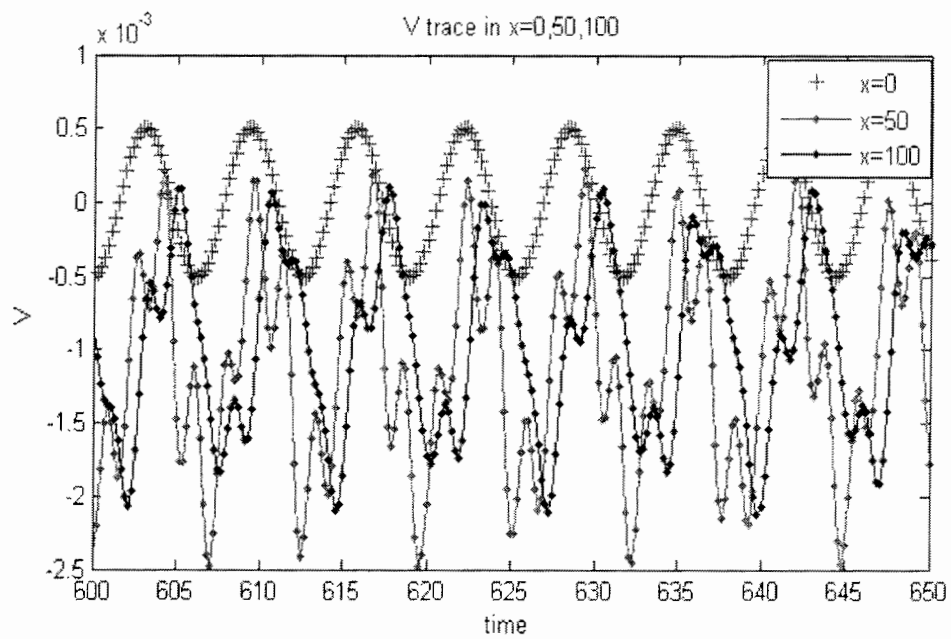
شکل ۷-۲: گذر زمانی u در $x = 100$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.



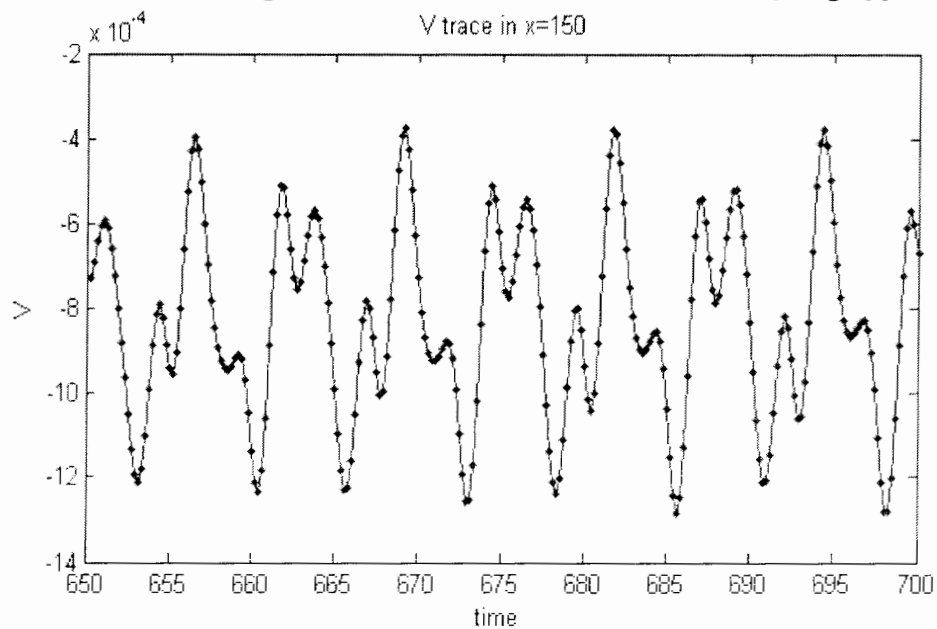
شکل ۳-۷: گذر زمانی u در $x = 150$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.



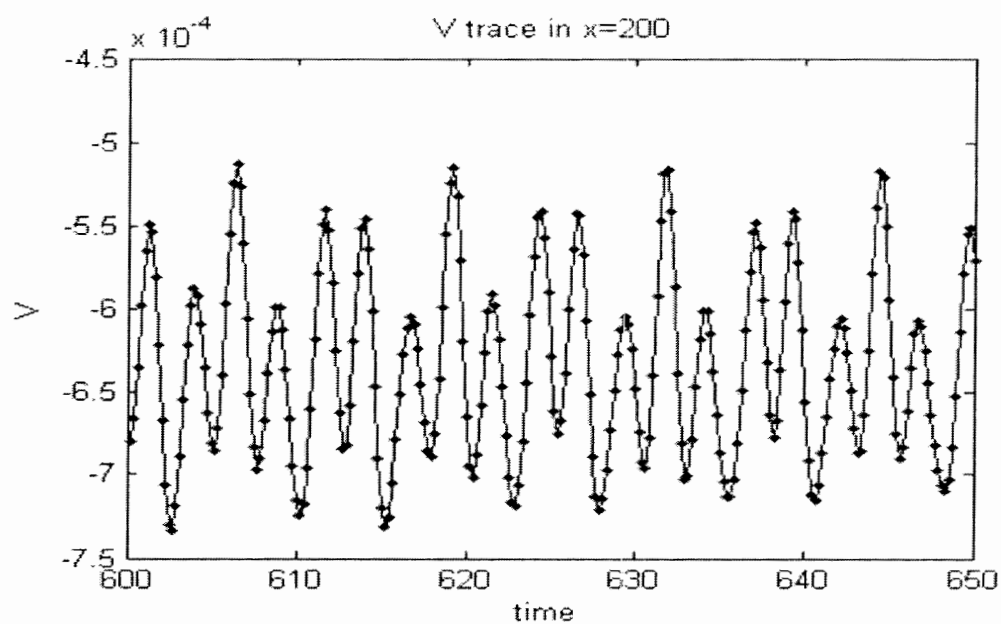
شکل ۴-۷: گذر زمانی u در $x = 200$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.



