بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل دینامیکی تیر رزوناتور بر پایه الاستومر دی الکتریک هایپرالاستیک، با ارتعاشات دامنه بزرگ

نگارنده: علی آریانا

استاد راهنما:

دکتر اردشیر کرمی محمدی

شهریور ۱۳۹۸

شماره: ۱۳۳/۲۹۸/پد
تاریخ: ۹۸/۷/۳۰

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای علی آریانا با شماره دانشجویی **۹۵۰۱۲۳۴** رشته مهندسی **مکانیک**، گرایش **طراحی کاربردی**، تحت عنوان **تحلیل دینامیکی تیر رزوناتور بر پایه الاستومر دی‌الکتریک هایپر الاستیک، با ارتعاشات دامنه بزرگ**، که در تاریخ **۱۳۹۸/۰۶/۱۷** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: عالی خوب) ☑	**مردود** ☐
نوع تحقیق: نظری ■	**عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	اردشیر کرمی محمدی	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم	---	-	-
۳- استاد مشاور	---	-	-
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	سید علی سینا	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	حبیب احمدی	استادیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	حمیدرضا ابیک‌چی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به پدر و مادر عزیز و مهربانم که در سختی ها و دشواری های زندگی همواره یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده اند.

سپاسگزاری

در اینجا از استاد گرامیم جناب آقای دکتر اردشیر کرمی محمدی بسیار سپاسگزارم چرا که بدون راهنمایی های ایشان تنظیم این پایان نامه بسیار مشکل می نمود.

از دوست عزیزم جناب آقای سجاد اتحادی جهت ارائه نظرهای علمی و تمام کسانی که در انجام این پایان نامه به هر نحو اینجانب را راهنمایی و کمک فرمودند سپاسگزاری می نمایم.

تعهدنامه

اینجانب علی آریانا دانشجوی دوره ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله « **تحلیل دینامیکی تیر رزوناتور بر پایه الاستومر دی الکتریک هایپرالاستیک، با ارتعاشات دامنه بزرگ** » تحت راهنمایی آقای دکتر اردشیر کرمی محمدی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققین دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در این رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود است و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج شده از رساله رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ ۱۳۹۹/۰۵/۲۵ امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود است. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده:

رزوناتورهای الاستومری دی الکتریک یک بخش وسیعی از سیستم های میکرو الکترومکانیکی هستند. این رزوناتورها از اجزای الکتریکی و مکانیکی تشکیل شده و با استفاده از تکنیک های ساخت تا اندازه میکرو و نانو تولید می شوند. در این تحقیق، رفتار دینامیکی، پایداری، ارتعاشات آزاد و اجباری یک رزوناتور الاستومر دی الکتریک که به صورت یک میکروتیر ساندویچی بر اساس تئوری های کلاسیک اویلر – برنولی با شرایط مرزی دو سر گیردار مدل شده است، بررسی می شود. میکروتیر ساندویچی متقارن است، لایه های بالایی و پایینی الاستیک خطی و لایه میانی از جنس ماده هایپرالاستیک می باشد. ماده هایپر الاستیک ماده ای با رفتار غیر خطی است که رابطه تنش – کرنش آن خطی نیست. در اینجا، این ماده غیر خطی توسط مدل یئو در نظر گرفته می شود. هنگامی که دو لایه الکترود تحت اعمال ولتاژ الکتریکی قرار می گیرند لایه الاستومر در جهت ضخامت فشرده شده و در جهت طولی باز می شود و به صورت یک خازن عمل می کند. تابع چگالی انرژی کرنشی مدل یئو که شامل ثوابت خاص این مدل است برای به دست آوردن انرژی پتانسیل لایه هایپرالاستیک در میکرو تیر ساندویچی استفاده می شود. با محاسبه انرژی های پتانسیل شامل چگالی انرژی کرنشی و انرژی ناشی از میدان الکتریکی در دی الکتریک که به صورت یک خازن رفتار می کند و انرژی جنبشی در میکروتیر ساندویچی، معادله حاکم بر حرکت با اصل هامیلتون فرموله بندی می شود. سپس با استفاده از روش گسسته سازی گالرکین معادله دیفرانسیل جزئی حرکت به معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان تبدیل می شود. روش مقیاس های زمانی چندگانه برای حالت رزونانس اولیه، به منظور حل تحلیلی– تقریبی معادله غیر خطی حرکت به کار گرفته می شود. هم چنین، وضعیت پایداری و ناپایداری پاسخ های حالت ماندگار در مجاورت نقاط تعادل و ولتاژ کمانش بحرانی بررسی می شوند. علاوه بر این، پدیده چندشاخگی با در نظر گرفتن مقادیر مختلف ولتاژ اعمالی، نسبت های مختلف ضخامت لایه های میکروتیر، فرکانس پارامتر تنظیم و دامنه نیروی تحریک به عنوان پارامترهای کنترلی مورد بررسی قرار می گیرد.

واژگان کلیدی:

رزوناتور الاستومری دی الکتریک، چندشاخگی، ولتاژ بحرانی، روش مقیاس های زمانی چندگانه، سیستم های میکرو الکترومکانیکی، مواد هایپرالاستیک.

مقالات مستخرج از پایان نامه:

Ariana, Ali, and Ardeshir Karami Mohammadi. "Nonlinear dynamics and bifurcation behavior of a sandwiched micro-beam resonator consist of hyper-elastic dielectric film." *Sensors and Actuators A: Physical* (2020): 112113.

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

فهرست جدول ها

جدول علائم و اختصارات

توضیح	نماد
طول میکروتیر	L
عرض میکروتیر	b
ضخامت لایه هایپرالاستیک	h
ضخامت لایه الاستیک	t
سطح مقطع لایه هایپرالاستیک	A_h
سطح مقطع لایه بالایی	A_e^t
سطح مقطع لایه پایینی	A_e^b
چگالی ماده هایپیر الاستیک	ρ_h
چگالی لایه بالایی	ρ_e^t
چگالی لایه پایینی	ρ_e^b
ممان اینرسی لایه هایپرالاستیک	I_h
ممان اینرسی لایه بالایی	I_e^t
ممان اینرسی لایه پایینی	I_e^b
مدول الاستیسیته لایه بالایی	E_e^t
مدول الاستیسیته لایه پایینی	E_e^b
ثوابت مدل یئو	c_1 , c_2 , c_3
ثابت دی الکتریک ماده هایپرالاستیک	ϵ
مولفه های جابجایی در راستای محورهای $\boldsymbol{x} , \boldsymbol{y} , \boldsymbol{z}$	u , v , w
ولتاژ مستقیم	V_{dc}
فرکانس تحریک	Ω
فرکانسی طبیعی خطی با بعد	ω_d

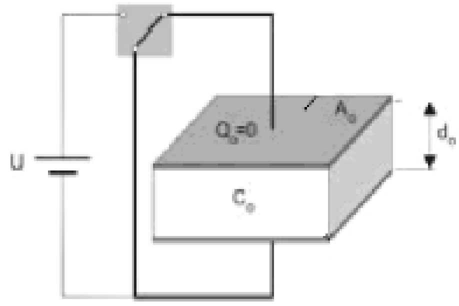
فرکانس طبیعی خطی بدون بعد	ω_0
دامنه نیرو تحریک	f_0
بار الکتریکی	Q
جابجایی الکتریکی اسمی	$\widetilde{D}$
چگالی انرژی کرنشی	W
تابع چگالی انرژی میدان الکتریکی	ϕ
انرژی جنبشی کل	T
انرژی پتانسیل لایه هایپرالاستیک	Π_h
انرژی پتانسیل کل	Π
نسبت های کشیدگی	$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3$
ثوابت کرنش	I_1 , I_2 , I_3
تانسور راست کوشی – گرین	C
کرنش لاگرانژی	E
مولفه های کرنش	ε_i
پارامتر کوچک اغتشاشی	ε
پارامتر تنظیم	σ
ماتریس ژاکوبین	J

فصل اول:

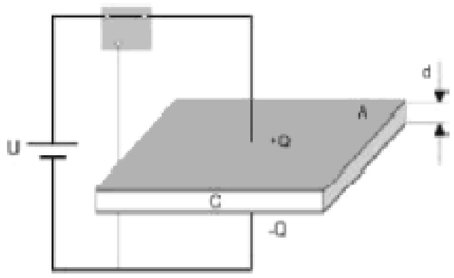
مقدمه

۱-۱ الاستومر دی الکتریک

الاستومر دی الکتریک، یک ساختاری است که تحت تحریک ولتاژ الکتریکی به صورت میدان الکتریکی قرار می گیرد که در ساختمان آن از الاستومر (پلیمر لاستیکی) استفاده شده و دارای ساختار بسیار ساده ای شامل الاستومری است که بین دو الکترود رسانا، انعطاف پذیر و الاستیک قرار می گیرد، بنابراین در عمل به صورت یک خازن عمل می کند. وقتی ولتاژ به الکترودها اعمال می گردد، ضخامت غشاء الاستومری به سبب فشردگی و کشش در لایه های میانی کاهش و مساحت آن زیاد شده و به این ترتیب دارای تغییر شکل می شود. علت این امر این است که الاستومرها از مواد تراکم ناپذیر هستند، لذا هرگونه کاهش ضخامت منجر به افزایش مساحت شده تا حجم ماده ثابت بماند. شکل های (۱-۱) و (۱-۲) شماتیک الاستومر دی الکتریک را قبل و بعد از اعمال ولتاژ نشان می دهند.



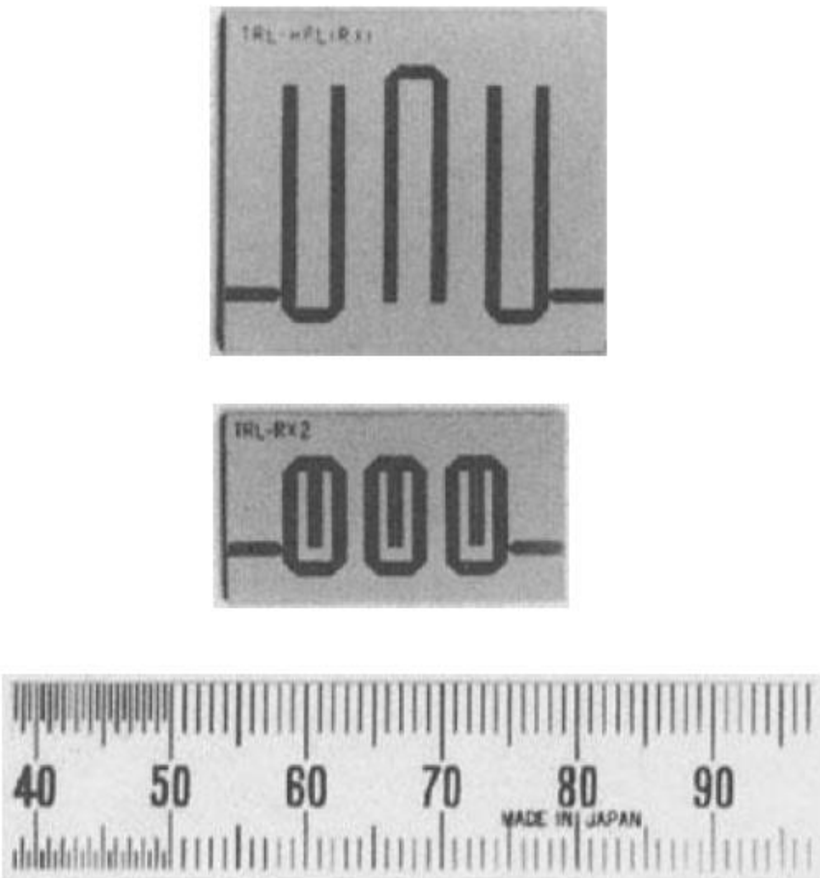
شکل (۱-۱) : دی الکتریک قبل از اعمال ولتاژ



شکل (۱-۲) : دی الکتریک بعد از اعمال ولتاژ

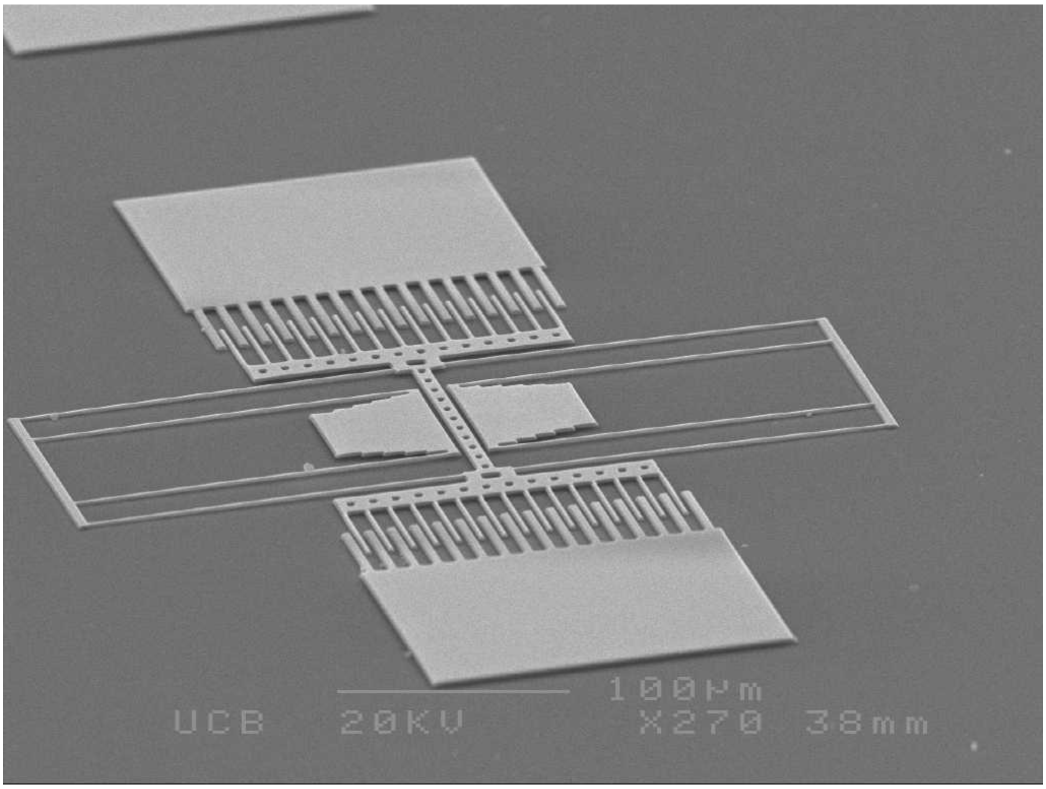
۱-۲ رزوناتور الاستومری دی الکتریک

میکرو رزوناتورهای ارتعاشی که با استفاده از فرآیند میکروماشینکاری تولید می شوند در سال های اخیر به دلیل مزیت هایشان از جمله اندازه کوچک، وزن سبک، عملکرد خوب، قابلیت اعتماد بالا و هزینه پایین مورد استفاده گسترده قرار گرفته اند. رزوناتورهای ساخته شده از الاستومر دی الکتریک نسبت به رزوناتورهای پیشین دارای این مزیت هستند که فرکانس طبیعی آنها با پارامترهای ساختاری در مرحله ساخت قابل تنظیم است. رزوناتور الاستومری دی الکتریک یک ابزار جدیدی است که به پیشرفت سیستم های میکرو الکترومکانیکی کمک می کند و کاربردهایی مختلف در فیلترهای الکترومکانیکی [1]، منابع فرکانس [2] و سنسورهای رزونانسی [3-5] دارد. شکل (۱-۳) ساختار یک رزوناتور فیلتر میکرو الکترومکانیکی را نشان می دهد.



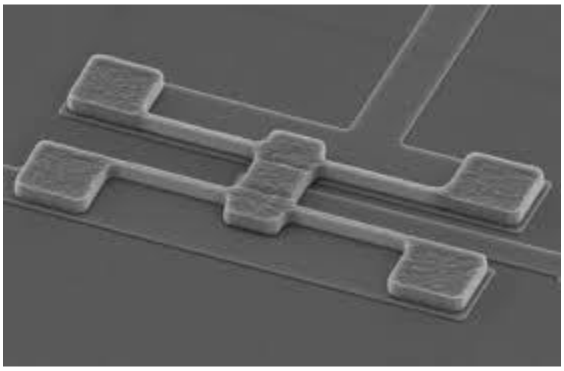
شکل (۱-۳) : رزوناتور فیلتر میکرو الکترومکانیکی

مدل سازی میکرو رزوناتورهای مکانیکی و ارتباط آنها با مدارهای الکتریکی برای نخستین بار در سال ۱۹۹۳ توسط جانسون ارایه شد [6]. در سال ۱۹۹۷ اولین میکرورزوناتور که رزوناتوری با تحریک الکتروستاتیکی شانه ای بود، توسط کائو و همکارانش ساخته و در دانشگاه میشیگان تست شد [7]. رزوناتور سیلیکونی با تحریک الکتروستاتیکی در شکل (۱-۴) مشاهده می شود:



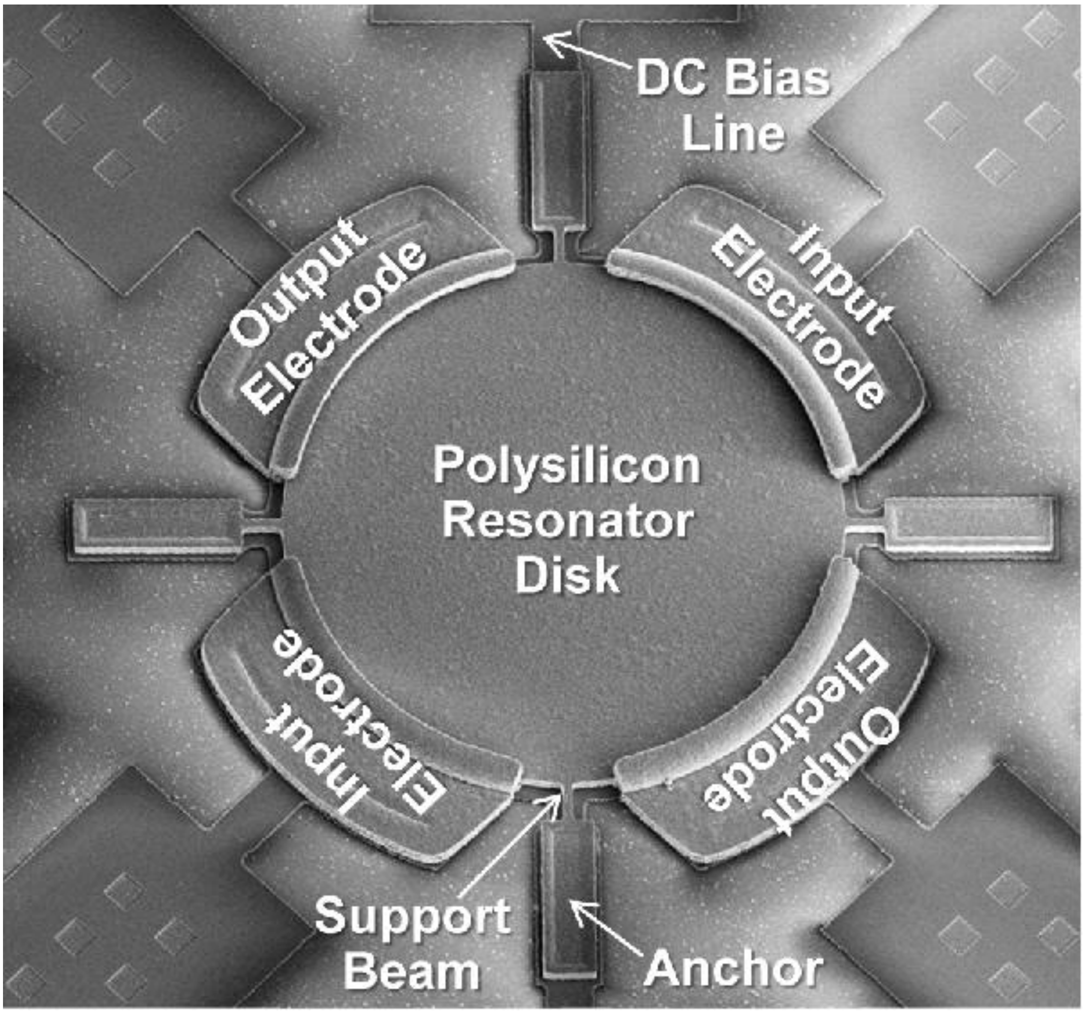
شکل (۱-۴) : رزوناتور سیلیکونی با تحریک الکترواستاتیکی شانه ای

چندی بعد فیلتر میکروالکترومکانیکی فرکانس بالا، متشکل از رزوناتورهای تیر دوسرگیردار که توسط تیری نرم به هم متصل بودند در سال ۲۰۰۰ توسط بانن و همکارانش ساخته شد. رزوناتور در هر دو انتها درگیر بوده و تا ۵۴/۲ مگاهرتز و فاکتور کیفیت ۸۴۰ در خلا تست شد [8]. هم چنین در همان سال میکرورزوناتور تیر دوسر آزاد با مود خمشی ساخته شد تا به فاکتور کیفیت ۸۰۰۰ در فرکانس بین ۳۰ و ۹۰ مگاهرتز برسد[9]. شکل(۱-۵)، شماتیک میکرو تیر رزوناتور دو سر آزاد را با فرکانس ۵۰/۳۴ مگاهرتز نشان می دهد.



شکل (۱-۵) : تیر میکرورزوناتور دو سر آزاد

رزوناتور دیسکی که دارای دو الکترود حول دیسک ارتعاشی می باشد در فرکانس۱۵۶ مگاهرتز با فاکتور کیفیت ۹۴۰۰ در سال ۲۰۰۳ ساخته شد شکل (۱-۶) [10].



شکل (۱-۶) : میکرو رزوناتور دیسکی

یک رزوناتور الاستومری دی الکتریک از یک ماده پلیمر الکترو-اکتیو ساخته می شود. چرا که این مواد ویژگی های مطلوبی دارند. نظیر کرنش و تغییر شکل زیاد، انعطاف پذیری، وزن سبک، چگالی انرژی بالا و قیمت ارزان [11-21]. هم چنین این رزوناتورها در ترکیب بندی های مختلفی طراحی می شوند.

کاربرد الاستومرهای دی الکتریک در رزوناتورها بسیار گسترده می باشد، چون الاستومرها موادی شکل پذیر هستند می توانند در بسیاری از شکل ها و ترکیب ها با ابعاد متنوع موجود باشند. جنبه های مطلوبی نظیر ساختار یکپارچه (پلیمرها می توانند به راحتی به صفحات با مساحت زیاد یا هرشکل دیگری بدل شوند)، انعطاف پذیری و مطابقت (رزوناتورها به دلیل نرم بودن پلیمرها انعطاف پذیر بوده و می توانند تغییر شکل داده و یا سطوح مختلف را دنبال کنند)، شفافیت (اکثر الاستومرها شفاف بوده و این امر کاربرد در موارد اپتیکی را ممکن نموده و نیز دیدن داخل رزوناتور را امکان پذیر می نمایند)، چند وظیفه ای (پلیمرها می توانند به راحتی در سازه ها علاوه بر نقش رزوناتوری، وظایف محافظتی یا ساختاری را انجام دهند)، ساخت ساده حتی در مقیاس کوچک، تطابق محیطی، کرنش بالا، چگالی انرژی بالا، راندمان بالا، پاسخ دهی سریع، نبود محدودیت های ابزار الکتروستاتیکی با دی الکتریک هوا، توانایی ایجاد میدان الکتریکی بیش از $100\frac{MV}{m}$ در مقایسه با ایجاد $40\frac{MV}{m}$ توسط دی الکتریک هوا و داشتن ثابت دی الکتریک ۳ تا ۱۰ در مقایسه با ثابت دی الکتریک ۱ برای هوا، الاستومر را گزینه مناسبی برای کاربرد در رزوناتورها می نماید.

