



پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی

عنوان:

تحلیل انتقال حرارت گذرای دو بعدی میله استوانه ای
در یک محیط همدمای با استفاده از روش حل معکوس

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد مغربی

ارائه دهنده:

سید طه شریفی

زمستان ۱۳۸۵

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به مادرم که با احساس بی پایانش

و

تقدیم به پدرم که با تلاش بی امانش

در راهی که پیمودم همراهم بودند.

تقدیم به استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر مغربی

که راهنمایی هایشان موجب روشنی راه بود و سختی آن را بر من هموار ساخت.

فهرست:	شماره صفحه
چکیده.....	۱
مقدمه.....	۲
فصل اول: مروری بر عملیات حرارتی.....	۳
۱-۱ عملیات حرارتی چیست؟.....	۴
۱-۱-۱ دسته بندی و اهمیت های تجارتي عملیات حرارتی.....	۴
۱-۱-۲ اهمیت های تجارتي.....	۴
۱-۱-۳ دسته بندی فرآیندهای عملیات حرارتی.....	۵
۲-۱ واژه های عملیات حرارتی.....	۹
۳-۱ کوره ها و تجهیزات عملیات حرارتی.....	۱۵
۱-۳-۱ انواع کوره های عملیات حرارتی.....	۱۵
۲-۳-۱ تنوره ها و کوره ها.....	۱۵
۳-۳-۱ روش های گرمایشی.....	۱۶
۴-۱ طبقه بندی کوره های عملیات حرارتی براساس محیط انتقال حرارت.....	۱۸
۱-۴-۱ کوره های حمام مایع.....	۱۸
۲-۴-۱ کوره های بستر سیال.....	۱۹
۱-۲-۴-۱ کاربردهای بسترهای سیال.....	۲۰
۳-۴-۱ کوره های خلاء.....	۲۰
فصل دوم : مروری بر روشهای حل حرارتی معکوس.....	۲۲
۱-۲ شبیه سازی های عددی.....	۲۳
۲-۲ کارهای آزمایشگاهی - عددی.....	۳۷
فصل سوم: روش تفاضل محدود فشرده در حل مسائل عددی و تست کد ارائه شده.....	۴۱
۱-۳ حل معادله انتقال حرارت به روش تفاضل محدود.....	۴۲
۲-۳ تقریب مشتق اول مکانی.....	۴۵
۳-۳ تقریب مشتق دوم مکانی.....	۵۰

۵۲	۴-۳ محاسبه رابطه مشتق اول مکانی برای مساله موجود.....
۵۷	۵-۳ محاسبه روابط برای مشتق دوم مکانی برای مساله موجود.....
۶۱	۶-۳ روش محاسبه مشتقات مرتبه اول زمانی.....
۶۴	فصل چهارم : شبیه سازی مستقیم و معکوس حرارتی
۶۵	۱-۴ بررسی شرایط حاکم بر مسأله
۶۷	۲-۴ حل تحلیلی مسأله برای شرایط خاص
۷۱	۳-۴ تشریح مسئله و شرایط حاکم بر آن
۷۳	فصل پنجم : ارزیابی تحلیلی برنامه کامپیوتری.....
۷۴	۱-۵ شبیه سازی مسئله با یک تابع ریاضی
۹۱	فصل ششم : تحلیل و ارزیابی تجربی برنامه کامپیوتری.....
۹۲	۱-۶ حل یک مسئله واقعی.....
۹۳	۲-۶ توضیح پیرامون برنامه کامپیوتری.....
۹۵	۳-۶ داده های تجربی.....
۹۶	۴-۶ نتایج حاصل از داده های تجربی.....
۱۰۴	فصل هفتم : نتیجه گیری و پیشنهادات
۱۰۶	فصل هشتم : ضمیمه ها
	۱-۸ ضمیمه الف : کد کامپیوتری استفاده شده برای شبیه سازی مستقیم و معکوس حرارتی
۱۰۷	به زبان MATLAB
	۲-۸ ضمیمه ب : کد کامپیوتری استفاده شده برای داده های تجربی
۱۱۵	به زبان MATLAB
۱۲۳	منابع و مؤاخذ.....

- شکل ۱-۳ تخمین مشتق مکانی مرتبه اول به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = r^5$ ۵۴
- شکل ۲-۳ تخمین مشتق مکانی مرتبه اول به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = e^{r^2}$ ۵۵
- شکل ۳-۳ تخمین مشتق مکانی مرتبه اول به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = \sin(r^3)$ ۵۶
- شکل ۴-۳ تخمین مشتق مکانی مرتبه دوم به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = \exp(r^2)$ ۵۸
- شکل ۵-۳ تخمین مشتق مکانی مرتبه دوم به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = r^3$ ۵۹
- شکل ۶-۳ تخمین مشتق مکانی مرتبه دوم به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = \cos(r^2)$ ۶۰
- شکل ۱-۴ شکل شماتیک هندسه مسئله ۷۱
- شکل ۱-۵ الف و ب گرافهای دما در راستاهای شعاعی (r) و طولی (x) در لحظه شروع ($t=0$) ۷۶
- شکل ۲-۵ خطوط دما ثابت پس از گذشت ۶ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی ۷۸
- شکل ۳-۵ خطوط دما ثابت پس از گذشت ۱۲ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی ۷۸
- شکل ۴-۵ خطوط دما ثابت پس از گذشت ۱۸ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی ۷۹
- شکل ۵-۵ توزیع دما پس از گذشت ۲۰ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی ۷۹
- شکل ۶-۵ (الف-ب-ج) نمودار مربوط به دمای سطح ($r = R$ و در راستای x) پس از گذشت ۱۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر ۸۱
- شکل ۷-۵ (الف-ب-ج) نمودار مربوط به دمای سطح ($r = R$ و در راستای x) پس از گذشت ۲۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر ۸۱
- شکل ۸-۵ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \pi$ و در r های مختلف ، پس از گذشت ۱۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر ۸۳
- شکل ۹-۵ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \pi$ و در r های مختلف ، پس از گذشت ۲۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر ۸۳
- شکل ۱۰-۵ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \frac{\pi}{2}$ و در r های مختلف ، پس از گذشت ۱۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر ۸۴

- شکل ۵-۱۱ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \frac{\pi}{2}$ و در r های مختلف، پس از گذشت ۲۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر ۸۴
- شکل ۵-۱۲ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \frac{3\pi}{2}$ و در r های مختلف، پس از گذشت ۱۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر ۸۵
- شکل ۵-۱۳ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \frac{3\pi}{2}$ و در r های مختلف، پس از گذشت ۲۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر ۸۵
- شکل ۵-۱۴ نمودار درصد خطا بین دماهای مرکز در لحظه شروع مربوط به حل معکوس با دماهای بدست آمده از حل مستقیم در مرکز میله ۸۷
- شکل ۵-۱۵ نمودار درصد خطا بین دماهای مرکز در لحظه شروع (*) مربوط به حل معکوس با دماهای بدست آمده از حل مستقیم (0) در مرکز میله و مقایسه آنها ۸۷
- شکل ۵-۱۶ نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی سطح با گذشت زمان ۸۹
- شکل ۵-۱۷ نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی $x = \frac{3\pi}{2}$ با گذشت زمان ۸۹
- شکل ۵-۱۸ نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی $x = \frac{\pi}{2}$ با گذشت زمان ۹۰
- شکل ۵-۱۹ نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی $x = \pi$ با گذشت زمان ۹۰
- شکل ۶-۱ دماهای درونیایی شده بر اساس مقادیر تجربی برای محور مرکزی ۹۲
- شکل ۶-۱ کانتور دما برای کلیه نقاط در لحظه شروع (t=0) ۹۶
- شکل ۶-۲ کانتور دما برای کلیه نقاط در لحظه شروع (t=0) برای $\alpha = 25 \times 10^{-6} (m^2 / s)$ ۹۶
- شکل ۶-۳ خطوط دما ثابت برای کلیه نقاط در لحظه (t=120s) برای $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2 / s)$ ، راستای x و r براساس تعداد تقسیمات در هر راستا تقسیم بندی شده اند ۹۸
- شکل ۶-۴ (الف ب) خطوط دما ثابت برای کلیه نقاط در لحظه (t=360s) برای $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2 / s)$ ۹۸
- شکل ۶-۵ (الف ب) خطوط دما ثابت برای کلیه نقاط در لحظه (t=720s) برای $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2 / s)$ ۹۹
- شکل ۶-۶ جذر حداقل مربعات خطا برای $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2 / s)$ ۱۰۰
- شکل ۶-۷ درصد خطا بین دماهای مرکز (r = 0) و در راستای x در حل معکوس و سپس حل مستقیم برای $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2 / s)$ ۱۰۱
- شکل ۶-۸ (الف ب) خطوط دما ثابت برای کلیه نقاط در لحظه (t=120s) برای $\alpha = 25 \times 10^{-6} (m^2 / s)$ ۱۰۲
- شکل ۶-۹ (الف ب) خطوط دما ثابت برای کلیه نقاط در لحظه (t=360s) برای $\alpha = 25 \times 10^{-6} (m^2 / s)$ ۱۰۳

فهرست جداول:

شماره صفحه

- جدول (۱-۳) مرتبه خطاها در محاسبه مشتقات مرتبه اول در روش تفاضل محدود فشرده ۴۹
- جدول (۲-۳) مراحل مورد نیاز جهت محاسبه مشتق اول زمانی به روش رانچ-کوتا با دقت از مرتبه سوم ۶۱
- جدول (۱-۶) داده های تجربی دما-زمان برای مرکز ۹۵

چکیده

در این پایان نامه با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده¹، به شبیه سازی معادله انتقال حرارت دو بعدی گذرا در یک میله استوانه ای شکل پرداخته ایم. به این منظور با استفاده از روش حل معکوس حرارتی و با فرض معلوم بودن تاریخچه دما در مرکز جسم و در راستای طول میله، به محاسبه و تعیین شرایط مرزی مورد نیاز جهت حصول به شرط اولیه تأمین کننده این توزیع دما اقدام نموده ایم. معادلات تفاضلی بکار رفته جهت شبیه سازی جملات دیفرانسیلی در محاسبه مشتقات مکانی اول و دوم (در راستای طول و شعاع میله) از روش ارائه شده توسط لی لی² جایگزین شده است. همچنین برای توسعه محاسبات در دامنه زمان از روش رانچ - کوتای مرتبه سوم استفاده می شود. سپس با تشکیل ماتریسهای مربوط به هر کدام از گره های در نظر گرفته شده، نسبت به بدست آوردن توزیع دما در جسم در هر لحظه از زمان اقدام می گردد. کد کامپیوتری نوشته شده به زبان MATLAB، در دو مرحله مورد ارزیابی قرار گرفت. در مرحله نخست برای ارزیابی داده های شبیه سازی استفاده شد، و جوابها با داده های دقیق مقایسه گردیدند. در مرحله دوم، کد نوشته شده برای داده های تجربی ارزیابی شد. در این مرحله نیز پس از یافتن توزیع دما (حل معکوس) در سطح میله استوانه ای، مسئله را به روش مستقیم حل کرده ایم. در حل مسئله به روش مستقیم با برگرداندن زمان به لحظه آغازین، دما در محور جسم محاسبه گردید. در خاتمه نیز دمای محور استوانه ای شکل در حل مستقیم و معکوس با یکدیگر مقایسه شدند. در تمامی مراحل خطاها محاسبه و با استفاده از نمودارهای مناسب ترسیم گردیده اند.

¹ Compact Finite Difference

² Lele

مقدمه

در انجام عملیات مهندسی بر روی اجسام یا اعمال شرایط مختلف در فرآیند تولید می توان در نهایت به محصولی با خواص فیزیکی و ظاهری مورد نظر دست یافت، در بسیاری از فرآیندها تفاوت نحوه اعمال شرایط می تواند به تولید محصولاتی با خواص مختلف بیانجامد، در انجام عملیات حرارتی بر روی اجسام این تغییرات به وضوح در خواص محصول به دست آمده تأثیر گذار می باشد، از جمله در فرآیند خنک کاری در هنگام تولید فولاد یا چدن که از کوره ذوب خارج گردیده، نحوه اعمال شرایط مرزی حرارتی بر روی خواص کاربردی آن از جمله سختی، چقرمگی، استحکام و سایر خواص اساسی آن تأثیر می گذارد. در چنین حالتی به دلیل وجود اختلاف دمای زیاد بین ماده مذکور و محیط اطراف آن علاوه بر تبادل حرارت، تبادل تشعشعی نیز وجود داشته و عموماً نمی توان از آن در محاسبات حرارتی مربوطه صرف نظر کرد.

برای بدست آوردن ریز ساختار مشخصی در فولاد و یا چدن در فرآیند تولید آن، اعمال بار حرارتی مشخص و ایجاد شرایط تشعشعی برای دست یابی به دمای سطح معلوم در آن الزامی است، برای این منظور نیازمندیم مسأله را با استفاده از شرایط مطلوب حل نموده و سپس پاسخهای به دست آمده از این حل را بر روی مسأله اصلی اعمال نماییم. بدین گونه با استفاده از حل مسأله به صورت معکوس شرایط مطلوب برای اعمال بر مسأله اصلی را به دست آورده ایم.

فصل اول:

مروری بر عملیات حرارتی

۱-۱-۱ عملیات حرارتی چیست؟

۱-۱-۱-۱ دسته بندی و اهمیت های تجارتي عملیات حرارتی

در مفهوم کلی عملیات حرارتی فلزات و آلیاژهای فلزی عبارت است از گرم و سرد کردن آن ها در حالت جامد، به طوری که خواص و یا حالت ویژه ای در آن ها بوجود آید، گرم کردن فلزات و یا آلیاژها برای کار گرم نظیر آهنگری، نورد، فشارکاری (Extrusion) و یا انواع عملیات حرارتی که گاهی اوقات روی مواد شیشه ای یا پلاستیکی انجام می گیرد جزو عملیات حرارتی تعریف شده نمی باشد.

۱-۱-۲ اهمیت های تجارتي

تصور اینکه اگر نمی توانستیم به وسیله عملیات حرارتی خواص فلزات را تغییر داده و یا اصلاح نماییم زندگی چه شکلی پیدا می کرد، مشکل است. یقیناً بدون مزیت های عملیات حرارتی صنعت اتومبیل سازی، هواپیما سازی، ماشین سازی و انواع بیشمار قطعات و ظروف با ویژگی هایی که امروزه دارند، وجود نداشت. حقیقتاً تهیه بعضی قطعات با کیفیتی که دارند (مانند ریش تراش) امکان پذیر نبود.

در مفهوم وسیع تقریباً همه فلزات و آلیاژها در مقابل انواع روش های عملیات حرارتی تعریف شده حساس بوده و در مقابل آن ها عکس العمل نشان می دهند. این عکس العمل با توجه به نوع فلز و آلیاژ فرق می کند، برای مثال تقریباً هر فلز و آلیاژی را می توان به وسیله سیکل گرم و سرد کردن نرم کرد ولی تعداد آلیاژهایی که در اثر عملیات حرارتی سخت و مقاوم می شوند محدود است.

چنانکه گفتیم عملاً تمام فولادها نسبت به بیشتر فرآیندهای عملیات حرارتی حساس هستند، به این معنا که در مقابل نوع خاص از آن واکنش نشان می دهند. این امر دلیل محکمی است که چرا فولاد بیش از ۸۰٪ فلزات تولید شده را در بر می گیرد. بسیاری از آلیاژهای غیر آهنی اساساً آلیاژهای آلومینیوم، نیکل، منیزیم و تیتانیوم را می توان به وسیله روش های عملیات حرارتی مشابه عملیات

حرارتی فولادها مقاوم نمود. ولی مسلماً درجه مقاوم شدن در دو مورد متفاوت خواهد بود، اصول عملیات حرارتی فولادها و آلیاژهای غیر آهنی در فصول بعدی بررسی خواهد شد.

۱-۳-۱ دسته بندی فرآیندهای عملیات حرارتی

در بسیاری از موارد عناوینی که از نظر علمی و تکنیکی برای روندهای عملیات حرارتی به کار می رود مناسب است ولی در بعضی موارد به دلیل اینکه یک نوع عملیات حرارتی برای هدف های مختلف انجام می گیرد هیچ تناسبی بین عنوان عملیات حرارتی و روند آن وجود ندارد. برای مثال عملیات تنش گیری (Stress relieving) و برگشت (Tempering) هر دو با تجهیزات یکسان و سیکل های مشابه (از نظر دما و زمان) انجام می گیرند، ولی هدف از انجام آن ها کاملاً متفاوت است. اصول فرآیندهای عملیات حرارتی با در نظر گرفتن ارتباط متقابل آن ها ذیلاً شرح داده می شود.

نرمالیزاسیون (Normalizing). در این عملیات آلیاژهای آهنی تا بالاتر از دمای استحاله، Ac_3 ، گرم شده (۲۸ تا ۵۶ درجه سانتیگراد) و بعد در هوای آزاد سرد می شوند. ساختار و خواص فولادهای کم کربن در این عملیات مشابه عملیات باز پخت کامل (Full Annealing) است ولی باید توجه داشت که نتیجه عملیات نرمالیزاسیون (Normalizing) و بازپخت برای همه آلیاژهای آهنی یکسان نیست.

بعد از این عملیات ترکیب و ساختار آلیاژ همگن و یکنواخت می گردد، به همین دلیل این عملیات برای اصلاح ساختار فولادهایی که در دمای بالا تحت کار گرم (نظیر آهنگری، نورد گرم و ...) قرار گرفته اند مناسب است.

بازپخت (Annealing). در این عملیات آلیاژ را تا دمای مناسبی (۹۰۰ تا ۹۵۰ درجه سانتیگراد برای آلیاژهای آهنی) گرم کرده و به مدت کافی (۲ تا ۱۵ ساعت) در آن دما نگه می دارند، سپس آن را با سرعت مناسبی تا دمای محیط سرد می کنند. هر چند این عملیات عموماً برای نرم کردن مواد فلزی

انجام می گیرد، ولی در نتیجه آن خواص (قابلیت ماشینکاری، خواص الکتریکی، قابلیت کار سرد و پایداری ابعاد) و ساختار آلیاژ به طور مؤثری تغییر کرده و تثبیت می گردد.

عملیات بازپخت انواع مختلفی دارد که هدف و نتیجه آن ها متفاوت است. هرگاه عنوان خاصی برای عملیات بازپخت ذکر نشود منظور بازپخت کامل است که در آن آلیاژ آهنی تا بالاتر از دمای استحاله گرم شده و بعد به طور آرام (داخل کوره) سرد می گردد، طوریکه کاملاً نرم شود. سیکل این عملیات با توجه به ترکیب و مشخصات آلیاژ فرق می کند و به عبارت دیگر برای هر فولاد سیکل بازپخت مشخصی وجود دارد.

برای آلیاژهای غیر آهنی با ترکیب و ساختار مربوط به خود، عملیات بازپخت برای اهداف زیر انجام می گیرد: ۱- حذف کامل یا جزئی اثرات کار سرد (ممکن است تبلور مجدد رخ دهد). ۲- آمیختگی کامل رسوبات به صورت ذرات درشت. ۳- رسوب ذرات از محلول جامد.

انواع مختلف عملیات حرارتی بازپخت که در صنعت کاربرد دارند، عبارتند از: بازپخت کامل، بازپخت معمولی، بازپخت ناقص، بازپخت تبلور مجدد و بازپخت تنش گیری. بعضی از عناوین ذکر شده فقط در کارگاه مصطلح بوده و تعریف دقیقی ندارند.

اوستنیت زایی (Austenitizing). در این عملیات که خاص آلیاژهای آهنی است. آلیاژ تا بالاتر از دمای Ac_3 گرم می شود، به طوری که فقط فاز اوستنیت پایدار باشد. عملیات اوستنیت زایی مرحله اول عملیات نرمالیزاسیون بازپخت کامل و آب دهی آلیاژهای آهنی است.

آب دهی (Quenching). سرد کردن سریع فولاد یا آلیاژ آهنی از دما اوستنیتی را آب دهی یا کوئنچ می گویند. عامل سرد کننده یا محیط کوئنچ معمولاً روغن، آب، هوا، محلول های پلی مری، محلول های نمکی و گاز است. انتخاب هر کدام از آن ها شدیداً به سختی پذیری و وزن قطعات بستگی دارد. قدرت سرد کنندگی محیط های کوئنچ به طور وسیع فرق می کند، برای اینکه عیوب ناشی از عملیات حرارتی نظیر تغییر شکل تاب و ترک به حداقل برسد، باید از محیط هایی که قدرت سرد کنندگی

اضافی ندارند استفاده کنیم. انواع مختلف عملیات کوئنچ عبارتند از: کوئنچ مستقیم، کوئنچ منقطع، کوئنچ انتخابی و کوئنچ کنترل شده که تعریف هر کدام از این ها در واژه نامه آمده است.

برگشت (Tempering). برگشت عبارت است از گرم کردن مجدد فولاد یا چدن سخت شده تا پایینتر از دمای استحاله پایینی (معمولاً کمتر از ۷۰۰ درجه سانتیگراد). با انجام این عملیات روی آلیاژهای سخت شده خواص مکانیکی آلیاژ تعدیل می یابد. دمای برگشت برای فولادهای سخت شده غالباً از ۱۵۰ درجه سانتیگراد تجاوز نمی کند، سیکل عملیات برگشت از نظر دما و زمان مشابه عملیات بازپخت ناقص و بازپخت تنش گیری است، ولی هدف و ساختار بدست آمده برای هر کدام از عملیات فوق کاملاً متفاوت است. بنابراین نباید این سه نوع عملیات را مشابه در نظر بگیریم.

تنش گیری (Stress Relieving). همانند عملیات برگشت در این عملیات نیز آلیاژ آهنی تا پایینتر از دمای استحاله پایینی گرم می شود. برای فلزات غیر آهنی دمای عملیات تنش گیری، با توجه به ترکیب و مقدار کار سرد ممکن است از دمای محیط تا چند صد درجه سانتیگراد تغییر کند.

هدف اصلی این عملیات این است که تنش های ناشی از فرآیندهای شکل دهی نظیر نورد، ماشینکاری و یا جوشکاری آزاد شوند. نحوه این عملیات به این صورت است که آلیاژ را تا دمای از پیش تعیین شده گرم کرده و به مدت کافی در آن دما نگه می دارند تا تنش های باقی مانده به حد مورد قبول برسد. سپس آلیاژ را از دمای مزبور آرام سرد می کنند تا تنشی در آن باقی نماند.

کربن دهی (Carburizing). در این عملیات کربن اتمی در محدوده حرارتی ۹۰۰ تا ۱۰۴۰ درجه سانتیگراد به درون آلیاژ آهنی (در حالت جامد) نفوذ می کند. نحوه عملیات به این صورت است که آلیاژ در محیط غنی از کربن (مایع، جامد و گاز) تا دمای معینی گرم شده و مدتی در این دما نگه داشته می شود. تحت این شرایط اختلاف غلظت کربن در سطح و مغز باعث می گردد تا کربن اتمی به داخل آلیاژ نفوذ کند. به این ترتیب لایه پر کربنی به دست می آید که با کوئنچ کرن سخت می شود. ممکن است قطعه کربورایز شده از دمای کوئنچ تا دمای محیط آرام سرد شده و سپس کوئنچ گردد.

کربن و ازت دهی (Carbonitriding). در این عملیات آلیاژهای آهنی (عموما فولادهای کم کربن) در محیط گازی غنی از کربن و ازت تا بالاتر از دمای Ac_3 گرم می شوند تحت این شرایط کربن و ازت همزمان به داخل آلیاژ نفوذ می کنند. به این ترتیب لایه یا قشر غنی از کربن و ازت در سطح آلیاژ بوجود می آید که با کوئنچ کاملاً سخت می شود. زیاد بودن سختی سطح و نرم ماندن مغز باعث می شود تا خواص دینامیکی و مکانیکی آلیاژ تا حد مطلوبی بهبود یابد.

این عملیات برای تولید انبوه مناسب است، چون مدت زمان و دمای عملیات نسبت به کربن دهی کمتر است به همین دلیل قشر سخت شده نازک تر است. عملیات کربن و ازت دهی را سیانوراسیون گازی نیز می گویند، زیرا نتایج هر دو عملیات مشابه است.

سیانوراسیون (Cyaniding). عملیاتی است که در آن فلزات آهنی (عموما فولادهای کم کربن) در حمام نمک سیانیدی مذاب تا بالاتر از Ac_3 گرم می شوند با ننگ داشتن آلیاژ در این شرایط کربن و ازت همزمان به داخل آن نفوذ می کنند که با کوئنچ بعدی لایه ای سخت و مقاوم در برابر سایش در سطح قطعه به وجود می آید. نتایج عملیات سیانوراسیون از نظر سختی و ساختار تقریباً مشابه عملیات کربن و ازت دهی است ولی مشکلاتی که در عملیات سیانوراسیون از نظر دفع نمک های سیانیدی و پاک کردن آن ها از سطح قطعه وجود دارد موجب گردیده تا به تدریج عملیات سیانوراسیون از رده خارج شده و عملیات کربن و ازت دهی جایگزین آن گردد.

ازت دهی (Nitriding). عملیاتی است که در آن آلیاژهای آهنی مخصوص در محیط غنی از ازت تا دمای پایینتر از دمای Ac_1 گرم می شوند، با ننگ داشتن آلیاژ در این دما به مدت زمان کافی ازت به داخل آلیاژ نفوذ می کند. با نفوذ ازت و تشکیل انواع نیتریدها لایه سطحی آلیاژ سخت می گردد. بنابراین بعد از این عملیات نیازی به کوئنچ نمی باشد. ازت ممکن است از تجزیه آمونیاک گازی و یا نمک های سیانیدی مذاب تامین گردد.

ازت و کربن دهی (Nitrocarburizing). در این عملیات ازت و کربن در دمای کمتر از Ac_1 همزمان به داخل آلیاژ (فولادهای آلیاژی و کربنی) نفوذ می کنند. با انجام این عملیات مقاومت در برابر ساییش و خستگی آلیاژ افزایش می یابد. لایه نیتروکربور بسیار نازک است، به همین دلیل عملیات ماشین کاری بعدی جایز نیست. فرایندهای دیگری نیز وجود دارند که مشابه ازت و کربن دهی هستند. این فرآیندها در فصل دهم مورد توجه قرار خواهند گرفت.

۱-۲ واژه های عملیات حرارتی

فریت سوزنی (Acicular Ferrite). فریت زیر ساختاری است با دانه های غیر هم محور که با سرد کردن غیر پیوسته تحت مکانیزم برشی و دیفوزیونی تشکیل می شود. این نوع فریت نسبت به بنیت بالایی در دمای بالاتری جوانه می زند. وجه تمایز آن با بنیت در این است که مقدار حلالیت کربن در آن محدود است، به همین دلیل در ساختار حاصله کاربرد کمتری وجود دارد.

پیر سختی (Age Hardening). سخت شدن آلیاژ با گذشت زمان را پیری می گویند که غالبا بعد از کار سرد یا سرد کردن سریع اتفاق می افتد.

پیر سازی، پیر شدن (Aging). تغییر خواص آلیاژها و فلزات معین در دمای محیط یا دمای نسبتا بالاتر را پیرسازی می گویند که بعد از کار گرم، عملیات حرارتی (پیری آب دهی برای آلیاژهای آهنی، پیری طبیعی و مصنوعی برای آلیاژهای غیر آهنی و آهنی) و یا کار سرد (کرنش سختی، کرنش پیری) رخ می دهد.

باید توجه داشت که در این پدیده یا فرآیند ترکیب شیمیایی آلیاژها تغییر نمی کند، در واقع تغییر خواص آلیاژ به دلیل تغییر فازی است که در طی این عملیات رخ می دهد.

آلوتروپی (Allotropy). آلوتروپی یا چند شکلی، رفتار چند گونه عناصر، فازهای پایدار و آلیاژها را بیان می کند که رفتارشان مشابه اجزاء ثابت آن هاست.

فولاد آلیاژی (Alloy Steel). فولادی است حاوی درصد مشخصی از عناصر معین (علاوه بر کربن و مقادیر مجاز از عناصر منگنز، مس، سیلیسیم، گوگرد و فسفر) که هر کدام از آن‌ها در خواص فیزیکی و مکانیکی فولاد اثر می‌گذارند.

استمپرینگ (Austempering). نوعی عملیات حرارتی است ویژه آلیاژهای آهنی که در آن آلیاژ را از دمای اوستنیتی با سرعتی که اوستنیت پایدار باشد (پرلیت و بنیت تشکیل نشود) تا بالاتر از دمای M_s سرد می‌کنند، سپس آن را به مدت زمان کافی در این دما نگه می‌دارند تا اوستنیت کاملاً به بنیت تبدیل شود.