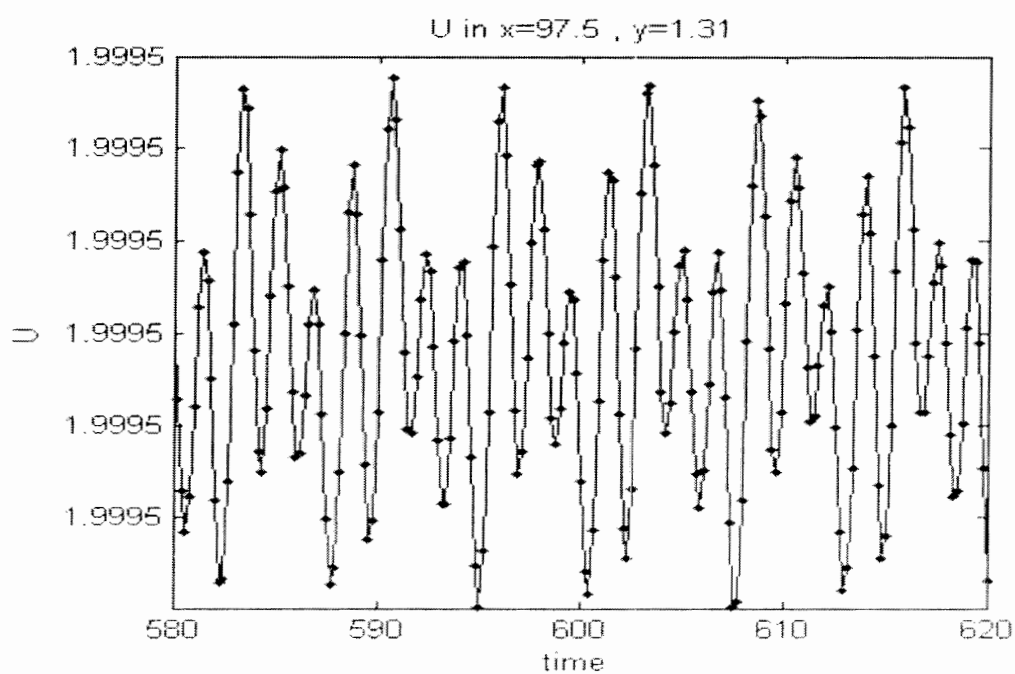
شکل ۷-۵: گذر زمانی v در $x = 0, 50, 100$ برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.



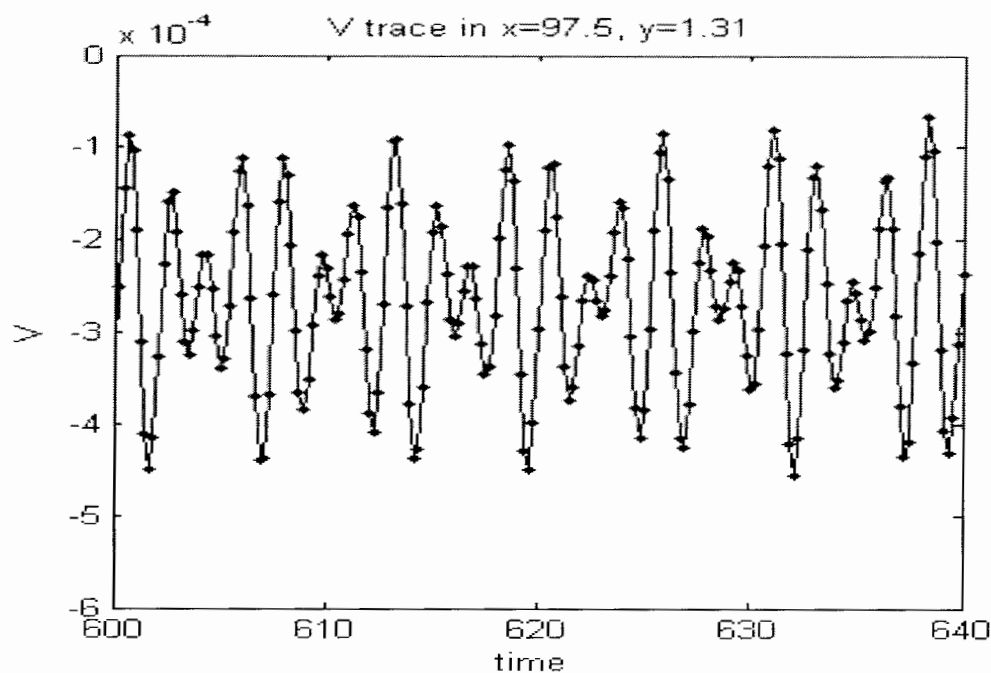
شکل ۷-۶: گذر زمانی v در $x = 150$ برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.



شکل 7-7: گذر زمانی v در $x = 200$ ، $y = 0$ برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.



شکل 7-8: گذر زمانی u در $x = 97.5$ ، $y = 1.31$ برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.