۳-۱ مواد هایپرالاستیک

برای مدل کردن مواد هایپرالاستیک از قوانین سازگاری مربوط به این مواد استفاده می شود. مواد هایپرالاستیک حین مواجهه با کرنش های خیلی بزرگ، از خود رفتار الاستیک نشان می دهند. رفتار آن ها غیرخطی و تغییر شکل های بزرگ را در خود جای می دهند. بیش ترین کاربرد تئوری مواد هایپرالاستیک برای مدل کردن رفتارلاستیکی در مواد پلیمری و مدل کردن فوم های پلیمری در معرض تغییر شکل های بزرگ برگشت پذیر می باشد. یئو [27,28] یک تابع انرژی کرنشی برای مواد هایپرالاستیک که بر پایه اولین ثابت کرنش نوشته شده بودند را بیان کرد. و از این تابع برای نشان دادن رفتار تنش – کرنش در مود های تغییر شکل مختلف استفاده کرد. لوپز و همکارانش [22] یک مدل هایپرالاستیک جدید که برای تمام بازه های تغییر شکل قابل بیان کردن بود را فرض کردند. مدل آن ها همانند مدل یئو بر پایه اولین ثابت کرنش بود. دوبای [23] مدل سازی یک پوسته ساخته شده از مواد پلیمری الکترواکتیو را برای اولین شکل مود و فرکانس رزونانسی مدل سازی کرد. مارکمن [24] مدل های هایپرالاستیک مختلف را برای مواد لاستیک مانند مقایسه کرد. فنگ و ژنگ [25,26] ویژگی های دینامیکی یک رزوناتور الاستومری دی الکتریک با ساختار میکروتیر و میرایی تحت فشار گاز سطحی را مورد بررسی قرار دادند که در آن از روش فیلم نازک استفاده کردند. دانایی و کرمی [30,31] یک میکرو پل رزوناتور را در مدل های یئو و نئوهوکین مورد مطالعه قرار دادند.

پاسخ مواد پلیمری شدیدا به دما، نرخ بارگذاری و کرنش های پیشین وابسته است. پلیمرها دارای محدوده های مختلف رفتاری همچون حالت شیشه ای، ویسکوالاستیک و لاستیکی می باشند. در دمای بحرانی که به نام دمای گذار شیشه ای شناخته می شود، ماده پلیمری تحت تغییرات قابل توجه مکانیکی قرار می گیرد. در زیر این دما همچون حالت شیشه ای با رفتار نرم عمل کرده و در نزدیکی دمای گذار، تنش شدیدا به نرخ کرنش وابسته است. در خود دمای گذار افت قابل توجهی در مدول الاستیسیته رخ می دهد و در بالای این دما رفتار لاستیکی از ماده مشاهده می شود به طوری که رفتار الاستیک بوده، تنش

وابستگی قابل توجهی به نرخ کرنش نداشته و مدول نیز با دما افزایش می یابد. تمام پلیمرها این رفتار کلی را دارند اما محدوده هر رفتار و جزییات آن به ساختار مولکولی ماده بستگی دارد. در بین پلیمرها، پلیمرها با اتصال عرضی یا همان الاستومرها دارای ایده آل ترین رفتار الاستیک بوده که ماده مورد نظر ما در این پژوهش نیز می باشد. مواد هایپر الاستیک چنین رفتار الاستیکی را تقریب می زنند. رفتار ماده لاستیکی دارای جنبه های زیر می باشد:

- ماده الاستیک ایده آل می باشد. به طوری که وقتی ماده در دمای ثابت یا آدیاباتیک تغییر شکل می یابد، تنش صرفا به کرنش آن لحظه وابسته بوده و مستقل از نرخ بارگذاری می باشد و این که رفتار برگشت پذیر دارد یعنی در طی یک سیکل بسته از کرنش در شرایط هم دما یا آدیاباتیک، هیچ کارخالصی روی ماده انجام نمی شود.
- ماده شدیدا در مقابل تغییرات حجمی مقاومت می کند.
- مدول برشی آن در حدود 10^{-5} برابر اکثر مواد است.
- ماده ایزوتروپیک است یعنی پاسخ تنش-کرنش مستقل از جهت گیری ماده است.
- مدول برشی وابسته به دما بوده و ماده در اثر حرارت دهی سفت تر می شود.
- وقتی ماده کشیده می شود از خود حرارت آزاد می کند.

تمامی مواد هایپرالاستیک از قوانین زیر پیروی می کنند:

(۱) رابطه تنش و کرنش برای ماده از طریق چگالی انرژی کرنشی W که تابعی از تانسور گرادیان تغییر شکل است بیان می شود: $W = W(F)$. و نیز بدین معنی است که صرفا نیازمند کار با یک تابع اسکالر می باشیم. شکل کلی تابع چگالی انرژی کرنشی با آزمایشات مشخص شده و فرمول استخراجی شامل ثوابتی است که برای هر ماده خاص قابل حصول است.

(۲) ماده تغییر شکل نیافته، ایزوتروپیک فرض می شود یعنی رفتار ماده مستقل از جهت گیری اولیه ماده نسبت به بارگذاری است. اگر تابع چگالی انرژی کرنشی تابعی از تانسور تغییرشکل چپ کوشی باشد معادله سازگاری حاصل به طور خودکار ایزوتروپیک است.

(۳) رابطه تنش-کرنش از طریق مشتق گیری نسبت به چگالی انرژی کرنشی حاصل می شود.

۱-۳-۱ مدل سازی مواد هایپرالاستیک:

مدل های هایپرالاستیک با توجه به کاربردهای محققین از تابع انرژی کرنشی، به دو دسته کلی تقسیم می شوند:

- دسته اول ناشی از مفهوم ریاضی تابع انرژی کرنشی می باشند مانند سری ریولین یا اگدن به این دسته، مدل های پدیدارشناختی می گویند. تعیین پارامترهای ماده در این مدل ها مشکل بوده و در خارج از محدوده تغییر شکلشان ممکن است منجر به خطا شوند.

۱-۳-۱-۱ مدل مونی (مدل مونی – ریولین مرتبه اول)

مونی مشاهده کرد که رفتار لاستیکی تحت بارگذاری ساده برشی، خطی می باشد. وی تابع چگالی انرژی کرنشی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \qquad (۱-۱)$$

که C_1 و C_2 دو پارامتر ماده و I_1 و I_2 ثابت اول و دوم کرنش هستند. این مدل به طور گسترده برای مواد لاستیکی با کرنش متوسط (زیر ۲۰۰٪) استفاده می شود.

۱-۳-۱-۲ مدل مونی – ریولین

ریولین مدل پیشین را از طریق بسط W به سری های چندجمله ای از $(I_1 - 3)$ و $(I_2 - 3)$ تعمیم داد:

$$W = \sum_{i=0\ j=0}^{\infty} C_{ij}(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (۲-۱)$$

که C_{ij} پارامترهای ماده بوده و $C_{00} = 0$ می باشد. معمولا جملات سری مورد نظر به جملات مرتبه دوم و سوم ختم می شود، به عنوان مثال، نیازمند تعیین نه پارامتر برای جملات تا مرتبه سوم است. مدل بیان شده ریولین قابل توسعه از طریق شکل های دیگر ثوابت کرنش می باشد .در هر صورت، این شکل از کرنش انرژی به صورت کلاسیک برای کرنش های خیلی بزرگ استفاده می شود.

طبق رابطه اخیر، مدل سه پارامتری و پنج پارامتری مونی -ریولین به صورت زیر بیان میشود:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \quad (۳-۱)$$

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 \quad (۴-۱)$$

در مقالات، اثبات شده که مدل مونی – ریولین برای ترکیبات لاستیک پرنشده - به مواد لاستیکی خالی از مواد غیرآلی می گویند، مناسب است.

۱-۳-۱-۳ مدل یئو

یئو در سال ۱۹۹۰ مدل دیگری را پیشنهاد داد که در آن ثابت کرنش دوم (I_2) دارای مقدار ثابت کشیدگی بوده و در تابع انرژی کرنشی دخیل نمی شود:

$$W = \sum_{i=1}^{3} c_i(I_1 - 3)^i \quad (۵-۱)$$

این مدل دقت خوبی را برای لاستیک پرشده به همراه داشته و تنها نیازمند تست کشش دومحوره متقارن برای تطابق با داده هاست.

۱-۳-۱-۴ مدل بیدرمن

بیدرمن از معادله مونی -ریولین تنها جملات با $i = 0$ را حفظ نمود و به این ترتیب سه جمله اول از I_1 و جمله اول از I_2 را مدنظر قرار داد:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \qquad (۱-۶)$$

این مدل به صورت موفقیت آمیز توسط الکساندر استفاده شد.

۱-۳-۱-۵ مدل هینس – ویلسون

جیمز و همکاران از مقایسه توصیف چگالی انرژی کرنشی بر حسب ثوابت کرنش و ثوابت کشیدگی تصمیم به حفظ شش جمله اول از سری گرفتند:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3)$$
$$C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \qquad (۱-۷)$$

۱-۳-۱-۶ مدل اگدن

در سال ۱۹۷۲ اگدن، چگالی انرژی کرنشی را بر حسب ثوابت کشیدگی بیان نمود. او چگالی انرژی کرنشی را به صورت یک سری از توان های حقیقی $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ ارائه داد:

$$W = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left(\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3\right) \qquad (۱-۸)$$

به طوری که پارامترهای ماده باید شرط زیر را ارضاء کنند:

$$\mu_n \alpha_n > 0 \qquad n = 1, \dots, N \qquad (۱-۹)$$

دومین نوع از مدل هایی هستند که از مفاهیم فیزیکی قابل استخراج اند. این مدل ها بر اساس فیزیک شبکه زنجیرهای پلیمر و روش های آماری می باشند. این امر بسته به پدیده های میکروسکوپیک، منجر به توابع انرژی کرنشی متفاوتی می گردد و در اکثر موارد فرمول بندی ریاضی آنها کمی پیچیده است.

مدل های فیزیکی بر اساس پاسخ میکروسکوپیک زنجیره های پلیمری در شبکه می باشند. این مدل ها بر اساس فرض های انجام شده در رسیدن به پاسخ با هم تفاوت دارند.

۱-۳-۱-۷ مدل نئو – هوکین

این مدل، ساده ترین مدل فیزیکی موجود برای مواد لاستیکی است. این مدل در تطابق با مدل مونی-ریولین اما با یک پارامتر ($C_2 = 0$) بوده و در عین حال از ارتباط زنجیره مولکولی به دست می آید. مواد لاستیکی از طریق شبکه ای از زنجیره های انعطاف پذیر بلند که با اتصالات شیمیایی به هم متصلند حاصل می شود. الاستیسیته این شبکه عمدتا به سبب تغییرات آنتروپی در طی تغییر شکل بوده که آنتروپی ماده نیز توسط تعداد ترکیب های ممکن از زنجیره های ماکرومولکولی تعریف می گردد. ترلوآر از توزیع آماری گوسین استفاده و فرم انرژی کرنشی زیر را ارائه نمود:

$$W = \frac{1}{2} nkT(I_1 - 3) \quad (۱-۱۰)$$

که در آن n چگالی زنجیره در واحد حجم، k ثابت بولتزمن و T دمای مطلق است. ترلوآر برای کربن طبیعی سیاه مقدار $\frac{1}{2} nkT$ را برابر ۰/۲مگاپاسکال به دست آورد. مدل وی در تطابق مناسبی با تست های کشش، برش ساده و تستهای دومحوره در تغییر شکلهای کمتر از ۵۰٪ بوده است.

۱-۳-۱-۸ مدل ایشیهارا

ایشیهارا تئوری غیرگوسین را به کار برده و با استفاده از خطی سازی معادلات مربوطه، سری ریولین را برای چگالی انرژی کرنشی به دست آورد:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 C_{01}(I_2 - 3) \quad (۱-۱۱)$$

باید خاطرنشان ساخت که مدل مولکولی حاضر، شامل ثابت کرنش I_2 بوده که تا پیش از آن در مدل های فیزیکی ظاهر نشده بود. به این ترتیب مدل ایشیهارا نزدیک به روابط حاکم بر مدل بیدرمن یا مونی -ریولین می باشد.

۱-۳-۲ ثوابت کرنش

ثوابت کرنش از طریق تانسور راست کوشی -گرین و بدون توجه به جهت مختصات قابل تعریف می باشد:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = tr(C) \tag{۱۲-۱}$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - tr((C)^2)\right) \tag{۱۳-۱}$$

$$I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = J^2 = \det(C) \tag{۱۴-۱}$$

C تانسور چپ یا راست کوشی-گرین می باشد و ثوابت کشیدگی $\lambda_i(i = 1,2,3)$ ریشه مربعی مقادیر ویژه تانسور چپ یا راست کوشی-گرین می باشند. به همین ترتیب، دترمینان تانسور راست کشیدگی برابر با J است:

$$J = \det(U) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{۱۵-۱}$$

اگر همانند مساله مورد بررسی ، ماده تراکم ناپذیر باشد آنگاه J همواره برابر یک بوده و رابطه سودمندی را بین نسبت های کشیدگی اصلی برقرار می سازد:

$$J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \tag{۱۶-۱}$$

به همین ترتیب می توان ثوابت کرنش را از طریق تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین تعریف کرد:

$$I_1 = tr(B) = B_{kk} \tag{۱۷-۱}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - B.B) = \frac{1}{2}(I_1^2 - B_{ik}B_{ki}) \tag{۱۸-۱}$$

$$I_3 = \det(\mathrm{B}) = J^2 \tag{۱۹-۱}$$

برای مواد غیر قابل فشردگی، می توان مجموعه ثوابت زیر را نیز برای تانسور تغییر شکل چپ کوشی-گرین به کار برد:

$$\bar{I_1} = \frac{I_1}{J^{2/3}} = \frac{B_{kk}}{J^{2/3}} \tag{۲۰-۱}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{I_2}{J^{4/3}} = \frac{1}{2}\left(\bar{I}_1^{\ 2} - \frac{B.B}{J^{4/3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{I}_1^{\ 2} - \frac{B_{ik}B_{ki}}{J^{4/3}}\right) \qquad (۲۱-۱)$$

$$J = \sqrt{detB} \qquad (۲۲-۱)$$

هم چنین قانون سازگاری برای ماده هایپرالاستیک ایزوتروپیک از طریق معادله ای بیان می شود که چگالی انرژی کرنشی را به گرادیان تغییر شکل یا سه ثابت تانسور کرنش برای ماده ایزوتروپیک مرتبط می کند:

$$W(F) = U(I_1, I_2, I_3) = \bar{U}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \tilde{U}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \qquad (۲۳-۱)$$

رابطه تنش – کرنش باید از مشتقگیری چگالی انرژی کرنشی حاصل شود. اکثر مواد لاستیکی شدیدا در مقابل تغییر حجم مقاومت می کنند و لذا به صورت مواد غیر قابل فشرده تقریب زده می شوند. در مدل های مختص به مواد هایپرالاستیک برای حفظ حجم باید $J = 1$ باشد و هم چنین چگالی انرژی کرنشی صرفا تابعی از دو ثابت کرنش می باشد. جدول (۱-۱) نشان می دهد که هر مدل ماده به کدام یک از پارامترها وابستگی دارد [15].

جدول (۱-۱) : وابستگی مدل های هایپرالاستیک به پارامترها

مدل ماده	**ثوابت کشش**	**کوشی – گرین**	**ثوابت کرنش**
		I_1	I_2
Moony-Rivlin		×	×
Yeoh		×	
Neo-Hookean		×	
Ogden	×		
Humphrey		×	
Martins	×		
Westmann		×	×

۱-۳-۳ تعیین ضرایب مواد هایپرالاستیک:

برای استفاده از مدل های ارائه شده در مواردی همچون طراحی، ضروری است تا ویژگی های مواد در شرایط مناسب تست، تعیین شود. زمانی که ترکیبی از تست ها برای استخراج ضرایب مدل استفاده می شود، این داده ها باید در دما و نرخ کرنش یکسان تعیین گردند. این تست ها عبارتند از:

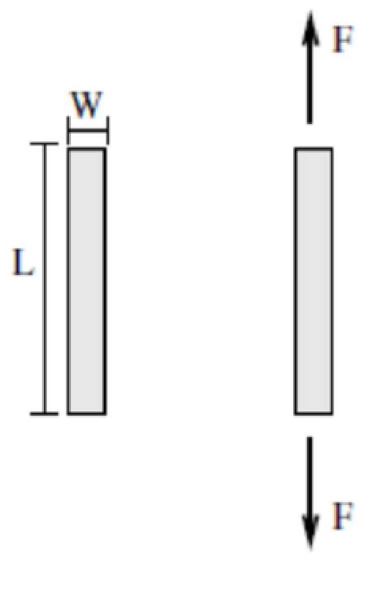
(۱) تست کشش تک محوره

(۲)تست برش صفحه ای

(۳)تست کشش دومحوره

۱-۳-۳-۱ تست کشش تک محوره

تست کشش تک محوره [15] ویژگی های ماده را تحت تنش صفحه ای تعیین می کند. برای انجام این تست و برای به دست آوردن کرنش خالص کششی، نمونه مورد آزمایش باید در جهت کششی نسبت به عرض و ضخامت دارای طول بیشتری باشد. قابل ذکر است که از تحلیل المان محدود می توان به این امر دست یافت که نیاز است تا طول نمونه حداقل ده برابر عرض باشد.



شکل (۱-۷) : تست کشش تک محوره

کرنش ناشی از کشش برابر خواهد بود با:

$$\lambda_1 = \frac{L}{L_0} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2} \tag{۲۴-۱}$$

تنش ناشی از کشش با روابط زیر بیان می شود:

$$\sigma_1 = \sigma = \frac{F}{A_0} \quad , \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \tag{۲۵-۱}$$

که σ تنش، F بار اعمالی و A_0 سطح اولیه نمونه می باشد.

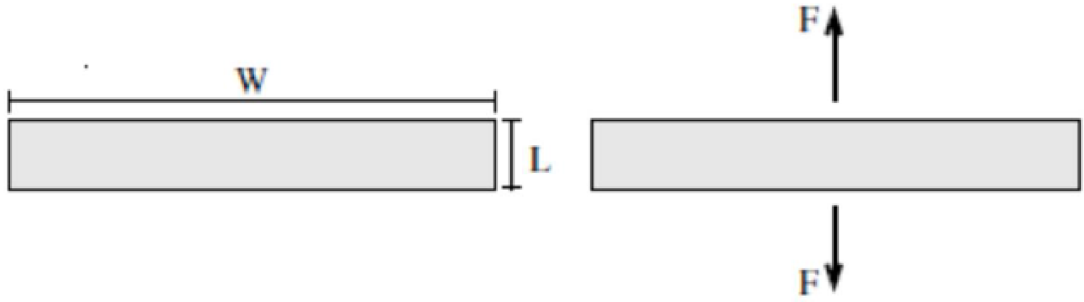
استانداردهای مختلف برای تست کشش تک محوره برای پلاستیک و لاستیک موجود است. تفاوت اصلی بین روش ها برای پلاستیک و لاستیک، در هندسه نمونه و سرعت بارگذاری می باشد. تست های مربوطه بر روی نمونه استخوانی طبق شکل (۱-۷) انجام می گردد.

۱-۳-۳-۲ تست برش صفحه ای

تنش در تست برش صفحه ای، همچون تست برش خالص است. مهم ترین جنبه در نمونه مورد آزمایش این است که بعد نمونه در راستای کشش بسیار کوتاه تر نسبت به عرضش می باشد، یعنی:

$$w \geq 10L \tag{۲۶-۱}$$

که طبق شکل L طول و w عرض نمونه می باشد. توصیه می شود که کمینه نسبت عرض به طول برابر چهار باشد. مطالعات آزمایشگاهی روی نمونه با عرض ۲۰۰ میلی متر و طول ۶۰ میلی متر و با درگیر کردن طول های مختلف نشان داد که نسبت عرض به طول ۴ تا ۱۰ بر منحنی تنش -کرنش بی تاثیر است پس در اینجا به جای تنش صفحه ای که در تست کشش تک محوره انجام می شود، گونه در حالت کرنش صفحه ای مورد آزمایش قرار می گیرد.



شکل (۱-۸) : تست برش صفحه ای

کرنش صفحه ای : با توجه به تست، کرنش صفحه ای به صورت زیر خواهد بود.

$$\lambda_1 = \frac{L}{L_0} \qquad \lambda_2 = \lambda_1^{-1} \quad \lambda_3 = 1 \tag{۲۷-۱}$$

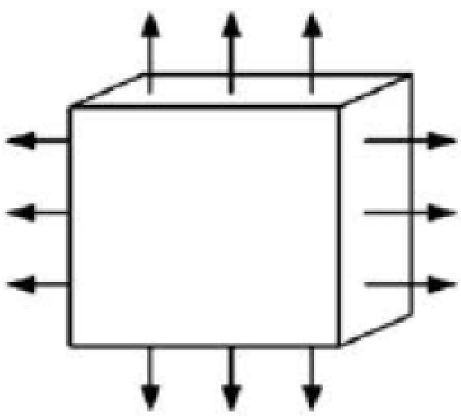
که $\lambda_i(i = 1,2,3)$ نسبت های کشیدگی در جهت اعمال بار، L_0 طول اولیه و L طول ثانویه است.

تنش صفحه ای : تنش صفحه ای نیز دارای روابط نشان داده شده در زیر می باشد.

$$\sigma_1 = \sigma \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 \neq 0 \tag{۲۸-۱}$$

۱-۳-۳-۳ تست کشش دو محوره

این تست نیازمند اعمال تنش های کششی در دو راستای متعامد است که طرح واره آن در شکل نشان داده شده است.



شکل (۱-۹) : تست کشش دو محوره

کرنش برابر است با:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{L}{L_0} \qquad \lambda_3 = \lambda^{-2} \tag{۱-۲۹}$$

که λ کشیدگی در دو راستای عمود بر هم است.