اوستنیت (Austenite). محلول جامد کربن یا عناصر دیگر در آهن FCC است، مگر اینکه نوع خاص آن مشخص شود، مانند اوستنیت نیکلی.

فولاد اوستنیتی (Austenitic Steel). فولاد آلیاژی است که در دمای محیط ساختار آن اوستنیتی باشد.

بنیت (Bainite). مجموعه‌ای است شبه پایدار از فریت و سمانتیت که با دگرگونی اوستنیت در دمایی کمتر از دامنه پایداری پرلیت و بالاتر از M_s تشکیل می‌شود.

فولاد کربنی (Carbon Steel). فولادی است که حداقل مقدار عناصر آلیاژی آن (به غیر از حد مجاز عناصر Cu, Mn, Si) اهمیتی ندارد و به غیر از عناصر C, Si, Mn, Cu, S و P مقدار بقیه عناصر خیلی کم است.

چدن (Cast iron). آلیاژهای ریختگی آهن هستند که کربن آن‌ها بیشتر از ۲٪ است. درصد عناصر دیگر در آن، بستگی به نوع چدن دارد.

سمانتیت (Cementite). ترکیبی است از آهن و کربن به نام کاربید آهن که فرمول شیمیایی آن تقریباً به صورت Fe_3C است. عناصر آلیاژی موجود در فولاد به ویژه عناصر کاربیدزا در سمانتیت حل شده و ترکیب آن را تغییر می‌دهند.

عملیات سرد (**Cold treatment**). عملیاتی است که در دمای کمتر از $0^{\circ}C$ انجام می گیرد و هدف از آن پایداری ابعادی و ساختاری آلیاژ است، اگر هدف از این عملیات تبدیل کردن اوستنیت باقیمانده به مارتنزیت باشد لازم است آلیاژ را بعد از آن برگشت دهیم.

دیاگرام فازی (**Constitution diagram**). دیاگرامی است که محدوده پایداری و نیمه پایداری فازهای سیستم آلیاژی را برحسب دما و ترکیب بیان می کنند (به عبارت دیگر دامنه پایداری فازها را در حالت تعادل و نیمه تعادل نشان می دهد).

دمای بحرانی (**Critical temperature**). ۱- در فشار ثابت همان نقطه بحرانی است. ۲- دمایی است که بالاتر از آن با زیاد شدن فشار فاز بخار نمی تواند به مایع تبدیل شود.

چدن نشکن (**Ductile cast iron**). چدنی است که با اضافه کردن عناصر قلیایی مانند منیزیم، کلسیم، سدیم و غیره به مذاب آن در طول انجماد گرافیت به صورت ذرات کروی یا برفکی رسوب می کند. گاهی این چدن را چدن کروی، چدن گرافیت کروی و چدن SG نیز می گویند.

مواد فری مغناطیس (**Ferri magnetic material**). موادی هستند که خواص مغناطیسی آن ها از نظر میکروسکوپی مشابه مواد فرو مغناطیس است، ولی از نظر میکروسکوپی مانند فولاد ضد فرومغناطیس می باشند. بدین معنا که در آن ها بعضی ممان های مغناطیسی عنصری غیر موازی هستند. اگر اندازه ممان های مغناطیسی مختلف باشد ممکن است مواد مغناطیس پذیری (مغناطش) قابل توجهی داشته باشد.

فریت (**Ferrite**). ۱- محلول جامدی است از کربن یا عناصر دیگر در آهن bcc مگر اینکه نوع خاص آن مشخص شود، مانند فریت کروی. در بعضی دیاگرام ها دو منطقه برای فریت وجود دارد، در دمای بالاتر (منطقه بالا) فریت δ پایدار است و در دمای پایین فریت α هرگاه نوع فریت از نظر α یا δ بودن مشخص نشود، منظور فریت α است. ۲- برای مواد مغناطیسی فریت به موادی اطلاق می شود

که فرمول کلی آن ها به صورت $M^{2+}O.M_2^{3+}O_3$ باشد که در آن ها عنصر سه ظرفیتی اغلب آهن است.

ساختار گاما (**Gamma structure**)، ساختاری است مربوط به فازها و ترکیبات الکترونی (تعریف Hume Rothery) که در آن ها نسبت الکترون های ظرفیت به اتم ها ۲۱ به ۱۳ است.

آهن گاما (**Gamma iron**)، آهن خالص است با شبکه FCC که در دامنه حرارتی $910^{\circ}C$ تا $1400^{\circ}C$ پایدار است.

چدن خاکستری (**Gray cast iron**)، چدنی است که به دلیل وجود گرافیت در زمینه آن ظاهر خاکستری دارد.

چدن چکش خوار (**Malleable cast iron**)، با بازپخت طولانی چدن سفید در شرایط اکسیدان سمانتیت چدن سفید به گرافیت تجزیه شده و ممکن است بخشی از کربن آن نیز گرفته شود. به این ترتیب چدنی به دست می آید که کم و بیش چکش خوار است. اگر کربن گیری شدید باشد سطح شکست چدن چکش خوار روشن خواهد بود. به همین دلیل به آن چدن مغز سفید (فرتیتی) می گویند. برعکس اگر سطح شکست تیره باشد آن را چدن مغز سیاه (پرلیتی) می گویند.

مارتنزیت (**Martensite**)، ۱- در یک آلیاژ مارتنزیت فاز ناپایدار انتقالی بین دو آلوتروپی است که قابلیت انحلال آن ها برای عناصر دیگر (بین نشین) به طور قابل ملاحظه ای فرق دارد. فازی که در دمای بالاتر پایدار است، حلالیت بیشتری دارد. مقدار مارتنزیتی که از این فاز تشکیل می شود در حد وسیعی به اختلاف دما بستگی دارد. ۲- در مورد فاز مارتنزیت محلول جامدی است فوق اشباع از کربن که با سرد کردن در دمایی پایینتر از M_s شکل می گیرد. از مشخصه های بارز مارتنزیت، ساختار سوزنی آن است.

دامنه مارتنزیتی (**Martensite raye**)، فاصله دمای M_s و M_f است.

دگرگونی مارتنزیتی (Martensitic transformation) واکنشی است که به هنگام سرد کردن در اغلب فلزات رخ می دهد و در نتیجه آن ساختار سوزنی به نام مارتنزیت تشکیل می شود. دمای M_s (Mf temperature) برای سیستم های آلیاژی، دمایی است که به پایینتر از آن دیگر مارتنزیت تشکیل نمی شود.

دمای M_s (Ms temperature) برای سیستم های آلیاژی دمایی است که در آن با سرد کردن آلیاژ تشکیل مارتنزیت شروع می شود.

پرلیت (Pearlite) مجموعه ای است از لایه های فریت و سمنتیت که با دگرگونی اوستنیت در دمایی بالاتر از دامنه بنیت تشکیل می شود.

کروی سازی (Spheroidizing) عملیاتی است که در آن می توان با روش هایی ذرات کاربیدی را کروی شکل نمود، این روش ها عبارتند از:

۱- نگهداری طولانی آلیاژ در دمایی کمتر از Ae_1

۲- گرم و سرد کردن متوالی آلیاژ در کرانه Ae_1

۳- گرم کردن آلیاژ تا بالاتر از Ae_1 یا Ae_3 و بعد سرد کردن آن در کوره.

فولاد (Steel) آلیاژی است بر پایه آهن حاوی منگنز، کربن و سایر عناصر آلیاژی که در محدوده وسیعی از دما چکش خوار است. بیشترین مقدار کربن در فولادهای کربنی و کم آلیاژ 2.0% ولی برای فولادهای پر آلیاژ مقدار کربن به 2.5% هم می رسد. حد واسط بین فولادهای کم آلیاژ و پرآلیاژ فولادی است که مجموع عناصر آلیاژی آن 5% باشد. در بسیاری از فولادها درصد کربن خیلی کم است و به حدود 0.25% می رسد. از نظر درصد کربن فولاد در حد فاصل بین چدن (آهن پر کربن) و آهن خالص قرار دارد.

ترموکوپل (Termocouple) وسیله ای است برای اندازه گیری دما شامل دو فلز یا آلیاژ غیر مشابه که یک طرف آن ها به همدیگر و طرف دیگر آن ها به یک وسیله اندازه گیری ولتاژ وصل شده است.

موقعی که یکی از میله ها گرمتر از دیگری باشد، نیروی الکتروموتوری بوجود می آید که متناسب با اختلاف دمای بین دو میله است.

دمای استحاله (Transformation temperature). دمایی است که در آن تغییر فاز رخ می دهد. در مورد فولاد و آهن این دماها به شرح زیر می باشند:

Ac_{cm} : برای فولاد هیپراتکتوئید دمایی است که در آن با گرم کردن آلیاژ انحلال سمانتیت در γ تکمیل می شود.

Ac_1 : دمایی است که در خلال گرم کردن تشکیل γ آغاز می شود.

Ac_3 : دمایی است که در آن استحاله فریت به اوستنیت تشکیل می شود.

Ac_4 : دمایی است که در آن γ به δ تبدیل می شود.

$Ae_{cm}, Ae_1, Ae_3, Ae_4$: دماهایی هستند که در آن ها تغییر فاز در حالت تعادل رخ می دهد.

Ar_{cm} : برای فولاد هیپراتکتوئید دمایی است که با سرد کردن سمانتیت تشکیل می شود.

Ar_1 : دمایی است که در آن با سرد کردن آلیاژ استحاله اوستنیت به فریت یا مجموع فریت و سمانتیت تکمیل می شود.

Ar_3 : دمایی است که با سرد کردن استحاله γ به α شروع می شود.

Ar_4 : دمایی است که با سرد کردن δ به γ تبدیل می شود.

Ar' : دمایی است که با سرد کردن استحاله γ به پرلیت شروع می شود.

M_f : دمایی است که تشکیل مارتنزیت از اوستنیت به پایان می رسد.

M_s : دمای تشکیل M از γ است.

۳-۱ کوره ها و تجهیزات عملیات حرارتی

کوره و تجهیزات عملیات حرارتی شامل دستگاه های حرارتی (کوره ها)، فیکسچرها، یا ابزارهای نگهدارنده قطعات، سیستم کوئنچ و سیستم های کنترل دما و اتمسفر کوره ها است که همگی اینها برای بسیاری از فرآیندهای عملیات حرارتی لازم می باشند.

۱-۳-۱ انواع کوره های عملیات حرارتی:

اندازه و طرح کوره های عملیات حرارتی، آن چنان وسیع است که دسته بندی دقیق آن ها واقعا غیر ممکن است. از نظر اندازه، ممکن است کوره ها آنقدر کوچک باشند که بتوان آن را روی میز نصب کرده و برای عملیات قطعاتی با وزن چند انس (لوازم) استفاده کرد. همین طور ممکن است آنقدر بزرگ باشد که بتوان در آن صدها تن مواد را در یک مرحله عملیات نمود. جدا از اندازه، از نقطه نظر منبع حرارتی کوره ها به دو نوع الکتریکی و شعله ای تقسیم می شوند. در کوره های مشعلی ممکن است مواد مستقیما در معرض گازهای احتراقی قرار بگیرند و یا جدا از محفظه احتراق باشند.

۱-۳-۲ تنوره ها و کوره ها

انجمن وسایل حرارتی صنعتی، دستگاه های گرمایشی را به دو نوع تقسیم کرده است:

۱- کوره (Furnace)

۲- تنوره (Oven)

این تقسیم بندی بر مبنای دمای کاری دستگاه ها می باشد. تنوره آن دسته از وسایل هستند که دمای کاری آن ها حدود $1000^{\circ}F$ ($540^{\circ}C$) باشد و دستگاه هایی که دمای کاری آن ها بیش از $1000^{\circ}F$ ($540^{\circ}C$) باشد، کوره گفته می شوند.

۱-۳-۳ روش های گرمایشی

چنانکه می دانیم انتقال حرارت با سه روش هدایت، جابجایی یا کنوکسیون و تابش یا تشعشع انجام می گیرد. در روندهای عملیات حرارتی صنعتی ممکن است تنها یکی از روش ها و یا ترکیبی از آن ها در انتقال حرارت و گرم شدن مواد نقش داشته باشد.

هدایت، هدایت حرارتی در یک قطعه فلزی عبارت است از انتقال حرارت از یک نقطه به نقطه دیگر، بدون جابجایی قابل توجه ذرات مولکولی، برای مثال اگر دمای سطح یک قطعه نسبتا بالا باشد، حرارت از طریق جنبش مولکولی به طرف مرکز انتقال می یابد. به این صورت که انرژی جنبشی به صورت زنجیروار از مولکولی به مولکول دیگر منتقل می شود. این عمل ادامه پیدا می کند تا تعادل حرارتی بوجود آید. زمان تعادل به ضریب هدایت فلز و اختلاف دما بستگی دارد. عموما فلزات ضریب هدایت نسبتا بالایی دارند. اگرچه در خیلی از فرآیندهای عملیات حرارتی نقش بسیار جزئی در انتقال حرارت از محیط به قطعات دارد ولی انتقال حرارت از سطح قطعه به مغز آن از طریق هدایت انجام می گیرد. در سیستم هایی نظیر ((بستر سیال)) و ((نمک مذاب)) که قطعات در داخل آن ها قرار می گیرند از سه روش انتقال حرارت استفاده می شود، ولی هدایت نقش مهمی در گرم شدن قطعه دارد زیرا منبع حرارتی مستقیما با سطح قطعات تماس دارد.

جابه جایی. در این روند حرارت با مخلوط شدن جزئی از یک سیال (مایع یا گاز) با جزو دیگر انتقال می یابد. در اصل اختلاف دما (طبیعی یا مکانیکی) در جزئی از سیال موجب تغییر دانسیته سیال و در نهایت حرکت آن می شود. به این ترتیب حرارت از نقطه ای به نقطه دیگر انتقال می یابد. سیستم حرارتی منزل مانند بخاری یا شوفاژ مثال مناسبی از انتقال حرارت کنوکسیونی یا جابجایی است. برای افزایش ضریب انتقال حرارت در کوره های صنعتی از فن استفاده می شود.

برگشت بعد از کوئنچ نمونه ای از کاربرد انتقال حرارت کنوکسیونی در عملیات حرارتی است. المنتهای حرارتی جدا از محفظه ای که قطعات قرار می گیرند، واقع شده اند. هوا بوسیله فن با سرعت زیاد به

المنتهای حرارتی در دیواره های کوره نصب شده اند و برای بالارفتن بازده گرمایش و یکنواختی دما از فن استفاده شده است.

۴-۱ طبقه بندی کوره های عملیات حرارتی براساس محیط انتقال حرارت

در طبقه بندی کوره ها بر مبنای محیط حرارتی، اندازه و اجزای آن ها را در نظر می گیرند. تا سال های اخیر دو نوع محیط حرارتی وجود داشت، یکی محیط گازی (هوا یا خلا) و دیگر مایع (فلز مذاب یا حمام نمک مذاب)، اخیراً نوع جدیدی از کوره ها به نام کوره های ((بستر سیال)) طراحی و ساخته شده اند که در آن ها انتقال حرارت با روش جدیدی صورت می گیرد (جامد) و این روش برای استفاده های عملیات حرارتی مفید می باشد.

۱-۴-۱ کوره های حمام مایع

گرمایش قطعات در این کوره با فرو بردن آن ها در مایع مذاب که کاملاً با شرایط کوره های اتمسفر گازی تفاوت دارد، انجام می گیرد. استفاده از مذاب فلزات برای گرمایش مواد روش قدیمی است. کوره های پاتیلی حاوی مذاب سرب برای گرم کردن قطعات فولادی مناسب است، ولی دارای معایبی نیز هستند:

- سرب مذاب سنگین است، بنابراین اگر قطعات مهار نشود شناور خواهند شد.
 - سرب مذاب به سطح قطعات فولادی می چسبد، این کار عمل کوئنچ را مختل می کند. علاوه بر این مسایل تمیز کاری به دنبال دارد.
- امروزه به جای سرب مذاب از نمک مذاب استفاده می شود.

۱-۴-۲ کوره های بستر سیال

گرم کردن مواد در سیستم های بستر سیال روش جدیدی است، این عمل در بستری از ذرات خنثی معلق مانند ذرات اکسید آلومینیوم انجام می گیرد. این ذرات با احتراق مخلوط سوخت و هوا که به طرف بستر سیال جریان دارد به حالت معلق در می آیند، سرعت انتقال حرارت در بستر سیال تقریباً تقریباً ده برابر کوره های گازسوز (بدون تیوب) است. ظرفیت حرارتی خوب، انتقال حرارت بالا، یکنواخت بودن حرارت در محدوده وسیعی از دما باعث می شود دمای حمام در بسیاری کاربردها ثابت بماند.

عملیات حرارتی در بستر سیال از سال ۱۹۵۰ تا اواخر در انحصار شرکت انگلیسی آلومینیوم بود. در آن کوره ها سیستم گرمایشی بستر الکتریکی بود. استفاده از این بسترها برای دماهای بالاتر از $1300^{\circ}F$ ($750^{\circ}C$) مشکل بود و بازدهی گرمایشی نیز کم بود. در بسترهای سیال شعله ای که از مخلوط گاز و هوا برای گرم کردن و سیال ساختن محیط گرمایشی استفاده می شود، این مشکل وجود ندارد. بنابراین کوره های بستر سیال برای عملیات استاندارد قابل استفاده هستند.

دو نوع کوره های بستر سیال رایج است، کوره های داخل-گازسوز برای کاربرد در دمای $1400 - 2220^{\circ}F$ ($760 - 1215^{\circ}C$) و کوره های بیرون گازسوز برای استفاده در دماهای پایینتر از $1400^{\circ}F$ ($760^{\circ}C$).

مخلوط هوا و گاز تقریباً نزدیک به ترکیب استکیومتری انتخاب می شود. مخلوط هوا و گاز از میان صفحه سرامیکی متخلخل عبور کرده و ذرات را در اتمسفر گازی به حالت معلق در می آورد. جریان گاز انرژی حرارتی را به ذرات منتقل کرده و ذرات نیز انرژی فوق را به مواد انتقال می دهند. برای عملیات در دمای پایینتر از $1400^{\circ}F$ ($760^{\circ}C$) از کوره های نوع دوم استفاده می شود در این سیستم جریان اضافی هوا وارد محفظه Plenum می شود. روی این محفظه صفحه فلزی متخلخل قرار

دارد که بالای آن بیستر سیال است. با عبور محصولات احتراق از صفحه متخلخل بستر سیال به وجود می آید.

دمای بستر به صورت اتوماتیک به وسیله سیستم مناسبی که مقدار مخلوط هوا و گاز را در صفحه سفالی توزیع کننده اندازه می گیرد، کنترل می گردد. به این ترتیب سرعت حرکت ذرات در بستر سیال تنظیم می شود. محصولات احتراق که بستر سیال را بوجود می آورند، جو کوره را نیز تعیین می کنند، با تنظیم نسبت هوا و گاز به وسیله سفال توزیع کننده، اتمسفر کوره ممکن است خنثی، اکسید کننده و یا احیاء کننده باشد.

۱-۲-۴-۱ کاربردهای بسترهای سیال

کاربرد کوره های بستر سیال بسیار است. در عملیات حرارتی، بارزترین کاربرد آن ها در عملیات سختکاری است که ممکن است جایگزین کوره های نمکی شوند. چرا که سرعت انتقال حرارت سریع بوده و ذرات نیز به مواد نمی چسبند، در نتیجه مشکلات تمیزکاری وجود ندارد. در واقع این کوره ها می توانند برای تمام روندهای عملیات حرارتی شامل سختکاری فولاد (حتی فولادهای تندبر) نرمالیزلسیون، بازپخت، تنش گیری و برگشت مورد استفاده قرار گیرند. این کوره ها برای عملیات حرارتی فلزات غیر آهنی نیز مناسب می باشند.

۱-۴-۳ کوره های خلاء

گرم کردن قطعات فلزی در کوره های خلاء روش جدیدی است که در کارهای متالورژیکی توسعه یافته است. این کوره ها که هوای محفظه حرارتی آن ها تا حد خلاء تخلیه می شود. برای عملیات حرارتی فرآیندهای تولید و عملیات حرارتی قطعات مناسب هستند. گرچه این کوره ها اساساً

برای عملیات پیشرفته و موارد خاص به کار می روند، ولی برای انواع عملیات حرارتی متالورژیکی شناخته شده، مناسب می باشند. عملیات حرارتی در چنین شرایطی باعث می شود:

- از واکنش هایی که در سطح مواد انجام می گیرد نظیر اکسیداسیون، کم کربن شدن سطحی جلوگیری شود، به این ترتیب سطح قطعات تمیز باقی می ماند.

- زایده سطحی مانند لایه های اکسیدی، مواد روغنی ناشی از فرآیندهای تولید از سطح آزاد می شوند. مورد دوم باعث آلودگی محیط نیز می شود.

- به علت اثرات گازخیزی خلاء، مواد ناخالصی محلول در فلز نظیر هیدروژن و اکسیژن آزاد می شوند.

- می توان برای لحیم کاری و چسباندن فلزات با پیوند دادن نفوذی استفاده کرد.

انواع عملیاتی که در کوره های خلاء انجام می گیرند، عبارتند از سخت کاری، برگشت، بازیخت، تنش گیری و همجوئی (Sintering). ایجاد شرایط خلاء کامل عملاً غیر ممکن است. در کوره های خلاء صنعتی فشار حدود $1/760$ اتمسفر است. تحت این شرایط مقدار هوای باقی مانده 0.1% خواهد بود. تخلیه هوای داخل کوره بوسیله پمپ های مکانیکی انجام می گیرد. در مواردی که مقدار هوای باقی مانده باید کمتر از 0.1% باشد به جای پمپ های مکانیکی از پمپ های Oil-Diffusion مدرن استفاده می شود.

یکی از مواردی که کاربرد کوره های خلا را برای کارهای عملیات حرارتی محدود می کند این است که در این کوره ها به ساختمان قوی و تنومندی نیاز است. جداره کوره در دماهای بالاتر استحکام خود را از دست می دهد. به همین دلیل بدنه هایی که برای کوره های معمولی به کار می روند در شرایط خلاء ممکن است انفجار داخلی پیدا کرده و تغییر شکل دهند. این مسئله با سرد کردن بدنه کوره برطرف می شود.

فصل دوم:

مروری بر روشهای حل حرارتی معکوس

در این فصل مروری بر روشهای حل حرارتی معکوس که پیش از این در سایر فرآیندها و عملیات مهندسی مواد، انجام گرفته است بیان می گردد. تمامی موارد مذکور، برگرفته از مقالات ارائه شده در ژورنالهای معتبر متالورژی است. مطالب فصل حاضر با توجه به محتوای مقالات به دو بخش تقسیم شده اند. در بخش نخست، مقالاتی که به کار شبیه سازی پرداخته اند توضیح داده شده است. سپس در بخش دوم به بیان مقالاتی که کار آزمایشگاهی انجام داده اند آورده شده است.

۱-۲ شبیه سازی های عددی

نخستین مقاله ای که در ابتدای این بخش به توضیح آن خواهیم پرداخت، مقاله ای است که در سال ۱۹۹۱ توسط Tavernier-Szpunar ارائه گردید. [۱۱] در این مقاله مدل مربوط به ایجاد بافت تبلور مجدد در طول جوانه زنی و رشد آن، بصورت یک فرآیند فیزیکی، شبیه سازی شده است. همچنین چگونگی توسعه بافت تبلور مجدد در طول رشد دانه و در فولاد کم کربن، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. در پایان نیز نتایج بدست آمده در مورد سینیتیک و توپولوژی ریزساختار و بافت، با نتایج بدست آمده در مطالعات آزمایشگاهی مقایسه شده و مشاهده شد کاملاً تطبیق دارند.

در مقاله دیگر که توسط Reti-Gergely ارائه شد با عنوان طراحی کامپیوتری فرآیند عملیات حرارتی با استفاده از کامپیوترهای شخصی است. [۱۲] در مقاله عنوان شده، همانگونه که می دانیم روش های کامپیوتری که برای شبیه سازی فرآیندهای متالورژیکی در طول عملیات سخت کاری و برگشت دهی (تمپر) فولادها بکار می روند، در حال گسترش و توسعه می باشند. بر اساس مدل مربوط به سینیتیک استحاله ها که تحت شرایط غیرایزوله رخ می دهند، نرم افزار ارائه شده، پیشرفت استحاله ها و خواص مکانیکی را در مقاطع مربوط به نمونه های عملیات حرارتی شده و بصورت تابعی از زمان و مکان، پیش بینی می کند. داده های ورودی این نرم افزار شامل: محل و اندازه هر بخش، ترکیب شیمیایی، ریزساختار اولیه فولاد، زمان و دمای آستنیتت کردن، ضریب Grossmann کوئچ و پارامترهای مربوط به تمپر کردن می باشد. اطلاعات خروجی نرم افزار نیز عبارتند از: اندازه دانه های

آستنیت، زمان سرد کردن و خواص مکانیکی پس از کوئنچ کردن و تمپر کردن. این برنامه که در کامپیوترهای شخصی IBM-compatible قابل اجرا می باشد، برای ایجاد نوع جدیدی از نمودارهای CCT در شکلهای مختلف هندسی (استوانه‌ای، صفحه‌ای و ...) بسیار مناسب می باشد.

در مقاله دیگر Sellars به مدل سازی ریزساختاری در طول فرآیند نورد گرم اشاره داشته است. [۱۴] با اشاره به اینکه در صنعت، مدل نمودن توسعه ریزساختار در طول فرآیندهای نورد گرم، بسیار حائز اهمیت بوده و در این زمینه کارهای زیادی انجام شده است. ارتباط کمی بین سینیتیک تبلور مجدد سرد، اندازه دانه‌های تبلور مجدد یافته و متغیرها و پارامترهای مربوط به مراحل مختلف نورد بر روی فولاد C-Mn، آلیاژ Al-1 Mg، آلومینیوم معمولی و پیامدهای آن در نورد چند مرحله‌ای بحث و بررسی شده است. در مورد فولاد، ساختار دانه‌های آستینیتی شامل اندازه دانه و تنش باقیمانده که مدل شده بود با نتایج مشاهده شده کاملاً تطبیق داشت. در مورد آلومینیوم، نتایج بدست آمده در مورد ریزساختار، بسیار عجیب و غیر طبیعی به نظر می رسید که این امر را می توان به نقش ذرات ریز بین فلزی مرتبط دانست که در مورد آن بحث و بررسی شده است.

در سال ۱۹۹۲ در ژورنال متالورژی اسکاندیناوی مقاله ای تحت عنوان مدل های حرارتی، مکانیکی و ریز ساختاری برای بررسی برگشت از نورد گرم توسط Pietrzyk و همکارانش به چاپ رسید. [۱۶] در این مطالعه، رفتار ترمومکانیکی و ریزساختاری ورق‌های نورد شده، به روش اجزاء محدود، مدل سازی شده و با نتایج بدست آمده از نورد آن در آزمایشگاه، مقایسه گردیده است. مقدار کاهش ضخامت ورق و همچنین مقدار نیروی فشاری اعمالی در مراحل مختلف فرآیندهای نورد و پیچش، نشان می‌دهد که تطابق بسیار خوبی با نتایج بدست آمده از محاسبات شبیه سازی وجود دارد. به ازای کاهش مقادیر کم ضخامت، روش باریکه سازی^۱ معمولی نسبت به مدل اجزاء محدود، نتایج بهتری در پی داشتند. به عنوان مثال، نشان داده شده است که برای فرآیند پیچش، مقدار نیروی لازم نسبت به فرآیند نورد، بسیار کمتر است. محاسبات مربوط به دانه‌های بسیار ریزتر، در نزدیکی سطح

^۱ Slab Method

ورق‌ها و در مراحل پایانی نورد، محاسبه شده اند. در مراحل اول، دوم و سوم نورد، کوچکترین اندازه دانه‌ها مربوط به قسمت‌های مرکزی صفحه بود. این نتایج غیرمعمول، مربوط به تغییر شکل موضعی و غیر یکنواخت کرنش موثر در مراحل اول تا سوم نورد می‌باشد. اندازه نهایی دانه‌های آستنیت بدست آمده، در طول ضخامت ورق، متفاوت بوده و مقدار تفاوت آنها بین مرکز با سطح ورق به حدود ۴۰ درصد رسیده است.