شکل ۷-۹: گذر زمانی v در $x = 97.5$ $y = 1.31$ برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.

۷-۲-۲- رشد ضخامت ورتیسیتِه :

آشفته‌گی‌های ورودی تاثیر بسیار مهمی بر روی رشد لایه اختلاطی دارند. در تحقیقی که توسط هو^۱ و همکاران انجام شده است [8]، سه نمونه از آشفته‌گی ورودی مورد آزمایش قرار گرفته‌اند:

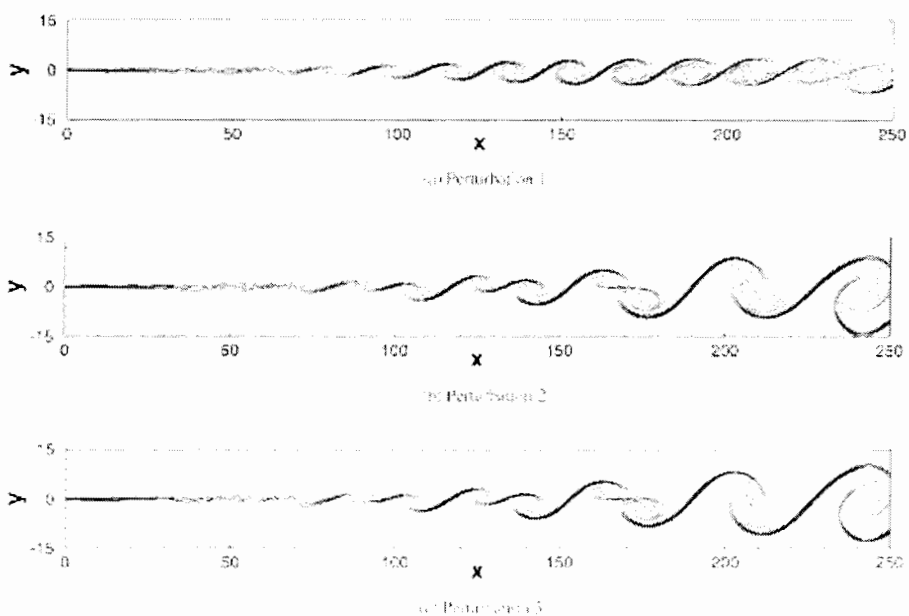
$$u' = A_0 \sin(2\pi f_0 t) \quad \text{آشفته‌گی ۱}$$

$$u' = A_0 \sin(2\pi f_0 t) + A_1 \sin(2\pi f_1 t + \beta_1) \quad \text{آشفته‌گی ۲}$$

$$u' = A_0 \sin(2\pi f_0 t) + A_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) \quad \text{آشفته‌گی ۳}$$

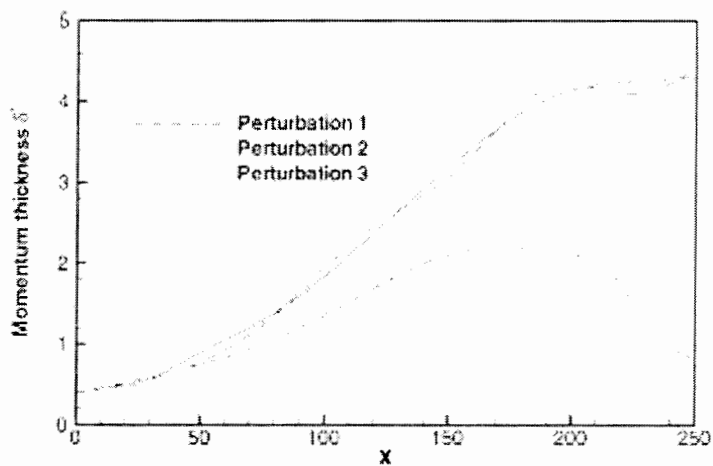
که f_0 ناپایدارترین فرکانس بدست آمده از آنالیز پایداری خطی می‌باشد. f_1 اولین فرکانس زیرهارمونیک^۱ و φ_1 جابجایی فاز بین دو فرکانس می‌باشد. درآشفته‌گی^۲، جابجایی فاز β_1 ثابت بوده و 45° در نظر گرفته شده است. درحالی‌که درآشفته‌گی^۳ یک جابجایی رندوم فاز (15°) معرفی می‌شود. این آشفته‌گی‌ها برای القاء جفت شدن ورتکسها^۲ در لایه اختلاطی استفاده می‌شود.

کانتورهای اسکالر جریان لایه اختلاطی برای سه نوع مختلف آشفته‌گی‌های اولیه در شکل ۷-۱۰ نشان داده شده است. دو آشفته‌گی دوفرکانسی نرخ رشد لایه اختلاطی بیشتری دارند و این به دلیل فرآیند جفت شدن گردابه‌ها می‌باشد، که این امر بوسیله افزایش ضخامت مومنوم که در شکل ۷-۱۱ نشان داده شده است، تأیید می‌شود.



شکل ۷-۱۰: کانتورهای اسکالر لایه اختلاطی برای اغتشاشات مختلف ورودی در $t = 315$ [8].