تنش به صورت زیر است:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \qquad \sigma_3 = 0 \tag{۱-۳۰}$$

جدول (۱-۲) : مقادیر ضرایب ماده هایپرالاستیک برای مدل های مختلف از تست کشش تک محوره

مدل ماده	لاستیک سیلیکونی		بافت نرم	
	تعداد ضریب	ضریب	تعداد ضریب	ضریب
Moony-Rivlin	۳	۰/۹۶۴۹۶	۳	۰/۱۸۵۸۲
		-۰/۹۵۸۳۳		-۰/۲۰۵۸۳
Yeoh	۳	۰/۲۴۱۶۲	۴	۰/۰۰۴۱۵۴
		۰/۱۹۹۷۷		۰/۰۵۰۷۵۳
		۰/۰۰۵۴۱		-۰/۰۱۳۱۹۹
Neo-Hookean	۲	۰/۴۳۶۳۱	۲	۰/۰۵۴۴۰
Ogden	۱۳۵	۰/۴۸۹۵۳	۳۶	۰/۰۰۵۰۴۴
		۱/۳۰۰۷۳		۵/۷۲۵۵
		۰/۷۳۷۴۳		۰/۰۰۵۰۴۴
		۲/۹۵۶۴۶		۵/۷۲۵۵
		-۰/۶۰۲۲۹		۰/۰۰۵۰۴۴

		۱/۳۵۲۶۶		۵/۷۲۵۵
Humphrey	۱۲	۱/۰۴۶۰۰	۷	۰/۰۰۹۳۴۸
		۰/۲۶۷۵۱		۱/۴۹۳۹
Martins	۷	۰/۶۷۸۶۲	۷۹	۰/۵۳۹۵۳
		-۰/۲۰۴۴۴		-۰/۲۲۱۶۲
		۰/۶۵۶۰۸		۰/۷۹۳۰۷
		۱/۴۳۰۷۹		۰/۴۳۰۰۹
Westmann	۱۲	۲/۴۸۴۴۶	۵	۰/۰۲۰۹۸۷
		۰/۱۶۸۶۰		۱/۰۵۱۹

مدل سازی و طراحی موفقیت آمیز مواد هایپرالاستیک بستگی به انتخاب مناسب تابع انرژی کرنشی و تعیین صحیح ضرایب در تابع دارد. معمولا تمامی تست های لازم برای تعیین مشخصه های ماده هایپرالاستیک در دسترس نمی باشد. تنها تست کشش تک محوره به طور معمول موجود است. هزینه بالای انجام تست هایی همچون کشش دومحوره و برشی، استفاده از آنها را محدود کرده است. برای مثال، تست دومحوره نیازمند ماشین تست گران قیمت یا یک چفت و بست خاص می باشد. در جدول (۱-۲) مقادیر ضریب ماده هایپرالاستیک برای مدل های مختلف آزمایشگاهی از تست کشش تک محوره نشان داده می شود [15].

برای استخراج پارامترهای مجهول در معادلات سازگاری باید به یک سری از اطلاعات آزمایشگاهی دسترسی داشت و سپس از طریق تطبیق مدل های تئوریک با آنها به مقادیر مجهول دست یافت. در مجموع تعداد کارهای آزمایشگاهی قابل اعتماد اندک بوده که از بین آنها داده های مربوط به کار ترلوآر بیش ترین استفاده را در بین محققین داشته است. کار تطبیق با مدل های هایپرالاستیک توسط افراد مختلف با توجه به نوع تست انجام شده که در اینجا از نتایج آنها به عنوان مقادیر عددی پارامترهای مجهول در معادله استفاده می شود.

۱-۴ پایداری و چندشاخگی در رزوناتورهای الاستومری دی الکتریک

یکی از مهم ترین موضوعات موثر در رزوناتورهای دی الکتریک، ولتاژ ناپایداری است. ولتاژ بحرانی ای که در آن پرش جابجایی ناگهانی دارد [32]. هنگامی که ولتاژ از طریق الکترودها اعمال می شود، لایه الاستومر در جهت ضخامت فشرده شده و در جهت طول باز می شود. از آنجایی که ساختار میکرو رزوناتور بین دو نیرو به نام های نیروی الکترواستاتیک و نیروی مکانیکی بالانس می شود زمانی که ولتاژ اعمالی افزایش پیدا می کند هر دو این نیروها افزایش پیدا می کنند. در هنگامی که ولتاژ به مقدار بحرانی رسید، ناپایداری ولتاژ اتفاق می افتد. به علاوه، افزایش ولتاژ باعث پرش ناگهانی جابجایی می شود. تحقیقات بسیاری در جهت توسعه و آنالیز ناپایداری ولتاژ در رزوناتورهای دی الکتریک به سبب رفتار غیرخطی در آن ها شده است. یونس [33] رزونانس غیر خطی و ناپایداری دینامیکی تحت ولتاژ را در رزوناتورهای الکترواستاتیک مورد مطالعه قرار داد. یان [34] یک مدل تئوری برای پیش بینی اثرات ناپایداری ولتاژ در میکرو کانال های رزوناتوری ارائه کرد. کرانتو [35] یک پاسخ دامنه – ولتاژ غیرخطی از تحریک الکترواستاتیک متناوب گزارش کرد که در آن رزوناتور به صورت یک سر گیردار و در بازه تحریکات سخت شوندگی بود. چاو [36] ناپایداری ولتاژ دینامیکی را تحت ولتاژ مستقیم، با استفاده از روش المان محدود و داده های آزمایشگاهی پیش بینی کرد.

در ارتباط با رفتار چندشاخگی و پاسخ های کیفی رزوناتور الاستومری دی الکتریک تحقیقاتی ارایه شده که نشان می دهد پدیده چندشاخگی در سیستم های میکرو الکترومکانیکی می تواند به وجود بیاید. عزیزی و مبکی [37] یک میکروتیر نگهدارنده ولتاژ که توسط دو ورق رسانا پوشش داده شده است را مورد مطالعه قرار دادند. آن ها نشان دادند که ناپایداری ولتاژ علت یک چندشاخگی سدل در این سیستم هاست. نایفه و ناجار [38,39] پدیده چندشاخگی را در میکروتیر الکترواستاتیک با ترکیب ولتاژهای مستقیم و متناوب بررسی کردند. روهد [40] رفتار دینامیکی غیر خطی یک رزوناتور میکرو الکترومکانیک را با در نظر گرفتن تحریک به صورت پارامتری به دست آورد. پالی [41] هم چنین رفتار

دینامیکی رزوناتور میکرو الکترومکانیک را با به کارگیری دافع انرژی نشان داد. شارما [42] رفتار چندشاخگی وسایل دی الکتریک ساخته شده از مواد نرم را مورد مطالعه قرار داد.

در این مطالعه، با توجه به ساختار رزوناتور الاستومری دی الکتریک که به صورت یک میکروتیر ساندویچی که از دو لایه الکترود الاستیک در دو طرف و یک لایه الاستومر هایپرالاستیک در وسط تیر است، معادله حرکت به دست می آید که به شناختن دینامیک و عملکرد بهتر رزوناتور کمک می کند. از تکنیک گسسته سازی گالرکین برای تبدیل معادله دیفرانسیل حرکت از جزئی به معمولی استفاده می شود. روش مقیاس های زمانی چندگانه برای به دست آوردن حل تحلیلی - تقریبی معادله حاکم بر حرکت، به کار گرفته می شود [43,44]. در ادامه پایداری رزوناتور در مجاورت حالت های تعادل بررسی می شود. به علاوه، پدیده چندشاخگی نیز به ازای مقادیر مختلف ولتاژ اعمالی، نسبت های مختلف ضخامت لایه ها، فرکانس پارامتر تنظیم و دامنه نیروی تحریک بررسی می گردد.

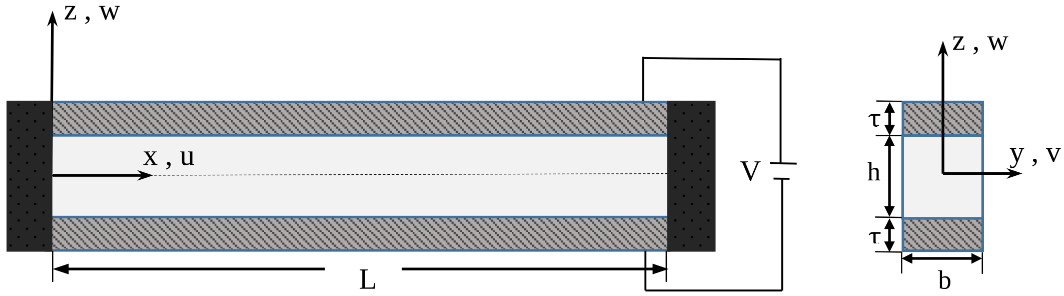
فصل دوم:

استخراج معادلات حرکت

۲-۱ استخراج معادله حرکت میکروتیر ساندویچی

رزوناتور الاستومر دی الکتریک به صورت یک میکرو تیر ساندویچی سه لایه در نظر گرفته شده است. این میکروتیر از دو لایه الکترود رسانا در بالا و پایین، و یک لایه در وسط بعنوان هسته تشکیل شده است. الکترودها از جنس سیلیکون و هسته از جنس ماده هایپرالاستیک می باشد. هنگامی که ولتاژ الکتریکی V در دو سر الکترود اعمال می شود، یک تغییر شکل در ساختار لایه الاستومر ایجاد می شود که سبب نازک شدن ضخامت و افزایش طول این لایه می شود. هم چنین این ولتاژ، یک میدان الکتریکی بین دو لایه الکترود همانند خازن ایجاد می کند.

شماتیک میکرو تیر ساندویچی به صورت زیر در نظر گرفته شده است که قسمت هایپرالاستیک میکروتیر با ضخامت h ، لایه نازک الکترود با ضخامت τ ، پهنای میکروتیر b ، و طول آن L می باشد. دو سر میکروتیر به صورت گیردار در نظر گرفته می‌شود. محورهای x در مرکز و امتداد طول ، y در امتداد عمق و z در امتداد ضخامت میکروتیر هستند. $w(x,t)$ خیز میکروتیر در امتداد محور x و در زمان t می باشد.



شکل (۲-۱) : میکروتیر ساندویچی

برای به دست آوردن معادلات غیر خطی حرکت، میکروتیر ساندویچی سه لایه با فرض های زیر در نظر گرفته می شود:

- از جابجایی های طولی صفحه میانی صرف نظر شده و فرض می شود جابجایی های عرضی در یک مقطع با هم برابر باشند، $w_h = w_e^t = w_e^b$ یعنی اتصال بین سطوح تیر هنگام حرکت و ارتعاش همواره برقرار باشند.
- بین لایه الاستومر و الکترودها لغزش وجود ندارد.
- الاستومر هایپرالاستیک تراکم ناپذیر (incompressible) و الکترودها ایزوتروپیک و همگن هستند.
- ویژگی های سینماتیکی میکروتیر بر پایه تئوری تیر اویلر – برنولی کلاسیک مدل سازی می شوند.
- مدل ماده هایپرالاستیک یئو برای ماده الاستومر غیر خطی استفاده می شود.

با توجه به شکل (۲-۱) و این که جابجایی عرضی میکروتیر برابر w می باشند، آنگاه مولفه های جابجایی هر نقطه از سطح مقطع در لایه هایپرالاستیک برابر خواهند بود با:

$$u_h = -z_h \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad v_h = 0, \quad w_h = w(x,t) \tag{۲-۱}$$

که در آن u_h ، v_h و w به ترتیب مولفه های جابجایی در راستای x ، y و z در لایه هایپر الاستیک می باشند.

میکروتیر تحت خیز بزرگ می باشد در نتیجه نمی توان از رابطه کلاسیک بیان کرنش بر حسب جابجایی، یعنی رابطه $\varepsilon_{ij} = \frac{(u_{ij}+u_{ji})}{2}$ استفاده نمود. بلکه به جای آن باید از مفهوم کرنش لاگرانژی بهره برد. پس از اعمال تعریف کرنش لاگرانژی در خیز بزرگ برای هر مولفه از تانسور کرنش، از جملات کوچک صرف نظر می شود. از تغییرمکان و ارتعاش طولی نیز صرف نظر می شود. هم چنین طبق اصل اویلر-

برنولی مقطعی که صفحه تخت می باشد بعد از خمش تخت باقی می ماند. جملات غیر خطی مرتبط با w می باشند که مولفه باقیمانده همان رابطه فون کارمن است. در نهایت مولفه های کرنش میکروتیر ساندویچی در لایه هایپرالاستیک نتیجه می شوند:

$$\varepsilon_{xx_h} \approx -z_h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{۲-۲}$$

$$\varepsilon_{xy_h} = \varepsilon_{yx_h} = \varepsilon_{zz_h} \approx 0 \tag{۲-۳}$$

$$\varepsilon_{xy_h} = \varepsilon_{yx_h} = \varepsilon_{yy_h} = \varepsilon_{yz_h} = \ \varepsilon_{zy_h} = 0 \tag{۲-۴}$$

از آنجا که می توان ثوابت کرنش را بر اساس ثوابت کشیدگی بیان نمود و خود ثوابت کشیدگی از تانسور کوشی- گرین راست به دست می آیند، تانسور کرنش لاگرانژی و تانسور کوشی- گرین راست را می توان به دست آورد؛

E تانسور کرنش لاگرانژی با محاسبات ارائه شده برابر است با:

$$E = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\varepsilon_{xx_h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲-۵}$$

C تانسور کوشی- گرین راست نیز عبارت است از:

$$E = \frac{(C-I)}{2} \tag{۲-۶}$$

$$C = 2E + I = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{xx_h} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲-۷}$$

از طرفی ثوابت کشیدگی λ_i ریشه مربعی مقادیر ویژه تانسور چپ یا راست کوشی- گرین می باشند. بنابراین توسط تانسور راست کوشی-گرین تعریف شده در معادله بالا و یافتن ریشه مربعی مقادیر ویژه آن، مقادیر λ_i برابر خواهند بود با:

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = 1\,, \quad \lambda_3 \ = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx_h}} \tag{۲-۸}$$

با توجه به رابطه (۲-۷) ثوابت کرنش به صورت زیر محاسبه می شوند؛

$$I_1 = Trace(C) = \left(2\varepsilon_{xx_h} + 1\right) + (1) + (1) = 2\varepsilon_{xx_h} + 3 \tag{۹-۲}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left({I_1}^2 - Trace(C^2)\right) = \{\left(4{\varepsilon_{xx_h}}^2 + 12\varepsilon_{xx_h} + 9\right) -$$
$$\left(\left(4{\varepsilon_{xx_h}}^2 + 4\varepsilon_{xx_h} + 1\right) + (1) + (1)\right)\} = \ 4\varepsilon_{xx_h} + 3 \tag{۱۰-۲}$$

از آنجا که ماده الاستومر هایپر الاستیک مورد نظر در مدل میکروتیر، تراکم ناپذیر در نظر گرفته می شود، هم چنین با در نظر گرفتن رابطه $I_3 = {\lambda_1}^2{\lambda_2}^2{\lambda_3}^2 = J^2 = \det(C)$ و این که باید برای ثابت ماندن حجم $J = 1$ باشد. بنابراین چگالی انرژی کرنشی در مواد هایپر الاستیسیته صرفا بر اساس دو ثابت کرنش اولیه بیان می گردد.

از طرفی هنگامی که دو لایه الکترود در بالا و پایین میکروتیر روزوناتور تحت تحریک توسط اتصال به یک منبع ولتاژ DC قرار می گیرند، یکی از این صفحات دارای بار $-Q$ و دیگری دارای بار $+Q$ گشته و این امر منجر به به وجود آمدن یک میدان الکتریکی در دی الکتریک هایپر الاستیک به صورت ایجاد یک خازن می گردد. این میدان الکتریکی ایجاد شده توسط ولتاژ DC، یک تغییر شکل در ساختار دی الکتریک الاستومر به وجود می آید. این امر باعث کشیدگی در صفحات میانی ماده هایپرالاستیک می شود. اگر ابعاد اولیه رزوناتور $L_1 = L$ ، $L_2 = b$ و $L_3 = d = h + 2\tau$ باشند، در اثر اعمال ولتاژ بین دو الکترود بالا و پایین ضخامت آن در جهت w کاهش یافته و برای ثابت ماندن حجم، مساحت آن زیاد می شود. جابجایی الکتریکی اسمی با رابطه زیر بیان می شود که Q بار الکتریکی اعمالی به صفحات رساناست؛

$$\widetilde{D} = \frac{Q}{L_1 L_2} \tag{۱۱-۲}$$

تابع چگالی انرژی میدان الکتریکی در میکروتیر برابر است با:

$$\phi(\lambda_1,\lambda_2,\widetilde{D}) = \frac{\widetilde{D}^2{\lambda_1}^{-2}{\lambda_2}^{-2}}{2\epsilon} \tag{۱۲-۲}$$

ماده الاستومر تراکم ناپذیر می باشد، برای ثابت ماندن حجم، J همواره برابر یک بوده و رابطه زیر بین نسبت های کشیدگی برقرار است:

$$J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = \lambda_3 \tag{۱۳-۲}$$

ارتباط بین ظرفیت c ، ولتاژ V و بار Q برای خازن با صفحات موازی به صورت زیر است:

$$c = \frac{Q}{V} \quad \longrightarrow \quad Q = cV \tag{۱۴-۲}$$

که ظرفیت خازن برای دی الکتریک هایپر الاستیک برابر است با:

$$c = \epsilon\frac{A}{d} \tag{۱۵-۲}$$

که در آن ϵ ثابت دی الکتریک برای ماده هایپر الاستیک ، d فاصله بین صفحات الکترود و A مساحت صفحات می باشد. با ادغام روابط (۲-۱۱) تا (۲-۱۵)، ϕ تابع چگالی انرژی میدان الکتریکی به صورت زیر استخراج می شود:

$$\phi(\lambda_1,\lambda_2,\widetilde{D}) = \frac{Q^2{\lambda_3}^2}{2\epsilon{L_1}^2{L_2}^2} = \frac{C^2V^2{\lambda_3}^2}{2\epsilon{L_1}^2{L_2}^2} = \frac{\epsilon^2V^2{\lambda_3}^2A^2}{2\epsilon{L_1}^2{L_2}^2d^2} = \frac{\epsilon V^2}{2d^2}{\lambda_3}^2$$

$$\phi(\lambda_1,\lambda_2,\widetilde{D}) = \left(\frac{\epsilon V^2}{2d^2}\right)\left(1+2\varepsilon_{xx_h}\right) = \frac{\epsilon V^2}{2d^2} + \left(\frac{\epsilon V^2}{d^2}\right)\varepsilon_{xx_h} \tag{۱۶-۲}$$

۲-۱-۱ مدل یئو:

چگالی انرژی کرنشی مدل یئو با در نظر گرفتن چگالی انرژی میدان الکتریکی در لایه هایپرالاستیک عبارت است از:

$$W(\lambda_1,\lambda_2,\widetilde{D}) = U(\lambda_1,\lambda_2) + \phi(\lambda_1,\lambda_2,\widetilde{D}) \tag{۱۷-۲}$$

که U تابع چگالی انرژی کرنشی ماده هایپرالاستیک و ϕ تابع چگالی انرژی میدان الکتریکی دی-الکتریک الاستومر می باشند.

$$W = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_1 - 3)^2 + c_3(I_1 - 3)^3 + \left(\frac{\epsilon V^2}{2d^2}\right){\lambda_3}^2 \tag{۱۸-۲}$$

با جایگذاری روابط I_1 و λ_3 در رابطه (۲-۱۸) رابطه چگالی انرژی در لایه میانی میکروتیر به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} W = {} & c_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - 2c_1 z_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + c_2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 - 4c_2 z_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ & +4c_2 {z_h}^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + c_3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^6 - 6c_3 z_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ & +12c_3 {z_h}^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 - 8c_3 {z_h}^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3 + \frac{\epsilon V^2}{2d^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ & -z_h\frac{\epsilon V^2}{d^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\epsilon V^2}{2d^2} \end{aligned} \tag{۱۹-۲}$$

انرژی کرنشی که انتگرال حجمی چگالی انرژی کرنشی است رابطه زیر را خواهد داشت:

$$\begin{aligned} \Pi_h = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^b\int_0^l \Bigg[& (c_1 + \frac{\epsilon V^2}{2d^2})\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - (2c_1 + \frac{\epsilon V^2}{d^2})z_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ & + c_2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 - 4c_2 z_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + c_3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^6 \\ & + 4c_2 {z_h}^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 - 6c_3 z_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ & - 8c_3 {z_h}^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3 + 12c_3 {z_h}^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 \\ & + \frac{\epsilon V^2}{2d^2}\Bigg] dx\, dy\, dz_h \end{aligned} \tag{۲۰-۲}$$

انرژی پتانسیل میکروتیر ساندویچی در لایه هایپرالاستیک بعد از انتگرال گیری فوق، نتیجه می شود:

$$\Pi_h = (c_1 + \frac{\epsilon V^2}{2d^2})A_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx + 12c_3 I_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx$$
$$+ c_2 A_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dx + c_3 A_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^6 dx$$
$$+4c_2 I_h \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{\epsilon V^2}{2d^2} A_h b l \tag{۲-۲۱}$$

در لایه الکترود بالایی، اگر جابجایی عرضی برابر w باشد، آنگاه مولفه های جابجایی هر نقطه از سطح مقطع برابر خواهد بود با:

$$u_e^t = -z_e^t \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\,, \quad v_e^t = 0\,, \quad w_e^t = w(x,t) \tag{۲-۲۲}$$

که در آن u_e^t ، v_e^t و w به ترتیب مولفه های جابجایی در راستای x ، y و z در لایه الاستیک بالایی می باشند. لایه بالایی نیز هم چنین تحت خیز بزرگ قرار دارد. با اعمال مفهوم کرنش لاگرانژی برای هر مولفه از تانسور کرنش ، صرف نظر از جملات کوچک و نیز جابجایی طولی، نتیجه می دهد:

$$\varepsilon_{xx}{}_e^t \approx z_e^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{۲-۲۳}$$

$$\varepsilon_{xz}{}_e^t = \varepsilon_{zx}{}_e^t = \varepsilon_{zz}{}_e^t \approx 0 \tag{۲-۲۴}$$

$$\varepsilon_{xy}{}_e^t = \varepsilon_{yx}{}_e^t = \varepsilon_{yy}{}_e^t = \varepsilon_{yz}{}_e^t = \varepsilon_{zy}{}_e^t = 0 \tag{۲-۲۵}$$

که مولفه باقیمانده همان مولفه محوری فون کارمن است.

انرژی پتانسیل برای ماده الاستیک با استفاده از تابع انرژی کرنشی و انتگرال گیری حجمی از آن به دست می آید.

$$V = \frac{1}{2}\int \sigma\varepsilon\, dv \quad \xrightarrow{\sigma=E\varepsilon} \quad V = \frac{1}{2}\int E\varepsilon^2\, dv \tag{۲-۲۶}$$

جایگذاری رابطه (۲-۲۳) در (۲-۲۶) به دست می دهد؛

$$V_e^t = \frac{1}{2}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+\tau}\int_0^b\int_0^l E_e^t {\varepsilon_{xx}}_e^{t\,2}\, dx\, dy\, dz_e^t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+\tau}\int_0^b\int_0^l E_e^t[z_e^t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2]^2\, dx\, dy\, dz_e^t \qquad (۲۷\text{-}۲)$$

انرژی پتانسیل لایه الاستیک الکترود بالایی میکروتیر ، بعد از انتگرال گیری نتیجه می شود.

$$V_e^t = \frac{1}{2}\int_0^l E_e^t I_e^t\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{4}E_e^t A_e^t\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dx \qquad (۲۸\text{-}۲)$$

برای لایه الکترود پایینی نیز اگر جابجایی عرضی میکروتیر برابر w باشد، آنگاه مولفه های جابجایی هر نقطه از سطح مقطع خواهند شد؛

$$u_e^b = -z_e^b\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\,,\quad v_e^b = 0\,,\quad w_e^b = w(x,t) \qquad (۲۹\text{-}۲)$$

که در آن u_e^b ، v_e^b و w به ترتیب مولفه های جابجایی در راستای x ، y و z در لایه الاستیک پایینی می باشند. لایه الاستیک پایینی نیز تحت خیز بزرگ قرار دارد با اعمال مفهوم کرنش لاگرانژی برای هر مولفه از تانسور کرنش ، صرف نظر از جملات کوچک و نیز جابجایی طولی، نتیجه می دهد؛

$${\varepsilon_{xx}}_e^b \approx z_e^b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \qquad (۳۰\text{-}۲)$$

$${\varepsilon_{xz}}_e^b = {\varepsilon_{zx}}_e^b = {\varepsilon_{zz}}_e^b \approx 0 \qquad (۳۱\text{-}۲)$$

$${\varepsilon_{xy}}_e^b = {\varepsilon_{yx}}_e^b = {\varepsilon_{yy}}_e^b = {\varepsilon_{yz}}_e^b = {\varepsilon_{zy}}_e^b = 0 \qquad (۳۲\text{-}۲)$$

که مولفه باقیمانده همان مولفه محوری فون کارمن است.