مدل سازی کامپیوتری استحاله های فازی در طول فرآیند کار سخت آستنیتی مقاله ای است که توسط Umemoto و ۷ تن از همکارانش در ژورنال ISIJ به سال ۱۹۹۲ به چاپ رسید. [۱۷] برای پیش‌بینی کمی ریزساختار فولاد^۱ HSLA که طی فرآیند سرد کردن پیوسته و بصورت ایزوترمال، تولید شده بود، سرعت استحاله فازهای مختلف آن بصورت ترمومکانیکی، مدل سازی شده است. برای این مورد، ۵ نوع از فازها شامل فریت پلی‌گونال^۲، فریت ویدمن اشتاتن^۳، پرلیت، بینیت و مارتنزیت و ۱۰ عنصر آلیاژی بکار گرفته شده است. در این مقاله سرعت خط بیرونی استحاله بررسی شده است. تأثیر کار سخت شدن آستنیت بر روی جوانه‌زنی^۴ و نرخ رشد انواع فازها، بحث و مدل ریاضی مربوط به سرعت استحاله‌های آستنیت کارسخت شده^۵، بررسی شده است.

در ژورنال ISIJ مقاله دیگری در همان سال توسط Kern، در خصوص شبیه سازی به کمک حل معکوس به چاپ رسید. این مقاله تحت عنوان مدل سازی کامپیوتری جهت پیش‌بینی تکامل ریزساختار و خواص مکانیکی ورق‌های فولادی HSLA بود. [۱۸] در این مقاله، چگونگی تکامل اندازه دانه‌ها در طول فرآیند نورد گرم با توجه به خواص ترمومکانیکی و استحکامی ورق‌های فولادی HSLA، بصورت نرم‌افزار کامپیوتری شبیه‌سازی شده است. داده‌های اصلی این برنامه برای انجام محاسبات فوق، شامل ترکیب شیمیایی، زمان و دمای تغییر شکل در طول نورد و نرخ سرد شدن پس

¹ High Strength Low Alloy

² Polygonal Ferrite

³ Widmanstatten Ferrite

⁴ Nucleation

⁵ Work-hardened

از نورد می‌باشد. نتایج بدست آمده از مدل با نتایج بدست آمده در آزمایشگاه، بسیار مطابقت دارد. این مدل برای فولادهای دیگر و تحت نورد با شرایط مشابه نیز قابل استفاده است.

مدل‌سازی تکامل ریزساختاری و خواص مکانیکی ورق‌های فولادی تولید شده به روش فرآیندهای ترمومکانیکی کنترل شده، عنوان مقاله ای است که بوسیله Yoshi به همراه ۴ نفر دیگر ارائه شده است. [۱۹] برای تولید ورق‌های فولادی با خواص مکانیکی عالی و توسط فرآیندهای ترمومکانیکی کنترل شده^۱ (TMCP)، بایستی شرایط میانی بین مراحل گرم کردن مجدد و سرد کردن آن، کاملاً تحت کنترل باشد. در مقاله حاضر، با استفاده از یک مدل ریاضی، تغییرات ریزساختاری و خواص مکانیکی ورق‌های فولادی تولید شده به روش فرآیندهای ترمومکانیکی کنترل شده (TMCP)، می‌توان شرایط میانی مذکور را تحت کنترل قرارداد. در این مقاله، سیلان تنش و معادله هر یک از مدل‌ها شرح داده شده و نیز نتایج بدست آمده از این مدل با نتایج بدست آمده از آزمایشات، مقایسه شده است.

این مدل شامل ۴ پارامتر حرارت‌دهی مجدد، نورد، سرد کردن و خواص مکانیکی می‌باشد که پدیده‌های متالورژیکی رخ داده در طول هر مرحله نیز مشخص و بررسی شده است. مشخصات این مدل عبارتند از:

۱- بررسی کارسختی آستنیت در طی نورد در محدوده دمایی غیرتبلور مجدد و بررسی تأثیر متوسط چگالی نابجایی‌ها در ناحیه آستنیت می‌باشد. نرخ جوانه‌زنی فریت بین دانه‌ای^۲ و فریت مرزدانه‌ای^۳، بصورت فرمول و تابعی از متوسط چگالی نابجایی‌ها شرح داده شده است.

۲- تأثیر عناصر ریز آلیاژی، بصورت تابعی از پدیده‌های متالورژیکی و خواص مکانیکی از جمله قفل‌شوندگی بر روی رشد دانه‌های آستنیت در مرحله تبلور مجدد، اثر بازدارندگی بر روی بازیابی و تبلور مجدد آستنیت کارسخت شده در مرحله نورد، اثر بازدارندگی عناصر آلیاژی بر روی میزان

¹ Thermo-Mechanical Control Process

² Intragranular Ferrite

³ Grain Boundary Ferrite

پیشروی استحاله در مرحله سرد کردن و سختکاری محلول جامد و رسوب سختی برای تکامل خواص مکانیکی ورق‌های فولادی بررسی شده است.

مقاله دیگری نیز توسط نفرات مذکور در راستای تکمیل مقاله قبل ارائه شد. این مقاله به بیان مدل بهبود یافته تکامل ریزساختاری و خواص ورق فولادی تولید شده در خطوط تولید می‌پردازد. [۲۰] در این مقاله، مدل ریاضی مربوط به تکامل ریزساختاری و خواص ورق‌های فولادی، با توجه به اندازه‌گیری‌های توزیع کرنش و دما که در طول ضخامت ورق و در نقاط دوگانه از آنها در طی فرآیند نورد و سرد کردن بدست آمده بود، بحث و بررسی شده است. در آزمایشگاه، محدوده وسیعی از ترکیب شیمیایی و شرایط تولیدی ورق‌های فولادی، اندازه‌گیری و نتایج بدست آمده از آن همچون ریزساختار و خواص مکانیکی این ورق‌ها، با نتایج بدست آمده از محاسبات شبیه‌سازی، مقایسه می‌شوند. اهداف اصلی این گزارش شامل موارد زیر می‌باشد:

۱- مشاهده اندازه دانه‌های آستنیت در طول زمان بین مراحل نورد، دستگاه اندازه‌گیر دمایی که توانست در یک نمونه و در مدت زمان ۱۰۰ ثانیه و قبل از آغاز مرحله بعدی نورد، حرارت‌دهی را قطع کرده و سپس آنرا کوئنچ نماید. اندازه دانه‌های آستنیت بدست آمده در این مدل با اندازه‌های بدست آمده از آزمایشات، بسیار مطابقت دارد.

۲- در مورد ورق‌هایی که پس از نورد، در هوا سرد شده و ریزساختار آنها عمدتاً شامل فریت و پرلیت بودند، اندازه‌گیری‌های بدست آمده در مورد اندازه دانه‌های فریت، کسر حجمی و ریزسختی هر یک فازها، نشان‌دهنده تطابق بسیار خوب آنها با مشاهدات آزمایشگاهی است. همچنین خواص مکانیکی محاسبه شده توسط مدل نیز با مقادیر آزمایشگاهی آن، تطابق بسیار خوبی دارد.

۳- در مورد ورق‌هایی که پس از هر مرحله از نورد، سریع و با سرعت زیاد، سرد شده و استحکام کششی آن، بیش از ۶۰۰ مگاپاسکال و ریز ساختار اصلی آن، بینیت بودند، بین نتایج بدست آمده از

محاسبات مدلی در مورد ریزساختار و خواص مکانیکی آنها با نتایج آزمایشگاهی، در مقایسه با ورق‌های سرد شده در هوا، مطابقت کمتری داشتند.

استفاده از شبیه‌سازی اجزاء محدود برای عملیات حرارتی القایی [۲۱]، عنوان مقاله ای است که در آن به کمک روش اجزاء محدود به رفع مشکلات مربوط به تجزیه و تحلیل عملیات حرارتی القایی، که عموماً شامل تغییرات فازی و بصورت غیر ایزوترمال می‌باشد، می‌پردازد. روش اجزاء محدود حاضر، ابتدا میدان مغناطیسی را شبیه‌سازی می‌نماید. بطوریکه در آن سیلان جریان در طول یک کویل القایی، با استفاده از روابط مربوط به میدان الکترومغناطیسی ماکسول، شبیه‌سازی می‌شود. در مرحله بعدی، این مدل، توزیع دما را در قطعات و با کمک جریان‌های گردابی^۱ القاء شده و توسط میدان مغناطیسی حاصل از آن، محاسبه می‌نماید. آخرین مرحله شبیه‌سازی شامل مشخص نمودن تنش‌های باقیمانده، سختی و ریزساختار قطعات می‌باشد. تجزیه و تحلیل اجزاء محدود شامل وابستگی دمایی مواد، تغییرات^۲ قطعات در دمای کوره، ترکیب نمودن منحنی‌های^۳ TTT می‌باشد.

این فرآیند برای شبیه‌سازی فرآیند سختکاری القایی میله فولادی ۱۰۸۰ بکار گرفته شد. در ابتدا، میدان مغناطیسی و دما در یک قطعه و در طول فرآیند (الف) حرارت‌دهی القایی نامحدود یک استوانه فولادی ۱۰۸۰ و توسط یک کویل تک حلقه‌ای و (ب) حرارت‌دهی القایی نصف فضای آن بصورت نیمه نامحدود و توسط کویل تک حلقه‌ای فوق، محاسبه و توسط مدل اجزاء محدود مورد استفاده قرار گرفت.

نتایج حاصل با مقادیر آنالیزی که با استفاده از توابع گرین^۴ (Green) بدست آمده بود، کاملاً مطابقت داشت. در نهایت، برای مشخص کردن ظرفیت و بازدهی جریان اجزاء محدود، دو نمونه آزمایش مربوط به عملیات گرم کردن القایی یک میله فولادی ۱۰۸۰ با مقطع مربعی و بصورت نامحدود و دیگری یک نمونه فولادی استوانه‌ای شکل ۱۰۸۰ شیاردار با مقطع دایره‌ای و بصورت محدود برای مشخص کردن

¹ Eddy current

² permeability

³ Time-Temperature-Transformation

⁴ Green function

میدان مغناطیسی، دما و توزیع تنش باقیمانده، انجام شده است. فرآیند جریان اجزاء محدود، می تواند بعنوان یک طرح بسیار قوی و مناسب جهت ارتباط دادن بین پارامترهای عملیات حرارت دهی القایی با خواص مکانیکی قطعات عملیات حرارتی داده شده، استفاده گردد.

سه سال بعد Wang-Yang-Chandrasekar در تکمیل مقاله قبلی خود در خصوص شبیه سازی عملیات حرارتی القایی که در فوق به توضیح آن پرداختیم، مقاله دیگری ارائه داشتند با عنوان شبیه سازی عملیات حرارتی هدایت القایی متحرک به روش اجزاء محدود. [۳۵] در این مقاله، برای تجزیه و تحلیل عملیات حرارتی هدایت القایی متحرک، از یک روش اجزاء محدود همراه با طرح شبکه بندی مجدد^۱ و بهبود یافته که بین قطعه و کوئل، حرکت نسبی دارد، استفاده شده است. در این فرآیند، ابتدا میدان مغناطیسی، توسط یک شبکه به هنگام^۲ شده که کوئل متحرک را دنبال می کرد، شبیه سازی شد. حرکت منبع گرمایی متحرک در طول قطعه فلزی، از محل میدان مغناطیسی، آغاز شده است. سپس روابط و معادلات گرمایی که میدان دمایی ایجاد شده توسط منبع گرمایی را حل می کرد، بدست آمد. این فرآیند برای محاسبه توزیع دمایی در طول استوانه های فولاد کربنی ۱۰۸۰ و در طول حرارت دهی القایی، استفاده شده است. نتایج و محاسبات بدست آمده با نتایج بدست آمده از توابع گرین (Green)، مقایسه و تطبیق داده شدند.

در نهایت، چگونگی توزیع دما، تنش باقیمانده^۳ و ریزساختار حاصل در فولاد ۱۰۸۰ و توسط روش اجزاء محدود، بدست آمد. کوئنچ شدن استوانه های حرارت داده شده طی دو روش حرکت کوئل حلقه ای متحرک و حمام مذاب ثابت، صورت گرفته و فرآیند آن تجزیه و تحلیل شده است. در این حالت توسط روش اجزاء محدود، وابستگی دمایی خواص فلزات، استحاله های فازی^۴ رخ داده در

¹ Remesh scheme

² update

³ Residual stress

⁴ Phase transformation

فولاد ۱۰۸۰، میزان تغییرات در قابلیت مغناطیسی فولاد ۱۰۸۰ در دمای کوریه^۱ و مدل‌سازی تنش الاستوپلاستیکی^۲ آن براساس قانون سختکاری مختلط^۳، مطالعه و بررسی شده است. نتایج حاصل از این شبیه‌سازی نشان می‌دهد که از روش اجزاء محدود می‌توان برای رفع مشکلات مربوط به عملیات حرارتی القایی متحرک جهت مشخص نمودن تنش باقیمانده و توزیع ریزساختار در مواد عملیات حرارتی داده شده، استفاده کرد. همچنین از این روش می‌توان برای طراحی کوئل و تعیین پارامترهای فرآیند، استفاده کرد.

مدلی برای تکامل شبیه‌سازی فرآیند تغییرشکل گرم و ریزساختار آن، مقاله دیگری است که در آن مدلی جهت پیش‌بینی رفتار مواد در شبیه‌سازی پلاستومکانیکی^۴ در طول فرآیند تغییرشکل گرم، پیشنهاد شده است. [۲۲] حالات مختلف ریزساختاری در طول فرآیند تغییرشکل و براساس معادلات نیمه تجربی، از جمله در طول فرآیند تبلور مجدد دینامیکی و سیلان تنش^۵ مربوطه، ارائه شده است. اطلاعات مربوطه با انجام آزمایشات بر روی فولاد کرم - وانادیم‌دار و با مشخصات: $\theta = 830$ اطلاعات مربوطه با انجام آزمایشات بر روی فولاد کرم - وانادیم‌دار و با مشخصات: $\theta = 830$ ، $\epsilon = 0.05 - 0.5 \text{ s}^{-1}$ ، $1150 \text{ }^\circ\text{C}$ و $\gamma = 70 - 108 \text{ } \mu\text{-m}$ بدست آمده است. این مدل برای شبیه‌سازی آزمایشاتی بکار گرفته شد که از نظر ساختاری و تنش سیلان، تطابق زیادی داشتند.

مقاله دیگر که با استفاده از روش حل معکوس اقدام به شبیه‌سازی فرآیندی متالورژیکی کرده است با عنوان تکنولوژی پیش‌بینی و کنترل تغییرات ریزساختاری و خواص مکانیکی در فولاد است که توسط Kwon ارائه شده است. [۲۳] در این مقاله با توجه به اینکه مدل‌های کامپیوتری مربوط به ریزساختارها و ارتباط بین ریزساختار و خواص مکانیکی فولاد نورد گرم شده، روز به روز کامل‌تر و بهبود یافته‌تر می‌گردد. یکی از تکنولوژی‌های جدید که در مطالعات مدل‌سازی بکار می‌رود توجه به

¹ Curie temperature

² Elastoplastic Stress

³ Mixed hardening

⁴ Plastomechanical Simulation

⁵ Flow stress

پیش‌بینی تغییرات ریزساختاری در طول نورد گرم و سرد کردن فولادها و کنترل خواص مکانیکی آنها می‌باشد. در برنامه کامپیوتری ارائه شده در این مقاله، سعی شده است تا با استفاده از مدل‌های ریاضی و بر اساس علوم متالورژی فیزیکی، تکنولوژی مذکور، پیش‌بینی و کنترل گردد.

این مدل رفتار استحاله‌های مختلف را در طول کارگرم و سرد کردن آن همچون تبلور مجدد، رشد دانه، رسوب گذاری و تغییرات فازی آستنیت به فریت را بصورت کمی بیان می‌کند.

این مدل همچنین روابط موجود در بین شرایط فرآیند، ریزساختار و خواص مکانیکی نهایی را نیز روشن و مشخص می‌نماید. مدل‌های متعددی در طول ۱۰ سال گذشته، جهت شبیه‌سازی رفتار انواع ورق فولادهای کربنی بکار گرفته شده است. این امر نشان می‌دهد که در آینده از مدل‌های کامپیوتری جهت بهینه کردن فرآیندها و کنترل کیفی محصولات در صنایع مختلف فولادسازی، بصورت گسترده‌ای استفاده خواهد شد. از جمله بسیاری دیگر از کاربردها که می‌توان در آنها از مدل‌های مذکور استفاده کرد، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

تضمین خواص مکانیکی نهایی محصولات مربوط به کوئل‌های طولی، پیش‌بینی نتایج آزمایشات کشش، کاهش هرچه بیشتر در میزان تغییرات خواص مورد نظر، تغییر دادن اتوماتیکی شرایط فرآیندها، صرفه جویی در آلیاژها و تکامل مدل‌های مربوط به کنترل فرآیندها.

برای دستیابی به اهداف فوق، موارد زیادی بایستی تامین گردد، از جمله: درک و فهم کامل متالورژی فیزیکی، بهبود و تکامل سنسورها، کنترل فرآیند و سیستم‌های طراحی کیفیت.

مدل‌های ریاضی برای پیش‌بینی تکامل ریزساختاری و خواص مکانیکی نورد گرم، مقاله ای است که توسط Senuma ارائه شده است. [۲۴] در این مقاله مدل‌های ریاضی جهت پیش‌بینی چگونگی تکامل ریزساختارها و خواص مکانیکی در طول فرآیندهای نورد گرم بررسی شده اند. سپس به بیان مدلی پرداخته که در آن، جنبه‌های متالورژیکی نورد گرم، مطالعه و بررسی شده است.

از کاربردهای این گونه مدل‌های ریاضی، پیش‌بینی آبی و لحظه‌ای ریزساختارها و استحکام قطعه، مقاومت در برابر تغییرشکل گرم و منحنی‌های سرد شوندگی که باعث انواع استحاله‌ها می‌شوند، می‌باشد. در پایان، کاربردهای آبی و مورد انتظار مدل‌های ریاضی، در رابطه با نورد گرم، شرح داده شده است.

مقاله دیگر با عنوان بررسی خواص ترمومکانیکی مواد بر اساس محاسبات دمایی ناپایدار می‌باشد. [۲۵] برای بررسی و پیش‌بینی وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی مواد از الگوریتم‌های تکرار پذیر^۱ جدید و با استفاده از حل معادلات هدایت حرارتی معکوس^۲، استفاده می‌شود. الگوریتم مطرح شده در این تحقیق، شامل تجزیه و تحلیل‌های مختلف از نتایج آزمایشات می‌باشد. شرایط مرزی نوع دوم از مرز هر نمونه (جهت اطمینان از یکنواختی) و طی افزودن لایه‌ای از مواد با خواص ترموفیزیکی متعارف، انجام شده است.

همچنین Pietrzyk به اتفاق ۴ تن دیگر به بررسی تکامل ریزساختارها در طول فرآیندهای نورد گرم پرداخته‌اند. [۲۶] در این مقاله فرآیند تبلور مجدد در ورق فولاد کم کربن و در طول نورد گرم، توسط مدل‌سازی اجزاء محدود و بصورت ترمومکانیکی بررسی شده است. تاکنون فرموله کردن اندازه دانه‌های تبلور مجدد یافته، توسط محققان زیادی بررسی و انجام شده و مورد تأیید قرار گرفته است. در این مقاله اندازه دانه‌های محاسبه شده و با اندازه دانه‌های بدست آمده از آزمایشات نورد گرم فولاد کم کربن، مقایسه شده‌اند. اندازه دانه‌های آستنیت تبلور مجدد یافته با مقادیر بدست آمده از روابط رابرت^۳ بسیار مطابقت دارد.

¹ Iterative algorithm

² Inverse Heat-Conduction

³ Robert

در مقاله ای که توسط Li-Ym ارائه شده به بیان بررسی مشکلات مسائل معکوس متالورژی در سیستم حرارت‌دهی القایی می پردازد. [۲۸] در این مقاله، مشکلات مسائل معکوس در فرآیند سیستم‌های حرارت‌دهی القایی، بررسی شده است. این مطالعه، شامل مشخص کردن یک جریان القایی بهینه از توزیع دمایی مطلوب، می‌باشد. مدل‌سازی سیستم‌های الکترومغناطیسی و حرارتی کوپل شده با یکدیگر، توسط روش اجزاء محدود انجام شده اند. رابطه مستقیم بین تغییرات جریان القایی و تغییرات توزیع دمایی، معین و مشخص شده و کنترل بهینه جهت ایجاد تغییرات در توزیع دمایی بدست آمده است. برخی از شبیه‌سازی‌ها نیز بسته به شرایط، بصورت دو بعدی و یا سه بعدی، بدست آمده است. نتایج حاصل از مقایسه بین این دو حالت نیز، گزارش شده است.

در مورد شبیه سازی هدایت حرارتی^۱ به کمک مسائل معکوس، Huang-Yan-Chen به بیان دو مقاله پرداخته اند. در مقاله نخست بررسی توابع در پیش‌بینی وابستگی دمایی هدایت حرارتی بدون اندازه‌گیری‌های داخلی اشاره شده است. [۳۰] در این مقاله، با استفاده از روش Conjugate Gradient به صورت کمینه سازی شده همراه با معادلات الحاقی مربوطه، جهت تخمین وابستگی دمایی هدایت حرارتی محلول‌های جامد همگن و غیرهمگن، برای حل مسائل معکوس و تخمین آنها، استفاده شده است. در این مطالعه، فرض شده است که هیچگونه اطلاعات اولیه‌ای در مورد شکل توابع مربوط به هدایت حرارتی ناشناخته، وجود ندارد، بنابراین در محاسبات مسائل معکوس، بعنوان یک تابع پیش‌بینی کننده، محسوب می‌گردد. درستی و صحت تجزیه و تحلیل‌های مربوط به مشکلات موجود در این مسائل، با استفاده از اندازه‌گیری‌های دقیق و غیر دقیق شبیه‌سازی شده در طول متوسط (medium) بدست می‌آید و تست و امتحان می‌شوند.

نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که در مورد هدایت حرارتی، تنها با استفاده از اندازه‌گیری‌های مرزی (بدون نیاز به اندازه‌گیری‌های داخلی) و در مدت زمان یک ثانیه CPU و در کامپیوتر VAX-9420، به تخمین‌های بسیار عالی دست یافت.

^۱ Thermal-Conductivity

از فواید کاربرد این الگوریتم در تجزیه و تحلیل مسائل معکوس، آن است که می‌توان بصورت گسترده در آزمایشات، کاهش حساسیت در برابر خطاهای اندازه‌گیری و کاهش زمان CPU در محاسبات، استفاده نمود بطوریکه همواره پیش‌بینی‌های درستی نیز بدست خواهیم آورد.

سپس در مقاله دوم با استفاده از روش حل معکوس به اندازه‌گیری‌های هم‌زمان وابستگی دمایی هدایت حرارتی و ظرفیت گرمایی پرداخته اند. [۳۳] در این مقاله، تجزیه و تحلیل یک مسئله معکوس با استفاده از روش ذکر شده در مقاله قبلی، پیش‌بینی هم‌زمان وابستگی دمایی هدایت حرارتی و ظرفیت گرمایی در حجم واحد از فولاد، به انجام رسیده است. در این مطالعه از هیچگونه اطلاعات اولیه‌ای جهت تشکیل توابع هدایت حرارتی ناشناخته و ظرفیت گرمایی، استفاده نشده است. بنابراین، این مدل بعنوان یک تابع پیش‌بینی کننده براساس محاسبات معکوس، محسوب می‌شود. درستی و صحت تجزیه و تحلیل‌های معکوس، با استفاده از اندازه‌گیری‌های دقیق و غیردقیق شبیه‌سازی شده در طول متوسط، تست و آزمایش می‌شوند. نتایج نشان می‌دهند که زمان CPU در روی کامپیوتر VAX-9420، برای تمامی آزمایشات، بین ۴/۴ تا ۱/۴ ثانیه می‌باشد. علاوه بر این نشان داده شد که پیش‌بینی‌های بسیار عالی بر روی خواص حرارتی را می‌توان با استفاده از حدس و گمان اولیه بسیار خوب در مورد هدایت حرارتی و یا ظرفیت گرمایی در قبل از انجام محاسبات معکوس، بدست آورد.

در راستای شبیه سازی ریز ساختارها^۱، Lehnert-Cuong-Wehage به شبیه‌سازی ریزساختار آستنیتی در میله و سیم‌های فولادی نورد و کوئنچ - تمپر^۲ شده اشاره شده است. [۳۱] در این مقاله، پیش‌بینی ریزساختار و پارامترهای تغییرشکل میله‌ها و سیم‌های کم تا متوسط آلیاژی که کوئنچ و تمپر شده اند (همانند فولادهای استفاده شده در ساخت فنرها) با کمک مدل‌سازی ریاضی و در جهت بهینه کردن تکنولوژی آن، بررسی و مطالعه شده است. پارامترهای مهم تغییرشکل در طول نورد پر سرعت، با بکارگیری مرزها، تعادل حرارتی و روش‌های اجزاء محدود متفاوت همانند

¹ Microstructure

² Quenched and Tempered Steel Grade

پیشنهادات *visioplactic*، پیش‌بینی شده است. نورد فولادهای مذکور جهت پیش‌بینی ثوابت فلزی برای انجام فرآیندهای تبلور مجدد دینامیکی و استاتیکی انجام شده است.

با توجه به اثر بازدارندگی عناصر آلیاژی (مانند مولیبدن، وانادیم و ...) این عناصر باعث تاخیر و یا ضعیف شدن تبلور مجدد در نمونه‌های فولادی شده بود. به این ترتیب، دانه‌های تبلور مجدد یافته با اندازه‌های درشت، بسیار زیاد بوده و باعث وابستگی دمایی شده‌اند. کنترل دما در طول نورد میله‌ها و سیم‌ها، باعث می‌شود تا ریزساختار آستنیت نسبت به استحاله‌های فازی، مقدرم‌تر شود.

مدل‌سازی چگونگی تکامل ریزساختارها در طول سرمایش سریع بر روی نوار داغ در جدول Runout [۳۲]، از جمله مقالاتی در خصوص حل معکوس حرارتی است. در این مقاله، تکامل ریزساختاری در پایان نورد گرم و سپس اثر سریع سرد کردن بر روی جدول Runout جهت تعیین پارامترهای آن برای فرآیندهای آتی، مدل‌سازی شده است. انتقال حرارت لحظه‌ای و سرعت تغییرات فازی از آستنیت به فریت و پرلیت، باعث ایجاد پروفیل دمایی می‌شوند که باعث تولید خلل و فرج در طول استحاله فازی می‌شوند. در این مدل از رابطه آورامی^۱ همراه با قانون شل^۲، در مورد افزودنی‌ها، استفاده شده است. برای بررسی اثر فازهای بوجود آمده بر روی جدول Runout، چندین نوع پارامتر موجود در فرآیندها از جمله: ضریب انتقال حرارت، دمای ایستایی نهایی، ضخامت و سرعت کاهش ضخامت، با مقادیر مختلف مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این حالت مشاهده شده است که سرعت سرد کردن زیاد همراه با ضریب انتقال حرارت کمتر، باعث همگنی ریزساختارها می‌شوند. سرد کردن از دمای نهایی بالاتر نیز باعث هرچه یکنواخت‌تر شدن ریزساختارها می‌شوند. دو نوع فولاد با مشخصات: $0.05C - 0.23Mn - 0.015Si$ و $0.08C - 0.37Mn - 0.06Si$ برای بررسی عوامل مذکور در این مدل، بکار گرفته شده است.

پیش‌بینی بسیار مناسبی از ریزساختار و همچنین خواص مکانیکی، در این مدل بدست آمده است.

¹ Johnson-Mehl-Avrami

² Scheil's rule

آخرین مقاله ای که در این بخش به بیان مختصری از آن می پردازیم، عبارت است از شبیه سازی تکامل ریزساختاری در فولاد میکروآلیاژی تیتانیوم - نیوبیم دار در طول نورد گرم مستقیم.^[۳۴] برای انجام آزمایشات نورد گرم مستقیم^۱ (HDR)، نیاز به شمش اولیه کاملاً خالص می باشد. برای اقتصادی شدن تحقیقات سیستماتیک و در حد آزمایشگاهی، شمش های یک کیلوگرمی با ترکیب شیمیایی کاملاً کنترل شده، ذوب و در قالب های سرامیکی یک بار مصرف و پیشگرم شده، ریخته شده و با سرعت بسیار کم، سرد می شوند تا ریزساختار و ساختمان آستنیت بصورت پیوسته شبیه سازی شود. نتایج اولیه بر روی فولاد میکروآلیاژی تیتانیوم - نیوبیم دار، نشان می دهد که رسوبات کربونیتزیدی در آن مشاهده نشده و همنیطور به ازای مقدار تیتانیوم کمتر از ۰/۰۱۱ درصد نیز هیچگونه آستنیت ریخته گری در دمای زیر ۱۰۰۰ درجه سانتیگراد، مشاهده نشده ولی در تمامی حالات سرد کردن قطعه تا دمای اتاق و در درون قالب، کربونیتزیدهای فقیر از نیوبیم، مشاهده شده است. کربونیتزیدها تنها زمانی که قطعه آستنیتی بصورت ایزوترمال در دمای بالا نگه داشته شده و سپس سرد شده بود، ایجاد گردید. بنابراین در طول فرآیند HDR، قطعه آستنیتی تیتانیوم - نیوبیم دار، حالت بسیار فوق اشباعی از رسوبات بدست آورده بود. به همین دلیل، وقوع تبلور مجدد در طی گرم کردن مجدد این نمونه آستنیتی، بسیار مشکل شده بود.