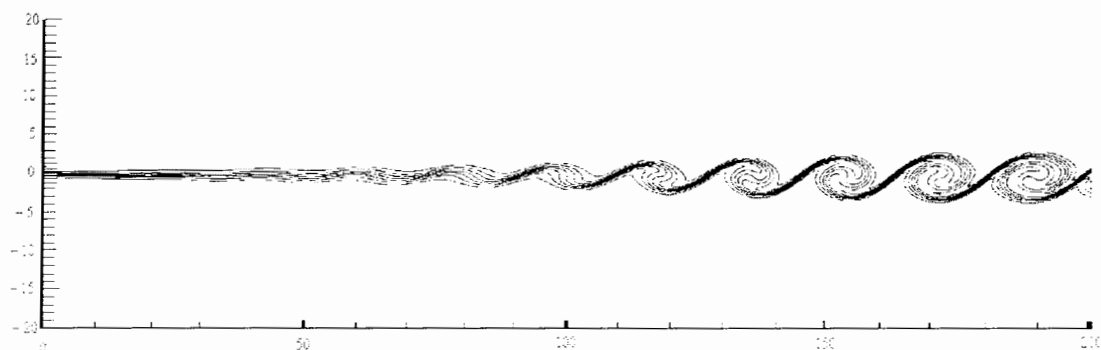
- 1- sub harmonic
2- vortex pairing



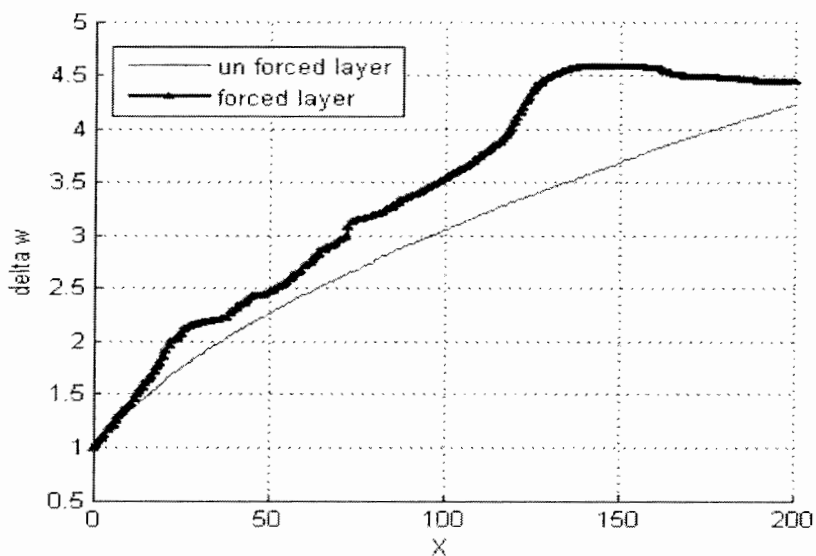
شکل ۷-۱۱: نیم ضخامت مومنتوم لایه اختلاطی برای اغتشاشات مختلف ورودی [8].

در شکل ۷-۱۲ کانتورهای اسکالر جریان لایه اختلاطی نشان داده شده است. در شکل نحوه تشکیل ساختارهای هارمونیک در جهت جریان بخوبی مشخص می‌باشد.

در شکل ۷-۱۳ ضخامت مومنتوم لایه اختلاطی بدست آمده از شبیه سازی انجام شده، نشان داده شده است. همانطور که اشاره شد، در این شبیه سازی فقط از ناپایدارترین فرکانس استفاده شده است و از فرکانسهای زیرهارمونی در اغتشاشات ورودی استفاده نشده است.



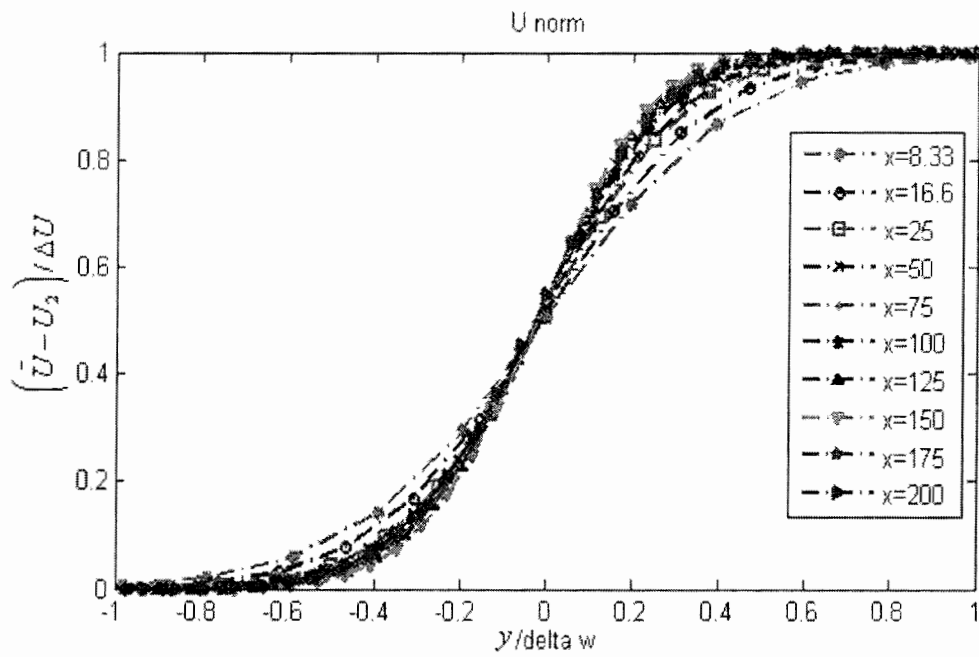
شکل ۷-۱۲: کانتورهای اسکالر لایه اختلاطی.