انرژی پتانسیل تیر الاستیک پایینی با استفاده از رابطه (۲-۲۶) مانند لایه بالایی میکروتیر به صورت زیر محاسبه می شود؛

$$V_e^b = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}-\tau}\int_0^b\int_0^l E_e^b {\varepsilon_{xx}}_e^{b\,2}\, dx\, dy\, dz_e^b$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}-\tau}\int_0^b\int_0^l E_e^b [z_e^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2]^2\, dx\, dy\, dz_e^b \qquad (۲-۳۳)$$

که پس از انتگرال گیری انرژی پتانسیل لایه بالایی به شکل زیر استخراج می شود؛

$$V_e^b = \frac{1}{2}\int_0^l E_e^b I_e^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{4} E_e^b A_e^b \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dx \qquad (۲-۳۴)$$

که در نهایت از جمع انرژی های پتانسیل لایه های مختلف، انرژی پتانسیل میکروتیر ساندویچی به دست می آید.

$$\Pi = V_e^t + V_e^b + \Pi_h = \frac{1}{2}\int_0^l E_e^t I_e^t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{4} E_e^t A_e^t \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{4} E_e^b A_e^b \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dx + (c_1 + \frac{\epsilon V^2}{2d^2}) A_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx + c_2 A_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l E_e^b I_e^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + 4c_2 z_h \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + c_3 A_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^6 dx$$

$$+12c_3 I_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{\epsilon V^2}{2d^2} A_h b l \qquad (۲-۳۵)$$

که پس از ساده سازی و تلفیق انتگرال ها به صورت زیر بیان می شود:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l (E_e^t I_e^t + E_e^b I_e^b) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \int_0^l (c_2 A_h + \frac{(E_e^t A_e^t + E_e^b A_e^b)}{8}) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dx$$

$$+c_1 A_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx + 4c_2 I_h \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + c_3 A_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^6 dx$$

$$+12c_3 I_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{\epsilon V^2}{2d^2} A_h b l \qquad (۲-۳۶)$$

انرژی جنبشی میکروتیر ساندویچی، بر اساس تئوری تیر اویلر – برنولی برای لایه های الاستیک الکترود و لایه هایپرالاستیک دی الکتریک به صورت زیر بیان می شود:

$$T = T_h + T_e^t + T_e^b$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho_h A_h \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \rho_e^t A_e^t \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \rho_e^b A_e^b \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l (\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx \qquad (۲-۳۷)$$

برای به دست آوردن معادله دینامیکی حرکت میکروتیر ساندویچی، ابتدا با استفاده از توابع انرژی به دست آمده فوق، تابع لاگرانژ سیستم به صورت $L = T - \Pi$ تشکیل داده می شود.

$$L = \frac{1}{2}\int_0^l (\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx - (c_1 + \frac{\epsilon V^2}{2d^2})A_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l (E_e^t I_e^t + E_e^b I_e^b)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx - 4c_2 I_h \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

$$-\int_0^l \left(c_2 A_h + \frac{(E_e^t A_e^t + E_e^b A_e^b)}{8}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dx - c_3 A_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^6 dx$$

$$-12 c_3 I_h \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx - \frac{\epsilon V^2}{2d^2} A_h b l \qquad (۲-۳۸)$$

۲-۱-۲ اصل هامیلتون؛

با استفاده از اصل هامیلتون در دینامیک حرکت و روش حساب تغییرات، معادله حرکت و شرایط مرزی تعیین می شوند.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \qquad (۲-۳۹)$$

جایگذاری تابع لاگرانژ در رابطه اصل هامیلتون و به کمک روش حساب تغییرات مشتق گیری ها نسبت به متغیر های t و x به صورت زیر می باشند:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l (\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$-(E_e^t I_e^t + E_e^b I_e^b)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$-4\left(c_2 A_h + \frac{(E_e^t A_e^t + E_e^b A_e^b)}{8}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$-2(c_1 + \frac{\epsilon V^2}{2d^2})A_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$-8c_2 I_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - 6c_3 A_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^5\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$-24c_3 I_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$-24c_3 I_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx\,dt = 0 \qquad (۴۰-۲)$$

انتگرال گیری جزء به جزء از روابط حساب تغییرات به دست می دهد:

$$\int_0^l (\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b)(\frac{\partial w}{\partial t})\,\delta w\Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2}(E_e^t I_e^t + E_e^b I_e^b)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_0^l dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l (E_e^t I_e^t + E_e^b I_e^b)(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4})\delta w\,dx\,dt - \int_{t_1}^{t_2}(E_e^t I_e^t + E_e^b I_e^b)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\delta w\Big|_0^l dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l (\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b)(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2})\,\delta w\,dx\,dt$$

$$-4\int_{t_1}^{t_2}\left(c_2A_h+\frac{(E_e^tA_e^t+E_e^bA_e^b)}{8}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\delta w\Big|_0^l dt$$

$$+12\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left(c_2A_h+\frac{(E_e^tA_e^t+E_e^bA_e^b)}{8}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})\delta w\,dx\,dt$$

$$-2\int_{t_1}^{t_2}(c_1+\frac{\epsilon V^2}{2d^2})A_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w\Big|_0^l dt+2\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l(c_1+\frac{\epsilon V^2}{2d^2})A_h(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})\delta w\,dx\,dt$$

$$-8\int_{t_1}^{t_2}c_2I_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_0^l dt+8\int_{t_1}^{t_2}c_2I_h\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\delta w\Big|_0^l dt$$

$$-8\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l c_2I_h\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)\delta w\,dx\,dt-6\int_{t_1}^{t_2}c_3A_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^5\delta w\Big|_0^l dt$$

$$+30\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l c_3A_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})\delta w\,dx\,dt-24\int_{t_1}^{t_2}c_3I_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w\Big|_0^l dt$$

$$+48\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l c_3I_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx\,dt+24\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l c_3I_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3\delta w\,dx\,dt$$

$$-24\int_{t_1}^{t_2}c_3I_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_0^l dt+48\int_{t_1}^{t_2}c_3I_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\delta w\Big|_0^l dt$$

$$-96\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l c_3I_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w dx\,dt-48\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l c_3I_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3\delta w dx\,dt$$

$$+24\int_{t_1}^{t_2}c_3I_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\delta w\Big|_0^l dt-48\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l c_3I_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w dx\,dt$$

$$-24\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l c_3I_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4})\delta w dx\,dt=0 \qquad (۴۱\text{-}۳)$$

معادله ارتعاشی غیرخطی حرکت میکرو تیر ساندویچی به شکل زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned}&(\rho_h A_h+\rho_e^t A_e^t+\rho_e^b A_e^b)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+(E_e^t I_e^t+E_e^b I_e^b+8c_2 I_h)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)\\&-\left((2c_1+\frac{\epsilon V^2}{d^2})A_h\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-(30c_3 A_h)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\&-\left(12c_2 A_h+\frac{3}{2}(E_e^t A_e^t+E_e^b A_e^b)\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+(24c_3 I_h)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3\\&+(96c_3 I_h)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+(24c_3 I_h)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)=f_0 cos(\Omega t)\end{aligned} \quad (۴۲\text{-}۲)$$

شرایط مرزی قابل استخراج از روش هامیلتون عبارتند از:

در مرز $x=0\,,l$:

$$\begin{aligned}&(E_e^t I_e^t+E_e^b I_e^b)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)-4\left(c_2 A_h+\frac{(E_e^t A_e^t+E_e^b A_e^b)}{8}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3-(2c_1+\frac{\epsilon V^2}{d^2})A_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\&+8c_2 I_h\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)-6c_3 A_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^5-24c_3 I_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+48c_3 I_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\\&+24c_3 I_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)=0 \qquad OR \qquad \delta w=0\end{aligned} \quad (۴۳\text{-}۲)$$

در مرز $x=0\,,l$:

$$\begin{aligned}&-8c_2 I_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+(E_e^t I_e^t+E_e^b I_e^b)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-24c_3 I_h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0\\&OR \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0\end{aligned} \quad (۴۴\text{-}۲)$$

که از بین شرایط بالا، شرایط مرزی زیر برای تیر دو سر گیردار استفاده می شود؛

$w(0,t)=0$ ، $w(L,t)=0$ ، $\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0$ و $\frac{\partial w}{\partial x}(L,t)=0$

۲ – ۲ بی بعد سازی

در اینجا معادله حرکت غیر خطی میکروتیر ساندویچی (۲-۴۲) با تعریف پارامتر های زیر، بی بعدسازی می شود:

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$w^* = \frac{w}{d}$$

$$t^* = t\omega_{dim}$$

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{\omega_{dim}} \qquad (۲\text{-}۴۵)$$

ω_{dim} فرکانس طبیعی معادله حرکت خطی با بعد و d ضخامت هر سه لایه میکروتیر است. جایگذاری این پارامترها در معادله حرکت (۲-۴۲) به دست می دهد؛

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} - \frac{\left((2c_1 + \frac{\epsilon V^2}{d^2})A_h\right)}{\left(\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b\right)\omega_{dim}^2 L^2}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)$$

$$+\frac{\left(E_e^t I_e^t + E_e^b I_e^b + 8c_2 I_h\right)}{\left(\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b\right)\omega_{dim}^2 L^4}\left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}\right)$$

$$-\frac{\left(12c_2 A_h + \frac{3}{2}\left(E_e^t A_e^t + E_e^b A_e^b\right)\right)d^2}{\left(\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b\right)\omega_{dim}^2 L^4}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)$$

$$+\frac{(96c_3 I_h)d^2}{\left(\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b\right)\omega_{dim}^2 L^6}\left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}}\right)\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)$$

$$-\frac{(30c_3 A_h)d^4}{\left(\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b\right)\omega_{dim}^2 L^6}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^4\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)$$

$$+\frac{(24c_3 I_h)d^2}{\left(\rho_h A_h + \rho_e^t A_e^t + \rho_e^b A_e^b\right)\omega_{dim}^2 L^6}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)^3$$

$$+\frac{(24c_3I_h)d^2}{\left(\rho_hA_h+\rho_e^tA_e^t+\rho_e^bA_e^b\right)\omega_{dim}^2L^6}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2\left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}\right)$$

$$=\frac{f_0}{\left(\rho_hA_h+\rho_e^tA_e^t+\rho_e^bA_e^b\right)\omega_{dim}^2d}\cos(\Omega^*t^*)$$ (۴۶-۲)

با در نظر گرفتن ضرایب معادله به صورت؛

$$\alpha_1=\frac{\left((2c_1+\frac{\epsilon V^2}{d^2})A_h\right)}{\left(\rho_hA_h+\rho_e^tA_e^t+\rho_e^bA_e^b\right)\omega_{dim}^2L^2}$$

$$\alpha_2=\frac{(E_e^tI_e^t+E_e^bI_e^b+8c_2I_h)}{\left(\rho_hA_h+\rho_e^tA_e^t+\rho_e^bA_e^b\right)\omega_{dim}^2L^4}$$

$$\alpha_3=\frac{\left(12c_2A_h+\frac{3}{2}(E_e^tA_e^t+E_e^bA_e^b)\right)d^2}{\left(\rho_hA_h+\rho_e^tA_e^t+\rho_e^bA_e^b\right)\omega_{dim}^2L^4}$$

$$\alpha_4=\frac{(30c_3A_h)d^4}{\left(\rho_hA_h+\rho_e^tA_e^t+\rho_e^bA_e^b\right)\omega_{dim}^2L^6}$$

$$\alpha_5=\frac{(24c_3I_h)d^2}{\left(\rho_hA_h+\rho_e^tA_e^t+\rho_e^bA_e^b\right)\omega_{dim}^2L^6}$$

$$F_0=\frac{f_0}{\left(\rho_hA_h+\rho_e^tA_e^t+\rho_e^bA_e^b\right)\omega_{dim}^2d}$$ (۴۷-۲)

معادله غیرخطی به شکل زیر نتیجه می شود:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}}-\alpha_1\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)+\alpha_2\left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}\right)-\alpha_3\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)-\alpha_4\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^4\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)$$

$$+\alpha_5\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)^3+4\alpha_5\left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}}\right)\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)+\alpha_5\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2\left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}\right)=F_0\cos(\Omega^*t^*)$$

(۴۸-۲)

شرایط مرزی بی بعد عبارتند از:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x^*}(1,t^*)=0$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial x^*}(0,t^*)=0$$

$$w^*(1,t^*)=0$$

$$w^*(0,t^*)=0 \qquad (۴۹-۲)$$

۲ – ۳ محاسبه فرکانس طبیعی معادله ارتعاش آزاد خطی با بعد (ω_{dim})

معادله حرکت خطی میکروتیر ساندویچی به شکل زیر است؛

$$(\rho_h A_h+\rho_e^t A_e^t+\rho_e^b A_e^b)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)-\left((2c_1+\frac{\epsilon V^2}{d^2})A_h\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$+(E_e^t I_e^t+E_e^b I_e^b+8c_2 I_h)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)=0 \qquad (۵۰-۲)$$

که شرایط مرزی آن برای حالت میکروتیر دو سر گیردار به شکل زیر است.

$$\frac{\partial w}{\partial x}(L,t)=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0$$

$$w(L,t)=0$$

$$w(0,t)=0 \qquad (۵۱-۲)$$

در ابتدا پاسخ معادله به صورت حاصل ضرب دو تابع زمانی و مکانی در نظر گرفته می شود.

$$\Psi_m(x,t)=\mathrm{W}_m(x)\varphi_m(t) \qquad (۵۲-۲)$$

با استفاده از روش گالرکین معادله دیفرانسیل pde خطی به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می شود. بدین منظور تابع ویژه ای که شرایط مرزی دوسر درگیر را ارضا می کند [45] معرفی می گردد.

$$W_m(x) = \cos\psi_m x - \cosh\psi_m x - \frac{\cos\psi_m - \cosh\psi_m}{\sin\psi_m - \sinh\psi_m}(\sin\psi_m x - \sinh\psi_m x) \qquad (۲-۵۳)$$

$$\psi_m = (2m+1)\frac{\pi}{2} \qquad (۲-۵۴)$$

که $W_m(x)$ تابع ویژه و m شماره مود است. در مود اول $\psi_1 = 3\frac{\pi}{2}$ و در مود سوم $\psi_2 = 5\frac{\pi}{2}$ می باشد. پاسخ $\Psi_m(x,t)$ در معادله (۲-۵۰) جایگزین شده و طرفین رابطه جدید در یک مود $W_m(x)$ ضرب از طرفین این رابطه روی طول تیر انتگرال گیری می شود.

معادله ODE به صورت زیر به دست می آید:

$$\ddot{\varphi}_m(t) + \omega_{dim}^2\varphi_m(t) = 0 \qquad (۲-۵۵)$$

که ω_d فرکانس طبیعی با بعد معادله خطی است و رابطه آن برابر است با:

$$\omega_{dim} = \sqrt{\frac{\int_0^l \left[W_m(x)W_m''''(x)\left(E_e^tI_e^t + E_e^bI_e^b + 8c_2I_h\right) - W_m(x)W_m''(x)\left((2c_1 + \frac{\epsilon V^2}{d^2})A_h\right)\right]dx}{\int_0^l W_m{}^2(x)\left(\rho_hA_h + \rho_e^tA_e^t + \rho_e^bA_e^b\right)dx}}$$

.(۲-۵۶)

فصل سوم:

حل معادلات و تحلیل پایداری، ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری

۳-۱ اعمال روش گالرکین

به منظور تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی (۲-۴۸) به یک معادله دیفرانسیل معمولی ابتدا پاسخ این معادله به شکل حاصل ضرب دو تابع مکان و زمان مجزا از هم در نظر گرفته می شود.

$$w^*(x^*,t^*) = \sum_1^n \varphi_n(x)\psi_n(t) \tag{۳-۱}$$

حال با استفاده از روش گسسته سازی گالرکین معادله PDE غیر خطی به معادله ODE غیر خطی تبدیل می شود. به این صورت که ابتدا تابع ویژه ای که شرایط مرزی دوسر درگیر را ارضا کند معرفی می گردد؛

$$\varphi_n(x) = \cos W_n x - \cosh W_n x - \frac{\cos W_n - \cosh W_n}{\sin W_n - \sinh W_n}(\sin W_n x - \sinh W_n x) \tag{۳-۲}$$

$$W_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} \tag{۳-۳}$$

که $\varphi_n(x)$ تابع ویژه و n شماره مود است.

با در نظر گرفتن اولین مود، پاسخ $w^*(x^*,t^*)$ در معادله (۲-۴۸) جایگزین شده و طرفین رابطه جدید در یک $\varphi(x)$ ضرب می شود؛

$$\begin{aligned}
&\varphi^2(x)\ddot{\psi}(t) - \alpha_1\varphi(x)\varphi''(x)\psi(t) + \alpha_2\varphi(x)\varphi''''(x)\psi(t) \\
&-\alpha_3\varphi(x)\varphi'^2(x)\varphi''(x)\psi^3(t) - \alpha_4\varphi(x)\varphi'^4(x)\varphi''(x)\psi^5(t) \\
&+\alpha_5\varphi(x)\varphi''^3(x)\psi^3(t) + 4\alpha_5\varphi(x)\varphi'''(x)\varphi''(x)\varphi'(x)\psi^3(t) \\
&+\alpha_5\varphi(x)\varphi'^2(x)\varphi''''(x)\psi^3(t) = F_0\varphi(x)\cos(\Omega^* t^*)
\end{aligned} \tag{۳-۴}$$

از طرفین این رابطه نیز از صفر تا یک انتگرال گیری می گردد.

$$\left(\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right)\ddot{\psi}(t) + \left(\int_0^1 \alpha_2\varphi(x)\varphi''''(x)\,dx - \int_0^1 \alpha_1\varphi(x)\varphi''(x)\,dx\right)\psi(t)$$

$$+\left(\int_0^1 4\alpha_5\varphi(x)\varphi'''(x)\varphi''(x)\varphi'(x)\,dx + \int_0^1 \alpha_5\varphi(x)\varphi'^2(x)\varphi''''(x)\,dx\right.$$
$$\left.-\int_0^1 \alpha_3\varphi(x)\varphi'^2(x)\varphi''(x)\,dx + \int_0^1 \alpha_5\varphi(x)\varphi''^3(x)\,dx\right)\psi^3(t)$$
$$-\left(\int_0^1 \alpha_4\varphi(x)\varphi'^4(x)\varphi''(x)\,dx\right)\psi^5(t) = \left(\int_0^1 F_0\varphi(x)\,dx\right)\cos(\Omega^* t^*) \qquad (۳-۵)$$

در نهایت معادله ارتعاشی ODE غیر خطی به صورت زیر به دست می آید:

$$\ddot{\psi}(t) + \gamma_1\psi(t) + \gamma_2\psi^3(t) - \gamma_3\psi^5(t) = F\cos(\Omega^* t^*) \qquad (۳-۶)$$

که

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\int_0^1 \alpha_2\varphi(x)\varphi''''(x)\,dx - \int_0^1 \alpha_1\varphi(x)\varphi''(x)\,dx}{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx} \quad F = \dfrac{\int_0^1 F_0\varphi(x)\,dx}{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx} \\ \gamma_3 = \dfrac{\int_0^1 \alpha_4\varphi(x)\varphi'^4(x)\varphi''(x)\,dx}{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx} \\ \gamma_2 = \dfrac{-\int_0^1 \alpha_3\varphi(x)\varphi'^2(x)\varphi''(x)\,dx + \int_0^1 4\alpha_5\varphi(x)\varphi'''(x)\varphi''(x)\varphi'(x)\,dx}{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx} \\ \qquad + \dfrac{\int_0^1 \alpha_5\varphi(x)\varphi''^3(x)\,dx + \int_0^1 \alpha_5\varphi(x)\varphi'^2(x)\varphi''''(x)\,dx}{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx} \end{cases} \qquad (۳-۷)$$

۳-۲ تحلیل پایداری ذاتی

به منظور تحلیل پایداری ذاتی و تاثیر ولتاژ اعمالی روی خیز میکروتیر ساندویچی معادله (۳-۶) بدون نیروی تحریک خارجی در نظر گرفته می شود. متغیرهای جدید $\psi_1 = \psi$ ، $\psi_2 = \dot{\psi}$ و $\dot{\psi}_1 = \psi_2$ به منظور به دست آوردن فرم فضای حالت معادله (۳-۶) معرفی می شوند.

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = \psi_2(t) \\ \dot{\psi}_2(t) = -\gamma_1\psi_1(t) - \gamma_2\psi_1^3(t) + \gamma_3\psi_1^5(t) \end{cases} \qquad (۳-۸)$$

در نقاط تعادل سرعت و شتاب میکرو تیر ساندویچی صفر است. بنابراین نقاط تعادل از حل معادله زیر به دست می آیند؛

$$-\gamma_1\psi_1(t)-\gamma_2\psi_1^3(t)+\gamma_3\psi_1^5(t)=0 \qquad (۹-۳)$$

یکی از پاسخ های معادله (۳-۹) $\psi_1^*=0$ است پاسخ های دیگر آن از حل معادله چند جمله ای زیر محاسبه می شوند

$$-\gamma_1-\gamma_2\psi_1^2(t)+\gamma_3\psi_1^4(t)=0 \qquad (۱۰-۳)$$

با فرض $y=\psi_1^2$ معادله چند جمله ای (۳-۱۰) به شکل $\gamma_3 y^2-\gamma_2 y-\gamma_1=0$ در می آید. که پاسخ های آن $y_\pm=\frac{\gamma_2\pm\sqrt{\gamma_2^2+4\gamma_3\gamma_1}}{2\gamma_3}$ برای حالتی که $\gamma_1\geq-\frac{\gamma_2^2}{4\gamma_3}$ می باشند. از آنجایی که در $y=\psi_1^2$ مقادیر $y_\pm$ که مثبت هستند می تواند مورد قبول قرار گیرد. $y_+=\frac{\gamma_2+\sqrt{\gamma_2^2+4\gamma_3\gamma_1}}{2\gamma_3}$ همواره به ازای مقادیر $\gamma_1\geq-\frac{\gamma_2^2}{4\gamma_3}$ مثبت می باشد، هم چنین $y_-=\frac{\gamma_2-\sqrt{\gamma_2^2+4\gamma_3\gamma_1}}{2\gamma_3}$ علاوه بر این بازه بایستی همواره $\gamma_2\geq\sqrt{\gamma_2^2+4\gamma_3\gamma_1}$ تا مقادیر آن نیز مثبت گردد.

بسته به علامت و مقدار γ_1 یک یا پنج نقطه تعادل می تواند وجود داشته باشد و با توجه به معیار پایداری لیاپانوف و تشکیل ماتریس ژاکوبین، موارد زیر به دست می دهد؛

۱. هنگامی که $\gamma_1\leq-\frac{\gamma_2^2}{4\gamma_3}$ تنها یک پاسخ $\psi_1^*=0$ وجود دارد که ناپایدار نیز می باشد.