لذا در طول فرآیند HDR فولاد میکروآلیاژی تیتانیوم - نیوبیم دار فوق اشباع شده از عناصر آلیاژی، می توان مقدار بسیار کمی از دانه های تبلور مجدد یافته با اندازه دانه های درشت بدست آورد که از این روش می توان برای ایجاد دانه های فریت با اندازه های متوسط استفاده کرد. در این آزمایش، همچنین مشخص شد که اگر قطعه قبل از حرارت دهی مجدد تا دمای نورد، تا زیر دمای استحاله سرد شود، آنگاه اندازه دانه های آستنیت، بازیابی شده و حالت فوق اشباع از بین می رود. در این مقاله، نشان داده است که در اثر نورد شارژهای آلفای گرم^۲ (Alpha HCR) نتایج بسیار بهتری بدست می آید.

^۱ Hot Direct Rolling

^۲ Alpha Hot Charge Rolling

۲-۲ کارهای آزمایشگاهی - عددی

نخستین مقاله این بخش به بررسی مکانیزم‌های تثبیت پودر فلزی توسط امواج شوک‌دهنده انفجاری اشاره دارد. [۱۳] در این مقاله، الگوهای دو بعدی فرآیند تثبیت سازی ذرات، تحت امواج شوک‌دهنده انفجاری، جهت بررسی هر چه بیشتر مکانیزم‌های مربوط به تثبیت سازی پودر فلزی بر روی سیم‌هایی از جنس فولاد کم کربن بعنوان پودر، بررسی و مطالعه شده است. فشار مورد استفاده در این آزمایش بین ۶ تا ۳۰ گیگا پاسکال متغیر می باشد. برخی از سیم‌ها توسط برنج، پوشش داده شده و برخی از آنها نمک سود^۱ شده‌اند. بدین طریق، الگوهای جریان در سطح ذرات مشاهده شدند. پیوندهای درونی و ریزساختار نمونه‌های تثبیت شده نیز بصورت سیستماتیک و توسط میکروسکوپ‌های نوری و الکترونی بررسی شده است. نتایج بدست آمده در این آزمایشات، بصورت کمی با نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی ویلیامسون^۲ سازگار است. برای بدست آوردن روش‌های بهتر جهت افزایش استحکام نمونه‌های فشرده شده، تاثیر شرایط سطحی ذرات بر مقدار تثبیت نیز بررسی و مطالعه شد. این آزمایشات بر اساس مدل‌های فیزیکی، بر روی نمونه‌های پودری انجام شده است.

مقاله دیگر اختصاص دارد به کاربرد مهندسی ریزساختاری جهت کنترل سرد شوندگی سیم‌های فولادی (به کمک طراحی آزمایشگاهی انتقال حرارت). [۱۵] هدف از این مطالعه بررسی مدل‌های ریاضی برای تشریح شار حرارتی، سرعت استحاله‌های فازی و روابط بین خواص - ساختار - ترکیب برای بدست آوردن خواص مکانیکی سیم‌های فولادی است که تحت شرایط صنعتی و بصورت کنترل شده، سرد شده‌اند. بنابراین اصول مهندسی ریزساختاری برای بررسی این پدیده و با استفاده از ترکیب مدل‌های کامپیوتری همراه با اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی مربوط به شار حرارتی، سرعت

¹ Pickle

² Williamson

تجزیه آستنیت، خواص ریزساختاری و مکانیکی و نتایج صنعتی جهت مشخص کردن انتقال حرارت و بدست آوردن نمونه‌های میله‌ای، تحت شرایط مشخص، بکار برده شده است.

روابط ساده و تکنیکی شامل پیشگرم کردن تجهیزات دربرگیرنده میله فولادی همراه با تجهیزات ترموکوپل مستقر شده در خط مرکزی، جهت کنترل نرخ سرد شدن در نواحی مختلف بستر حلقه‌های میله‌ای می‌باشد. برای بدست آوردن ضریب انتقال حرارت برای حالت تابشی و انتقالی، اندازه‌گیری‌های بدست آمده از میله‌ها توسط دو مدل القایی زودگذر (به ترتیب شامل توده شده و توزیع یافته) آنالیز شده است.

صحت و درستی تکنیک و روش مورد استفاده توسط میله‌های مجهز به سیستم‌های خنک کننده و تحت شرایط شناخته شده و نیز با جریان مقطعی هوا، در آزمایشگاه انجام شده و نتایج مربوط به ضریب انتقال حرارت بدست آمده با مقادیر بدست آمده از محاسبات فرمولی مدل، مقایسه شده‌اند.

مقاله دیگری که توسط Loureiro-Fernandes ارائه شد، مربوط می‌شود به کاری

آزمایشگاهی و تجربی در مورد چقرمگی CG HAZ جوش در فولادهای Q و T.^۱ [۲۹]

نواحی تحت تاثیر حرارت (HAZ)^۲ در فولادهای جوش داده شده، تغییرات ریزساختاری زیادی را بین خط نفوذ جوش تا ناحیه بدون تاثیر فلز، نشان می‌دهند بطوریکه باعث ایجاد مشکل در انجام آزمایش چقرمگی COD می‌شوند؛ زیرا که ریزساختار موجود در جلوی ترک، بسیار متنوع و متغیر است. نواحی مربوط به چقرمگی کم، ناشی از نبود و یا کمبود نواحی جوش در آن می‌باشند.

تکنولوژی مالشی^۳ می‌تواند باعث ایجاد خط نفوذ مستقیمی شود که باعث ساده‌تر شدن محل شیار شیار خستگی COD می‌شود. این تکنیک برای تولید نمونه‌هایی با دانه‌های HAZ بزرگ در فولادهای جوش، کوئنچ و تمپر داده شده و همچنین بررسی اثر حرارت داده شده در آن استفاده می‌شود.

¹ Quench and Tempered Steels

² Heat Affected Zone

³ buttering

برای تعیین رابطه بین چقرمگی و ریزساختار، از شبیه‌سازی حرارتی ناحیه جوش خورده، استفاده شده است.

با توجه به مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی و نتایج مربوط به نمونه‌های فولادی کم کربن جوش داده شده، نشان داده شد که در ناحیه جوش، افزایش حرارت داده شده به آن، باعث افزایش دمای مربوط به استحاله فازی و افزایش کسر حجمی بینیت بالایی^۱ درشت نسبت به بینیت پایینی^۲ و مارتنزیت کم کربن شده است.

استحاله‌های فازی مذکور، در اثر افزایش حرارت داده شده، طی کاهش زیاد در سختی و چقرمگی در CG HAZ^۳ فولاد، همراه شده بود بطوریکه علل مذکور به تغییرات ریزساختاری نسبت داده شده است. همچنین نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که در اثر افزایش نواحی ترد در نمونه‌هایی که توسط COD تست شده بودند، چقرمگی HAZ، کاهش می‌یابد.

همچنین Teoh در مقاله ای به بررسی فرآیندهای ترمومکانیکی و ریزساختاری محصولات میله‌ای و سیمی فولاد میکروآلیاژی اشاره داشته است. [۳۶] وی در این مقاله بیان داشته، فولادهای میکروآلیاژی بدون اینکه نیاز به عملیات حرارتی بیشتری داشته باشند، در شرایط حاکم بر فرآیند، خواص ترمومکانیکی فوق‌العاده‌ای از خود نشان می‌دهند. این نتایج توسط فرآیندهای ترمومکانیکی^۴ (TM) و طی افزودن مقدار بسیار کمی (در محدوده (۳-)-۱۰ درصد تا (۱-)-۱۰ درصد) از افزودنی‌ها به این نوع فولادها، شامل انواع کربونیت‌ریدها، بدست آمده است.

از این طریق می‌توان محدوده وسیعی از فولادها جهت ساخت تجهیزات و کاربردهای نهایی با هزینه کمتر و با فرآیندهای تولیدی بهبود یافته، بدست آورد. در این مقاله، نقش عناصر میکروآلیاژی در فرآیند ساخت میلگرد و اثر آنها بر چگونگی تکامل ریزساختار فریتی و آستنیتی در طول عملیات ترمومکانیکی این نوع فولادها، با استفاده از نتایج آزمایشگاهی بررسی شده است.

¹ Upper bainite

² Lower bainite

³ Coarse Grain Heat-Affected Zone

⁴ Thermo-Mechanical

در خاتمه این فصل نگارنده بر خود لازم می‌داند به مقاله‌ای اشاره کند که در آن به بررسی مشکلات مسائل هدایت حرارتی معکوس پرداخته است. [۲۷] یکی از این مشکلات عبارت است از استقرار نامناسب شرایط مرزی و اولیه بر حل مسئله که منجر به حل دترمینان‌های تعریف نشده و اصطلاحاً "ماتریسهای بیمار"^۱ می‌گردد. در این مقاله با استفاده از روش المانهای مرزی و بیان چند مثال عددی سعی در حل مشکل مذکور شده است.

^۱ Ill-posed

فصل سوم:

روش تفاضل محدود فشرده در حل
مسائل عددی و ارزیابی کد ارائه شده

۱-۳ حل معادله انتقال حرارت به روش تفاضل محدود

در این پروژه برآنیم که شرایط مطلوب دمایی در کوره را به گونه ای محاسبه نماییم که در صورت اعمال آن بر جسم، با فیزیک استوانه ای که از فرآیند ریخته گری و یا گرم کاری خارج شده، در مرکز جسم ساختار فلزی خاصی حاصل شود و این بدان معنی می باشد که توزیع دمائی خاصی نسبت به زمان در مرکز جسم استوانه ای داشته باشیم، برای این منظور مسأله را باید به صورت معکوس حل نموده تا شرایط مناسب کوره را بتوان محاسبه نمود.

بنابراین مسأله معکوس ما دارای شرایط مرزی و اولیه زیر می باشد:

$$\text{معادله حاکم مسأله : } \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]$$

$$\text{شرایط مرزی : } \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \\ T(x, r=0, t) &= \tau(x, t) \end{aligned}$$

$$\text{شرایط اولیه : } T(x, r, t=0) = T_0(x, r)$$

در روش تفاضل محدود، شیوه اصلی حل مسائل جایگذاری معادلات دیفرانسیلی با جملات تفاضلی و استفاده از آنها بجای جملات اصلی در حل مسأله می باشد، به همین خاطر نیازمندیم روابطی با دقت مناسب برای جایگذاری بجای عبارات $\frac{\partial T}{\partial t}$ ، $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ ، $\frac{\partial T}{\partial r}$ در حل ارائه دهیم. در روشهای کلاسیک تفاضل محدود، روابط ارائه شده جهت این جایگذاریها معمولاً ساده بوده و به شکلهای زیر می باشند.

1- FTCS :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n}{\Delta r^2} = L_{rr}(T_j^n)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} = L_{xx}(T_i^n)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\Delta r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}$$

2- Dufort-Frank :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{j-1}^n - (T_j^{n-1} + T_j^{n+1}) + T_{j+1}^n}{\Delta r^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1}^n - (T_i^{n-1} + T_i^{n+1}) + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{j-1}^n - T_{j+1}^n}{2\Delta r}$$

3- Crank-Nikolson :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = L_{rr} \left(\frac{T_j^n - T_j^{n+1}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = L_{xx} \left(\frac{T_i^n - T_i^{n+1}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{\Delta r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}$$

4- Three-Level, Fully Implicit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = L_{rr}(T_j^{n+1})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = L_{xx}(T_i^{n+1})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2}{3} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{T_{i,j}^n - T_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}$$

که مرتبه خطای معادلات فوق حداکثر از مرتبه چهارم در داخل ناحیه مورد بررسی بوده و در ابتدا و انتهای مرز در حال بررسی این میزان کمتر نیز می گردد، با توجه به تعداد تقسیمات انجام شده و تعداد گره بندی های انجام شده برای این مسأله میزان دقت حاصله از این روشها قابل استفاده برای مسأله ما نبوده و باید با روشی مناسب تر به حل مسأله پرداخت.

لذا در حل این مسأله با استفاده از روش ارائه شده توسط لی لی که شرح آن ذیلاً ارائه می گردد خواهیم پرداخت.

۲-۳ تقریب مشتق اول مکانی

در روش های عادی تفاضل محدود، برای به دست آوردن مشتق اول تابعی مانند f در نقاط

مختلف دامنه آن $\frac{df}{dx}|_{(x=x_i)}$ از مقادیر نقاط حول هر گره استفاده می گردد و در محاسبه این مقدار

با دقت های مرتبه دوم و چهارم از نقاط (f_{j-1}, f_j, f_{j+1}) و همچنین $(f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2})$

بهره گرفته می شود در روش به کار برده شده در اینجا مقدار f'_j دیگر تنها با توجه به مقدار تابع در

نقاط حول آن محاسبه نمی گردد بلکه از رابطه ای که در آن تمام مقادیر گره ها دخالت دارند بهره

برده و مقدار آن محاسبه می شود. این رابطه با استفاده از رابطه ای که به فرم زیر بیان می شود به

دست می آید:

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad 1-3$$

نسبت بین ضرایب β, α, c, b, a به وسیله مقایسه این رابطه با سری تیلور با دقت های مورد نیاز و

دلخواه بدست آورده و محاسبه می گردد و اولین جمله ای که با سری تیلور بسط داده شده مطابقت

نداشته باشد، به عنوان مرتبه خطای معادله مطرح می گردد.

با توجه به مرتبه خطا، رابطه بین پارامترها به شرح ذیل می باشند:

$$a + b + c = 1 + 2\alpha + 2\beta \quad \text{خطا از مرتبه دوم}$$

$$a + 2^2 b + 3^2 c = 2 \frac{3!}{2!} (\alpha + 2^2 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه چهارم}$$

$$a + 24b + 34c = 2 \frac{5!}{4!} (\alpha + 2^4 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه ششم}$$

$$a + 2^6 b + 3^8 c = 2 \frac{9!}{8!} (\alpha + 2^8 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه هشتم}$$

$$a + 2^8 b + 3^8 c = 2 \frac{9!}{8!} (\alpha + 2^8 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه دهم}$$

در صورتی که رابطه (۱-۳) را در کل دامنه برای هر یک از گره ها بازنویسی کنیم، معادلات بدست آمده را می توان به صورت یک سیستم خطی معادلات بازنویسی و حل نمود که این سیستم معادلات خطی به صورت یک ماتریس پنج قطری ظاهر می گردد (در صورتی که β صفر نباشد).

در نقاط نزدیک به ابتدا و انتهای مرز، دیگر قادر به استفاده از رابطه (۱-۳) نمی باشیم و لذا روابط ساده تری در این قسمت ها مورد استفاده قرار می گیرند. در صورتی که $\beta = 0$ فرض شود، ماتریس به فرم یک ماتریس سه قطری تبدیل می گردد که میزان خطای آن در ابتدا و انتها از مرتبه چهارم می باشد در صورتیکه برای ادامه کار، $c = 0$ در نظر گرفته شود، روابطی بر حسب پارامتر α به دست می آیند که با دقت از مرتبه چهارم در مرزها به بیان روابط تفاضلی می پردازند، برای این حالت داریم:

$$\beta = 0, a = \frac{2}{3}(\alpha + 2), b = \frac{1}{3}(4\alpha - 1), c = 0 \quad ۲-۳$$

در صورتی که $\alpha \rightarrow 0$ روابط بدست آمده تبدیل به معادلات تفاضل محدود مرکزی^۱ می گردند، همچنین به ازای $\alpha = \frac{1}{6}$ معادلات کلاسیک پده^۲ به دست می آیند، به ازای $\alpha = \frac{1}{3}$ ضرایب موجود در خطاهای مرتبه چهارم حذف شده و دقت و میزان خطا در مرتبه ششم می گردند و ضرایب مربوطه به فرم زیر تبدیل می شوند:

$$\beta = 0, \alpha = \frac{1}{3}, a = \frac{14}{19}, b = \frac{1}{9}, c = 0 \quad ۳-۳$$

روش های حل مسائل به ازای $\alpha = \frac{1}{3}$ و $\alpha = \frac{1}{6}$ توسط کولاتز^۳ ارائه شده اند.

به ازای $\beta = 0$ و مقادیر $c \neq 0$ دسته ای از پاسخ ها بدست می آیند که در آن ها مرتبه خطای به دست آمده از درجه شش می باشد و در آن ها

^۱ Central Difference

^۲ Pade

^۳ Collatz

$$\beta = 0, a = \frac{1}{6}(\alpha + 9), b = \frac{1}{15}(32\alpha - 9), c = \frac{1}{10}(-3\alpha + 1) \quad 4-3$$

می باشند، در این حالت در صورت انتخاب $\alpha = \frac{1}{8}$ مرتبه خطای حاصله از رتبه هشتم بوده و دقت بالاتری در مساله قابل دستیابی می باشد.

ماتریس های پنج قطری در حل مساله، با فرض $\beta \neq 0$ به دست می آیند که a و b در آن ها به سه پارامتر وابسته می باشد.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3}(4 + 2\alpha - 16\beta + 5c) \\ b &= \frac{1}{3}(-1 + 4\alpha + 22\beta - 8c) \end{aligned} \quad 5-3$$

برای بدست آوردن رابطه ای با میزان خطایی از مرتبه ششم، روابطی با دو متغیر می توان داشت که به شکل زیر قابل نمایش می باشند:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{6}(9 + \alpha - 20\beta) \\ b &= \frac{1}{15}(-9 + 32\alpha + 62\beta) \\ c &= \frac{1}{10}(1 - \alpha + 12\beta) \end{aligned} \quad 6-3$$

که پاسخ های بدست آمده برای ماتریس سه قطری با دقت خطای از مرتبه شش در مراحل قبل، زیرمجموعه ای از رابطه بالا می باشد. همچنین در صورت قرار دادن $\beta \neq 0, c = 0$ در رابطه بالا، رابطه ای با مرتبه خطای شش به فرم زیر به دست می آید:

$$\beta = \frac{1}{12}(-1 + 3\alpha), a = \frac{2}{9}(8 - \alpha), b = \frac{1}{18}(-17 + 57\alpha), c = 0 \quad 7-3$$

این دسته از پاسخ ها با داشتن حد $\beta \rightarrow 0$ و $\alpha = \frac{1}{3}$ مرتبه خطایی برابر شش دارند.

در رابطه (۳-۳) با فرض $\alpha = \frac{4}{9}$ به مرتبه خطایی برابر هشت دست پیدا می کنیم که مقدار ضریب

برابند با:

$$\alpha = \frac{4}{9}, \beta = \frac{1}{36}, a = \frac{40}{29}, b = \frac{25}{54}, c = 0 \quad ۸-۳$$

در صورت انتخاب $\beta = \frac{1}{20}(-3 + 8\alpha)$ در رابطه (۶-۳) یک دسته پارامتر با دقت خطا از مرتبه هشتم

تولید می گردد که به فرم زیر می باشند:

$$\beta = \frac{1}{20}(-3 + 8\alpha), a = \frac{1}{6}(12 - 7\alpha), b = \frac{1}{150}(56\alpha - 183), c = \frac{1}{50}(9\alpha - 4) \quad ۹-۳$$

در صورت قرار دادن $\alpha = \frac{1}{2}$ در رابطه (۹-۳) دقت خطای مرتبه ده به دست می آید که بالاترین میزان

دقت بدست آورده در این روش می باشد و پارامترهای مربوطه برابر مقادیر ذیل می گردند:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{20}, a = \frac{17}{12}, b = \frac{101}{150}, c = \frac{1}{100} \quad ۱۰-۳$$

میزان دقت روابط فوق در جدول (۱-۳) ارائه شده است.

جدول (۱-۳) مرتبه خطاها در محاسبه مشتقات مرتبه اول در روش تفاضل محدود فشرده

Scheme	Truncation error
۲-۲	$\frac{4}{5!}(3\alpha-1)h^4 f^{(5)}$
۳-۲	$\frac{4}{7!}h^6 f^{(7)}$
۴-۲	$\frac{12}{7!}(-8\alpha+3)h^6 f^{(7)}$
$\alpha = \frac{3}{8}, ۴-۲$	$\frac{-36}{9!}h^8 f^{(9)}$
۵-۲	$\frac{4}{5}(-1+3\alpha-12\beta+10c)h^4 f^{(5)}$
۶-۲	$\frac{12}{7!}(3-8\alpha+20\beta)h^6 f^{(7)}$
۷-۲	$\frac{4}{7!}(-9\alpha-4)h^6 f^{(7)}$
۸-۲	$\frac{-16}{9!}h^8 f^{(9)}$
۹-۲	$\frac{144}{9!}(2\alpha-1)h^8 f^{(9)}$
۱۰-۲	$\frac{144}{11!}h^{10} f^{(11)}$

۳-۳ تقریب مشتق دوم مکانی

نحوه بدست آوردن روابط مربوط به تقریب مشتق مکانی دوم توسط لی لی^۱ همانند روش به کار رفته برای مشتق اول مکانی می باشد، بدین منظور بار دیگر رابطه را این بار برای مشتق مکانی رتبه دوم بازنویسی می کنیم.

$$\beta f_{i-2}'' + \alpha f_{i-1}'' + f_i'' + \alpha f_{i+1}'' + \beta f_{i+2}'' = c \frac{f_{i+3} - 2f_i + f_{i-3}}{9h^2} + b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4h^2} + a \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad ۱۱-۳$$

که در رابطه فوق f_j'' نشاندهنده تقریب مشتق مکانی مرتبه دوم در گره i می باشد، رابطه بین ضرایب a, b, c و همچنین α, β با مقایسه این روابط با سری تیلور با مرتبه های مختلف به دست می آید. که این روابط مطابق معادلات زیر بدست آمده اند:

$$a + b + c = 1 + 2\alpha + 2\beta \quad \text{خطا از مرتبه دوم}$$

$$a + 2^2 b + 3^2 c = \frac{4!}{2!} (\alpha + 2^2 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه چهارم}$$

$$a + 24b + 34c = \frac{6!}{4!} (\alpha + 2^4 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه ششم}$$

$$a + 2^6 b + 3^6 c = \frac{8!}{6!} (\alpha + 2^6 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه هشتم}$$

$$a + 2^8 b + 3^8 c = \frac{10!}{8!} (\alpha + 2^8 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه دهم}$$

هر چند شکل روابط بدست آمده در این حالت نیز بسیار شبیه روابط بدست آمده برای مشتق اول می باشد اما ضرایب سمت راست معادله با یکدیگر متفاوتند.

همانند حالت قبل، در ابتدا و انتهای مرز دامنه، باید از روابط ساده تری جهت شبیه سازی جملات دیفرانسیلی استفاده نمود.

با فرض $c = 0, \beta = 0$ دسته ای از ضرایب که به یک پارامتر وابسته اند به صورت زیر بدست می آیند:

$$\beta = 0, c = 0, a = \frac{4}{3}(1 - \alpha), b = \frac{1}{3}(-1 + 10\alpha) \quad ۱۲-۳$$

^۱ Lele

همانگونه که در بالا دیده می شده، با فرض $\alpha \rightarrow 0$ معادلات به فرم معادلات کلاسیک تفاضل

مرکزی^۱ با مرتبه خطای چهارم در می آیند. به ازای $\alpha = \frac{1}{10}$ روابط کلاسیک پده^۲ به دست می آیند.

همچنین به ازای $\alpha = \frac{1}{11}$ معادلات سه قطری با دقت خطا از مرتبه شش به دست می آید.

$$\alpha = \frac{2}{11}, \beta = 0, a = \frac{12}{11}, b = \frac{3}{11}, c = 0 \quad ۱۳-۳$$

یک گروه متشکل از جواب های با دو پارامتر را می توان با فرض $c \neq 0, \beta \neq 0$ به دست آورد که به شکل زیر نمایش داده می شوند.

$$a = \frac{1}{3}(4 - 4\alpha - 40\beta + 5c) \quad ۱۴-۳$$

$$b = \frac{1}{3}(-1 + 10\alpha + 46\beta - 8c)$$

این رابطه می تواند به فرم رابطه ای بر حسب دو گروه تابع و از مرتبه ششم برای خطا و یا گروه متشکل از یک متغیر با میزان دقت از مرتبه هشتم درآید که گروه با دو پارامتر به فرم ذیل نمایش داده می شود:

$$a = \frac{6 - 9\alpha - 12\beta}{4}$$

$$b = \frac{-3 + 24\alpha - 6\beta}{5} \quad ۱۵-۳$$

$$c = \frac{2 - 11\alpha + 124\beta}{20}$$

و در حالتی که مرتبه خطا را از درجه هشتم مد نظر داشته باشیم، می توان نوشت:

^۱ Central Difference

^۲ Pade

$$\beta = \frac{38\alpha - 9}{214}$$

$$a = \frac{696 - 1191\alpha}{428}$$

$$b = \frac{2454\alpha - 294}{535}$$

$$c = \frac{1179\alpha - 344}{2140}$$

۱۶-۳

که جواب خاصی با دقت خطای مرتبه هشتم با فرض $c = 0$, $\alpha = \frac{344}{1179}$ توسط کولاتز^۱ نیز ارائه شده است.

برای حالت با مرتبه خطا از درجه دهم خواهیم داشت.

$$\alpha = \frac{344}{899}, \beta = \frac{43}{1798}, a = \frac{1065}{1798}, b = \frac{1038}{899}, c = \frac{79}{1798}$$

۱۷-۳

با توجه به آنچه در محاسبه مقادیر مشتق مکانی اول و دوم آمد، اکنون سعی می‌نماییم برای استفاده از روش تفاضل محدود فشرده، روابط مورد نیاز جهت کد نویسی و استفاده جهت حل مساله معکوس حرارتی را به دست آورده و آنگاه با استفاده از آن‌ها و ترکیب روابط بین مشتقات مرتبه اول و دوم سمت راست معادله را بازسازی و تحلیل نماییم و آنگاه با استفاده از رابطه ارائه شده مشتق اول زمانی، به تحلیل مساله در دامنه‌های زمانی و مکانی آن پردازیم.

۴-۳ محاسبه رابطه مشتق اول مکانی برای مساله موجود

همانگونه که در شرح روش عمومی حل معادلات دیفرانسیلی آمد، در این حل‌ها از روش ارائه شده لی‌لی بهره گرفته شده است، در این روش براساس روابط ارائه شده در بخش قبل با در نظر گرفتن $\beta = 0$ روابط به فرم زیر نوشته می‌شوند.

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = \frac{\alpha + 2}{3\Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12\Delta x} (f_{i+2} - f_{i2})$$

۱۸-۳

^۱ Collatz

که در آن ((')) نشان دهنده مشتق و i نشاندهنده شماره گره مورد نظر می باشد. با قرار دادن $\alpha = \frac{1}{3}$ و یا $\alpha = \frac{1}{4}$ همانگونه که در قسمت قبل آورده شده، مشتقات پاسخی با دقت خطای از مرتبه چهارم و یا ششم پیدا می کنند. همانگونه که مشاهده می شود در رابطه نوشته شده برای مشتق در هر نقطه با اندیس i ، معادله به دست آمده شامل روابطی با مقادیر تابع در گره های مجاور می باشد. برای دو گره ابتدایی و انتهایی این رابطه برقرار نبوده و باید برای این چهار گره، روابط دیگری به کار برد و از رابطه های توضیح داده شده در این قسمت برای گره های داخلی استفاده نمود.