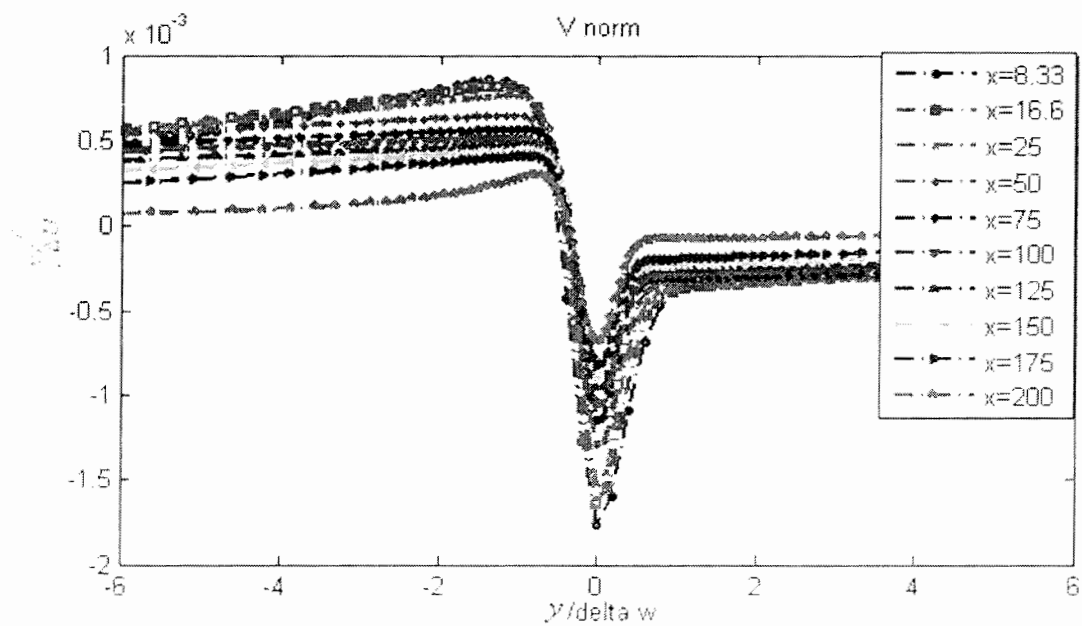
شکل ۷-۱۳: ضخامت مونتوم لایه اختلاطی بدست آمده از شبیه سازی.

۷-۲-۳- بررسی خود تشابهی و توزیعات تنش رینولدز

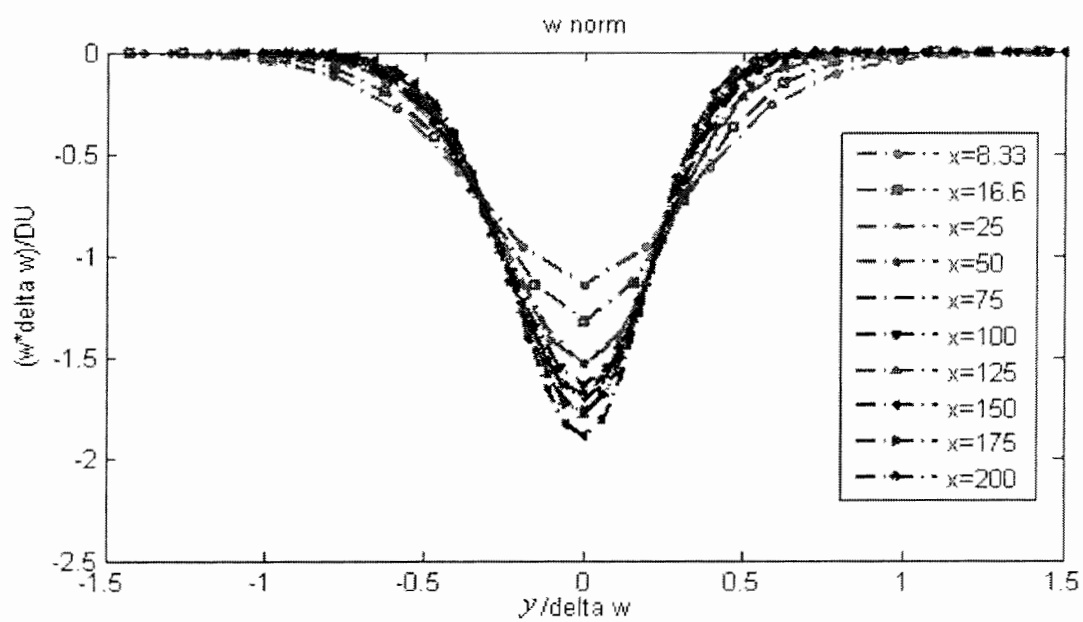
شکل ۷-۱۴ و ۷-۱۵ و ۷-۱۶ نتایج شبیه سازی را به ترتیب برای سرعت متوسط در جهت x و y و ورتیسیتته در جهت جریان اصلی در مختصات خود تشابهی در ایستگاههای مختلف نشان می دهد. در این شکل به خوبی می توان رفتار خود تشابهی را برای سرعت متوسط مشاهده کرد. همانطور که مشاهده می شود، لایه اختلاطی بطور کامل خودمشابه نمی باشد، که این بدلیل نیروی خارجی اعمالی در ورودی جریان می باشد.



شکل ۷-۱۴: پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.