۲. هنگامی که $-\frac{\gamma_2^2}{4\gamma_3}\leq\gamma_1\leq 0$ ، پنج نقطه تعادل وجود دارد. $\psi_1^*=0$ یک نقطه تعادل و هم چنان ناپایدار است. چهار نقطه تعادل دیگر به صورت $\pm\sqrt{y_+}$ و $\pm\sqrt{y_-}$ به دست می آیند، که دو پاسخ $\pm\sqrt{\frac{\gamma_2-\sqrt{\gamma_2^2+4\gamma_3\gamma_1}}{2\gamma_3}}$ ناپایدار، در حالی که دو پاسخ $\pm\sqrt{\frac{\gamma_2+\sqrt{\gamma_2^2+4\gamma_3\gamma_1}}{2\gamma_3}}$ پایدار می باشند.

۳. هنگامی که $\gamma_1 \geq 0$ تنها سه نقطه تعادل (منفرد) باقی می مانند. زیرا پاسخ های $\pm\sqrt{y_-}$ دیگر وجود ندارند. نقطه تعادل $\psi_1^* = 0$ به ازای $\gamma_1 > 0$ پایدار می شود. در حالی که پاسخ های $\pm\sqrt{\frac{\gamma_2+\sqrt{\gamma_2^2+4\gamma_3\gamma_1}}{2\gamma_3}}$ ناپایدار هستند.

با توجه به رابطه (۳-۶) هنگامی که ضریب γ_1 مقادیر مثبت دارد، میکروتیر ساندویچی به صورت ذاتی پایدار می باشد. در مقادیری از γ_1 که میکروتیر پایدار باشد ضریب γ_1 بیانگر توان دوم فرکانس طبیعی خطی معادله بی بعد ω_0^2 در معادله (۳-۶) می باشد.

۳-۳ ارتعاشات آزاد:

معادله غیرخطی ارتعاش آزاد میکروتیر ساندویچی با شرایط اولیه $\psi(0) = A_0$ و $\dot{\psi}(0) = 0$ به صورت زیر در نظر گرفته می شود؛

$$\ddot{\psi}(t) + \omega_0^2\psi(t) + \gamma_2\psi^3(t) - \gamma_3\psi^5(t) = 0 \qquad (۳\text{-}۱۱)$$

برای حل به روش مقیاس های زمانی چندگانه ابتدا پارامتر کوچک به شکل زیر تعریف می شود؛

$$\psi = \varepsilon u \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

مشتق های زمانی نیز نسبت به متغیرهایشان به شکل زیر هستند؛

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots \qquad (۳\text{-}۱۳)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_0}\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial}{\partial T_0}\frac{\partial}{\partial T_2}\right) + \cdots \qquad (۳\text{-}۱۴)$$

پاسخ پیشنهادی زیر که مقیاس های زمانی در آن $T_0 = t\ , T_1 = \varepsilon t\ , T_2 = \varepsilon^2 t$ می باشند در معادله جایگذاری می شود.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) \qquad (۳\text{-}۱۵)$$

پس از جایگذاری در معادله، به کمک نرم افزار میپل مرتبه های مختلف پارامتر کوچک به صورت معادله و شرایط اولیه به دست می آیند؛

$$\varepsilon^1 : \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 u_0 = 0 \qquad u_0(0) = A_0 \ , \frac{\partial}{\partial T_0} u_0(0) = 0 \tag{۱۶-۳}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 : \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 u_1 = -2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ &\quad u_1(0) = 0 \, , \left(\frac{\partial}{\partial T_0} u_1(0) + \frac{\partial}{\partial T_1} u_0(0)\right) = 0 \end{aligned} \tag{۱۷-۳}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon^3 : \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 u_2 = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \gamma_2 u_0^3 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ &\quad u_2(0) = 0 \ , \quad \left(\frac{\partial}{\partial T_0} u_2(0) + \frac{\partial}{\partial T_1} u_1(0) + \frac{\partial}{\partial T_2} u_0(0)\right) = 0 \end{aligned} \tag{۱۸-۳}$$

پاسخ معادله اول یعنی اولین مرتبه پارامتر کوچک به شکل زیر می باشد؛

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + cc = a(T_1, T_2) \cos\big(\omega_0 T_0 + \beta(T_1, T_2)\big) \tag{۱۹-۳}$$

cc مزدوج مختلط و ضریب $A(T_1, T_2)$ فرم قطبی زیر را دارد؛

$$A(T_1, T_2) = \frac{1}{2} a(T_1, T_2) e^{i\beta(T_1, T_2)} \tag{۲۰-۳}$$

اعمال شرایط اولیه $\frac{\partial}{\partial T_0} u_0(0) = 0$ و $u_0(0) = A_0$ در معادله اول نتیجه می دهد؛

$$a(0) = a_0 = A_0 \qquad \beta(0) = 0 \tag{۲۱-۳}$$

با جایگذاری u_0 در معادله مرتبه دوم پارامتر کوچک دو معادله اول همگن شبیه هم می شوند. که به خاطر عدم تکرار پاسخ همگن اولین حل معادله درنظر گرفته می شود. در نتیجه؛

$$u_1 = 0 \quad , \quad \omega_1 = 0 \tag{۲۲-۳}$$

هم چنین با حذف جمله سکولار در این مرتبه مشخص می شود که A فقط تابعی از T_2 است؛

$$\frac{\partial}{\partial T_1}A(T_1,T_2)=0 \;\;\rightarrow\;\; A(T_1,T_2)=A(T_2) \tag{۳-۲۳}$$

با قرار دادن u_0 و u_1 در معادله مرتبه سوم پارامتر کوچک و حذف ترم سکولار این مرتبه پاسخ این معادله نیز به شکل زیر می باشد؛

$$u_2=B(T_1,T_2)e^{i\omega_0 T_0}+\frac{\gamma_2}{8}A^3e^{3i\omega_0 T_0}+cc \tag{۳-۲۴}$$

ضریب $B(T_1,T_2)$ فرم قطبی زیر را دارد؛

$$B=\frac{1}{2}b(T_1,T_2)e^{i\gamma(T_1,T_2)} \tag{۳-۲۵}$$

فرم دیگر پاسخ u_2 با توجه به رابطه (۳-۲۵) به صورت زیر می باشد.

$$u_2=b(T_1,T_2)\cos\big(\omega_0T_0+\gamma(T_1,T_2)\big)+\frac{1}{32\omega_0^2}(\gamma_2a^3)\cos(3\omega_0T_0+3\beta) \tag{۳-۲۶}$$

همانطور که در معادله (۳-۱۸) عنوان شد شرایط اولیه این مرتبه از پارامتر کوچک $u_2(0)=0$ و $\left(\frac{\partial}{\partial T_0}u_2(0)+\frac{\partial}{\partial T_1}u_1(0)+\frac{\partial}{\partial T_2}u_0(0)\right)=0$ می باشد اعمال این شرایط در معادله نتیجه می دهد؛

$$b(0)=b_0=-\frac{\gamma_2}{32}a_0^3 \qquad\qquad \gamma(0)=\beta(0)=0 \tag{۳-۲۷}$$

در نهایت پاسخ ارتعاش آزاد غیر خطی میکروتیر ساندویچی به همراه فرکانس غیر خطی آن به شکل زیر بیان می گردد:

$$w^*(x,t)=\left(\varepsilon a_0\cos(\omega t)+\varepsilon^3\frac{\gamma_2a_0^3}{32\omega_0^2}[\cos(3\omega t)-\cos(\omega t)]+O(\varepsilon^3)\right)\varphi(x) \tag{۳-۲۸}$$

$$\omega=\omega_0+\varepsilon^2\frac{3\gamma_2a_0^2}{8\omega_0}+\cdots \tag{۳-۲۹}$$

۴-۳ ارتعاشات اجباری:

معادله ارتعاش غیر خطی اجباری به شکل زیر است؛

$$\ddot{\psi}(t) + \omega_0^2\psi(t) + \gamma_2\psi^3(t) - \gamma_3\psi^5(t) = \varepsilon^2 F\cos(\Omega^* t^*) \qquad (۳۰\text{-}۳)$$

برای حل معادله غیر خطی به روش مقیاس های چندگانه ابتدا پارامتر کوچک به صورت زیر تعریف می شود؛

$$\psi = \varepsilon u \qquad (۳۱\text{-}۳)$$

پاسخ پیشنهادی زیر که مقیاس های زمانی در آن $T_0 = t\ , T_1 = \varepsilon t\ , T_2 = \varepsilon^2 t$ می باشد در معادله جایگذاری می شود.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) \qquad (۳۲\text{-}۳)$$

پس از جایگذاری در معادله، به کمک نرم افزار میپل مرتبه های مختلف پارامتر کوچک به دست می آیند؛

$$\varepsilon^1 :\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 u_0 = 0 \qquad (۳۳\text{-}۳)$$

$$\varepsilon^2 :\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 u_1 + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} = 0 \qquad (۳۴\text{-}۳)$$

$$\varepsilon^3 : \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} + \ \omega_0^2 u_2 + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} + \gamma_2 u_0^3 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} = F\cos(\Omega^* T_0) \qquad (۳۵\text{-}۳)$$

پاسخ معادله اولین مرتبه پارامتر کوچک به صورت ترم های حقیقی و موهومی به شکل زیر می باشد که بخش cc مزدوج مختلط آن است.

$$u_0 = A(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + cc = \ a\cos(\omega_0 T_0 + \beta) \qquad (۳۶\text{-}۳)$$

جایگذاری u_0 در معادله مرتبه دوم پارامتر کوچک و حذف کردن ترم های سکولار نتیجه می دهد:

$$\frac{\partial}{\partial T_1}A = 0 \;\; \rightarrow \;\; A = A(T_2) \qquad (۳-۳۷)$$

مشخص می شود $A(T_1,T_2)$ به فقط وابسته به متغیر T_2 است. در نتیجه، دو معادله اول همگن شبیه هم می شوند که اولین حل آن برای ننوشتن دوباره یک پاسخ مشابه استفاده می گردد.

$$u_1 = 0 \qquad (۳-۳۸)$$

جایگذاری u_0 و u_1 در معادله مرتبه سوم پارامتر کوچک و در نظر گرفتن این که A تابعی از T_2 است، عبارت زیر را نتیجه می دهد؛

$$D_0^2u_2 + \omega_0^2u_2 + \gamma_2(Ae^{i\omega_0T_0} + \bar{A}\,e^{-i\omega_0T_0})^3$$

$$+2\left(i\omega_0A'e^{i\omega_0T_0} + i\omega_0\bar{A}'e^{-i\omega_0T_0}\right) = \frac{F}{2}\left(e^{i\Omega^*T_0} + e^{-i\Omega^*T_0}\right) \qquad (۳-۳۹)$$

حالت رزونانس اولیه برای تحلیل پدیده تشدید در میکروتیر ساندویچی، با تعریف فرکانس تحریک در نزدیکی فرکانس طبیعی $(\Omega^* \approx \omega_0)$ با استفاده از پارامتر تنظیم بررسی می شود.

$$\Omega^* = \omega_0 + \varepsilon^2\sigma \qquad (۳-۴۰)$$

$$\Omega^*T_0 = (\omega_0 + \varepsilon^2\sigma)T_0 = \omega_0T_0 + \varepsilon^2\sigma T_0 = \omega_0T_0 + \sigma T_2 \qquad (۳-۴۱)$$

با جایگذاری پارامتر تنظیم و حذف ترم های سکولار تساوی زیر حاصل می شود؛

$$3\gamma_2A^2\bar{A} + 2i\omega_0A' - \frac{F}{2}e^{i\sigma T_2} = 0 \qquad (۳-۴۲)$$

A به شکل قطبی زیر در نظر گرفته می شود؛

$$A(T_2) = \frac{1}{2}a(T_2)e^{i\beta(T_2)} \qquad (۳-۴۳)$$

با قرار دادن فرم قطبی A در تساوی و ضرب طرفین رابطه در $e^{-i\beta}$ دو بخش به صورت موهومی و حقیقی تشکیل می شود که دو رابطه زیر را نتیجه می دهد؛

$$\frac{3}{8}\gamma_2 a^3 - \omega_0 a\beta' - \frac{F}{2}\cos(\sigma T_2 - \beta) = 0 \quad (۴۴-۳)$$

$$\omega_0 a' - \frac{F}{2}\sin(\sigma T_2 - \beta) = 0 \quad (۴۵-۳)$$

متغیر T_2 به طور صریح در دو معادله بالا ظاهر نشده است. با تغییر متغیر زیر، وابستگی صریح دو معادله قبل به T_2 از بین می رود.

$$\sigma T_2 - \beta = \Gamma \quad (۴۶-۳)$$

$$\sigma - \beta' = \Gamma' \quad (۴۷-۳)$$

پس از اعمال این تغییر متغیر و مرتب سازی، دو معادله (۳-۴۴) و (۳-۴۵) به شکل حالت پاسخ میکروتیر زیر در می آیند:

$$a' = \frac{F}{2\omega_0}\sin(\Gamma) \quad (۴۸-۳)$$

$$a\Gamma' = \frac{F}{2\omega_0}\cos(\Gamma) - \frac{3}{8\omega_0}\gamma_2 a^3 + \sigma a \quad (۴۹-۳)$$

از آنجایی که دامنه و فاز در همسایگی نقاط منفرد تغییر نمی کنند با بررسی پاسخ حالت پایدار در این نقاط می توان ویژگی پاسخ های این معادلات را تعیین کرد. در پاسخ حالت پایدار $a' = \Gamma' = 0$ است. که نتیجه می دهد؛

$$\frac{F}{2\omega_0}\sin(\Gamma) = 0 \quad (۵۰-۳)$$

$$\frac{F}{2\omega_0}\cos(\Gamma) = \frac{3}{8\omega_0}\gamma_2 a^3 - \sigma a \quad (۵۱-۳)$$

با به مربع رساندن طرفین این دو معادله و جمع کردن آن ها، معادله پاسخ فرکانسی میکروتیر ساندویچی، که یک معادله ضمنی برای دامنه پاسخ (خیز میکروتیر) به عنوان تابعی از پارامتر تنظیم (فرکانس تحریک) و دامنه نیروی تحریک به شکل زیر استخراج می شود:

$$(\frac{3}{8}\gamma_2 a^3 - \omega_0 \sigma a)^2 = \frac{F^2}{4} \tag{۵۲-۳}$$

با جایگذاری روابط (۳-۴۰) و (۳-۴۶) در (۳-۳۶) پاسخ حالت ماندگار ارتعاش اجباری میکروتیر ساندویچی، به دست می آید.

$$\begin{aligned}\psi(t) &= a\varepsilon\cos(\omega_0 t + \varepsilon^2\sigma t - \Gamma) + O(\varepsilon^3)\\ &= a\varepsilon\cos(\Omega t - \Gamma) + O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{۵۳-۳}$$

برای تحلیل پایداری پاسخ با وجود تحریک خارجی، با توجه به تعریف ماتریس ژاکوبین درایه های مختلف ماتریس ژاکوبین از معادله های حالت پاسخ، روابط (۳-۴۸) و (۳-۴۹) مشتق گیری می شود.

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_{11}}{\partial a} & \dfrac{\partial a_{12}}{\partial \Gamma} \\ \dfrac{\partial \Gamma_{21}}{\partial a} & \dfrac{\partial \Gamma_{22}}{\partial \Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{F}{2\omega_0}\cos(\Gamma) \\ -\dfrac{F}{2\omega_0}\cos(\Gamma)\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{6}{8\omega_0}\gamma_2 a & 0 \end{bmatrix} \tag{۵۴-۳}$$

استفاده از معادله پاسخ فرکانسی (۳-۵۲) و ادغام آن با ماتریس ژاکوبین (۳-۵۴) و جایگذاری نقطه تعادل (a_0, Γ_0) به دست می دهد؛

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a_0\left(\sigma - \dfrac{3\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right) \\ \dfrac{1}{a_0}\left(\sigma - \dfrac{9\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{۵۵-۳}$$

برای تشخیص وضعیت پایداری یا ناپایداری نقاط تعادل، مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین محاسبه می گردد.

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & a_0\left(\sigma - \dfrac{3\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right) \\ \dfrac{1}{a_0}\left(\sigma - \dfrac{9\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right) & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{۵۶-۳}$$

دترمینان این ماتریس معادله مشخصه زیر را نتیجه می دهد.

$$\lambda^2 - \left(\sigma - \frac{3\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right)\left(\sigma - \frac{9\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right) = 0 \qquad (۳-۵۷)$$

که مقادیر ویژه λ_i ریشه های معادله مشخصه (۳-۵۷) هستند.

$$\lambda_1 \,, \lambda_2 = \pm\sqrt{\left(\sigma - \frac{3\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right)\left(\sigma - \frac{9\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right)} \qquad (۳-۵۸)$$

برای $\lambda^2 < 0$ ، $\left(\sigma - \frac{3\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right)\left(\sigma - \frac{9\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right) < 0$ مقدار ویژه دارای دو ریشه موهومی مطلق است. یعنی نقطه تعادل از نوع سنتر (center point) است که پایدار می باشد. اما هنگامی که $\lambda^2 > 0$ ، $\left(\sigma - \frac{3\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right)\left(\sigma - \frac{9\gamma_2 a_0^2}{8\omega_0}\right) > 0$ باشد، نشان دهنده دو مقدار ویژه حقیقی با علامت های مختلف است. یعنی نقطه تعادل یک نقطه سدل ناپایدار (unstable saddle point) می باشد. به این صورت پایداری در مجاورت هر نقطه تعادل مشخص می شود.

فصل چهارم:

شبیه سازی و نتایج

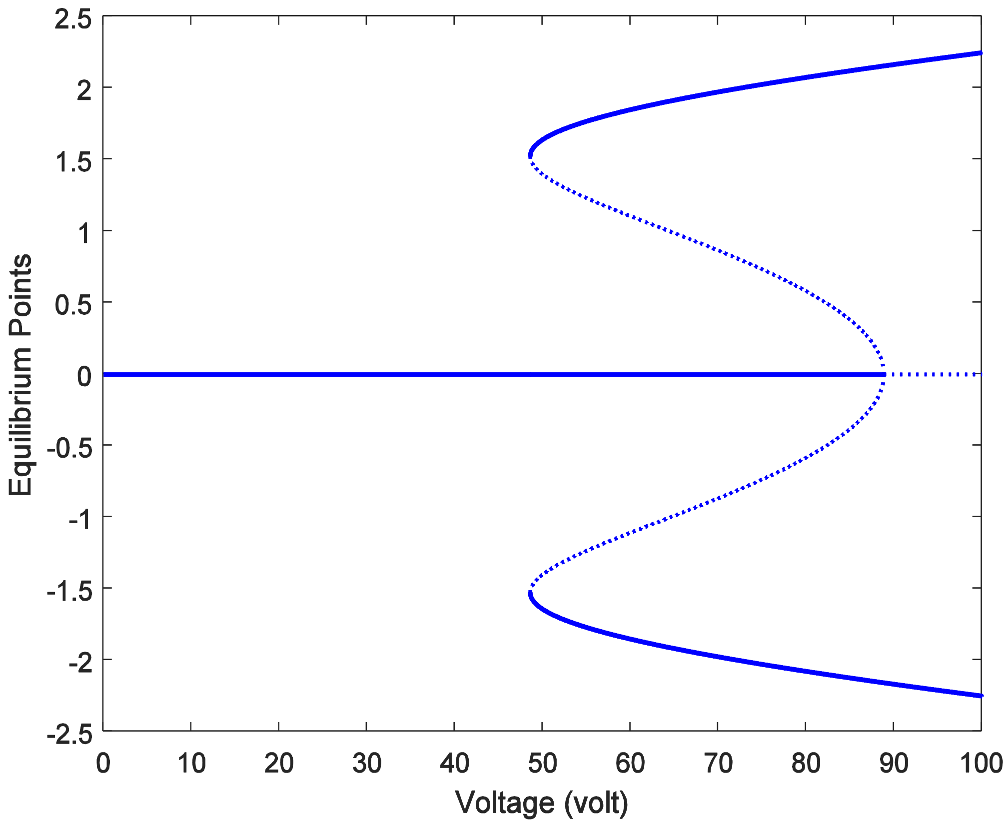
با توجه به روابط تحلیلی ارایه شده در بخش های قبلی، در این فصل به بررسی نتایج عددی و مشاهده اثرات پارامتر های گوناگون بر دامنه پاسخ میکروتیر ساندویچی پرداخته می شود. ماده دی الکتریک استفاده شده در مدل Polydimethylsiloxane (PDMS) می باشد، که یک الاستومر هایپرالاستیک با رفتار ماده غیر خطی است. از جمله ویژگی این پلیمر الکترواکتیو، واکنش در میدان الکتریکی مانند خازن، انعطاف پذیری و کرنش بالا است که آن را گزینه مناسب برای استفاده به عنوان دی الکتریک می سازد. هم چنین لایه های الکترود میکروتیر از جنس ماده Silicon wafer SOI (Sio2) می باشند، که نوعی ماده رسانا و الاستیک با رفتار خطی است. ویژگی های مربوط به مواد به کار گرفته شده برای لایه های مختلف میکروتیر رزوناتور و ابعاد هندسی آن در جدول (۴-۱) نشان داده شده است.

جدول (۴-۱) : پارامترهای هندسی و ماده میکروتیر ساندویچی

میکروتیر ساندویچی	**لایه دی الکتریک هایپرالاستیک** PDMS	**لایه الکترود الاستیک** Silicon wafer SOI (Sio2)
$L = 40\ \mu m$ $b = 5\ \mu m$ $h = 0.6\ \mu m$ $t = 0.2\ \mu m$	$c_1 = 0.24162\ Mpa$ $c_2 = 0.19977\ Mpa$ $c_3 = -0.00541\ Mpa$ $\rho_h = 965\ \frac{kg}{m^3}$ $\epsilon = 2.75\ \frac{F}{m}$	$E_e = 170\ Gpa$ $\rho_e = 2330\ \frac{kg}{m^3}$

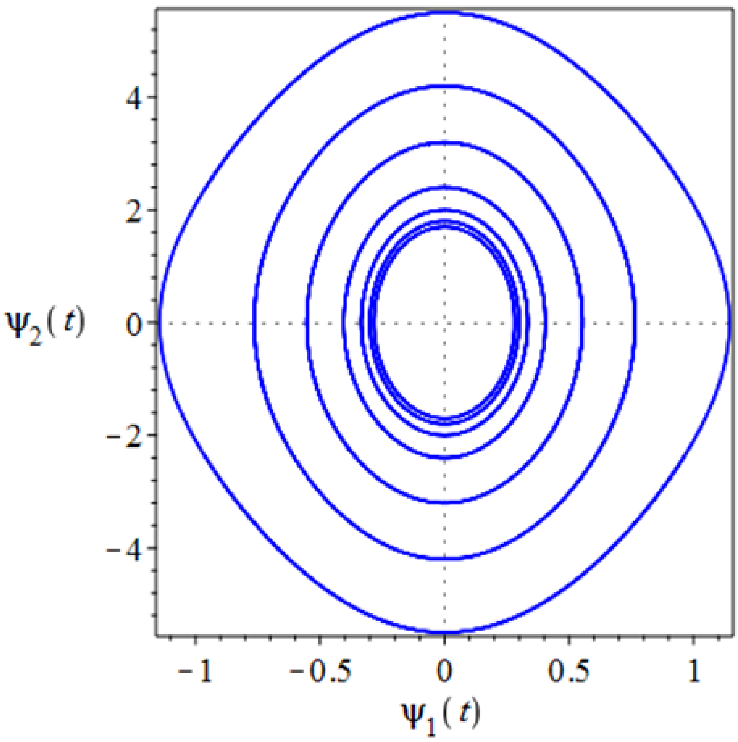
۴ – ۱ پایداری

در شکل (۴-۱) نمودار شاخه شدگی میکروتیر رزوناتور براساس رابطه (۳-۸) رسم شده است. همانطور که مشاهده می شود هنگامی که مقدار ولتاژ کوچک است، میکرو تیر ساندویچی در حالت بدون کمانش ارتعاش می کند. با افزایش ولتاژ تا ولتاژ بحرانی $V_{cr} = 88.81$ میکرو تیر ساندویچی در حالت پایدار باقی می ماند. در این ولتاژ میکرو تیر ساندویچی تمایل به کمانش دارد و کمی افزایش در مقدار ولتاژ باعث می شود که به یکی از دو شاخه دامنه بزرگ پرش نماید. بنابراین V_{cr} ولتاژ کمانش بحرانی شناخته می شود. از اینرو شاخه شدگی در V_{cr} از نوع Subcritical pitchfork bifurcation می باشد.