در ابتدا و انتهای مرز جسم از رابطه یک طرفه (غیر مرکزی) جهت معرفی مشتق اول استفاده می گردد:

$$i = 0 \quad f'_0 + 2f'_1 = \frac{1}{2\Delta x}(-5f_0 + 4f_1 + f_2) \quad 19-3$$

$$i = I \quad f'_I + 2f'_{I-1} = \frac{1}{2\Delta x}(5f_I - 4f_{I-1} - f_{I-2})$$

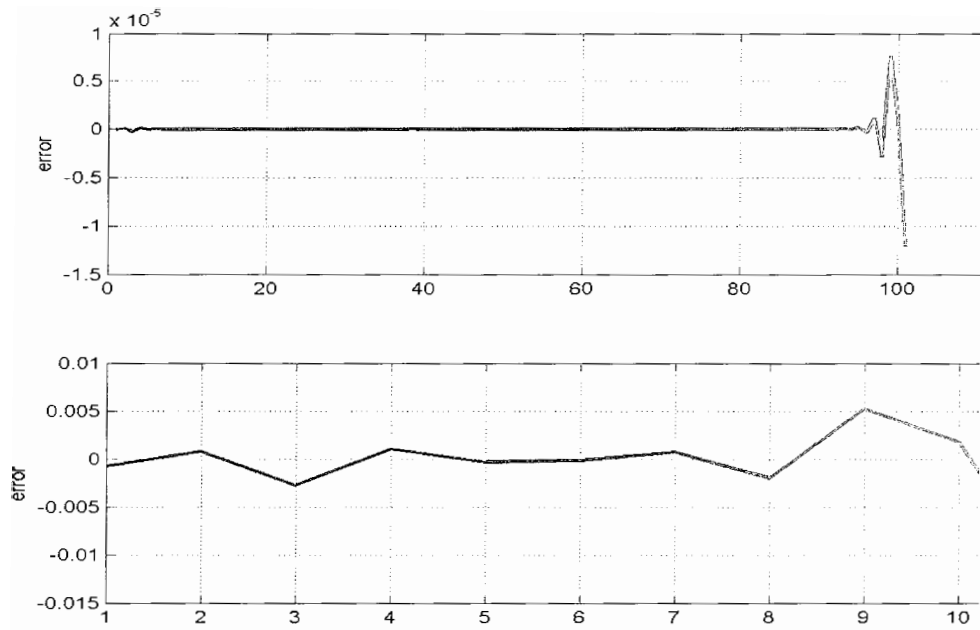
که دقت این روابط، از مرتبه سوم می باشد.

در نقاط مجاور مرزهای جسم، ($i=1, i=I-1$) از فرم کلی رابطه ارائه شده، بهره گرفته می شده و جهت حذف جملات خارج از محدوده، $\alpha = \frac{1}{6}$ مورد استفاده قرار می گیرد برای نقاط ($i=2, i=I-2$) جهت پایدارتر شدن و نیز همگرایی جواب ها، پیشنهاد شده به جای استفاده مستقیم از α ، در معادله از پارامتر α' به صورت زیر استفاده گردد:

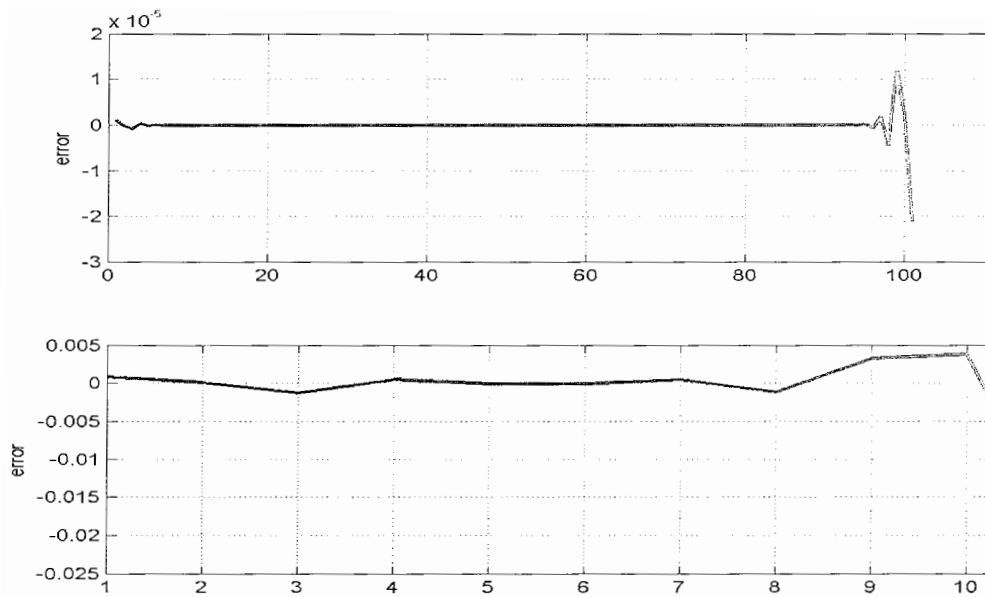
$$\alpha' = (16\alpha + 32)/(40\alpha - 1) \quad 20-3$$

در کد برنامه ارائه شده جهت حل مساله موجود از این مقدار برای گره های ($i=2, i=I-2$) مورد استفاده قرار گرفته است.

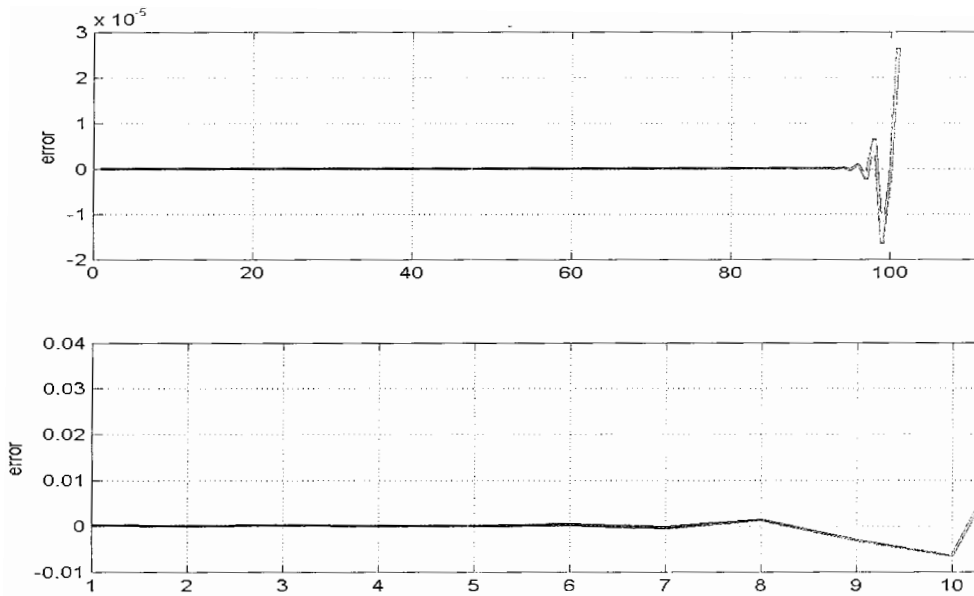
میزان دقت کد نوشته شده با استفاده از این روش برای مشتق اول برای چند تابع مختلف در شکل (۱-۳) و (۲-۳) و (۳-۳) نمایش داده شده است.



شکل ۳-۱ تخمین مشتق مکانی مرتبه اول به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(x) = x^5$ ، تغییرات Δ از صفر تا یک می باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین به ده قسمت تقسیم شده است.



شکل ۲-۳ تخمین مشتق مکانی مرتبه اول به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = e^{r^2}$ ، تغییرات Γ از صفر تا یک می باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین به ده قسمت تقسیم شده است.



شکل ۳-۳ تخمین مشتق مکانی مرتبه اول به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = \sin(r^3)$ ، تغییرات Γ از صفر تا یک می باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین به ده قسمت تقسیم شده است.

۵-۳ محاسبه روابط برای مشتق دوم مکانی برای مساله موجود

برای بدست آوردن رابطه مربوط به مشتق دوم مکانی نیز، با استفاده از روابط ذکر شده در قسمت

قبل با فرض $\beta = 0$ داریم:

$$\alpha f_{i-1}'' + f_i'' + \alpha f_{i+1}'' = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + \frac{10\alpha-1}{12\Delta x^2}(f_{i-2} - 2f_i + f_{i+2}) \quad ۲۱-۳$$

برای این حالت، در مرزهای ابتدایی و انتهایی مساله می توان نوشت:

$$i=0 \quad f_0'' + 11f_1'' = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_0 - 27f_1 + 15f_2 - f_3) \quad ۲۲-۳$$

$$i=I \quad f_I'' + 11f_{I-1}'' = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_I - 27f_{I-1} + 15f_{I-2} - f_{I-3})$$

با مشتق گیری از دو طرف رابطه مرزی برای مشتقات مرتبه اول که در قسمت (۳-۴) حاصل شد، به

دست می آید:

$$f_0'' + 2f_1'' = \frac{1}{2\Delta x}(-5f_0' + 4f_1' + f_2') \quad ۲۳-۳$$

که می توان آن را به صورت رابطه زیر ساده کرد.

$$f_0'' + 2f_1'' = \frac{-3}{\Delta x} f_0' + \frac{1}{2\Delta x}(f_0' + 4f_1' + f_2') \quad ۲۴-۳$$

و با استفاده از $\alpha = \frac{1}{4}$ خواهیم داشت:

$$f_0'' + 2f_1'' = \frac{-3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{x=0} - \frac{3}{2\Delta x^2}(f_0 - f_2) \quad ۲۵-۳$$

که رابطه فوق برای دهانه ورودی مسائل به کار می رود، خاصیت رابطه بالا این است که یکی از شرط

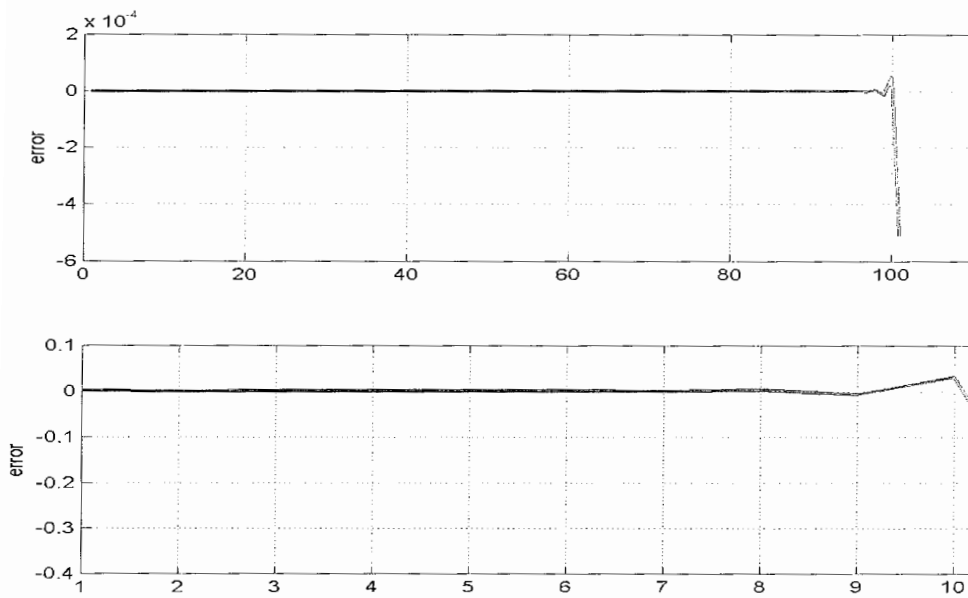
مرزهای مساله را ($\frac{df}{dx} \Big|_{x=0} = 0$) در دهانه ورودی (که در اینجا همان مرکز استوانه می باشد) نیز

ارضا می کند. در صورتی که شرط مرزی از نوع نیومن را در قسمت انتهایی مساله داشتیم، می

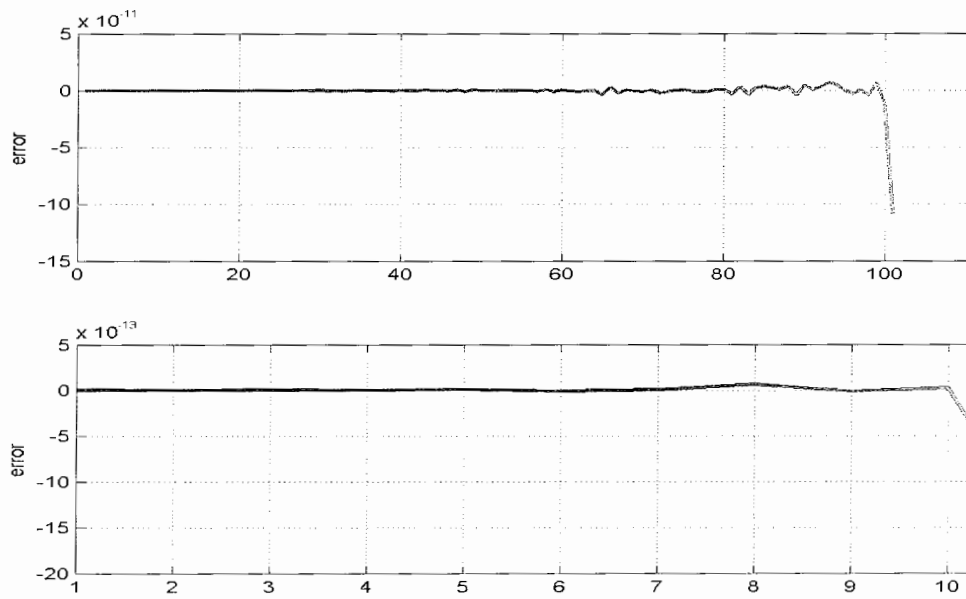
توانستیم این رابطه را به فرم زیر مورد استفاده قرار دهیم:

$$f_I'' + 2f_{I-1}'' = \frac{3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{x=L} - \frac{3}{2\Delta x^2}(f_I - f_{I-1}) \quad ۲۶-۳$$

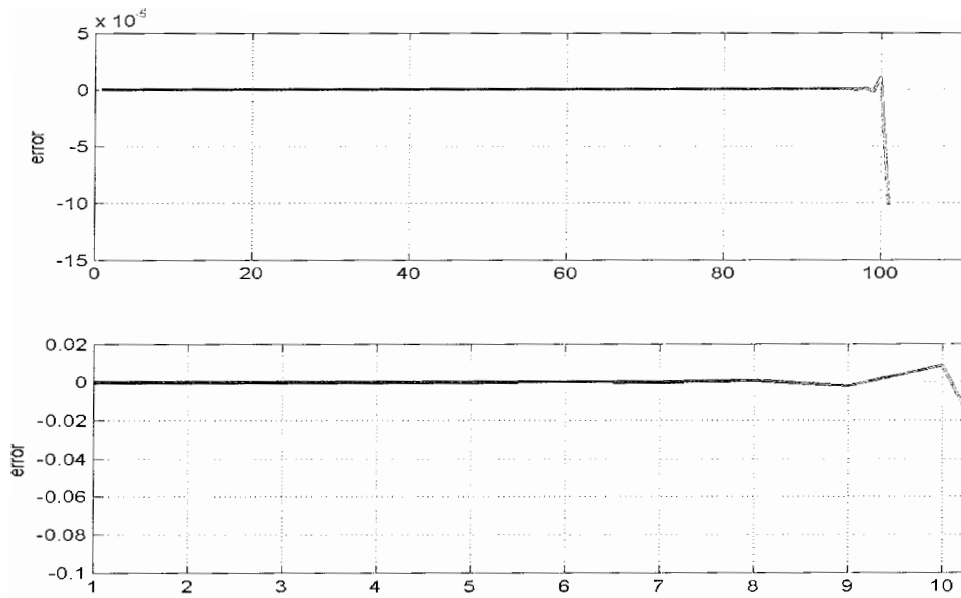
در نقاط مجاور گره های مرزی، $(i=1, i=I-1)$ روابط را با در نظر گرفتن $\alpha = \frac{1}{10}$ مورد استفاده قرار می دهیم، بدین ترتیب جملاتی که شامل دامنه نمی شوند، از معادلات حذف می شوند و معادله حاصله در دستگاه مورد استفاده قرار می گیرند. میزان دقت کد نوشته شده با استفاده از این روش برای مشتق دوم به ازای چند تابع مختلف در شکل (۳-۴) و (۳-۵) و (۳-۶) نمایش داده شده است.



شکل ۳-۴ تخمین مشتق مکانی مرتبه دوم به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = \exp(r^2)$ ، تغییرات r از صفر تا یک می باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین به ده قسمت تقسیم شده است.



شکل ۳-۵ تخمین مشتق مکانی مرتبه دوم به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = r^3$ ، تغییرات Γ از صفر تا یک می باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین به ده قسمت تقسیم شده است.



شکل ۳-۶ تخمین مشتق مکانی مرتبه دوم به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = \cos(r^2)$ ، تغییرات r از صفر تا یک می باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین به ده قسمت تقسیم شده است.

۶-۳ روش محاسبه مشتقات مرتبه اول زمانی

جهت محاسبه مشتقات زمانی از مرتبه اول، از روش رانگ-کوتای مرتبه سوم که توسط وری به دست آمده در حل مسأله استفاده گردیده است. در این روش، جهت بدست آوردن مشتقات زمانی، مسأله را به حالت زیر فرض می‌نمائیم:

$$\frac{du}{dt} = R(u) \quad ۲۷-۳$$

که برای حل معادله، رسیدن از هر مرحله زمانی به مرحله بعد، در سه زیر مرحله مطابق جدول زیر اقدام می‌شود

جدول ۳-۲ مراحل مورد نیاز جهت محاسبه مشتق اول زمانی به روش رانگ-کوتا با دقت از مرتبه سوم

Time	First Location	Second Location
t^n	u^n	$R(u^n)$
$t' = t^n + c_1 \Delta t$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$R'(u')$
$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$R''(u'')$
$t^{n+1} = t'' + \Delta t$	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	

همانگونه که در جدول (۳-۲) ملاحظه می‌شود، برای هر مرحله از افزایش به میزان Δt در زمان، نیازمند محاسبه طرف راست معادله R در سه زیر مرحله زمانی داریم. در هر یک از این مرحله‌ها، زمان به میزان $(c_i + d_i) \Delta t$ افزایش می‌یابد و u ها با یک ترکیب خطی از روابط بین R با یکدیگر جمع می‌گردند.

ضرایب مورد استفاده c_i و d_i در این روش، به وسیله بسط ضرایب سری تیلور برای R' و R'' به دست می‌آیند. آنها مطابق روابط زیر قابل محاسبه هستند:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1 \\ c_1 c_2 + c_3 \left[\frac{d_2}{c_2} \left(1 + \frac{d_3}{c_3} \right) + c_2 \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right] = \frac{1}{2} \\ c_1^2 c_2 + c_3 \left[c_1 + c_2 \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right]^2 + c_1^2 d_3 = \frac{1}{3} \\ c_1 c_2 c_3 = \frac{1}{6} \end{cases} \quad 28-3$$

جهت حل معادلات فوق با فرض $d_1 = 0$ می توان پاسخهای زیر را برای معادلات فوق بکار برد :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{8}{15} & d_1 &= 0 \\ c_2 &= \frac{5}{12} & d_2 &= -\frac{17}{60} \\ c_3 &= \frac{3}{4} & d_3 &= -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

حال با داشتن روابط بین مشتقات مکانی اول و دوم نسبت به مقادیر تابع در همان زمان و نحوه محاسبه مقادیر تابع در زمان های بعد، می توان نسبت به محاسبه مقادیر تابع بر اساس رابطه دیفرانسیلی موجود و شرایط اولیه و مرزی داده شده پرداخت.

با توجه به اینکه ممکن است تعداد نقاط داده شده در دامنه مربوطه، به تعداد گره های موجود در برنامه نباشد، لذا با استفاده از یک الگوریتم درونیابی، مقادیر مورد نیاز بر اساس داده های خوانده شده درونیابی و محاسبه می گردند و برای محاسبات مورد استفاده قرار می گیرند.

نظر به اینکه در به دست آوردن معادلات مربوط به T ، شرط $\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ اعمال گردیده است

لذا نگرانی در خصوص محاسبات در $r=0$ با توجه به شکل معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت حاکم بر مسأله وجود ندارد. حال با شروع از لحظه صفر و داشتن شرط اولیه، نسبت به محاسبه مشتقات مکانی و محاسبه RHS معادله اقدام می گردد، سپس به محاسبه $\frac{dT}{dt}$ بر اساس روش ارائه شده در سه زیر مرحله می پردازیم، در هر گام مقدار دمای نقاط مرکزی جسم، بر اساس مقدار وارد شده برای شرط

مرزی در $t=0$ به تابع اعمال می گردد و این عمل تا رسیدن به انتهای دامنه زمانی فرآیند ادامه می یابد، در نهایت با داشتن دما در کلیه گره ها در خلال دامنه زمانی ، قادر به دست آوردن و تعقیب تغییرات دمائی جسم می باشیم. با استفاده از داشتن تاریخچه تغییرات دما در انتهی دامنه مورد بررسی ($t=R$) می توان به محاسبه دمای مربوط به محیط کوره پرداخت و دمای کوره را بر اساس محاسبات به دست آمده تنظیم نمود.

۱-۴ بررسی شرایط حرارتی حاکم بر مسأله

برای به دست آوردن شرایط مرزی که باید بر مسأله اعمال گردد تا بتوان به ریز ساختار مطلوب در فولاد دست یافت، ابتدا مسأله را به صورت معکوس حل می نماییم. بدین منظور فرض می کنیم تاریخچه دما در مرکز نمونه استوانه ای شکل نسبت به زمان مشخص می باشد که این توزیع را می توان از هند بوکهای متالورژی به دست آورد.

در این فصل برای حل مسأله دو بعدی انتقال حرارت به روش معکوس و با کمک روش تفاضلات محدود فشرده، ابتدا شرایط حاکم بر مسأله بررسی می گردد. در این گذر به بیان ریاضیات حاکم بر مسئله می پردازیم. سپس در فصل های آینده با به کارگیری داده های تحلیلی و تجربی به حل مسأله خواهیم پرداخت.

همچنین برای اعمال شرایط اولیه می توان با فرض یکنواخت بودن دما در تمام مقطع نمونه شروع به حل مسأله به روش تفاضلات محدود نمود. به علاوه اینکه در راستای طول میله دما به صورت پربودیک فرض شده به این صورت که دما در ابتدا و انتهای میله با یکدیگر برابر است. (در واقعیت نیز چنین انتظاری را داریم.)

با توجه به به تغییرات دما در دو راستای طولی و شعاعی میله و اینکه دما با گذشت زمان دارای تغییر است، لذا توزیع درجه حرارت به صورت زیر خواهد بود:

$$T = T(x, r, t)$$

قابل ذکر است که شرط اولیه توزیع ثابتی را در تمامی نقاط معرفی مینماید و تاریخچه عملیات حرارتی در مرکز $T = T(x, r = 0, t)$ و برابری دما در ابتدا و انتهای به همراه صفر بودن نرخ تغییرات درجه حرارت در مرکز با توجه به عدم حضور منبع حرارتی در محور مرکزی $\frac{\partial T}{\partial r}(x, r = 0, t)$ به عنوان شرط مرزی برای مسأله حال حاضر معرفی می گردند.

معادله انتقال حرارت دوبعدی گذرا در دستگاه مختصات استوانه ای که در حل از آن استفاده می

گردد به صورت زیر می باشد :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad 1-4$$

که در آن α خاصیت مهمی به نام پخشندگی گرمایی¹ است، که به صورت نسبت رسانندگی گرمایی به ظرفیت گرمایی تعریف می گردد و برای مسأله ما برای تمام نقاط ثابت در نظر گرفته می شود. بنابراین شرایط مرزی معادله فوق را در حل به روش معکوس می توان چنین در نظر گرفت:

الف) شرط مرزی دیریکله² برای مرکز نمونه

$$T(x, r = 0, t) = \tau(t) \quad 2-4$$

که در آن $\tau(t)$ تابعی معلوم می باشد و معرف عملیات حرارتی برای به دست آوردن ساختارهای مختلف در فولاد است. این تابع از آزمایشات و نتایج عملی به دست آمده و به عنوان اولین شرط مرزی در مسأله اعمال خواهد شد که در مورد چگونگی اعمال آن در مسأله توضیح داده خواهد شد.

ب) عدم حضور منبع حرارتی در مرکز میله

از دیگر شرایط مرزی حاکم بر مسأله صفر بودن نرخ تغییرات درجه حرارت در مرکز میله با توجه به عدم حضور منبع حرارتی در مرکز است و لذا داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial r}(x, r = 0, t) = 0 \quad 3-4$$

این شرط هنگام حل مسأله انتقال حرارت در $r = 0$ با توجه به اینکه r در مخرج کسر واقع شده نسبت به ساده سازی مسأله کمک می نماید.

با توجه به معادله در نظر گرفته شده، وابستگی مسأله به مکان از مرتبه دوم بوده و برای آن در قسمتهای بالا شرایط مرزی کافی ارائه گردیده است. با توجه به وابستگی مسأله به زمان در معادله که

¹ Thermal Diffusivity

² Dirichlit Boundary Condition

از مرتبه اول می باشد، نیاز به داشتن یک شرط اولیه در مسأله می باشیم که با توجه به شرایط کوره عملیات حرارتی (یعنی گرم کردن کوره تا درجه حرارت مشخص و نگه داشتن کوره برای درک شرایط یکنواخت) توزیع یکنواختی در جسم در نظر گرفته می شود. بنابراین:

$$T(x, r, t = 0) = T_0 \quad 4-4$$

چنانچه پس از رسیدن درجه حرارت کوره به میزان مشخصی، به سرعت عملیات حرارتی خنک کاری^۱ را شروع نماییم باید اطلاعات کافی از توزیع دما داشته باشیم و این توزیع را به عنوان شرط اولیه لحاظ کنیم.

حال با داشتن معادله حاکم بر مسأله و شرایط مرزی و اولیه باید نسبت به حل آن اقدام نموده و با بدست آوردن توزیع دمای محیط، شرط مرزی مربوط به مسأله اصلی را به دست آورد. این روش برای به دست آوردن توزیع درجه حرارت کوره، $T_{\infty}(t)$ به عنوان روش معکوس در نظر گرفته می شود.

۲-۴ حل تحلیلی مسأله برای شرایط خاص

به منظور حل مسئله حاضر حل تحلیلی وجود نداشته و باید با استفاده از روشهای عددی به حل آن پرداخت. تنها در صورتی که در فرض مسأله فرضیاتی جهت ساده سازی انجام دهیم می توان حل تحلیلی برای آن به شرح ذیل ارائه داد.

این فرضیات عبارتند از:

- ۱- صرف نظر نمودن از تشعشع بین جسم و محیط اطراف
- ۲- یکنواخت فرض نمودن توزیع دما در جسم در لحظه شروع حل مسأله
- ۳- ثابت بودن دمای محیط طی انجام تبادل حرارت
- ۴- ضریب انتقال حرارت با محیط بسیار زیاد است
- ۵- تغییرات دما در راستای x (طول میلله) و φ (تغییرات زاویه ای) صفر است

^۱ Quenching

۶- جسم همگن فرض می شود

لذا با توجه به فرضیات مطرح شده در صفحه قبل، معادله (۴-۱) به شکل زیر ساده می گردد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad ۵-۴$$

برای حل مسأله متغیر جدیدی به نام θ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\theta = T - T_{\infty} \quad ۶-۴$$

شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر نشان داده می شوند:

$$BC : \theta(0, t) = \theta_0 = T_0 - T_{\infty}$$

$$BC : \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial r} = 0 \quad ۷-۴$$

$$IC : \theta(r, 0) = 0$$

برای حل مسأله جوابها را به صورت $\theta(r, t) = X(r)\tau(t)$ در نظر گرفته و با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dX}{dr} \right) + \lambda^2 r X = 0$$

$$\frac{dX(0)}{dr} = 0 \quad ۸-۴$$

$$X(r=R) = 0$$

$$\frac{d\tau}{dt} + \alpha \lambda^2 \tau = 0 \quad ۹-۴$$

در جاییکه λ مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت در نتیجه جداسازی متغیرها و رسیدن به یک تساوی معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر حاصل می گردد. نظر به اینکه τ و t دو متغیر مستقل هستند، تساوی مذکور تنها وقتی برقرار است که هریک از معادلات دیفرانسیل برابر با یک عدد ثابت همچون λ باشد. توجه به این امر ضروری است که λ^2 مقداری منفی است. چرا که معادلات (۴-۸) و (۴-۹) به ازای مقادیر $\lambda^2 = 0$ و یا $\lambda^2 > 0$ ، به جوابی بدیهی می رسند که مورد نظر ما نیست.

لذا برای حالت (۸-۴) داریم

$$\varphi_n = J_0(\lambda_n r) \quad 10-4$$

که در آن φ_n معرف بردارهای ویژه می باشد و صفرهای معادله فوق معرف مقادیر ویژه هستند:

$$J_0(\lambda_n r) = 0 \quad 11-4$$

حل مربوط به معادله (۹-۴) عبارت است از :

$$\tau_n(t) = C_n e^{-a\lambda_n^2 t} \quad 12-4$$

بنابراین حل معادله به صورت زیر است :

$$\theta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) \quad 13-4$$

که در آن

$$a_n = A_n C_n \quad 14-4$$

و با قراردادن مقدار اولیه در معادله (۱۳-۴) داریم :

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \quad 15-4$$

که معادله فوق یک معادله بسل-فوریه می باشد که در آن J_0 ، تابع بسل از نوع اول و از مرتبه صفر می باشد. همچنین در معادله (۱۵-۴) ضریب a_n یک حالت خاص برای معادله $T(r) = \theta_0$ می باشد و به این صورت به دست می آید :

$$a_n = \frac{2\theta_0}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)} \quad 16-4$$

که در این معادله نیز J_1 ، تابع بسل نوع اول و از مرتبه یک می باشد.