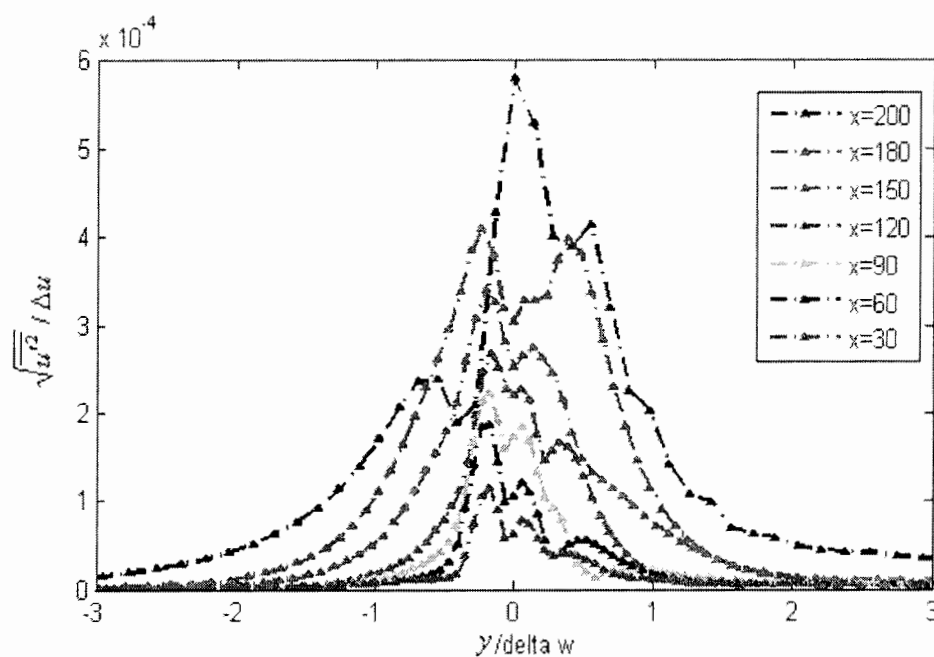


شکل ۷-۱۵: پروفیل سرعت v در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.

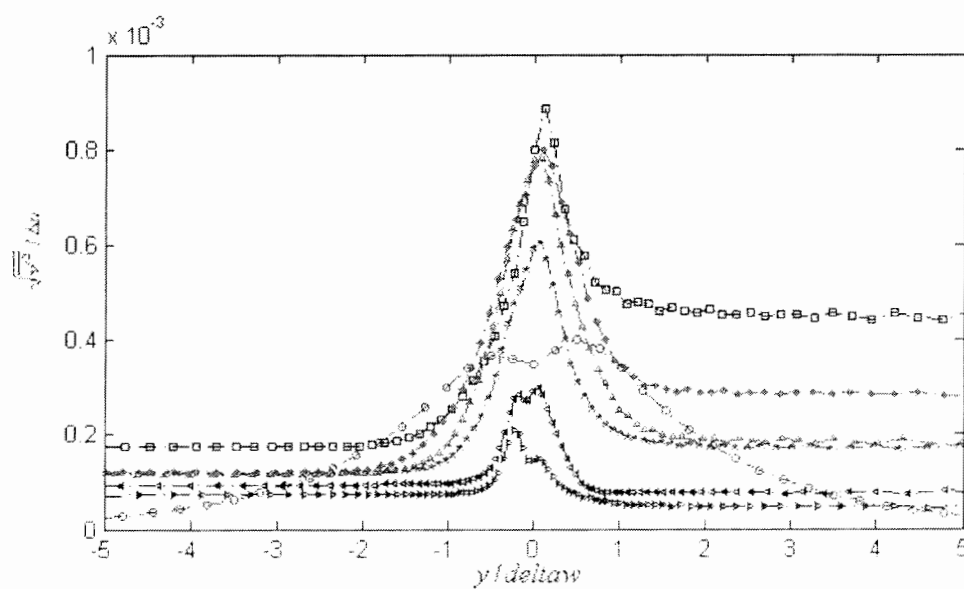


شکل ۷-۱۶: پروفیل گردابه w در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.

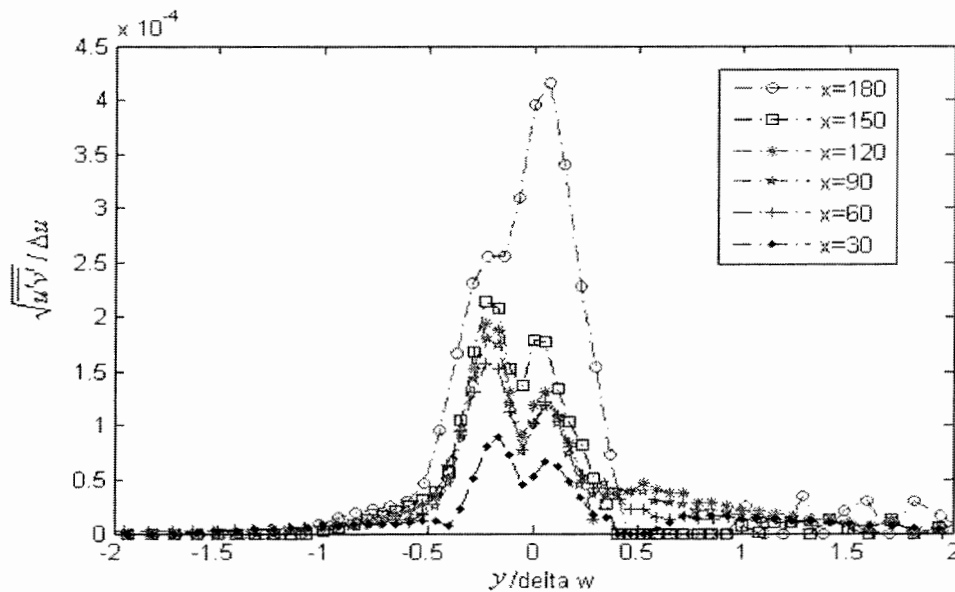
در شکل های ۷-۱۷ و ۷-۱۸ و ۷-۱۹ توزیعات شدت تنش های رینولدز نمایش داده شده است. این توزیعات نیز بیانگر رفتار غیر خودمشابهی لایه می‌باشند.