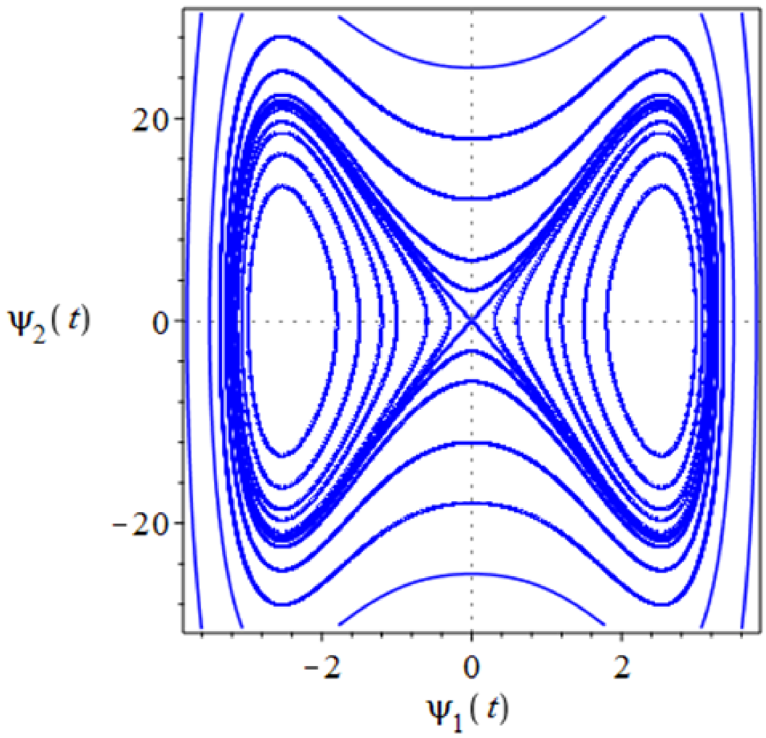


شکل (۴-۱): نمودار شاخه شدگی نقاط تعادل

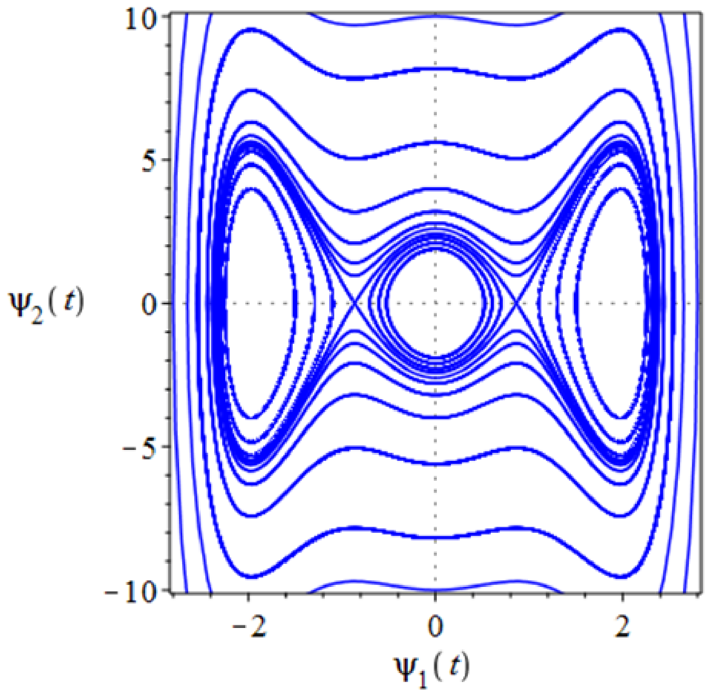
به منظور مطالعه پایداری نقاط تعادل میکرو تیر ساندویچی، مسیر تراجکتوری ها در نمودار پرتره فازی با شرایط اولیه متفاوت برای مقادیر ویژه ای از ولتاژ اعمالی بررسی می شود. ویژگی های دینامیکی به سادگی قابل برداشت از این نمودار ها می باشند. نمودار (۴-۲) نشان می دهد که میکرو تیر ساندویچی هنگامی که ولتاژ از صفر تا $V_{cr} = 88.81$ افزایش پیدا می کند دارای یک نقطه تعادل می باشد که پایدار نیز هست. نمودار (۴-۳) نشان می دهد که اگر ولتاژ اعمالی از $V_{cr} = 88.81$ بیش تر شود میکرو تیر ساندویچی دارای سه نقطه تعادل می شود که دوتای آن پایدار و یکی ناپایدار می باشند. با کاهش ولتاژ اعمالی از $V_{cr} = 88.81$ تا $V_s = 48.54$ میکرو تیر ساندویچی دارای پنج نقطه تعادل می باشد که سه تای آن پایدار و دو تا ناپایدار هستند.



شکل (۴-۲): نمودار پرتره فازی میکروتیر ساندویچی به ازای افزایش ولتاژ از صفر تا 88.81 ولت



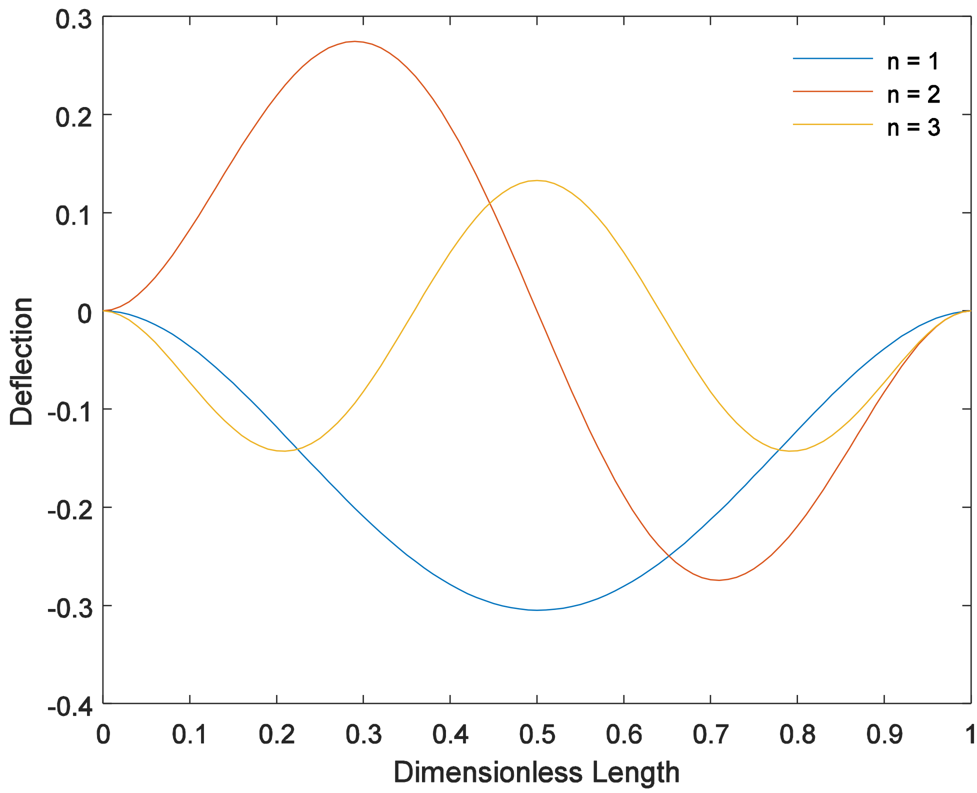
شکل (۴-۳): نمودار پرتره فازی میکروتیر ساندویچی به ازای افزایش بیشتر از 88.81 ولت



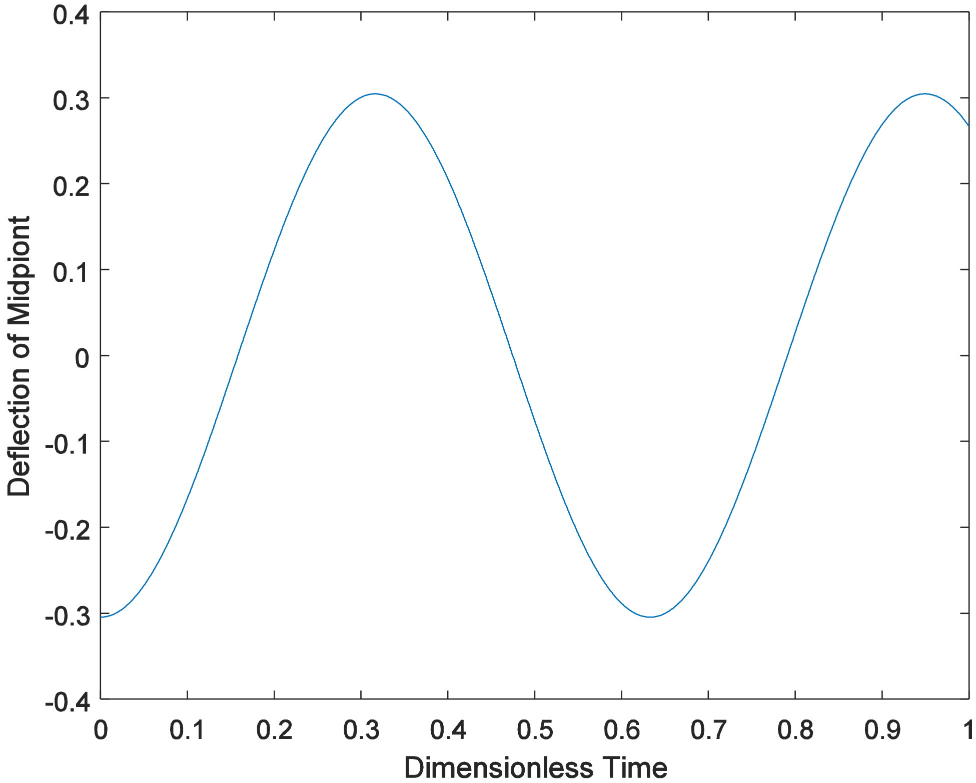
شکل (۴-۴): نمودار پرتره فازی میکروتیر ساندویچی به ازای کاهش ولتاژ از88.81 تا 48.54 ولت

۴ – ۲ ارتعاشات آزاد

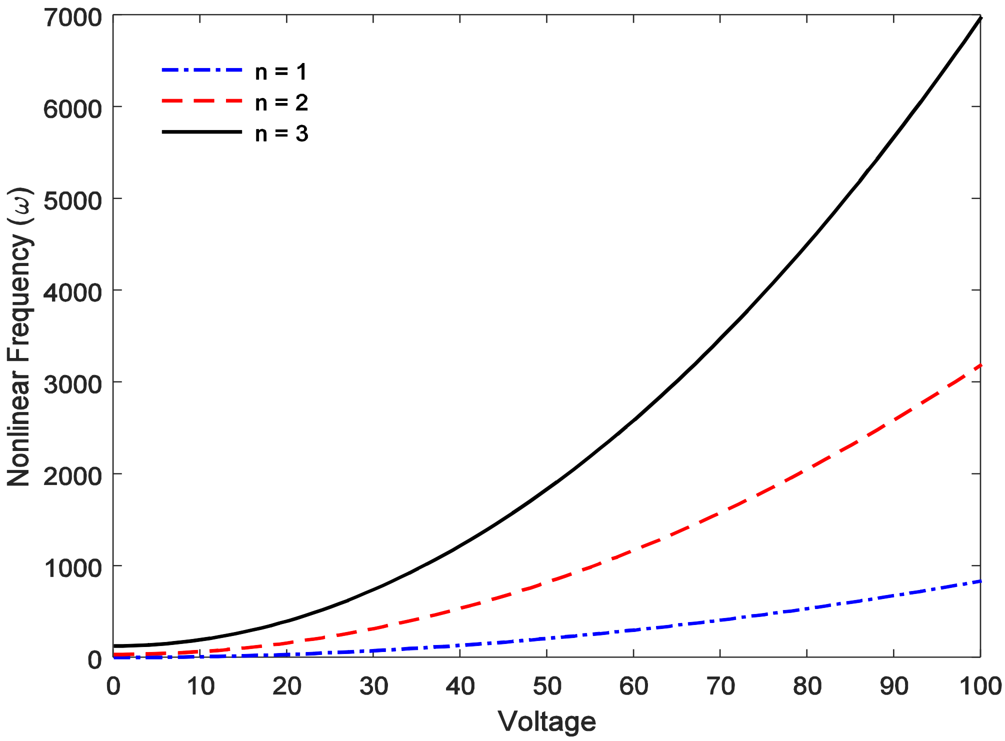
با استفاده ازداده های عددی جدول (۴-۱)، شکل مودهای پاسخ ارتعاشی میکروتیر در مودهای مختلف، به دست می آید. در شکل (۴-۵) خیزها برای سه مود اول رسم شده اند. هم چنین در شکل (۴-۶) برای مود اول در زمان های مختلف، خیز نقطه میانی تیر (پاسخ زمانی میانه تیر) رسم شده است. که مطابق با شرایط مرزی تکیه گاه تیر دو سر گیردار می باشند. در شکل (۴-۷) تغییرات فرکانس ارتعاش غیر خطی نسبت به ولتاژ اعمالی در مودهای اول، دوم و سوم نشان داده شده است. همان طور که در شکل مشاهده می شود افزایش ولتاژ اعمالی به افزایش فرکانس غیر خطی منجر می شود. هم چنین سرعت افزایش آن در مودهای بالاتر بیش تر است.



شکل (۴-۵) : نمودار شکل مود اول، دوم و سوم



شکل (۴-۶) : نمودار پاسخ زمانی میکروتیر در مود اول

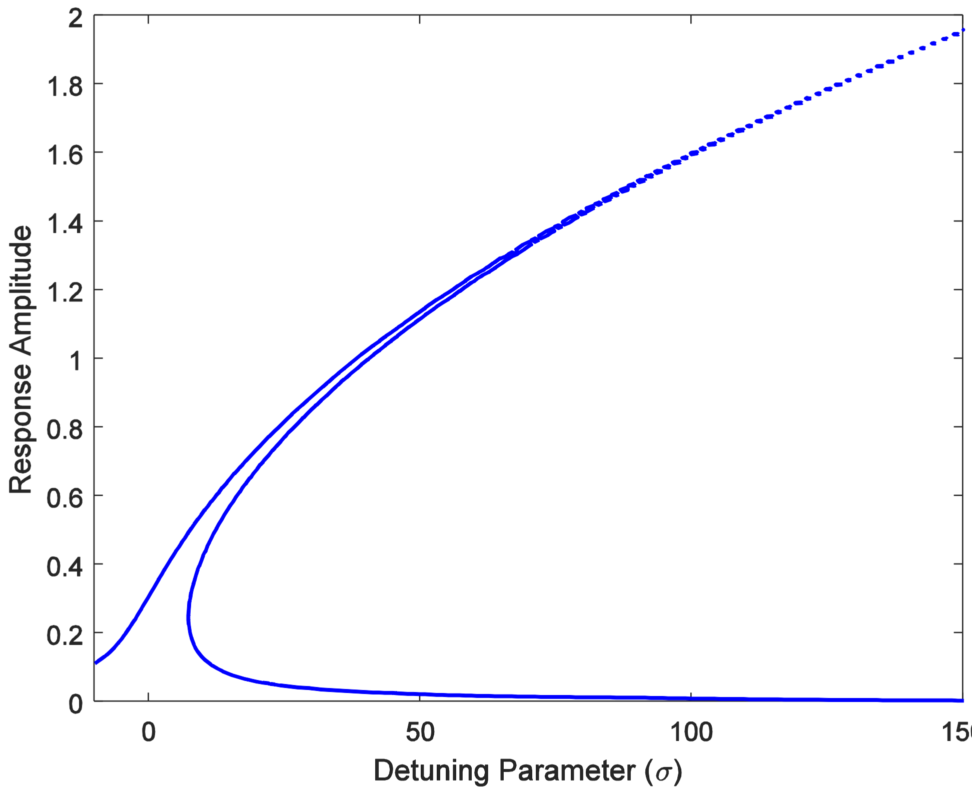


شکل (۴-۷): نمودار تاثیر ولتاژ اعمالی در فرکانس غیرخطی در مودهای مختلف

۴ – ۳ ارتعاشات اجباری

۴-۳-۱ انتخاب σ بعنوان پارامتر متغیر و بررسی تغییرات دامنه پاسخ میکروتیر (خیز) نسبت به پارامتر تنظیم σ:

برای بررسی پاسخ فرکانسی میکروتیر ساندویچی، منحنی پاسخ فرکانسی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای فیزیکی موثر مانند طول و ضخامت میکروتیر، نسبت اندازه ضخامت به طول میکروتیر، دامنه نیروی تحریک و ولتاژ اعمالی ترسیم می شود و تغییرات این مقادیر و تاثیر هر یک روی منحنی پاسخ فرکانسی بررسی می گردد.

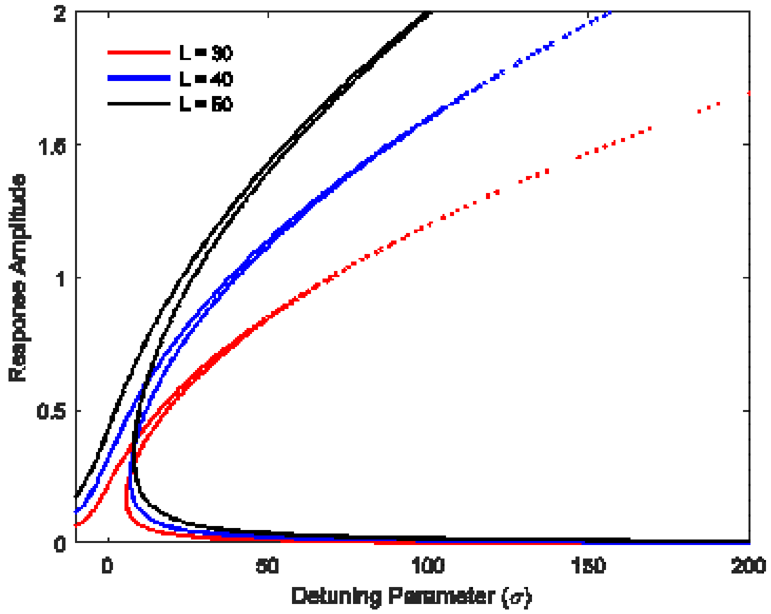


شکل (۴-۸) : منحنی پاسخ فرکانسی

در شکل (۴-۸) منحنی پاسخ فرکانسی، تغییرات دامنه پاسخ به ازای تغییرات پارامتر تنظیم σ رسم شده است. برای هنگامی که $\sigma < 8$ و $\sigma > 158$ است، یک شاخه منحنی وجود دارد که نشان

دهنده یک پاسخ دقیق مسئله می باشد. برای هنگامی که $8 < \sigma < 158$ سه شاخه منحنی که نشان دهنده سه پاسخ است، می باشد. زمانی که پارامتر تنظیم $\sigma = 8$ یا $\sigma = 158$ می باشد چندشاخگی سدل نود (saddle-node bifurcation) رخ می دهد. که این نقطه، نقطه شروع ناپایداری در سیستم است. منحنی پاسخ فرکانسی برای شکل مود اول رسم شده است. میکروتیر دارای رفتار سخت شوندگی می باشد.

در شکل (۴-۹) منحنی های پاسخ فرکانسی برای طول های خاصی از میکروتیر ساندویچی برای هنگامی که $\varepsilon = 0.1$ و $V = 60$ رسم شده است. تمام منحنی ها رفتار سخت شوندگی دارند. با توجه به شکل به ازای افزایش طول میکروتیر بیش ترین دامنه پاسخ نیز افزایش پیدا می کند. این تغییرات برای طول های $L = 30$ ، $L = 40$ و $L = 50$ رسم شده اند.

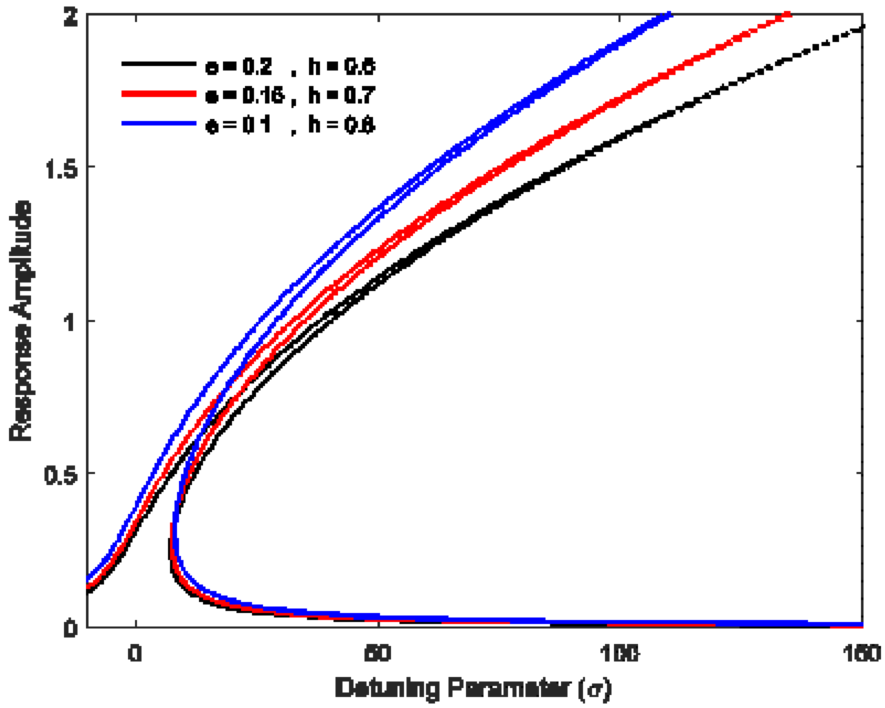


شکل (۴-۹) : منحنی پاسخ فرکانسی به ازای طول های مختلف میکروتیر

علاوه بر مقایسه طول های مختلف، تاثیر ضخامت میکروتیر ساندویچی بر منحنی فرکانس طبیعی نیز نشان داده می شود از آنجا که میکروتیر مورد نظر ساندویچی می باشد و شامل سه لایه است سه

ضخامت تاثیر گذار در مساله وجود دارد که ضخامت لایه هایپر الاستیک h و ضخامت لایه های الکترود الاستیک t می باشند.