حال با قراردادن معادله (۱۶-۴) در (۱۳-۴) توزیع دما در جسم به صورت زیر به دست می آید :

$$\frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)} \quad 17-4$$

در صورتی که برای این مسأله میزان انتقال حرارت را بسیار بزرگ فرض نکنیم حل مسأله بدین صورت در می آید :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

$$IC : \theta(r, 0) = \theta_0$$

$$BC : \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial r} = 0$$

۱۸-۴

$$BC : -k \frac{\partial \theta(R, t)}{\partial r} = h \theta(R, t)$$

با قراردادن $\theta(r, t) = R(r) \tau(t)$ خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda^2 r R = 0$$

$$\frac{dR(R)}{dr} + \frac{h}{k} R(R) = 0$$

۱۹-۴

$$\frac{dR(0)}{dr} = 0$$

$$R_n(r) = A_n \varphi_n(r)$$

$$\varphi_n(r) = J_0(\lambda_n r)$$

۲۰-۴

و صفرهای معادله عبارتند از :

$$(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R) + Bi J_0(\lambda_n R) = 0$$

۲۱-۴

در حالیکه $Bi = \frac{hr}{k}$ و همچنین خواهیم داشت :

$$a_n = \frac{2\theta_0 Bi}{(\lambda_n R^2 + Bi^2) J_0(\lambda_n R)}$$

۲۲-۴

و بالاخره داریم :

$$\frac{T(r, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 2Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 R^2 + Bi^2) J_0(\lambda_n R)}$$

۲۳-۴

در دو حالت فوق، با فرض ثابت بودن دمای محیط و صرف نظر از تشعشع و داشتن نحوه خنک شدن مرکز جسم، به صورت تحلیلی توزیع دما را محاسبه نمودیم. از مقدار به دست آمده برای T_∞ و نیز

شرایط انتهایی مسأله $T(r, t_{end})$ می توان به عنوان شرایط مرزی و اولیه جدید مورد استفاده قرار گیرند. اما در عمل فرض ثابت بودن دمای کوره فرض درستی نبوده و قابل اعمال بر مسأله نیست، همچنین به دلیل تفاوت دمایی زیاد محیط و جسم خارج شده از کوره عملاً نمیتوان از میزان حرارت ساطع شده از جسم به محیط صرفنظر نمود. علاوه بر اینها در حالت واقعی ما تنها در یک راستا تغییرات دما با گذشت زمان نداریم بلکه این امر در راستاهای دیگر نیز روی می دهد. به همین منظور برای به دست آوردن پاسخهای واقعی نیاز به اعمال این شرایط بر مسأله با روشهای عددی می باشیم. که در این فصل و فصل آینده به بررسی آنها خواهیم پرداخت. اگرچه روش ریاضی حل عددی به کارگرفته شده در این پایان نامه در فصل قبلی به بحث پرداخته ایم.

۳-۴ تشریح مسئله و شرایط حاکم بر آن

معادله انتقال حرارت حاکم بر مسئله و نیز شرایط مرزی و اولیه مربوط به آن به فرم زیر هستند:

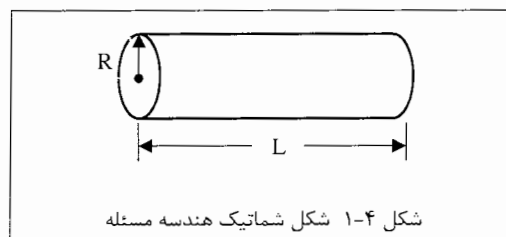
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad ۲۴-۴$$

$$T(x, r, t = 0) = T_0$$

$$T(x, r = 0, t) = \tau(x, t) \quad ۲۵-۴$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

همچنین معادله انتقال حرارت فوق در دامنه ای که به صورت شماتیک در شکل زیر نشان داده شده است، با استفاده از روش تفاضلات محدود فشرده حل می گردد.



برای حل معادله انتقال حرارت (۴-۲۴) کد کامپیوتری در محیط برنامه نویسی MATLAB نوشته شده و در دو مرحله مورد ارزیابی قرار گرفت.

در مرحله نخست که در فصل ۵ به توضیح آن پرداخته ایم، از داده های تحلیلی بهره جسته ایم. بدین صورت که با کمک تابعی ریاضی که تمامی شرایط و ضوابط مسئله را ارضاء نماید، توزیع دما در محور جسم استوانه ای شکل را در لحظه نخست داریم. حال با در اختیار داشتن این اطلاعات و همچنین معرفی تعداد تقسیمات در راستای X و r که در برنامه با $\dim X$ و $\dim r$ مشخص شده اند و نیز بیان فواصل زمانی (dt) ، حل آغاز می گردد.

سپس با گذشت زمان معلوم (به عنوان مثال ۲۰ ثانیه) توزیع دما در سطح بدست می آید (حل معکوس). حال با استفاده از این داده ها و برگرداندن زمان به لحظه آغازین، دما در محور مرکزی را محاسبه می نماییم (حل مستقیم). در نهایت نیز دماها در حل معکوس و مستقیم برای محور جسم با یکدیگر مقایسه شده و با محاسبه و ترسیم نمودارهای خطا می توان صحت و دقت کد نوشته شده را ارزیابی نمود.

در مرحله دوم که در فصل ۶ شرح داده شده است، با بکارگیری تاریخچه دمایی در مغز جسم که از داده های تجربی علم متالورژی بدست آمده، به انجام مراحل فوق پرداخته ایم.

شایان ذکر می داند، از مزیت های روش حل معکوس آن است که پس از حل و رسیدن به جواب، با استفاده از این اطلاعات و حل مسئله به روش مستقیم می توان به مقایسه داده ها در نقطه شروع و لحظه آغازین پرداخت. این امر ما را در تخمین دقت جوابها و همچنین تأیید صحت آنها یاری می نماید.

فصل پنجم :

ارزیابی تحلیلی برنامه کامپیوتری

۱-۵ شبیه سازی مسئله با یک تابع ریاضی

در این قسمت با کمک یک تابع ریاضی که در معادله انتقال حرارت دو بعدی در دستگاه مختصات استوانه ای با فرض همگن بودن نمونه صدق کند و همچنین کلیه شرایط اولیه و مرزی را ارضاء نماید به شبیه سازی مسأله می پردازیم و در ادامه کد کامپیوتری که به کمک نرم افزار MATLAB نوشته شده است به همراه نتایج و نمودارهای حاصل را می آوریم.

همانگونه که در فصل گذشته توضیح داده شد معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله به صورت زیر

است :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad ۱-۵$$

همچنین شرایط مرزی و اولیه حاکم بر مسئله عبارتند از :

$$\begin{aligned} T(x, r, t=0) &= T_0 \\ T(x, r=0, t) &= \tau(x, t) \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \end{aligned} \quad ۲-۵$$

با توجه به معادلات (۱-۵) و (۲-۵) نیازمند تابع ریاضی هستیم که این معادلات را ارضاء نماید. برای این منظور تابع زیر را در نظر می گیریم :

$$T(x, r, t) = kr^2 + 4kt + e^{-t} \sin x + C \quad ۳-۵$$

با فرض $\alpha = 1$ و با به کارگیری معادله (۳-۵) در معادله انتقال حرارت (۱-۵) دو طرف معادله با یکدیگر برابر خواهند بود علاوه بر اینکه معادله (۳-۵) در کلیه شروط (۲-۵) صادق است.

آنچه که در خصوص معادله (۳-۵) لازم به ذکر می داند آن است که تغییرات دما در راستای x پریودیک است، یعنی دما در ابتدا و انتهای میله با یکدیگر برابر بوده و این در حالی است که در طول میله شاهد تغییرات دما هستیم ولی با گذشت زمان نسبت طولانی، این تغییرات دما در راستای طول و در سطح خارجی میله حذف می گردد که در عمل و واقعیت نیز چنین است.

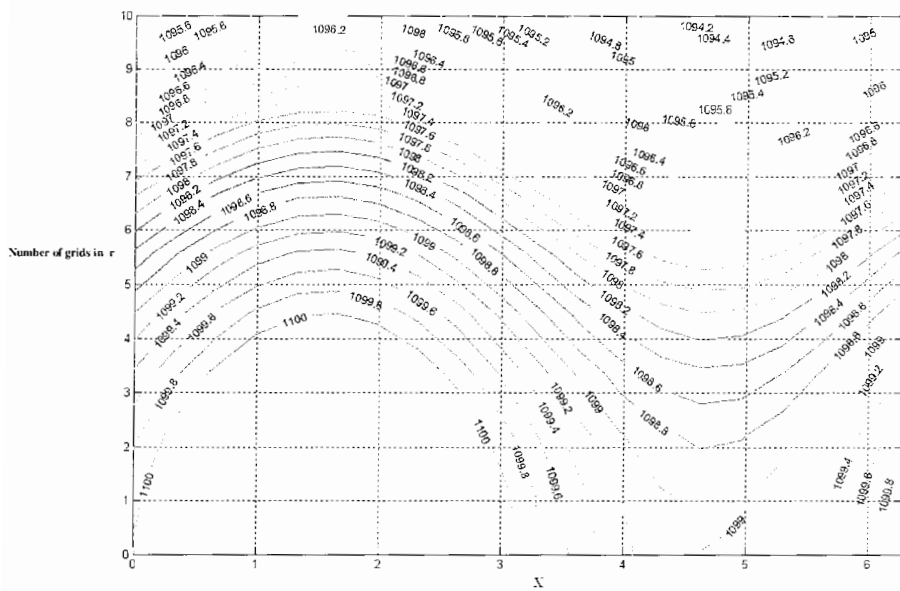
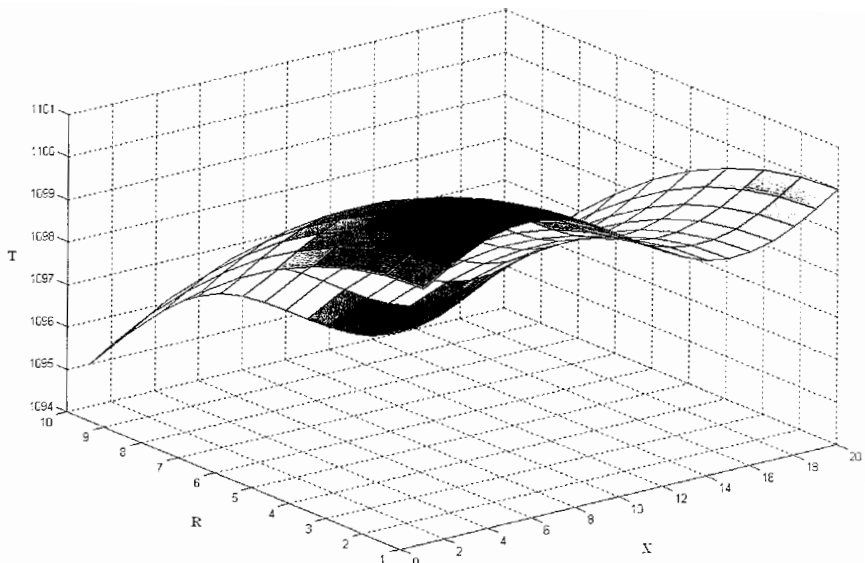
دیگر آنکه C و k مقادیر ثابتند، بطوریکه با مقدار دهی به ثابت C ما در واقع دمای گرهها را در لحظه شروع داریم و با مقدار دهی مثبت یا منفی به ثابت k ، ما شاهد به ترتیب افزایش یا کاهش دما با گذشت زمان خواهیم بود. لذا از کد کامپیوتری پیوست می توان در مواردی که افزایش یا کاهش دما را داریم استفاده نماییم. انتخاب مقدار k در برنامه حائز اهمیت زیرا انتخاب مقادیر بزرگ یا کوچک برای آن موجب اختلافات زیاد یا کم در راستای T با گذشت زمان خواهد شد که همین امر در جایی موجب واگرایی برنامه و در جایی دیگر موجب افزایش مقادیر خطا می گردد. در برنامه پیوست $C = 1100$ و $k = -0.05$ در نظر گرفته شده است.

تغییرات در راستای شعاعی از صفر تا یک است که به ده قسمت تقسیم شده و نیز تغییرات در راستای طول (x) از صفر تا 2π است که به بیست قسمت تقسیم گردیده است. لذا در مجموع در هر تکرار محاسبات برای دویست گره انجام میگیرد.

همچنین در نمودارهای مربوط به محاسبه خطای دمای محاسباتی برنامه با دمای منتج از تابع برای گرهها از رابطه جذر حداقل مربعات خطا استفاده شده است.

در پایان نیز به منظور بررسی صحت پاسخهای بدست آمده، پس از آنکه با گذشت زمانی معین دماهای سطح را بدست آوردیم، با داشتن این دماها به حل مستقیم می پردازیم و دمای مرکز میله را بدست می آوریم. حال این دما را با دمایی که در ابتدا برای مرکز داشتیم مقایسه می کنیم که این امر یکی از ویژگی های مهم روش حل عددی در مسائل معکوس می باشد.

در شکل (۵-۱ الف و ب) شاهد توزیع دما در سراسر نقاط جسم مورد نظر در لحظه شروع ($t=0$) هستیم. این موضوع با کمک رابطه (۵-۳) و قراردادن $k=-0.05$ بدست آمده. همانگونه که بیان شد تعداد تقسیمات در راستای X برابر با ۲۰ و در راستای T برابر ۱۰ در نظر گرفته شده است. در شکل پایین خطوط دما ثابت ترسیم گردیده اند.

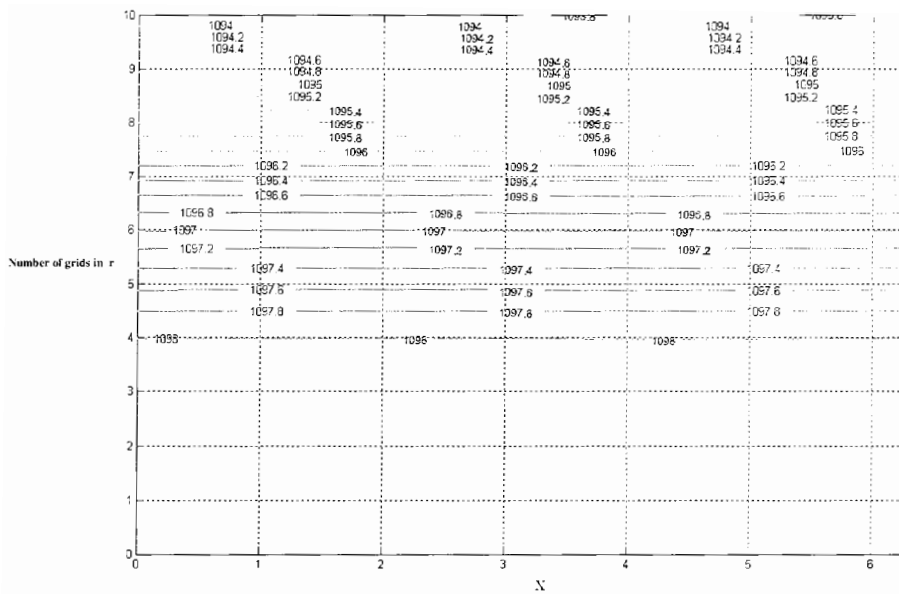


شکل ۵-۱ الف و ب گرافهای دما در راستاهای شعاعی (r) و طولی (X) در لحظه شروع (t=0)

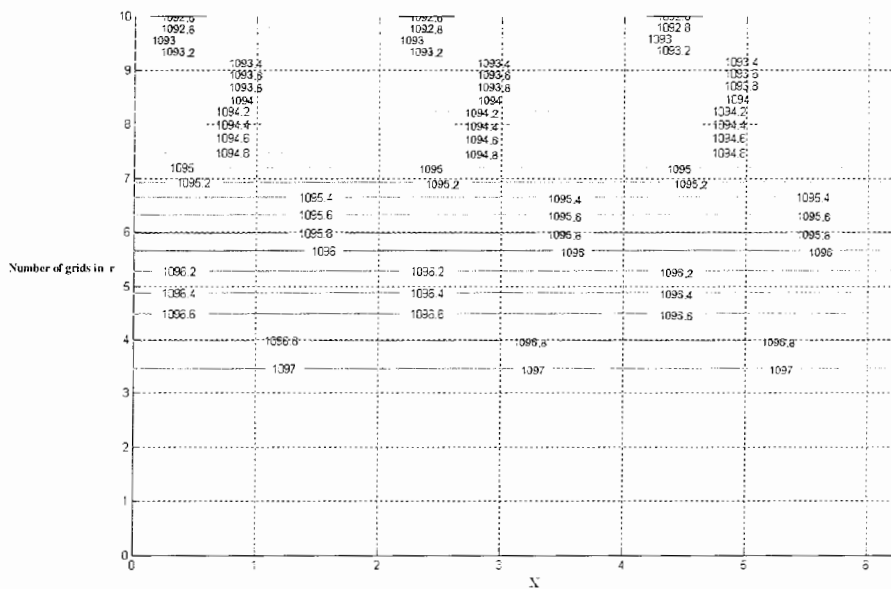
سپس در شکل‌های (۲-۵) ، (۳-۵) و (۴-۵) خطوط دما ثابت با گذشت زمانهای ۶ ، ۱۲ و ۱۸ ثانیه ترسیم شده اند. در نهایت نیز توزیع دما در شکل (۵-۵) با گذشت ۲۰ ثانیه از لحظه شروع ملاحظه می شود. همانگونه که در واقعیت نیز انتظار می رود، با گذشت زمان شاهد یکنواختی دما در سراسر قطعه می باشیم ولی اینکه رسیدن به این همدمایی با چه نرخ و چه مدت زمانی روی دهد بستگی به تابعی دارد که در داده های تحلیلی از آن بهره جسته ایم. [معادله (۳-۵)] ولی آنچه که بیش از همه در انتخاب این تابع اهمیت دارد ، صادق بودن آن برای کلیه فرضیات حاکم بر مسئله است.

برای رسیدن به این داده ها در کد نوشته شده (پیوست الف) بازه های زمانی به صورت $dt=0.02$ در نظر گرفته شده است.

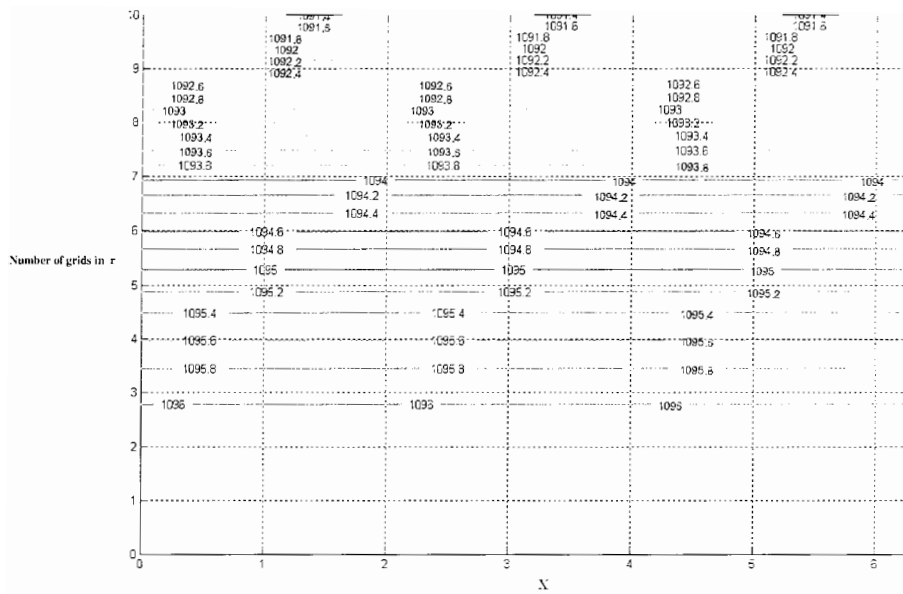
در اشکال مذکور محور x بر اساس تغییرات آن $0 < x < 2\pi$ و محور r بر اساس تعداد گره ها در همان راستا (۱۰ گره) مدرج شده اند. ولی در شکل (۴-۵)، هر دو محور $x-r$ مطابق با تعداد گره های در نظر گرفته شده در راستاهای مربوطه، تقسیم بندی شده است.



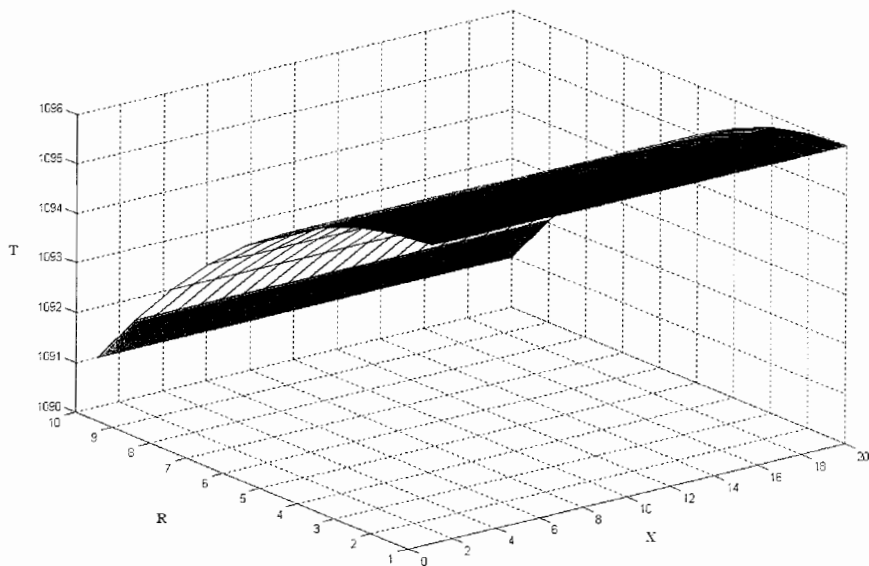
شکل ۲-۵ خطوط دما ثابت پس از گذشت ۶ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی



شکل ۳-۵ خطوط دما ثابت پس از گذشت ۱۲ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی



شکل ۴-۵ خطوط دما ثابت پس از گذشت ۱۸ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی

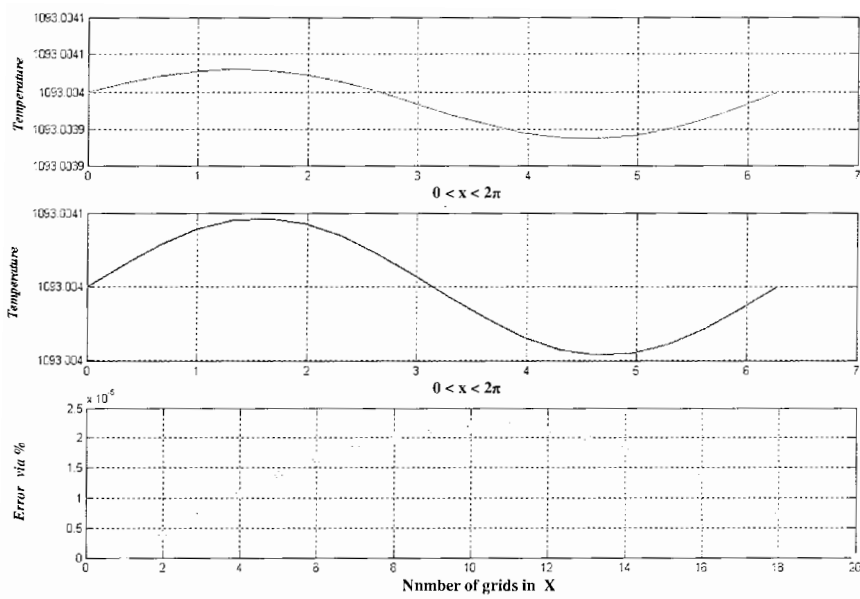


شکل ۵-۵ توزیع دما پس از گذشت ۲۰ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی

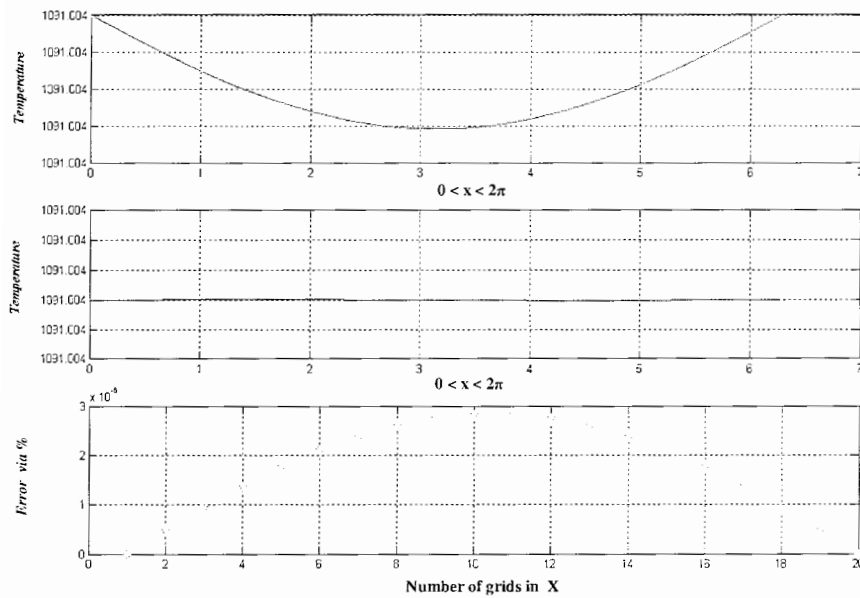
در مرحله بعد به منظور بررسی صحت داده های خروجی برنامه، به محاسبه درصد خطای ناشی از دماهای بدست آمده از تابع تحلیلی با دماهای خروجی کد نوشته شده پرداخته ایم.

برای این منظور با گذشت زمان ۱۰ و ۲۰ ثانیه، دماهای سطح ($r=R$) در راستای طولی میله با کمک نتایج حاصل از کد کامپیوتری و تابع تحلیلی، محاسبه و مقایسه شده اند. این موضوع در شکل‌های (۵-۶ الف ب ج) و (۵-۷ الف ب ج) نشان داده شده است. در شکل (الف) نتایج حاصل از برنامه کامپیوتری، در شکل (ب) دماهای حاصل از تابع تحلیلی و در شکل (ج) درصد خطاهای آن دو ترسیم شده اند.

همانگونه که انتظار می رود با توجه به تجمع خطاها از مراحل قبل، شاهد افزایش درصد خطا با گذشت زمان هستیم. ولی خطاها از مراتب بسیار خوبی (10^{-6}) برخوردار هستند که این امر خود نیز تأییدی بر کد نوشته شده است.



شکل ۵-۶ (الف-ب-ج) نمودار مربوط به دمای سطح ($r=R$) و در راستای X پس از گذشت ۱۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر



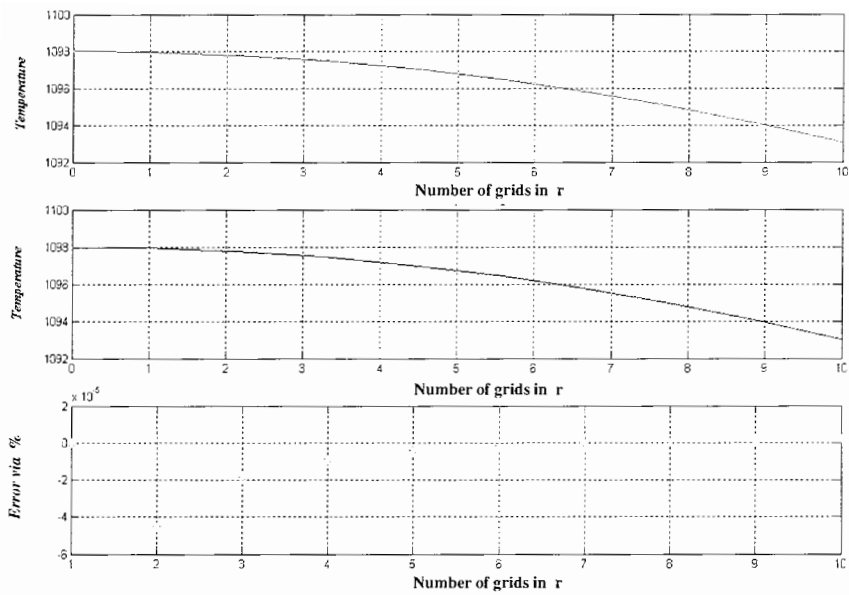
شکل ۵-۷ (الف-ب-ج) نمودار مربوط به دمای سطح ($r=R$) و در راستای X پس از گذشت ۲۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر

اکنون به منظور بررسی دقیق تر توزیع دما، به محاسبه و تجزیه و تحلیل دماهای محاسبه شده در راستای r و در x های ثابت می پردازیم. لذا در دو زمان $t = 10s$ و $t = 20s$ و در راستاهای $x = \pi$ (شکل های ۸-۵ و ۹-۵) و $x = \frac{\pi}{2}$ (شکل های ۱۰-۵ و ۱۱-۵) و نیز $x = \frac{3\pi}{2}$ (شکل های ۱۲-۵ و ۱۳-۵) و برای کلیه r ها، دماها ترسیم شده اند.