شکل ۷-۱۷: نمایش $\sqrt{u'^2} / \Delta u$ به y / δ_w .



شکل ۷-۱۸: نمایش $\sqrt{v'^2} / \Delta u$ به y / δ_w .



شکل ۷-۱۹: نمایش $\sqrt{u'v'}/\Delta u$ به y/δ_w .

۷-۳- نتیجه گیری:

در این تحقیق شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان اجباری^۱، دوبعدی، تراکم ناپذیر و توسعه یافته مکانی لایه اختلاطی انجام شد. از روش عددی برای بدست آوردن نتایج شبیه‌سازی استفاده شده است. در تحلیل پایداری خطی جریان لایه اختلاطی از روش نگاشت طیفی استفاده شده است.

برای شبیه‌سازی جریان لایه اختلاطی توسعه‌یافته مکانی، از روش تفاضل محدود فشرده در جهت اصلی جریان و از روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی در جهت عرضی جریان استفاده شده است. شرط مرزی ورودی، تولیدکننده جریان لایه اختلاطی اجباری می‌باشد. اغتشاشات ورودی بر اساس ناپایدارترین

1- forced

مود اغتشاشی بدست آمده از تحلیل پایداری خطی، بر پروفیل سرعت تانژانت هایپربولیک، در مرز ورودی اعمال شده‌اند.

با توجه به گذر زمانی مولفه‌های سرعت u و v ، ملاحظه می‌شود که این مولفه‌ها به یک حالت پایدار ایستایی رسیده‌اند و مقادیر متوسط آنها به لحاظ آماری نسبت به زمان تغییراتی ندارد. همچنین می‌توان مشاهده نمود که لایه کاملاً پریودیک می‌باشد که این بخاطر نیروی خارجی اعمالی در ابتدای لایه می‌باشد.

نتایج خودتشابهی مولفه‌های سرعت و گردابه و همچنین تنشهای رینولدز نیز بدست آمدند. با توجه به این نتایج می‌توان فهمید که رفتارهای مولفه‌های سرعت و گردابه در لایه اختلاطی اجباری بطور کامل خود مشابه نمی‌باشند، که این بدلیل نیروی خارجی اعمالی در ورودی جریان می‌باشد.

۴-۷- پیشنهادات برای تحقیقات آینده :

با توجه به تحلیل صورت گرفته، به منظور ادامه و تکمیل و بهبود آن پیشنهادات زیر توصیه می‌گردد:

الف : همانطور که اشاره شد، نیروی خارجی اعمالی در ورودی دامنه محاسباتی، در رشد ضخامت لایه اختلاطی نقش اساسی دارد. پیشنهاد می‌شود از اغتشاشات بدست آمده از مودهای ناپایدار اصلی و زیر هارمونی جهت اجباری کردن لایه اختلاطی استفاده شود.

ب : روش عددی استفاده شده در این تحقیق، تفاضل محدود فشرده می‌باشد. در این زمینه می‌توان از روشهای عددی دیگر مانند تفاضل محدود فوق فشرده^۱ که دارای دقتی به مراتب بالاتر می‌باشد، استفاده کرد.

ج : نگاهت استفاده شده در این تحقیق، دامنه فیزیکی را به دامنه محاسباتی $[-1,1]$ تطبیق می‌کند. در این زمینه می‌توان از نگاهت های دیگر مانند $y = -\beta \cot(\pi \zeta)$ که دامنه فیزیکی را به $[0,1]$ تطبیق می‌کند، استفاده کرد.

د : می‌توان از گسترش روش عددی فوق برای تحلیل مسایل پیچیده تر مانند شبیه سازی لایه اختلاطی بین دو جریان واکنش دهنده یا جریان لایه اختلاطی همراه با ذرات استفاده کرد.

1- super compact finite difference

ضمیمه الف

بدست آوردن شکل چرخشی معادله ناویر - استوکس

در این ضمیمه فرم چرخشی^۱ معادلات ناویر استوکس را که در معادله (۴-۴) به آن اشاره شد را بدست می‌آوریم:

فرم بی‌بعد معادله ناویر استوکس برای جریانهای غیر قابل تراکم به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (1)$$

با توجه به رابطه زیر:

$$\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B) \quad (2)$$

برای مورد $A = B = \vec{U} = (U, V, W)$ ، داریم:

$$(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{U} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{U} \cdot \vec{U}) \quad (3)$$

که $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ اگر معادله ۳ در معادله ۱ جایگزین گردد معادله زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{H} - \nabla(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2}) + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (4)$$

که $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3) = \vec{U} \times \vec{\omega}$ با اعمال عملگر کرل^۲ در طرفین معادله ۴، داریم:

$$\frac{\partial(\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \nabla \times \nabla(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2(\nabla \times \vec{U}) \quad (5)$$

با توجه به اینکه $\nabla \times \nabla(\text{scalar}) = 0$ ، معادله ۵ به رابطه ۶ تبدیل می شود:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (6)$$

با اعمال مجدد عملگر کرل از معادله ۶، معادله زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \nabla \times (\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times \vec{U})) \quad (7)$$

با توجه به معادله پیوستگی ($\nabla \cdot \vec{U} = 0$) و به کار بردن رابطه زیر:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U} \quad (8)$$

معادله ۷ به معادله ۹ تبدیل می گردد.

$$\frac{\partial \nabla^2 \vec{U}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \vec{U} \quad (9)$$

که $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3) = \vec{U} \times \vec{\omega}$ جملات غیرخطی هستند.