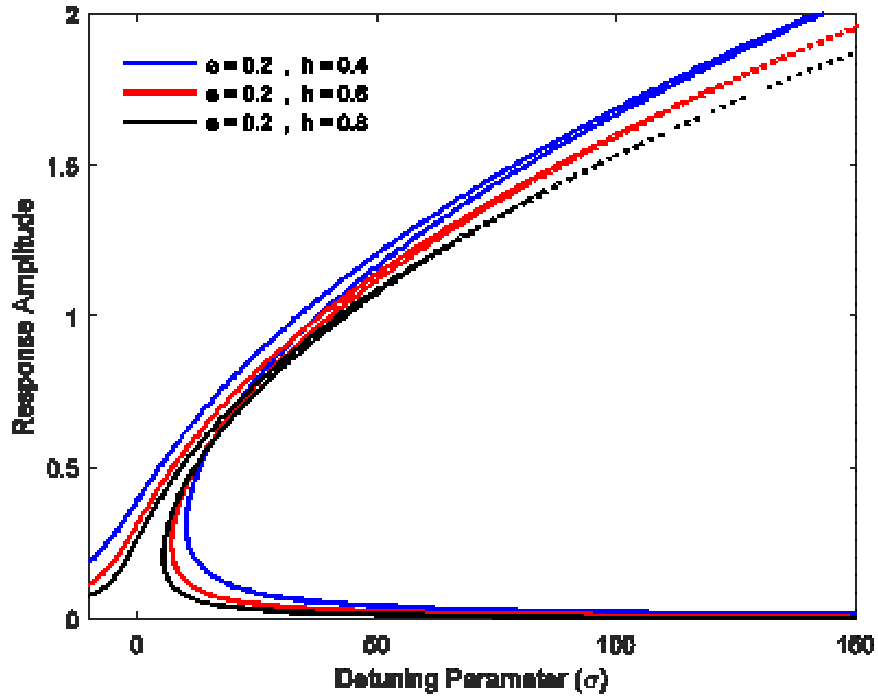
شکل (۴-۱۰) منحنی پاسخ فرکانسی را به ازای اندازه های مختلف ضخامت لایه ها با نسبت ضخامت یکسان بین لایه های هایپر الاستیک و الاستیک میکروتیر ساندویچی نشان می دهد. با افزایش ضخامت لایه ها، بیش ترین دامنه پاسخ میکروتیر نیز افزایش می یابد.



شکل (۴-۱۰) : منحنی پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت های مختلف با نسبت ضخامت یکسان

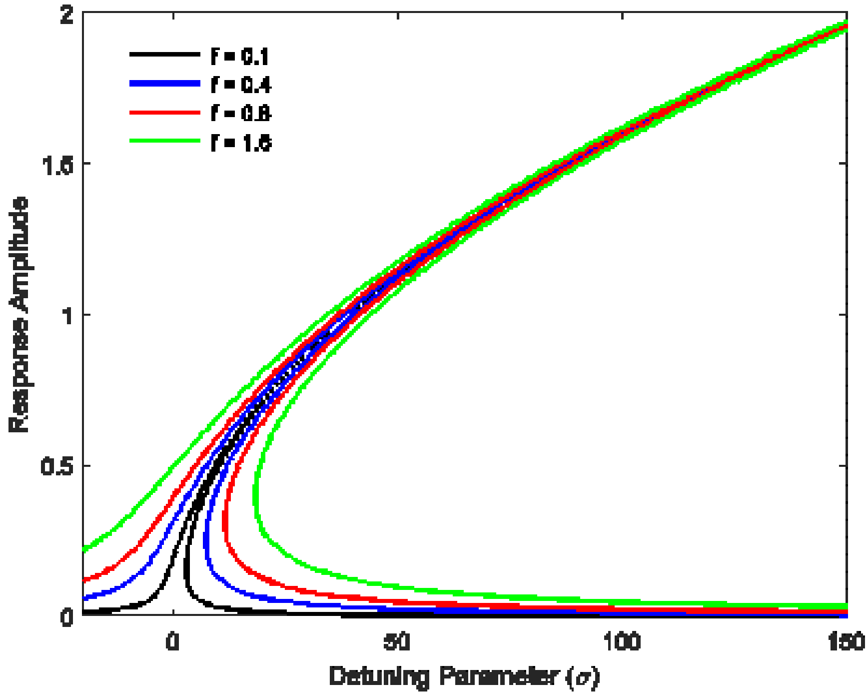
در شکل (۴-۱۱) منحنی های پاسخ فرکانسی را به ازای اندازه های مختلف ضخامت لایه ها با نسبت ضخامت متفاوت بین لایه های الاستیک و هایپرالاستیک نشان می دهد. با توجه به شکل با افزایش ضخامت لایه ها، بیش ترین دامنه پاسخ میکرو تیر کاهش پیدا می کند.

در شکل (۴-۱۲) منحنی های پاسخ فرکانسی برای مقادیر مشخص دامنه نیروی تحریک $f = 0.1$، $f = 0.4$، $f = 0.8$ و $f = 1.6$ رسم شده اند. هنگامی که نیروی تحریک افزایش پیدا می کند اندازه بیش ترین دامنه پاسخ نیز افزایش پیدا می کند، ولی در رفتار آن تغییر به وجود نمی آید.

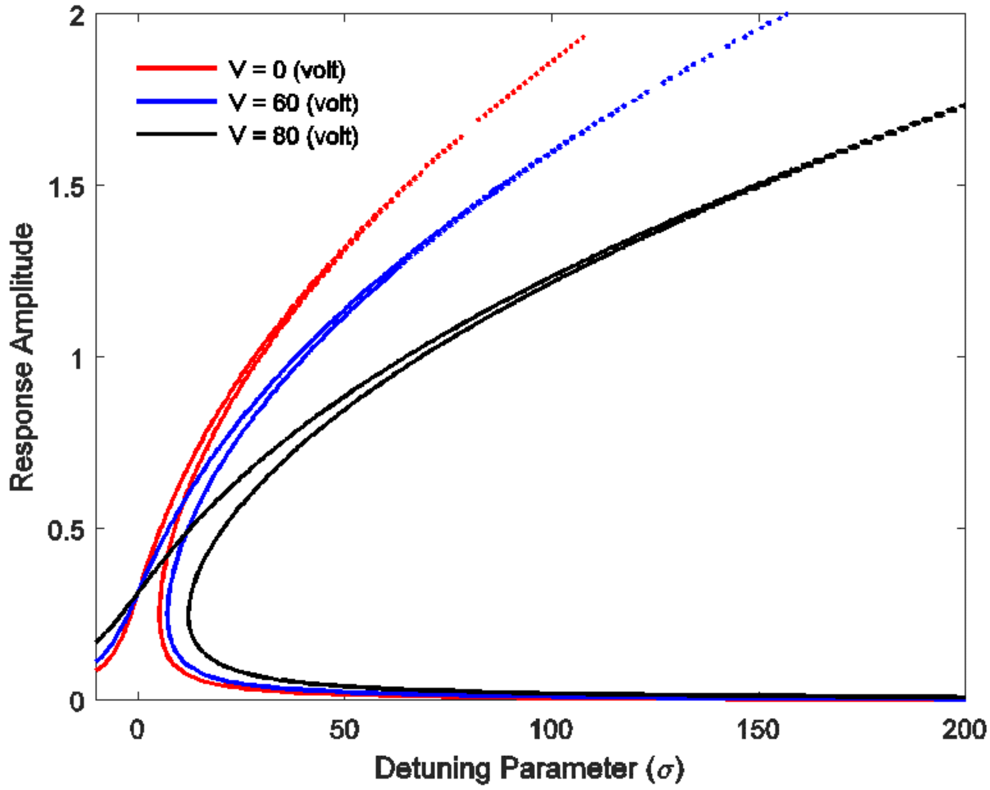


شکل (۴-۱۱): منحنی پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت های مختلف با نسبت ضخامت متفاوت

در شکل (۴-۱۳) تاثیر ولتاژ اعمالی روی منحنی های پاسخ فرکانسی نشان داده شده است. به ازای افزایش ولتاژ علاوه بر افزایش دامنه پاسخ، نقطه چندشاخگی انتقال پیدا می کند و پدیده پرش در اندازه های بالاتر شکل می گیرد.



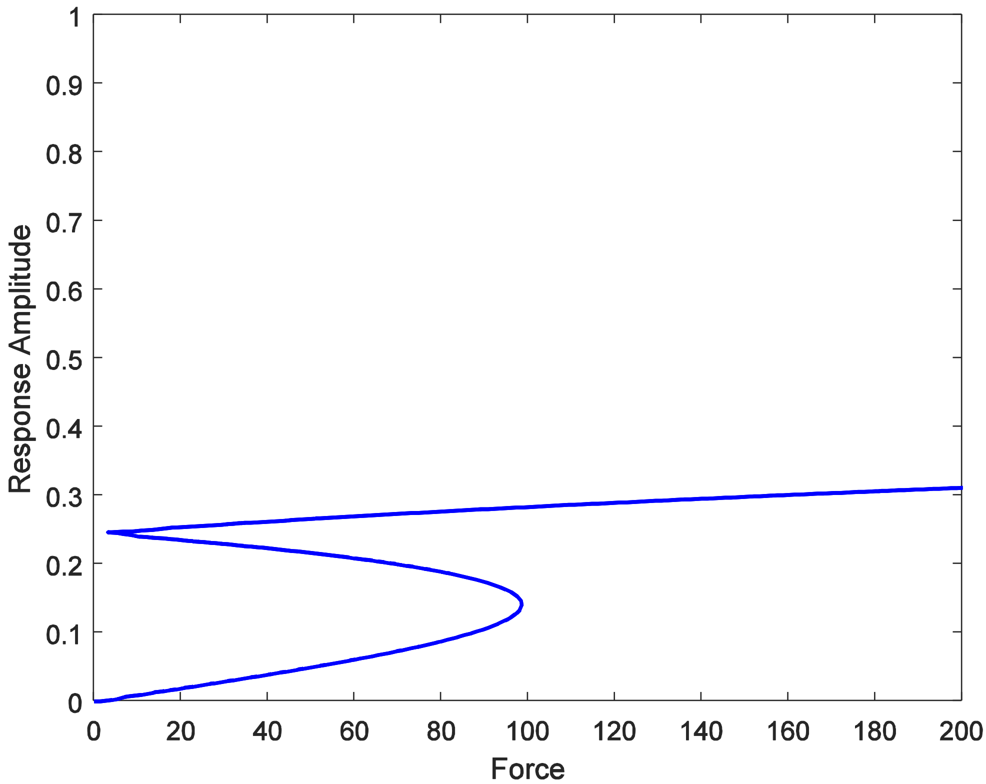
شکل (۴-۱۲) : منحنی پاسخ فرکانسی به ازای نیروهای تحریک مختلف



شکل (۴-۱۳) : منحنی پاسخ فرکانسی به ازای ولتاژهای مختلف

۴-۳-۲ انتخاب f بعنوان پارامتر متغیر و بررسی تغییرات دامنه پاسخ میکروتیر (خیز) نسبت به دامنه نیروی تحریک f:

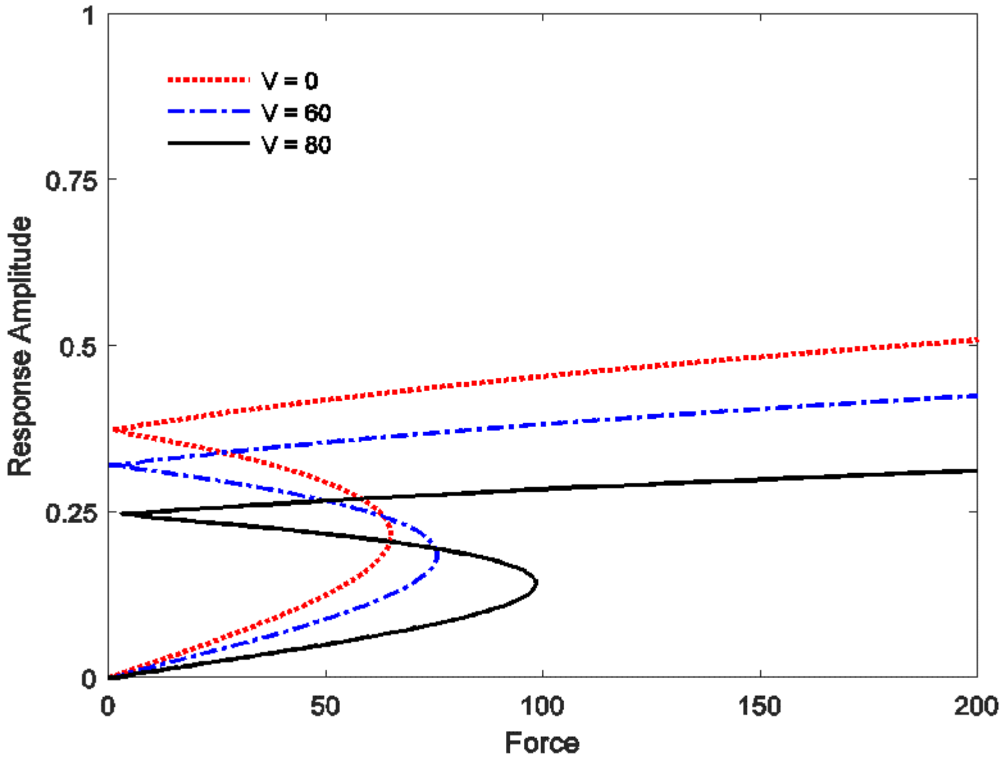
در شکل (۴-۱۴) منحنی پاسخ نیرویی، تغییرات دامنه پاسخ به ازای تغییرات دامنه نیرو f رسم شده است. چندشاخگی سدل نود در مقادیر بحرانی نیرو $f = 1.8$ و $f = 64.5$ رخ می دهد. برای تمام مقادیر $f < 1.8$ و $f > 64.5$ یک نقطه تعادل پایدار وجود دارد. و برای مقادیر موجود نیروی $0.8 < f < 13.5$ سه شاخه پاسخ وجود دارد. که شامل دو نقطه تعادل پایدار و یک نقطه تعادل ناپایدار می باشد. هنگامی که نیرو از مقدار صفر شروع به افزایش می کند، در نیروی بحرانی $f = 1.8$ تغییر ناگهانی از شاخه ناپایدار به دامنه بالایی پایدار می دهد و پدیده پرش رخ می دهد.



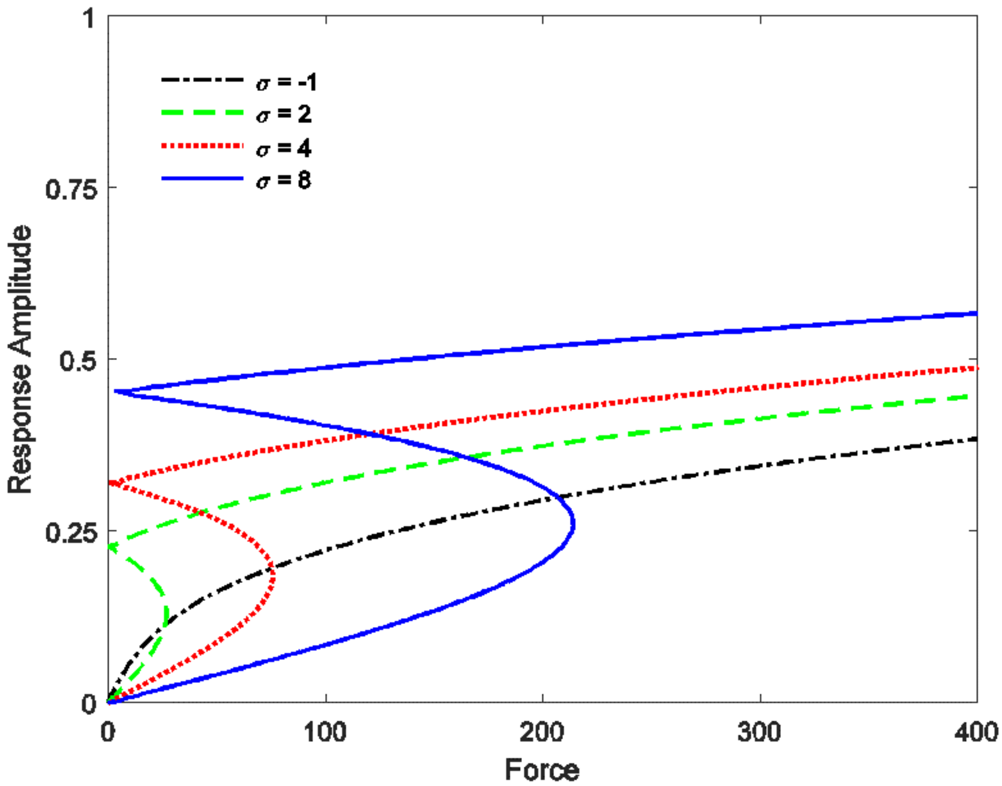
شکل (۴-۱۴) : منحنی پاسخ نیرویی

در شکل (۴-۱۵) منحنی پاسخ نیرویی برای مقادیر مشخصی از ولتاژ اعمالی رسم شده است. تاثیر ولتاژ روی پاسخ رزونانسی غیرخطی میکروتیر نشان داده می شود. به این صورت که با افزایش ولتاژ، نقطه ای که در آن چندشاخگی رخ می دهد نیز در دامنه های نیرویی بزرگتر اتفاق می افتد. علاوه بر این در دامنه های نیرویی بزرگتر، با افزایش ولتاژ ، دامنه نوسانات نیز افزایش می یابد.

در شکل (۴-۱۶) تاثیر فرکانس پارامتر تنظیم روی منحنی های پاسخ نیرویی میکروتیر نشان داده شده است. این نمودار نشان می دهد هنگامی که فرکانس پارامتر تنظیم افزایش می یابد نقطه چند شاخگی در مقادیر بزرگ تری از دامنه های نیرویی رخ می دهد. علاوه بر این به ازای $\sigma = -1$ برای تمام مقادیر دامنه های نیرویی هیچ نقطه چندشاخگی وجود ندارد.



شکل (۴-۱۵) : منحنی پاسخ نیرویی به ازای ولتاژهای مختلف



شکل (۴-۱۶) : منحنی پاسخ نیرویی به ازای فرکانس پارامترهای تنظیم مختلف

۴-۳-۳ انتخاب V_{DC} بعنوان پارامتر متغیر و بررسی تغییرات دامنه پاسخ میکروتیر (خیز) نسبت به تغییرات ولتاژ V_{DC}:

برای $F = 0.05$ و $\varepsilon = 0.1$ فرکانس طبیعی میکروتیر با توجه به رابطه (۳-۷) تابعی از ولتاژ اعمالی می باشد.

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^1 \alpha_2 \varphi(x)\varphi''''(x)\,dx - \int_0^1 \alpha_1 \varphi(x)\varphi''(x)\,dx}{\int_0^L \varphi^2(x)\,dx} \quad (۱-۴)$$

با باز کردن این رابطه تابع فرکانس طبیعی به صورت صریح از ولتاژ محاسبه می شود.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\int_0^1 \alpha_2 \varphi(x)\varphi''''(x)\,dx}{\int_0^L \varphi^2(x)\,dx} - \frac{\int_0^1 \overline{\alpha_1}\varphi(x)\varphi''(x)\,dx}{\int_0^L \varphi^2(x)\,dx} - \frac{\int_0^1 \overline{\overline{\alpha_1}}\varphi(x)\varphi''(x)\,dx}{\int_0^L \varphi^2(x)\,dx}(V^2)}$$

(۲-۴)

که ضرایب $\overline{\alpha_1}$ و $\overline{\overline{\alpha_1}}$ از رابطه (۲-۴۷) به شکل زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\overline{\alpha_1} = \frac{(2c_1A_h)}{\left(\rho_hA_h + \rho_e^tA_e^t + \rho_e^bA_e^b\right)\omega_{dim}^2L^2} \tag{۳-۴}$$

$$\overline{\overline{\alpha_1}} = \frac{\frac{\epsilon A_h}{{L_3}^2}}{\left(\rho_hA_h + \rho_e^tA_e^t + \rho_e^bA_e^b\right)\omega_{dim}^2L^2} \tag{۴-۴}$$

برای ساده سازی تغییر متغیر زیر به کار گرفته می شود:

$$\delta = \frac{\int_0^1 \alpha_2\varphi(x)\varphi''''(x)\,dx}{\int_0^L \varphi^2(x)\,dx} - \frac{\int_0^1 \overline{\alpha_1}\varphi(x)\varphi''(x)\,dx}{\int_0^L \varphi^2(x)\,dx} \tag{۵-۴}$$

$$\Lambda = -\frac{\int_0^1 \overline{\overline{\alpha_1}}\varphi(x)\varphi''(x)\,dx}{\int_0^L \varphi^2(x)\,dx} \tag{۶-۴}$$

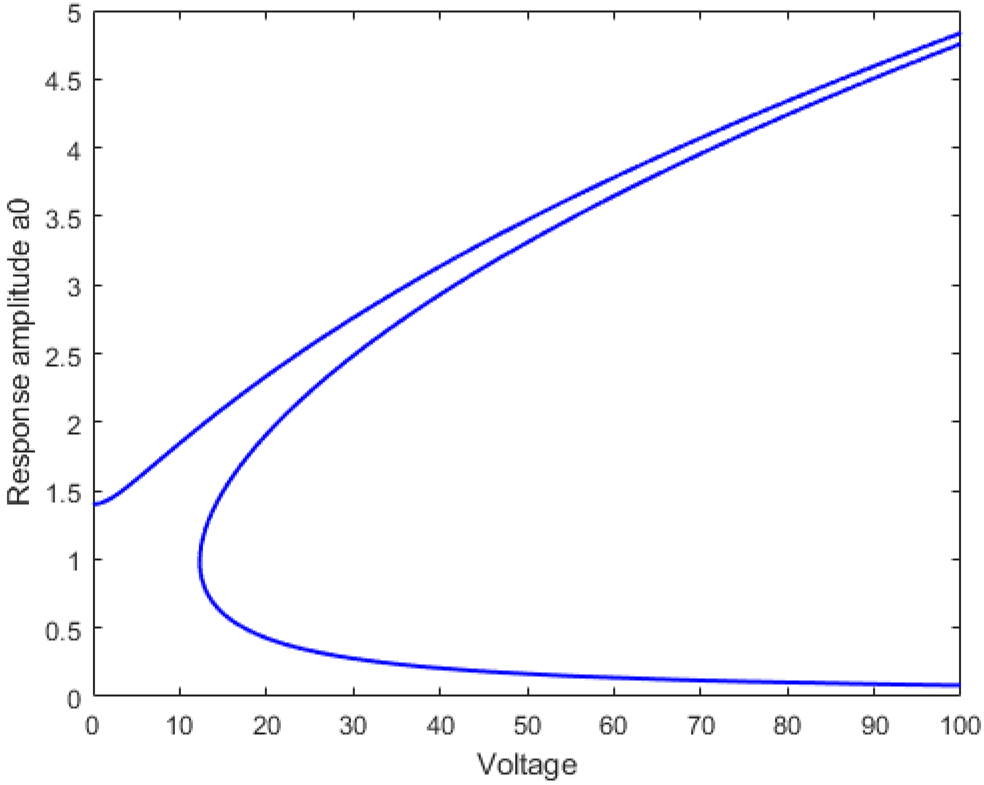
لذا تابع فرکانس طبیعی به شکل زیر استخراج می گردد:

$$\omega_0 = \sqrt{\delta + \Lambda V^2} \tag{۷-۴}$$

همین طور معادله پاسخ فرکانسی نیز با وارد کردن مستقیم ولتاژ به صورت زیر در می آید:

$$(\frac{3}{8}\gamma_2a^3 - (\sqrt{\delta + \Lambda V^2})\sigma a)^2 = \frac{F^2}{4} \tag{۸-۴}$$

منحنی شاخه شدگی دامنه پاسخ نوسان بر اساس تغییرات ولتاژ در شکل (۴-۱۷) نمایش داده شده است.