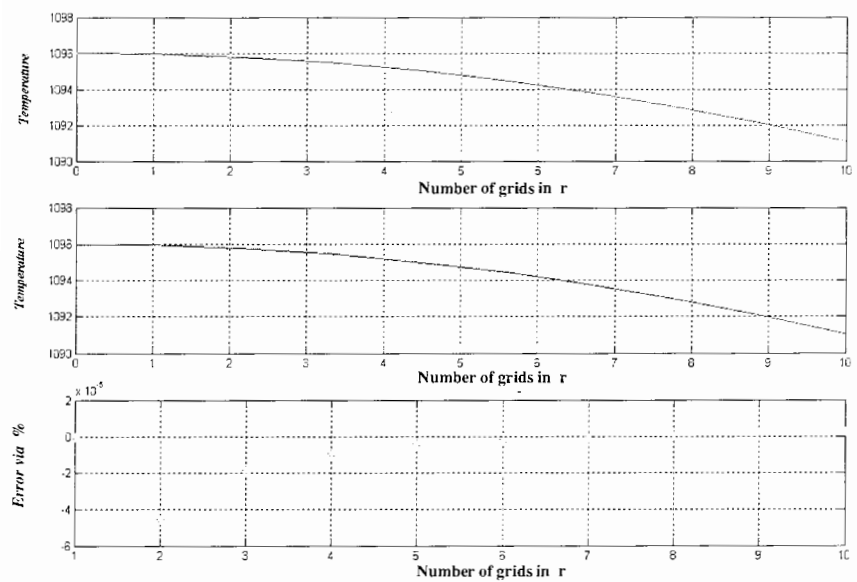
همانگونه که انتظار می رود در این نمودارها شیب دما برای همه تقریباً ثابت است و آنچه که در آنها متفاوت است دما در زمانهای مختلف برای $r = 0$ است.

در کلیه اشکال مذکور، شکل (الف) مربوط به دماهای بدست آمده از کد کامپیوتری، شکل (ب) دماهای همان نقاط حاصل از تابع تحلیلی و شکل (ج) به محاسبه درصد خطای این دو دما پرداخته است.

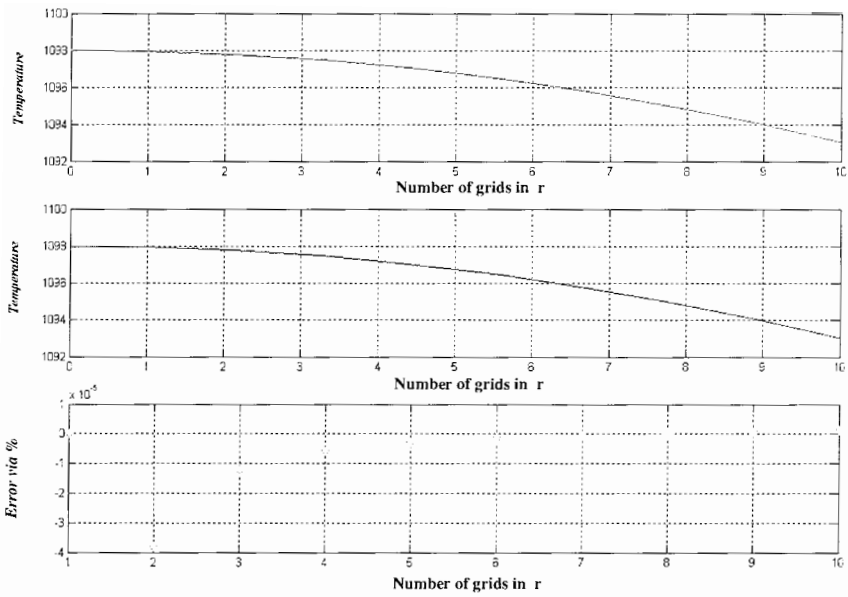
توضیح این نکته لازم به نظر می رسد که در گره آغازین با توجه به اینکه محاسبات به کمک جایگذاری دمای نخستین (برگرفته از تابع تحلیلی) در هر مرحله از تکرار انجام می گردد لذا درصد خطا تقریباً صفر است. دیگر آنکه علت منفی شدن درصد خطا در شکلها مربوط به نحوه محاسبه آن است که در تمامی مراحل دمای حاصل از کد نوشته شده از دمای واقعی کسر می گردد و این امر نشان دهنده آن است که دمای واقعی بیشتر از دمای بدست آمده از کد کامپیوتری است. همچنین توجه داریم که راستای طولی در نمودارها بیانگر تعداد تقسیمات در راستای r می باشد. علاوه بر اینکه در این مرحله از محاسبات نیز بازه های زمانی $dt = 0.02$ در نظر گرفته شده است.



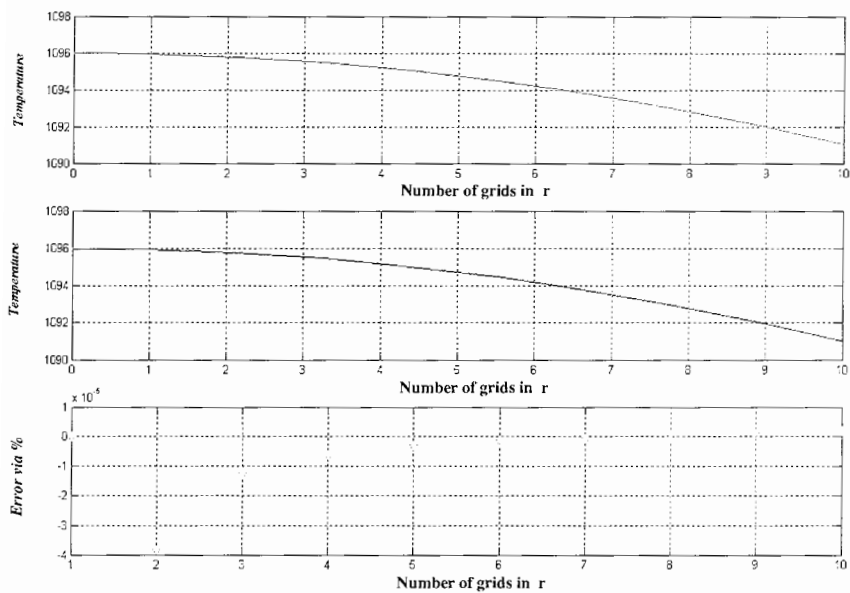
شکل ۵-۸ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \pi$ و در Γ های مختلف ، پس از گذشت ۱۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر



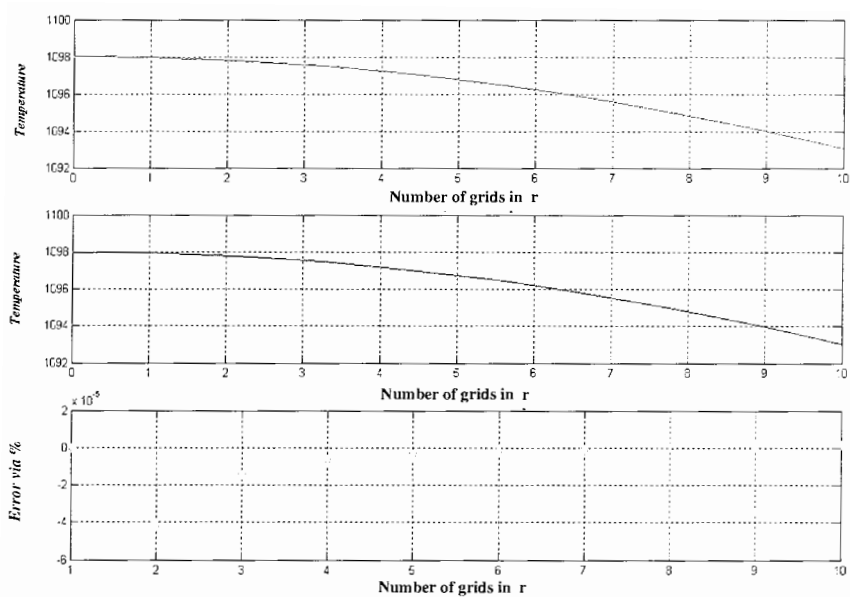
شکل ۵-۹ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \pi$ و در Γ های مختلف ، پس از گذشت ۲۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر



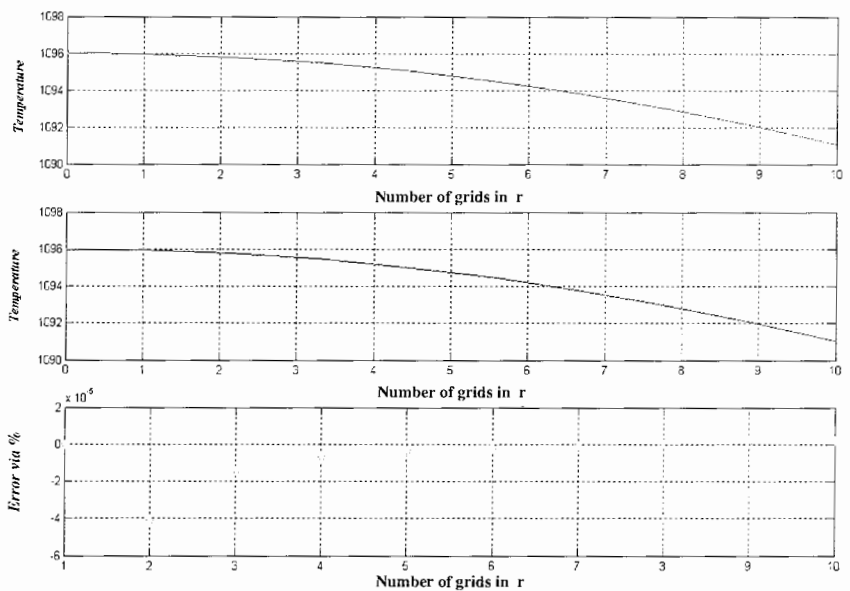
شکل ۵-۱۰ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \frac{\pi}{2}$ و در Γ های مختلف، پس از گذشت ۱۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر



شکل ۵-۱۱ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \frac{\pi}{2}$ و در Γ های مختلف، پس از گذشت ۲۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر



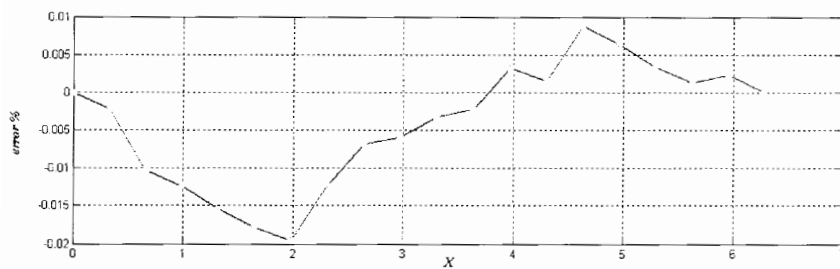
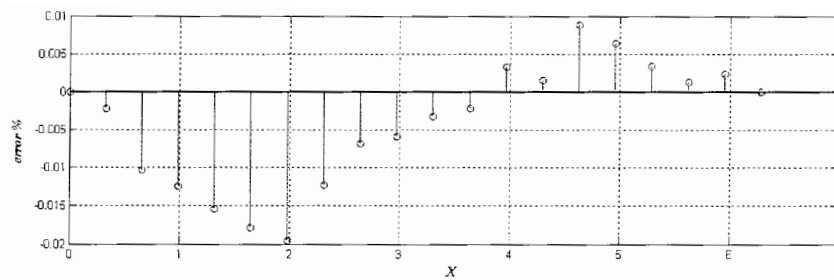
شکل ۵-۱۲ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \frac{3\pi}{2}$ و در Γ های مختلف، پس از گذشت ۱۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر



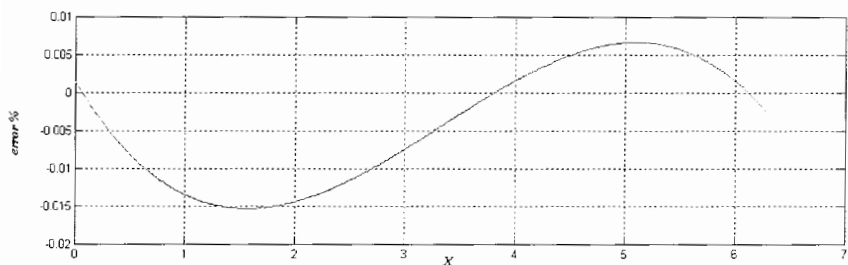
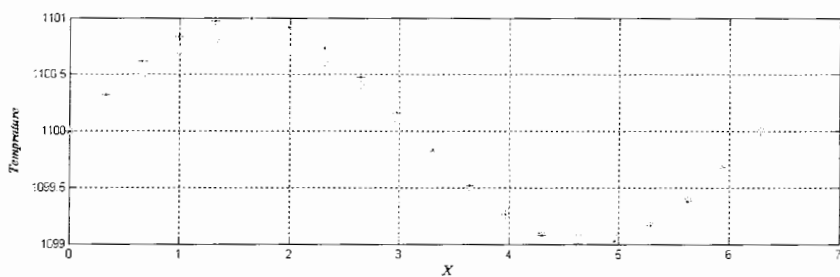
شکل ۵-۱۳ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = \frac{3\pi}{2}$ و در Γ های مختلف، پس از گذشت ۲۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر

یکی از ویژگی های حل مسائل معکوس حرارتی آن است که به منظور یافتن تأییدی بر صحت و دقت جوابها، مسئله را در پایان به صورت مستقیم حل میکنیم. به این صورت که پس از یافتن دماهای مطلوب در سطح قطعه پس از زمان معین (در این مسئله ۲۰ ثانیه) از این اطلاعات به عنوان داده های اولیه برای حل مسئله مستقیم استفاده می نماییم. با بازگرداندن زمان به لحظه نخست، دماهای محور مرکزی جسم استوانه ای شکل را می یابیم. حال به مقایسه این دما (حاصل از حل مستقیم) با دماهای نخستین در محور مرکزی جسم برای شروع حل معکوس می پردازیم. این موضوع در شکلهای (۵-۱۴) و (۵-۱۵) نمایش داده شده اند. با توجه به اینکه دماها پررودیک فرض شده اند ، این امر در شکل نیز به وضوح دیده می شود.

لازم به ذکر است راستای طولی مربوط به بازه تغییرات x می باشد. $(0 < x < 2\pi)$



شکل ۵-۱۴ نمودار درصد خطا بین دماهای مرکز در لحظه شروع مربوط به حل معکوس با دماهای بدست آمده از حل مستقیم در مرکز میله



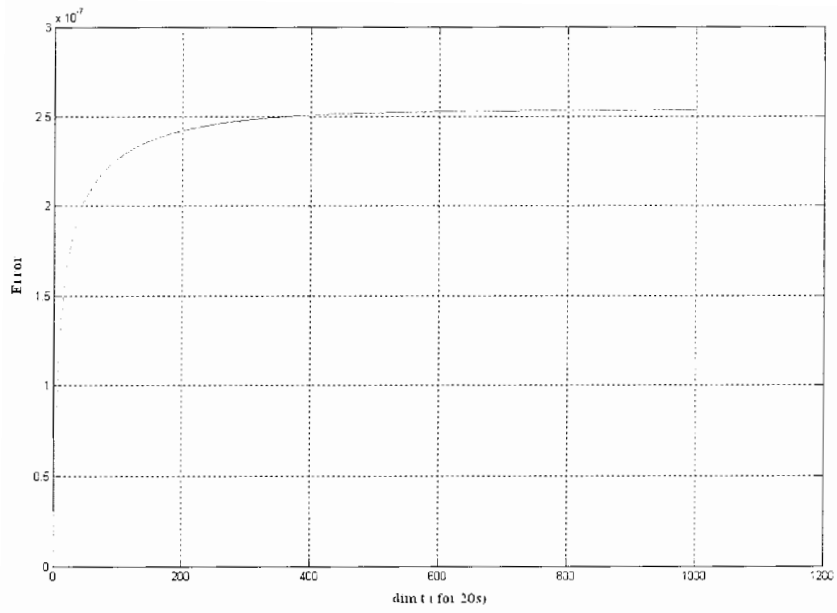
شکل ۵-۱۵ نمودار درصد خطا بین دماهای مرکز در لحظه شروع (*) مربوط به حل معکوس با دماهای بدست آمده از حل مستقیم (0) در مرکز میله و مقایسه آنها

در آخرین مرحله از این فصل به منظور تکمیل محاسبات و تصویر دقیق تری از نتایج حاصل از کد نوشته شده، به ترسیم نمودارهای جذر حداقل مربعات خطا پرداخته ایم.

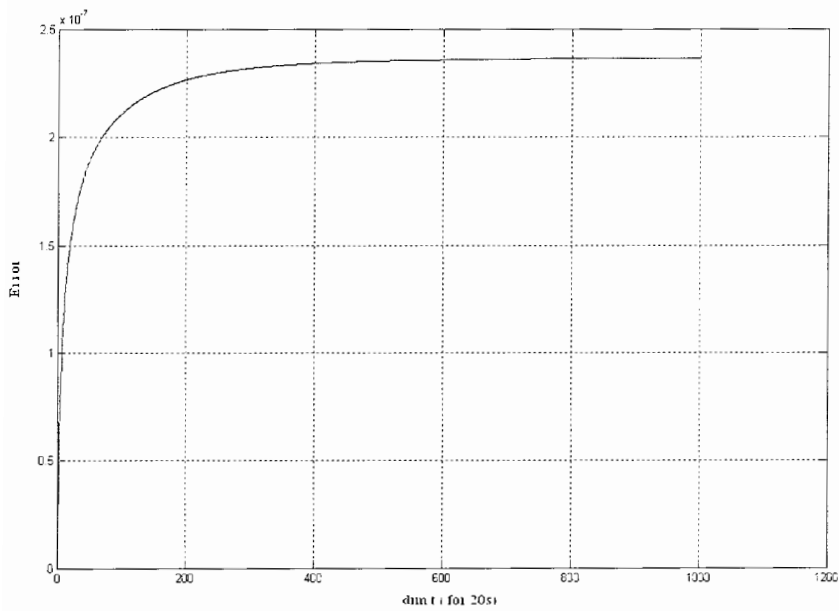
لذا در شکل (۵-۱۶) نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی سطح با گذشت زمان ترسیم شده است. به منظور ترسیم این شکل، پس از یافتن دماهای سطح در هر بار تکرار، این دماها نسبت به دماها در تکرار قبل سنجیده می شوند. در ابتدا با توجه به تجمع خطاها در مراحل قبل با افزایش خطا مواجه هستیم ولی با گذشت زمان این سیر صعودی تقریباً تبدیل به خط با شیب صفر میشود. این امر حاکی از تغییرات دما با زمان و یکنواخت شدن این تغییرات است. (همانگونه که در واقعیت انتظار داریم).

این موضوع در شکلهای (۵-۱۷)، (۵-۱۸) و (۵-۱۹) نیز برای نقاط واقع در سه محور X ثابت و Z های مختلف محاسبه و ترسیم شده است.

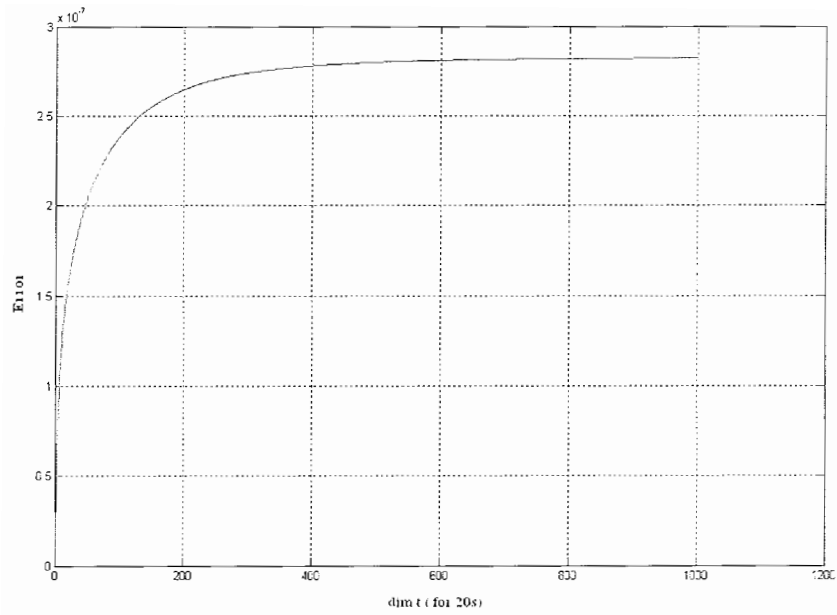
در کلیه این شکلهای محور طولی بیانگر تعداد تکرار در حوزه زمان است. در نتیجه با توجه به اینکه کل زمان ۲۰ ثانیه بوده و فواصل زمانی به صورت $(dt = 0.02)$ در نظر گرفته شده است لذا محور طولی به ۱۰۰۰ قسمت تقسیم بندی شده است.



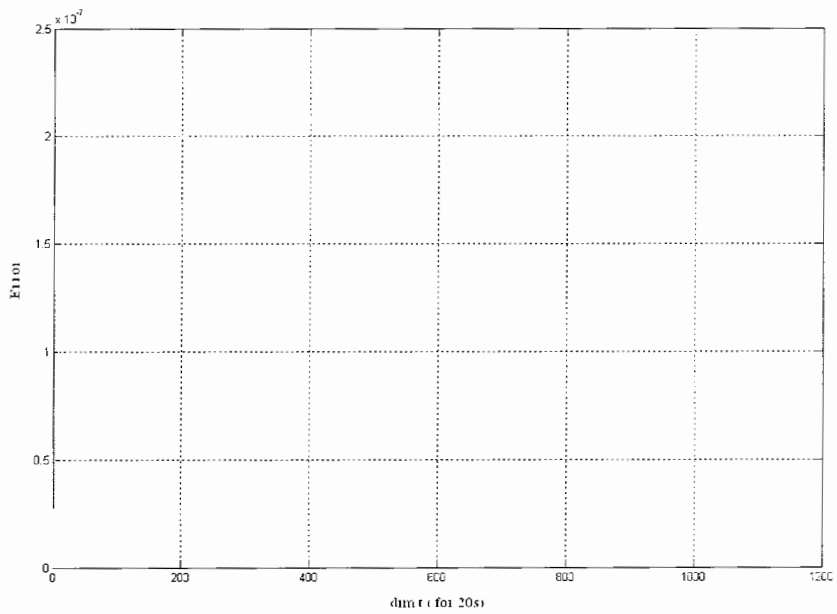
شکل ۱۸-۵ نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی $x = \frac{\pi}{2}$ با گذشت زمان



شکل ۱۹-۵ نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی $x = \pi$ با گذشت زمان



شکل ۵-۱۶ نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی سطح با گذشت زمان



شکل ۵-۱۷ نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی $x=\frac{3\pi}{2}$ با گذشت زمان

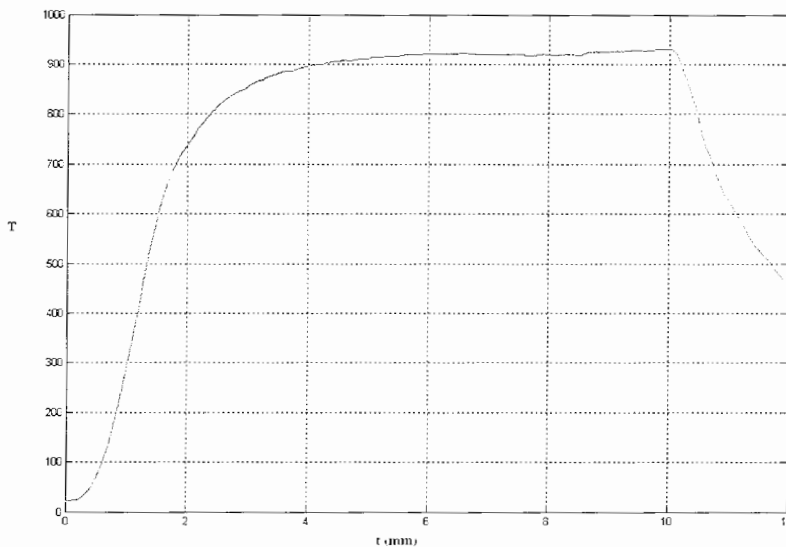
فصل ششم:

تحليل و ارزیابی تجربی برنامه کامپیوتری

۱-۶ حل یک مسئله واقعی

در این فصل برآنیم تا با استفاده از روش عددی تفاضلات محدود فشرده و برنامه کامپیوتری ارائه شده در فصلهای پیشین، به حل یک مسأله با استفاده از داده های واقعی، که از اندازه گیری دمای مرکز یک استوانه در خلال فرآیند گرم کردن جسم بدست آمده است پرداخته و به محاسبه شرایط مرزی برای مسأله معکوس آن بپردازیم.

داده های واقعی که در حل این مسئله مورد استفاده قرار گرفته اند در ادامه این فصل آورده شده اند. همان گونه که ملاحظه می گردد، اطلاعات حرارتی، در فواصل زمانی ۵ ثانیه ثبت گردیده اند و تقریباً شامل سه مرحله است. در ابتدا جسم از دمای محیط (21°C) شروع به گرم شدن می نماید و این فرآیند افزایش دما تا ثانیه ۴۰۰ و دمای ۹۲۰ درجه سانتیگراد ادامه دارد، تا اینکه در فاصله زمانی ۴۰۰ ثانیه تا ۶۰۰ ثانیه، دما تقریباً ثابت می باشد و بعد آن از دمای ۹۲۸ درجه سانتیگراد در ثانیه ۶۰۰، شروع به کاهش می نماید و این کاهش دما تا ثانیه ۷۲۰ و به میزان ۴۵۲ درجه سانتیگراد ادامه دارد. در شکل زیر دماهای درونیابی شده از مقادیر تجربی ملاحظه می گردند.



شکل ۱-۶ دماهای درونیابی شده بر اساس مقادیر تجربی برای محور مرکزی

۲-۶ توضیح پیرامون برنامه کامپیوتری

در این قسمت توضیحاتی در خصوص برنامه کامپیوتری که برای حل ارائه شده و به نظر لازم می رسد ارائه می گردد. در گام نخست همانگونه که ملاحظه می شود داده های تجربی $T(t)$ ارائه شده برای مرکز نسبت به راستای طول میله (محور x) بدون تغییر می باشند که این امر در حالتی که از طول میله در مقابل قطر آن صرفنظر نمی گردد و در لحظات نخستین صادق نمی باشد. لذا با توجه به این موضوع و حل دو بعدی مسئله و پیرویک بودن دما در راستای طولی، کلیه دماها در زمانهای مختلف در تابع زیر ضرب شده اند.

$$\frac{T(x,t)}{T(t)} = 1 + \frac{e^{-1/360} \text{Sin}x}{900} \quad ۱-۶$$

در برنامه، داده های تجربی از یک فایل متنی خوانده می شود که این فایل نیز قبل از اجرای برنامه می بایست به همراه فایل برنامه در شاخه work نرم افزار MATLAB ذخیره گردد و سپس می توان به این فایل متنی داده های دیگری را اضافه یا کم نمود و یا اینکه آن را تغییر داد.

همچنین در برنامه با توجه به اینکه پخشندگی گرمایی (α) برای تمامی نقاط و دماها ثابت فرض شده است، لذا در برنامه مقدار آن از جداول انتقال حرارت، برای مس خالص و در دمای ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شده که برای سایر موارد می توان با مراجعه به برنامه مقدار آن را برای مواد دیگر تغییر داد.

$$\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2/s) \quad ۲-۶$$

توجه شود که (α) ، قابلیت هر ماده را برای رسانش انرژی گرمایی نسبت به قابلیت آن برای ذخیره انرژی گرمایی را می سنجد. مواد با (α) بزرگ در برابر تغییرات گرمایی محیط سریعاً واکنش نشان می دهند، در حالی که مواد با (α) کوچک با کندی بیشتری پاسخ می دهند و زمان بیشتری طول می کشد تا به حالت جدید تعادلی برسند. این امر در برنامه کامپیوتری ارائه شده نیز زمانی که (α) برابر مقدار $(\alpha = 25 \times 10^{-6} (m^2/s))$ در نظر گرفته می شود کاملاً مشهود است.