مزیت استفاده از این فرم معادلات ناویر استوکس، اولاً کاهش تعداد متغیرهای مستقل و در نتیجه کاهش فضای دیسک مورد نیاز و ثانياً عدم احتیاج به تعیین فشار در مرزهای مساله می باشد. در عین حال در مقابل این دو مزیت، تغییر درجه معادله دیفرانسیل حاکم از دو به چهار را باید تجربه کرد.

مراجع

- ۱- ح. ایزی. حل مستقیم عددی جریان جت. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود. شاهرود. ایران. ۱۳۸۵.
- ۲- ا. سلمانی ماهینی. تحلیل پایداری جت. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود. شاهرود. ایران. ۱۳۸۴.
- ۳- ایروینگ اچ شیمز (ترجمه مهندس علیرضا انتظاری). مکانیک سیالات. انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج. ۱۳۷۲.
- ۴- ک. ا. هافمن (ترجمه دکتر احمد رضا عظیمیان). دینامیک محاسباتی برای مهندسان. مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان.
- ۵- د. هانسلن. بروس لیتل فیلد (ترجمه امیر هوشنگ غیوری). راهنمای جامع مطلب ۶. انتشارات کتاب پایتخت.

- 1- Ansari.A.R , Shishkin. *Meshes and their Applications*. Department of Mathematics, Gulf University for Science & Technology, Hawally 32093, Kuwait.
- 2- Maghrebi.M.J. *A Study of Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Planer Wake*. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia, 1999.
- 3- Maghrebi.M.J. *Orr Summerfield Solver Using Mapped Finite Difference Scheme for Plane Wake Flow*. Department of Mechanical Engineering Shahrood University of Technology, Shahrood, IR.IRAN. 2004.
- 4- Mathieu.J,Scott.J. *An Introduction to Turbulent Flow*.Cambridge University Press. 2000.
- 5- Michalke.A. *On Spatially Grow thing Disturbance in Inviscid Shear Layer*. Institute of turbulence.Berlin.1965.
- 6- Lowery.P.S , Reynolds.W. *Numerical Simulation of Spatially Developing, Forced, Plane Mixinh Layer*. 1986. NASA NCC2-015
- 7- Pellerin.S , Dulieu.A. Evaluation of Time and Space Scales in Developing 3D Turbulence Incompressible Mixing Layer by Using LES. 2000.
- 8- Hu.Z , Luo.X , Luo.K.H. *Numerical Simulation of Particle Dispersion in Spatially Developiong Mixing Layer*. 2002.Theoretical andComputational FluidDynamics.
- 9- Bartlez.R.H , Stewar.G.W. *Solution of the Matrix Equation $AX+XB=C$* . [F4], Communications of the ACM, Vol 15, Number 9, 1972.
- 10- Garde. R.J. *Turbulent Flow*. New Age International Limited, 2000.
- 11- Moin.P , Mohesh.K. *Direct Numerical Simulation : A Toolin Turbulence Research*. Ann.Rew. Fluid Mech.1989.21 :285-315.
- 12- Ho.C.M , Huerre.P. *Perturbed Free Shear Layer*. Annual.Rew. Fluid Mech.1984. 16:365-424.
- 13- Chollet.J.P , Lesiur.M.L. 1985. Numerical Simulation of Vortex in Mixing Layer & Plane Jet.
- 14- White.F.M. *Viscous Fluid Flow*.
- 15- Liu.J.T.C. *Coherent Structures in Transitional and Turbulence Free Shear Flows*. Ann.Rew.Fluid.Mech.1989.20 : 359-391.

- 16- Lele.S.K. *Compact Finite Difference Scheme with Spectral-Like Resolution*. Journal of Computational Physics, 103, 16-12, 1992.
- 17-Press.W. H , Teukolsky. S. A ,.Vetterling.W. T , Flannery. B. P. *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*. Second Edition, Cambridge university press, 1992.
- 18- Schlichting.H. *Boundary Layer Theory*. Mc Graw Hill, 1979.
- 19- ASpley.D. *Turbulent boundary layer*. 2004.
- 20- Modi.A. *Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow*. April 26.1999.
- 21- Cortesi.A.B , Banerjee.S. *Numerical Investigation of 3D Structures in Stably-Stratified Mixing Layer*. Physics of Fluid. Volume10, Number 6.
- 22- Wray.A & Hussaini. M.Y. *Numerical Experiments in Boundary Layer Stability*. Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 392, pp 373-389. 1984.

Abstract

The non-dimensional Navier-Stokes equations in rotational form for the two dimensional mixing layer flow are solved using direct numerical simulation. The length scale and the velocity scale of the base flow at the inlet boundary of computational domain are used as two characteristics to define the flow Reynolds number. These two characteristics are the mixing layer half width and velocity difference of two streams. The governing equations are discretized in the streamwise direction (x), using a sixth order compact finite difference scheme, and cross stream direction (y), a mapped compact finite difference scheme, respectively. A tangent mapped of $y = \beta \tan(\pi\zeta/2)$ is used to relate the physical domain in the double infinity of $-\infty < y < \infty$ to the computational domain of ζ ($-1 \leq \zeta \leq 1$). The compact third order of runge-kutta method is used for the time-advancement purpose. The convective outflow boundary condition is employed to create a non-reflective type boundary condition at the outlet. An inviscid (Stuart flow) and a completely viscous solutions of the Navier-Stokes equations are used for verification of the numerical simulation. The numerical results show a very good accuracy and agreement with exact solution of the Navier-Stokes equation.

Key words

2 D Mixing Layer, Compact finite difference, Self similarity, Mixing layer half width.