شکل (۴-۱۷) : نمودار شاخه شدگی دامنه پاسخ بر اساس تغییرات ولتاژ

۴-۳-۴ انتخاب هم زمان f و V_{DC} به عنوان پارامترهای متغیر و بررسی چند شاخگی :

در اینجا برای بررسی چندشاخگی با توجه به معادله پاسخ فرکانسی (۴-۸)، دو معادله $y = \pm f$ و $y = \frac{3}{8}\gamma_2 a_0^3 - (\delta + \Lambda V^2)\sigma a_0$ برای شرایط مختلفی که برای دو پارامتر V_{DC} و f وجود دارد، تداخل داده می شوند [47]. و به ازای ثابت بودن یکی، تغییرات دیگری بررسی می شود. از آنجایی که جمله ای که دارای پارامتر V_{DC} است. یک چند جمله ای از درجه سه می باشد، در نقاط مینیمم و ماکسیمم محلی این چند جمله ای چندشاخگی به وجود می آید که از نوع سدل می باشد. برای پیدا کردن مقدار f ای که این چندشاخگی در آن به وجود می آید، ابتدا؛

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a_0}\left(\frac{3}{8}\gamma_2 a_0^3 - (\sqrt{\delta + \Lambda V^2})\sigma a_0\right) = 0 \tag{۴-۹}$$

نقطه بحرانی زیر به دست می آید.

$$a_{0_{max}} = \sqrt{\frac{8(\sqrt{\delta + \Lambda V^2})\sigma}{9\gamma_2}} \tag{۴-۱۰}$$

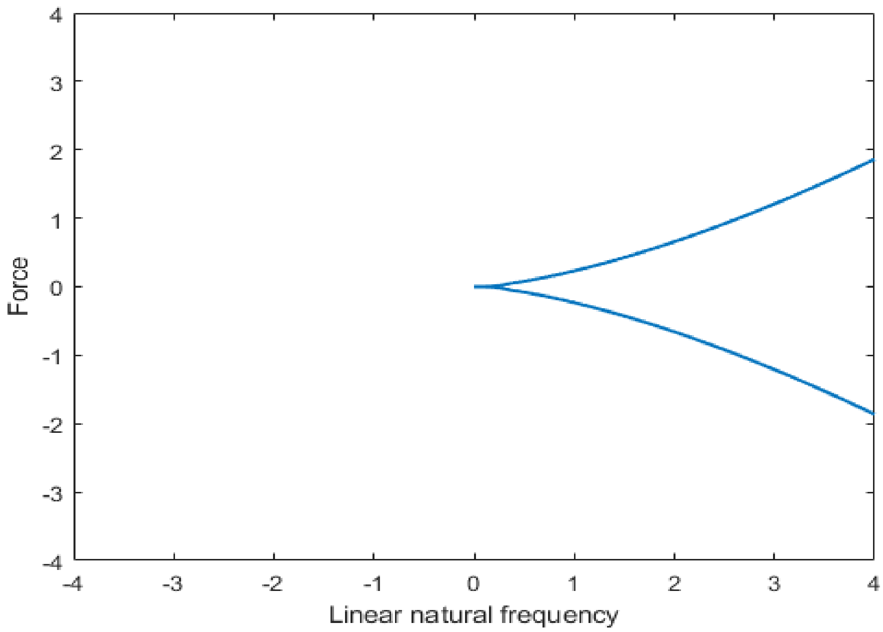
به ازای این نقطه تعادل چند شاخگی شکل می گیرد. جایگذاری این نقطه تعادل در معادله پاسخ فرکانسی نتیجه می دهد؛

$$\frac{3}{8}\gamma_2 \frac{8(\sqrt{\delta + \Lambda V^2})\sigma}{9\gamma_2} \sqrt{\frac{8(\sqrt{\delta + \Lambda V^2})\sigma}{9\gamma_2}} - (\delta + \Lambda V^2)\sigma \sqrt{\frac{8\left(\sqrt{\delta + \Lambda V^2}\right)\sigma}{9\gamma_2}}$$
$$= \left(-\frac{2\left(\sqrt{\delta + \Lambda V^2}\right)\sigma}{3}\right) \sqrt{\frac{8\left(\sqrt{\delta + \Lambda V^2}\right)\sigma}{9\gamma_2}} \tag{۴-۱۱}$$

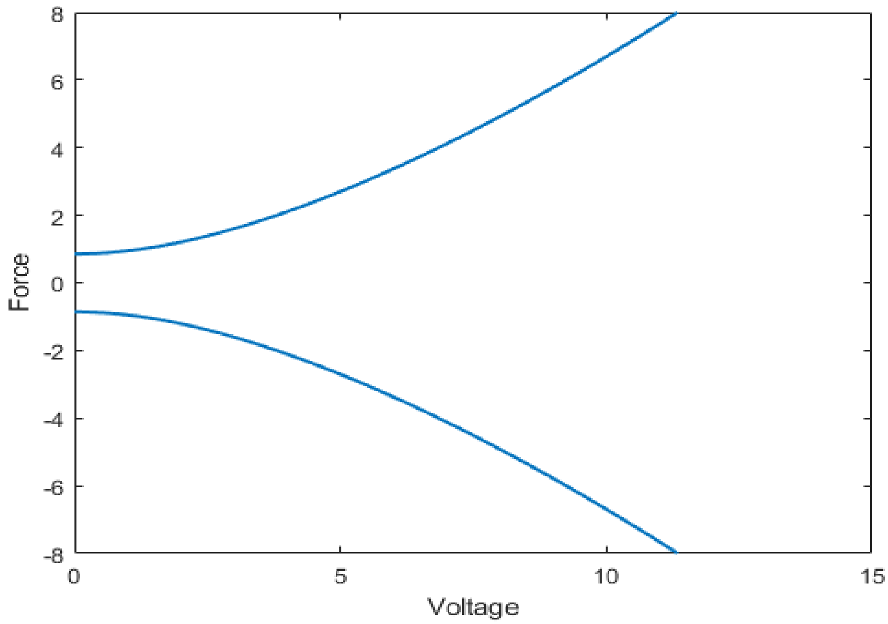
مقدار f_c بحرانی که در آن چند شاخگی سدل رخ می دهد؛

$$f_c(a_0) = \pm\left(-\frac{2(\sqrt{\delta + \Lambda V^2})\sigma}{3}\right) \sqrt{\frac{8(\sqrt{\delta + \Lambda V^2})\sigma}{9\gamma_2}} \tag{۴-۱۲}$$

شکل های (۴-۱۸) و (۴-۱۹) به ترتیب فضای پارامتری نیرو – فرکانس طبیعی و نیرو – ولتاژ را نشان می دهند. در این منحنی ها به ازای مقادیری از پارامترها که بین دو منحنی قرار می گیرند سه نقطه تعادل و خارج از آن یک نقطه تعادل برای سیستم وجود دارند.



شکل (۴-۱۸) : شاخه شدگی نیرو برحسب فرکانس طبیعی خطی



شکل (۴-۱۹) : شاخه شدگی نیرو برحسب ولتاژ

فصل پنجم:

نتیجه گیری و پیشنهادها

۵-۱ نتیجه گیری:

در ابتدای این تحقیق، رزوناتور الاستومری دی الکتریک که نوعی از سیستم های میکرو الکترومکانیکال بود معرفی گردید. ویژگی ها، کاربردها، مواد سازنده آن و روش مدل کردن و تحلیل این مواد الاستومری غیر خطی بیان شدند. در ادامه پاسخ دینامیکی غیرخطی میکروتیر ساندویچی دو سر گیردار با لایه میانی (دی الکتریک) هایپرالاستیک که تحت تحریک ولتاژ الکتریکی از طریق لایه های الکترود مجاور است، مورد مطالعه قرار گرفت. با استفاده از انرژی های پتانسیل و جنبشی و اصل هامیلتون معادله حاکم بر حرکت استخراج شده و پاسخ تحلیلی – تقریبی با استفاده از روش مقیاس های زمانی چندگانه نیز محاسبه شد.

فهمیدن رفتار رزونانسی غیرخطی رزوناتور الاستومری دی الکتریک به منظور طراحی این گونه رزوناتورها بسیار موثر می باشد. تاثیرات پارامترهای طراحی مختلف از جمله ولتاژ الکتریکی اعمالی، نیروی تحریک، فرکانس پارامتر تنظیم و ابعاد هندسی میکروتیر بخصوص نسبت ضخامت لایه الاستیک الکترود و لایه هایپرالاستیک دی الکتریک در دامنه پاسخ رزوناتور مورد بررسی قرار گرفتند. و نواحی پایدار و ناپایدار پاسخ ها برای به دست آوردن رفتار مطلوب به دست آمدند. منحنی های پاسخ فرکانسی و پاسخ نیرویی به ازای این پارامترهای طراحی رسم شدند.

نتایج نشان می دهند که، با افزایش ولتاژ الکتریکی اعمالی و هم چنین افزایش طول میکروتیر مناطق مربوط به پدیده پرش در نمودار افزایش می یابند. به علاوه بیش ترین دامنه پاسخ نمودار نیز افزایش می یابد. با در نظر گرفتن ضخامت لایه الکترود و ساندویچی در نظر گرفتن رزوناتور تاثیر این لایه در رفتار ارتعاشی و دینامیکی سیستم آورده شده به طوری که اندازه ضخامت این لایه و نسبت آن با ضخامت لایه دی الکتریک در پایداری و ولتاژ بحرانی رزوناتور تاثیر می گذارد. میکروتیر در مود های

مختلف رفتار سخت شوندگی دارد و مود های بالاتر میزان سخت شوندگی افزایش می یابد. هم چنین با کوتاه تر شدن طول میکروتیر رفتار سخت شوندگی آن زیاد می شود.

با استفاده از این نتایج پاسخ فرکانسی و رفتار میکروتیر می تواند به صورت پسیو توسط پارامترهای طراحی کنترل شود. از نمودار های پاسخ فرکانسی نیز با انتخاب مقادیر بهینه پارامتر ها در طراحی، به منظور داشتن یک پاسخ پایدار و مطلوب می تواند استفاده می شود.

۵-۲ پیشنهادها:

- استفاده از روش های دیگر مدل کردن مواد هایپر الاستیک برای میکروتیر رزوناتور و مقایسه نتایج این روش ها با یکدیگر مدل نئو – هوکین، اگدن و ...
- تحلیل دینامیکی رزوناتور دی الکتریک به صورت میکرو ورق مستطیلی، دایره ای و ...
- بررسی پاسخ رزوناتور دی الکتریک تحت شرایط مرزی مختلف.
- استفاده از دیگر تحریک های میدانی مانند تحریک الکترومغناطیسی.

منابع

[1] Piazza, Gianluca, Philip J. Stephanou, and Albert P. Pisano. "Single-chip multiple-frequency ALN MEMS filters based on contour-mode piezoelectric resonators." *Journal of Microelectromechanical Systems* 16, no. 2 (2007): 319-328.

[2] Nguyen, Clark T-C. "MEMS technology for timing and frequency control." *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* 54, no. 2 (2007): 251-270.

[3] Fan, L-S., Y-C. Tai, and Richard S. Muller. "Integrated movable micromechanical structures for sensors and actuators." *IEEE Transactions on Electron Devices* 35, no. 6 (1988): 724-730.

[4] Ilyas, Saad, Feras K. Alfosail, Mohamed LF Bellaredj, and Mohammad I. Younis. "On the response of MEMS resonators under generic electrostatic loadings: Experiments and applications." *Nonlinear Dynamics* 95, no. 3 (2019): 2263-2274.

[5] Bao, Xiaoqi, Stewart Sherrit, Clifford F. Frez, Valerie Scott, and Mina Rais-Zadeh. "Analysis of performances of MEMS infrared sensor based on piezoelectric bending resonators." In *Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems 2019*, vol. 10970, p. 1097028. International Society for Optics and Photonics, 2019.

[6] Johnson, Robert A. "Mechanical filters." *CRC Handbook of Electrical Filters* (1997): 377.

[7] Kao, Y-H., I. V. Goltser, M. N. Islam, and G. Raybon. "Ultrafast optical logic gate using a semiconductor laser amplifier operating at transparency in a loop mirror." In *Conference on Lasers and Electro-optics*, p. CtuJ4. Optical Society of America, 1997.

[8] Bannon, Frank Diii, John R. Clark, and CT-C. Nguyen. "High-Q HF microelectromechanical filters." *IEEE Journal of solid-state circuits* 35, no. 4 (2000): 512-526.

[9] Wang, Kun, Ark-Chew Wong, and CT-C. Nguyen. "VHF free-free beam high-Q micromechanical resonators." *Journal of microelectromechanical systems* 9, no. 3 (2000): 347-360.

[10] Abdelmoneum, Mohamed A., Mustafa U. Demirci, and CT-C. Nguyen. "Stemless wine-glass-mode disk micromechanical resonators." In *The Sixteenth Annual International Conference on Micro Electro Mechanical Systems, 2003. MEMS-03 Kyoto. IEEE*, pp. 698-701. IEEE, 2003.

[11] Partridge, Aaron, Markus Lutz, Bongsang Kim, Matthew Hopcroft, Rob N. Candler, Thomas W. Kenny, Kurt Petersen, and Masayoshi Esashi. "MEMS resonators: getting the packaging right." In *Proc. SEMICON*, pp. 55-58. 2005.

[12] Richards, A. W., and G. M. Odegard. "Constitutive modeling of electrostrictive polymers using a hyperelasticity-based approach." *Journal of Applied Mechanics* 77, no. 1 (2010): 014502.

[13] Yu, Liyun, and Anne Ladegaard Skov. “Silicone rubbers for dielectric elastomers with improved dielectric and mechanical properties as a result of substituting silica with titanium dioxide.” *International Journal of Smart and Nano Materials* 6, no. 4 (2015): 268-289.6, no. 4 (2015): 268-289.

[14] Roggero, Aurélien, Eric Dantras, Thierry Paulmier, Claire Tonon, Nicolas Balcon, Virginie Rejsek-Riba, Sabine Dagras, and Denis Payan. “Electrical 80ehavior of a silicone elastomer under simulated space environment.” *Journal of Physics D: Applied Physics* 48, no. 13 (2015): 135302.

[15] Martins, P. A. L. S., R. M. Natal Jorge, and A. J. M. Ferreira. “A comparative study of several material models for prediction of hyperelastic properties: Application to silicone-rubber and soft tissues.” *Strain* 42, no. 3 (2006): 135-147.

[16] Madsen, Frederikke B., Anders E. Daugaard, Søren Hvilsted, and Anne L. Skov. “The current state of silicone-based dielectric elastomer transducers.” *Macromolecular rapid communications* 37, no. 5 (2016): 378-413.

[17] Jean-Mistral, C., S. Iglesias, S. Pruvost, J. Duchet-Rumeau, and Simon Chesné. “Dielectric elastomer for stretchable sensors: influence of the design and material properties.” In *Electroactive Polymer Actuators and Devices (EAPAD) 2016*, vol. 9798, p. 97982G. International Society for Optics and Photonics, 2016.

[18] Corbaci, Mert, Wayne Walter, and Kathleen Lamkin-Kennard. "Implementation of Soft-Lithography Techniques for Fabrication of Bio-Inspired Multi-Layer Dielectric Elastomer Actuators with Interdigitated Mechanically Compliant Electrodes." In *Actuators*, vol. 7, no. 4, p. 73. Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2018.

[19] Min, Daomin, Chenyu Yan, Yin Huang, Shengtao Li, and Yoshimichi Ohki. "Dielectric and carrier transport properties of silicone rubber degraded by gamma irradiation." *Polymers* 9, no. 10 (2017): 533.

[20] Bernardi, Laura, Raoul Hopf, Aldo Ferrari, Alexander E. Ehret, and Edoardo Mazza. "On the large strain deformation behavior of silicone-based elastomers for biomedical applications." *Polymer testing* 58 (2017): 189-198.

[21] Namitha, L. K., and M. T. Sebastian. "High permittivity ceramics loaded silicone elastomer composites for flexible electronics applications." *Ceramics International* 43, no. 3 (2017): 2994-3003.

[22] Lopez-Pamies, Oscar. "A new I1-based hyperelastic model for rubber elastic materials." *Comptes Rendus Mecanique* 338, no. 1 (2010): 3-11.

[23] Dubois, Philippe, Samuel Rosset, Muhamed Niklaus, Massoud Dadras, and Herbert Shea. "Voltage control of the resonance frequency of dielectric electroactive polymer (DEAP) membranes." *Journal of Microelectromechanical Systems* 17, no. 5 (2008): 1072-1081.

[24] Marckmann, Gilles, and Erwan Verron. “Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials.” *Rubber chemistry and technology* 79, no. 5 (2006): 835-858.

[25] Feng, C., L. Yu, and W. Zhang. “Dynamic analysis of a dielectric elastomer-based microbeam resonator with large vibration amplitude.” *International Journal of Non-Linear Mechanics* 65 (2014): 63-68.

[26] Feng, Chuang, Liying Jiang, and Woon Ming Lau. “Dynamic characteristics of a dielectric elastomer-based microbeam resonator with small vibration amplitude.” *Journal of Micromechanics and Microengineering* 21, no. 9 (2011): 095002.

[27] Yeoh, Oon H. “Some forms of the strain energy function for rubber.” *Rubber Chemistry and technology* 66, no. 5 (1993): 754-771.

[28] Yeoh, Oon H. “Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates.” *Rubber chemistry and technology* 63, no. 5 (1990): 792-805.

[29] Zhang, G., J. Gaspar, V. Chu, and J. P. Conde. “Electrostatically actuated polymer microresonators.” *Applied Physics Letters* 87, no. 10 (2005): 104104.

[30] Barforooshi, Saeed Danaee, and Ardeshir Karami Mohammadi. “Study neo-Hookean and Yeoh hyper-elastic models in dielectric

elastomer-based micro-beam resonators." *Latin American Journal of Solids and Structures* 13, no. 10 (2016): 1823-1837.

[31] Mohammadi, Ardeshir Karami, and Saeed Danaee Barforooshi. "Nonlinear forced vibration analysis of dielectric-elastomer based micro-beam with considering Yeoh hyper-elastic model." *Latin American Journal of Solids and Structures* 14, no. 4 (2017): 643-656.

[32] Nayfeh, Ali H., Mohammad I. Younis, and Eihab M. Abdel-Rahman. "Dynamic pull-in phenomenon in MEMS resonators." *Nonlinear dynamics* 48, no. 1-2 (2007): 153-163.

[33] Alsaleem, Fadi M., Mohammad I. Younis, and Hassen M. Ouakad. "On the nonlinear resonances and dynamic pull-in of electrostatically actuated resonators." *Journal of Micromechanics and Microengineering* 19, no. 4 (2009): 045013.

[34] Yan, Han, Wen-Ming Zhang, Hui-Ming Jiang, and Kai-Ming Hu. "Pull-in effect of suspended microchannel resonator sensor subjected to electrostatic actuation." *Sensors* 17, no. 1 (2017): 114.

[35] Caruntu, Dumitru I., Martin A. Botello, Christian A. Reyes, and Julio S. Beatriz. "Voltage–Amplitude Response of Superharmonic Resonance of Second Order of Electrostatically Actuated MEMS Cantilever Resonators." *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 14, no. 3 (2019): 031005.

[36] Chao, Paul CP, C. W. Chiu, and Tsu-Hsien Liu. "DC dynamic pull-in predictions for a generalized clamped–clamped micro-beam based on a continuous model and bifurcation analysis." *Journal of Micromechanics and Microengineering* 18, no. 11 (2008): 115008.

[37] Mobki, Hamed, Ghader Rezazadeh, Morteza Sadeghi, Farid Vakili-Tahami, and Mir-Masoud Seyyed-Fakhrabadi. "A comprehensive study of stability in an electro-statically actuated micro-beam." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 48 (2013): 78-85.

[38] Najar, Fehmi, Ali H. Nayfeh, Eihab M. Abdel-Rahman, Slim Choura, and Sami El-Borgi. "Dynamics and global stability of beam-based electrostatic microactuators." *Journal of Vibration and Control* 16, no. 5 (2010): 721-748.

[39] Jazar, R. N., M. Mahinfalah, N. Mahmoudian, and M. A. Rastgaar. "Effects of nonlinearities on the steady state dynamic behavior of electric actuated microcantilever-based resonators." *Journal of Vibration and Control* 15, no. 9 (2009): 1283-1306.

[40] Rhoads, Jeffrey F., Steven W. Shaw, and Kimberly L. Turner. "Nonlinear dynamics and its applications in micro-and nanoresonators." *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 132, no. 3 (2010): 034001.

[41] Pallay, Mark, Meysam Daeichin, and Shahrzad Towfighian. "Dynamic behavior of an electrostatic MEMS resonator with

repulsive actuation." *Nonlinear Dynamics* 89, no. 2 (2017): 1525-1538.

[42] Zhao, Xuanhe, and Pradeep Sharma. "Revisiting the instability and bifurcation behavior of soft dielectrics." *Journal of Applied Mechanics* 84, no. 3 (2017): 031008.

[43] Pakdemirli, Mehmet, and G. Sari. "Perturbation solutions of the duffing equation with strong nonlinearities." *Comm. Num. Anal* 1 (2015): 82-89.

[44] Karahan, MM Fatih, and Mehmet Pakdemirli. "Free and forced vibrations of the strongly nonlinear cubic-quintic Duffing oscillators." *Zeitschrift für Naturforschung A* 72, no. 1 (2017): 59-69.

[45] Nayfeh, Ali H., and Dean T. Mook. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 2008.

[46] Nayfeh, Ali H., and Balakumar Balachandran. *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods*. John Wiley & Sons, 2008.

[47] Strogatz, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press, 2018.

Abstract:

Dielectric elastomer resonators (DERs) are applied in a wide variety of applications for micro electro-mechanical systems (MEMSs). In this study, vibrations and bifurcation of a DERs consist of a clamped-clamped sandwiched micro-beam with three elastic and hyper-elastic layers grounded by geometric and material nonlinearities is studied. Material nonlinearity modeled with the Yeoh hyper-elastic material theory. The governing equation of motion is formulated by means of Hamilton's principle and then truncated into a reduced-order model through Galerkin's technique. Approximate analytical solution in the primary resonant case is obtained using multiple time scale (MTS) method. The stabilities of steady-state responses in the vicinity of the equilibrium states and critical (pull-in) voltages are analyzed. Moreover, bifurcation phenomena is studied considering constant values of DC voltage, different values of frequency detuning parameters, and force excitation as control parameters. The obtained results are validated using results of previous studies and can help us better understand to design of DERs.

Keywords:

Dielectric elastomer resonator, saddle node bifurcation, pull-in voltage, perturbations theory, micro electromechanical systems, hyper-elastic.

Shahrood University of Technology

Faculty of mechanical and mechatronics engineering

MSc Thesis

Dynamic analysis of a dielectric elastomer-based hyper-elastic micro-beam resonator, with large vibration amplitude

By: Ali Ariana

Supervisor:

Dr. Ardeshir Karami Mohammadi

September 2019