در برنامه حاضر تغییرات در راستای طول ($0 \leq x \leq 2\pi$) بوده که به ۱۳ قسمت تقسیم شده و تغییرات در راستای شعاع ($0 \leq r \leq 1$) است و به ۱۰ قسمت تقسیم شده، به عبارت دیگر محاسبات برای ۱۳۰ گره انجام می پذیرد.

۳-۶ داده های تجربی

در جدول زیر داده های تجربی که به عنوان فایل ورودی در این قسمت برنامه از آنها استفاده شده

است ، ملاحظه می شود.

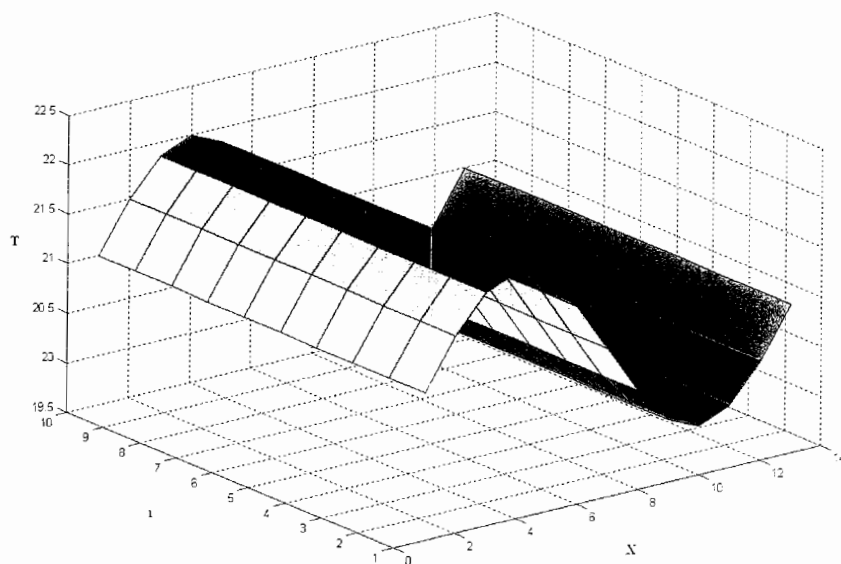
جدول ۱-۶ داده های تجربی دما - زمان برای مرکز

Time	Temperature	Time	Temperature	Time	Temperature	Time	Temperature	Time	Temperature
0	21	150	816	300	911	450	918	600	928
5	21	155	825	305	913	455	917	605	924
10	22	160	833	310	913	460	916	610	904
15	27	165	839	315	914	465	916	615	877
20	36	170	844	320	914	470	918	620	850
25	49	175	848	325	914	475	919	625	819
30	67	180	856	330	915	480	918	630	778
35	91	185	861	335	917	485	916	635	742
40	120	190	866	340	917	490	918	640	717
45	156	195	869	345	918	495	919	645	686
50	195	200	874	350	918	500	918	650	662
55	240	205	877	355	919	505	917	655	638
60	289	210	881	360	920	510	915	660	623
65	336	215	884	365	920	515	920	665	606
70	390	220	886	370	920	520	923	670	589
75	446	225	886	375	920	525	924	675	573
80	499	230	890	380	919	530	923	680	553
85	548	235	893	385	920	535	923	685	537
90	592	240	895	390	921	540	924	690	525
95	629	245	897	395	921	545	924	695	515
100	660	250	899	400	920	550	924	700	506
105	685	255	900	405	919	555	924	705	489
110	707	260	902	410	918	560	925	710	477
115	726	265	904	415	918	565	926	715	465
120	740	270	905	420	917	570	926	720	452
125	753	275	906	425	918	575	925		
130	771	280	905	430	918	580	926		
135	783	285	908	435	918	585	927		
140	795	290	909	440	918	590	927		
145	806	295	910	445	918	595	927		

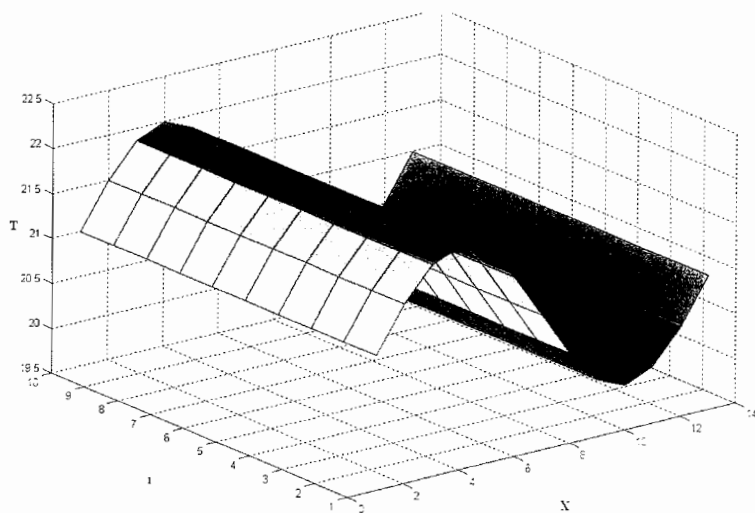
۴-۶ نتایج حاصل از داده های تجربی

در ادامه نتایج بدست آمده از حل به کمک داده های تجربی برای دو ماده با α متفاوت جهت

بررسی و مقایسه آورده شده اند.



شکل ۱-۶ کانتور دما برای کلیه نقاط در لحظه شروع ($t=0$)، این مقادیر برای هر α صادق بوده و یکسان است



شکل ۲-۶ کانتور دما برای کلیه نقاط در لحظه شروع ($t=0$) برای $\alpha=25 \times 10^{-6} (m^2/s)$ ، همانگونه که ملاحظه می شود با شکل قبل یکسان است.

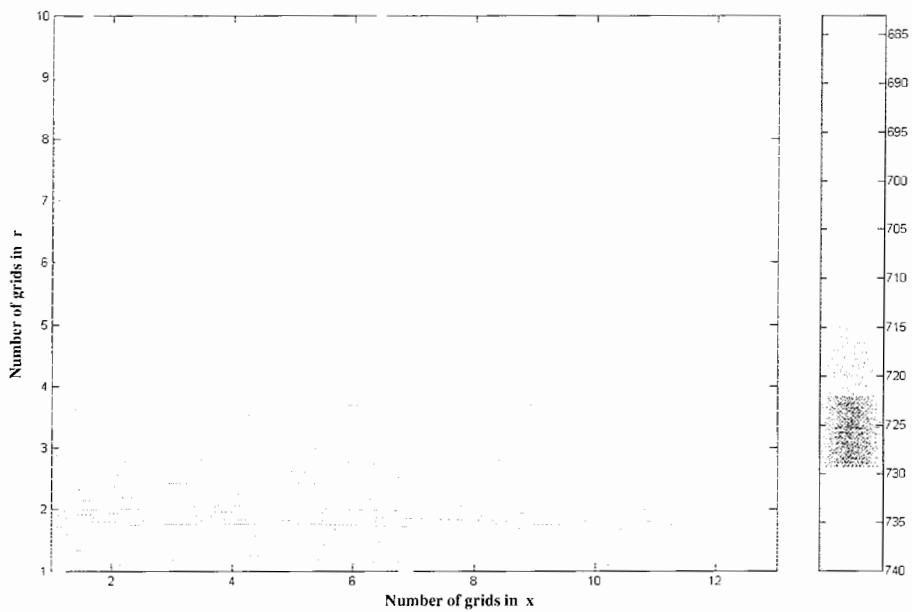
شکل‌های (۱-۶) و (۲-۶) بیانگر توزیع دما در لحظه نخست برای کلیه نقاط و برای دو حالت $\alpha = 170 \times 10^{-6} \left(\frac{m^2}{s} \right)$ و نیز $\alpha = 25 \times 10^{-6} \left(\frac{m^2}{s} \right)$ است. با توجه به مستقل بودن دمای آغازین از α لذا این دو شکل همانند خواهند بود.

توجه داریم محور X بیانگر تعداد تقسیمات در فاصله $0 < x < 2\pi$ است که در این مرحله به ۱۳ قسمت و محور r بیانگر تعداد تقسیمات در فاصله $0 < r < 1$ است که به ۱۰ قسمت تقسیم شده است. سپس در اشکال (۳-۶) و (۴-۶) برای حالت $\alpha = 170 \times 10^{-6} \left(\frac{m^2}{s} \right)$ و در لحظات $t = 120s$ و $t = 180s$ خطوط دما ثابت با توجه به راستاهای X و r ترسیم شده اند.

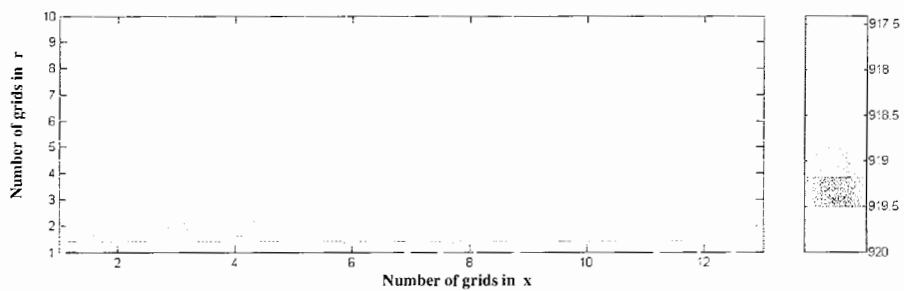
ملاحظه می شود با گذشت زمان تغییرات در محور مرکزی به سطح جسم رسیده و نقاط روی سطح نیز متأثر از این تغییرات می گردند. این امر در شکل (۴-۶ الف) به وضوح قابل تشخیص است. چرا که پریودیک بودن دما در لحظه نخست، کاملاً به سطح رسیده است.

همچنین با توجه به اینکه $\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ است، لذا می بایست خطوط دما ثابت در $r = 0$ بر محور X عمود باشند. این مورد در شکل (۴-۶ ب) با کمک داده های خروجی از برنامه و توانایی نرم افزار MATLAB در ترسیم، نشان داده شده است. این شکل نمایی نزدیک از قسمت پایین شکل (۴-۶ الف) می باشد.

به علاوه نوار رنگی در سمت راست گویای تغییرات دمایی است. به کمک آن قادر خواهیم بود میزان گسترش دما در مراحل مختلف زمانی را ملاحظه نماییم.

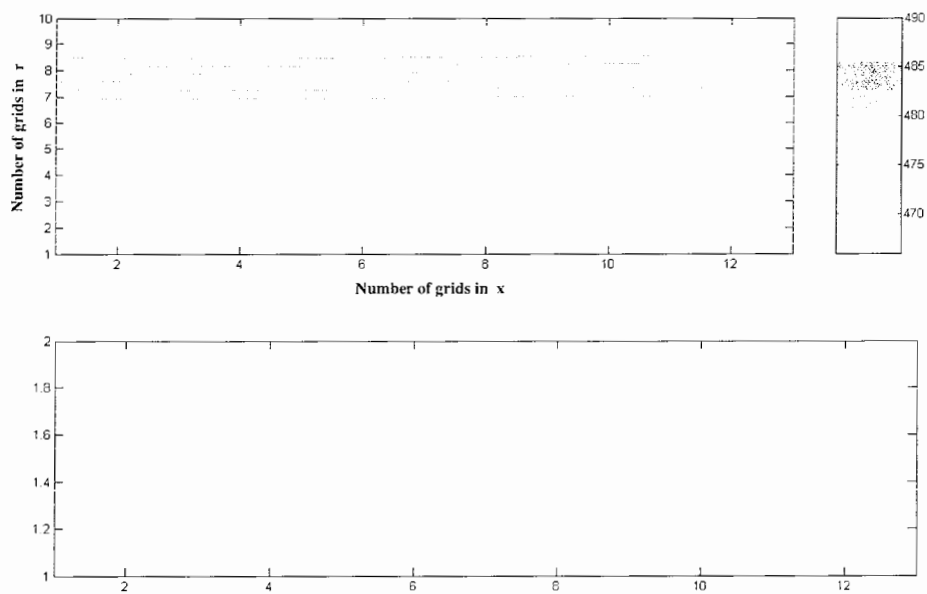


شکل ۳-۶ خطوط دما ثابت برای کلیه نقاط در لحظه (t=120s) برای $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2/s)$ راستای X و r براساس تعداد تقسیمات در هر راستا تقسیم بندی شده اند



شکل ۴-۶ (الف ب) خطوط دما ثابت برای کلیه نقاط در لحظه (t=360s) برای $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2/s)$ در قسمت پایین شکل فواصل نزدیک به مرکز (r = 0) که توسط نرم افزار MATLAB ترسیم شده ملاحظه می شود.

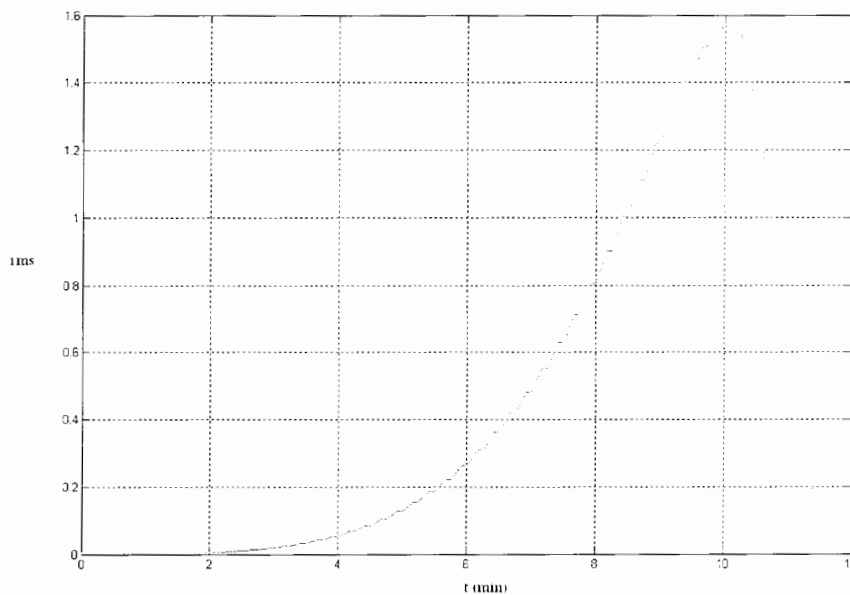
در نهایت در شکل (۵-۶) با گذشت ۷۲۰ ثانیه (۱۲ دقیقه) از آغاز فرآیند، ملاحظه می گردد تغییرات دمایی محور مرکزی نه تنها به سطح جسم رسیده بلکه شاهد یکنواختی دما در سراسر قطعه نیز می باشیم. در جائیکه تغییرات پیرو دیک دما در جسم قابل رؤیت است، دما در سطح جسم بیش از دمای محور مرکزی است. این موضوع کاملاً طبیعی است زیرا که با انتقال حرارت از مغز جسم به سطح با گذشت زمان منجر به کاهش دمای مرکز و افزایش دما در سطح جسم می گردد.



شکل ۵-۶ (الف ب) خطوط دما ثابت برای کلیه نقاط در لحظه (t=720s) برای $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2 / s)$ در قسمت پایین شکل فواصل نزدیک به مرکز (r = 0) که توسط نرم افزار MATLAB ترسیم شده ملاحظه می شود.

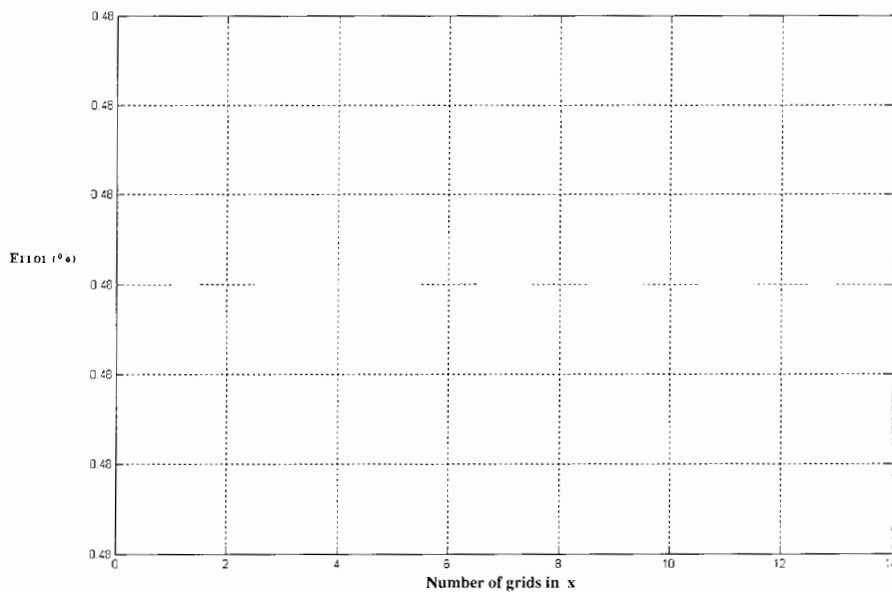
همچون فصل گذشته، به منظور بررسی دقیق تر اطلاعات خروجی از کد نوشته شده، نمودار جذر مجموع حداقل مربعات خطا با گذشت زمان برای حالتی که $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2/s)$ است ترسیم کرده ایم. این نمودار که برای مدت زمان کل ۷۲۰ ثانیه (۱۲ دقیقه) رسم شده، همانگونه که در گذشته توضیح داده شد با توجه به تجمع خطاها در مراحل قبل با گذشت زمان افزایش می یابد. در حالیکه با گذشت مدت زمان کافی که تغییرات دما یکنواخت می گردد این نمودار سریعاً سیری نزولی خواهد داشت.

توجه به این امر لازم به نظر می رسد، علت اصلی بالا بودن rms در این مرحله نسبت به فصل قبل که از طریق داده های تحلیلی ترسیمات انجام گردیده بود، آن است که در اینجا اطلاعات بر اساس داده های تجربی و برای مدت زمان بیشتری است (زیرا می بایست به مرحله یکنواختی دما در سراسر جسم می رسیدیم) که این موضوع قطعاً تأثیر گذار بر نتایج نهایی است.



شکل ۶-۶ جذر حداقل مربعات خطا برای $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2/s)$ ، براساس گذشت زمان برای تمامی نقاط

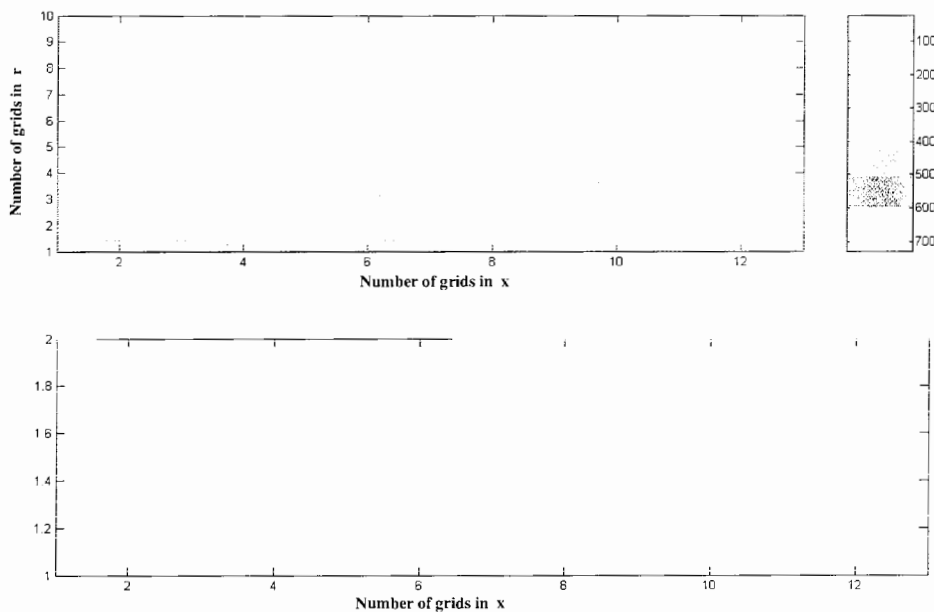
در ادامه نیز به منظور ارائه صحت محاسبات در روش حل معکوس به کمک کد نوشته شده، پس از گذشت زمان ۷۲۰ ثانیه و دستیابی به دماهای نهایی در سطح به حل مستقیم مسئله پرداخته ایم. آنگاه با قراردادن این دماها به عنوان دماهای نخست و برگرداندن زمان به صفر ($dt < 0$) دما در محور مرکزی را یافتیم و درصد خطای دماها در حل مستقیم و معکوس با یکدیگر مقایسه و در شکل (۶-۷) ترسیم گردیدند.



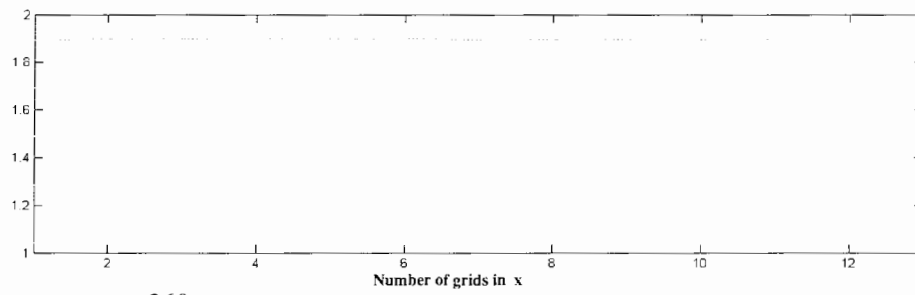
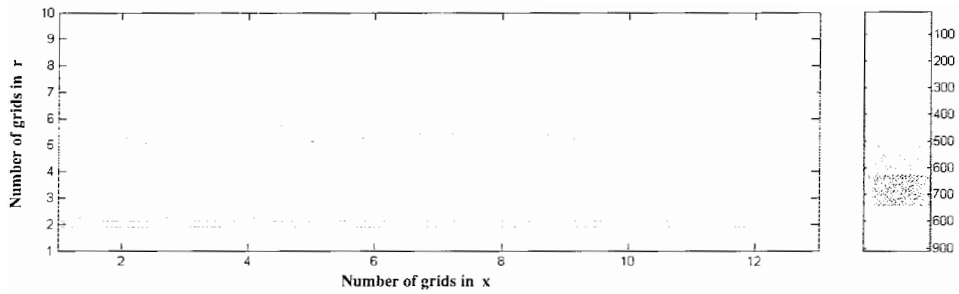
شکل ۶-۷ درصد خطا بین دماهای مرکز ($r = 0$) و در راستای X در حل معکوس و سپس حل مستقیم برای $\alpha = 170 \times 10^{-6} (m^2 / s)$

در خاتمه این فصل نیز به منظور بررسی دقیق تر ، محاسبات را برای حالتی که $\alpha = 25 \times 10^{-6} (m^2/s)$ است انجام داده ایم. با توجه به تعریف α انتظار می رود که تغییرات دما خیلی کندتر نسبت به حالت قبل در جسم منتقل شود. لذا همانطور که در شکل‌های (۶-۸) و (۶-۹) ملاحظه می گردد، این امر قابل تشخیص است.

در شکل (۶-۸) با گذشت زمان ۱۲۰ ثانیه از آغاز فرآیند افزایش دما در محور مرکزی جسم، شاهد اختلاف دمایی حدود ۷۰۰ درجه بین مغز و سطح جسم هستیم. جالب آنکه با گذشت ۱۰ دقیقه در حالیکه دما در مرکز به ۹۰۰ درجه رسیده همچنان دمای سطح تقریباً بدون تغییر باقی مانده است. لازم به ذکر است با مراجعه به جداول انتقال حرارت در کتب مرجع خواهیم دید مقدار α در نظر گرفته شده در این مرحله برای هواست که عایق حرارتی در هدایت حرارت است.



شکل ۶-۸ (الف ب) خطوط دما ثابت برای کلیه نقاط در لحظه (t=120s) برای $\alpha = 25 \times 10^{-6} (m^2/s)$ ، در قسمت پایین شکل فواصل نزدیک به مرکز ($r = 0$) که توسط نرم افزار MATLAB ترسیم شده ملاحظه می شود.



شکل ۶-۹ (الف ب) خطوط دما ثابت برای کلیه نقاط در لحظه $(t=360s)$ برای $\alpha = 25 \times 10^{-6} (m^2/s)$ در قسمت پایین شکل فواصل نزدیک به مرکز ($r = 0$) که توسط نرم افزار MATLAB ترسیم شده ملاحظه می شود.

فصل هفتم :

نتیجه گیری و پیشنهادات

اکنون در انتهای این پایان نامه به بیان نتایج حاصل پرداخته و در ادامه پیشنهاداتی نیز جهت ادامه عنوان میگردد.

در کلیه مراحل کوشش شد تا با استفاده از تاریخچه دما در محور استوانه و به روش حل معکوس، دما را در سطح با زمان متناسب با آن بدست آوریم و از آنجا که این تغییرات دما برحسب زمان ناشی از تغییرات دما بر حسب زمان در مرکز جسم است می توان اینگونه برداشت کرد که چنانچه شار گرمایی درون کوره به گونه ای محاسبه گردد تا چنین تغییرات دمایی را در سطح میله ایجاد نماید به یقین در سراسر جسم تا مرکز، دما به گونه ای تغییر خواهد کرد که ساختار متالورژی مورد نظر حاصل خواهد شد. برای تحقق این امر در گامهای بعد می توان با نوشتن معادلات انتقال حرارت تشعشع و هدایت از سطح جسم تا سطح کوره به این مهم دست یافت.

به عنوان پیشنهاد برای ادامه آنچه که تاکنون انجام شد می توان کار را برای جسم ناهمگن انجام داد. یعنی با داشتن مشخصه های فیزیکی در هر نقطه به تحلیل دوباره مسئله و انجام تغییرات در کد ارائه شده پرداخت. از طرفی همانطور که می دانیم α با تغییرات دما تغییر می کند لذا در واقعیت با گذشت زمان با تغییرات آن مواجه هستیم به همین منظور با محاسبه آن برای زمانها در دماهای مختلف و جاگذاری در معادلات و تغییرات در کد کامپیوتری و محاسبه مجدد معادله انتقال حرارت می توان به نتایج دقیق تر و جدید تری دست یافت.

و در خاتمه و در کلی ترین حالت ممکن مسئله را برای یک جسم ناهمگن سه بعدی حل کرد که نیازمند حل معادلات پیچیده انتقال حرارت و سپس نوشتن کد کامپیوتری جهت محاسبات پیشرفته است که یقیناً دست نیافتنی نبوده و با سعی و تأمل امری ممکن خواهد بود.

فصل هشتم :

ضمیمه ها

ضمیمه الف

۸-۱ کد کامپیوتری استفاده شده برای شبیه سازی مستقیم و معکوس حرارتی به زبان MATLAB

```
%the program solve numerically the partial differential equation of  
%thermodynamic for analytic function  $y=kr^2+4kt+e^{-t}*\sin(x)+c$  that c and k  
%are constants and alphatermo should be assume 1
```

```
% The important variables  
% U at the last of program is temprature, U(R,X,T) is the 3d matrix and show  
%temp of structure in any time and any point ,, y is analytic answer for  
%equation that used for bondary condition and at the end of program use for  
%solving errors
```

```
%t is time as second and U temp as centigrade degree
```

```
clear all;  
clc;
```

```
g=1;
```

```
alphatermo=1;  
j=1;
```

```
%dr and dimr are the resolution and number of grids in R  
dimr=20;  
dr=10/(dimr-1);  
r0=0;  
r=r0:dr:dimr*dr-dr/2;  
r=r';
```

```
%dx and dimx are the resolution and number of grids in x  
dimx=20;  
%pi or 2pi should be entered in this line  
dx=2*pi/(dimx-1);  
x0=0;  
X=0:dx:dx*dimx-dx/2;  
rr=r*ones(1,dimx);  
%%dt and dimt are temporary resolution and number of grids in t  
dimt=1000;  
dt=.01;  
t0=0;
```

```
%  
alphatermo=1;
```

```
[X,r]=meshgrid(X,r);  
k=-.05;  
y=sin(X)+k*r.^2+1100;  
T=y;  
clear X;
```

```

clear r;
r=r0:dr:dimr*dr-dr/2;
X=x0:dx:dimx*dx-dx/2;

%rang kutta coefficient
c1=8/15;
c2=5/12;
c3=3/4;
d1=0;
d2=-17/60;
d3=-5/12;

j=0;

%*****

tul=dimt*dt;

% the first line that function of t in t=0 be input via the function of t
% and X for example in f(x,t)=b*(1+exp(-t3/360)*sin(X)/900) you should
% enter U(:,,1)=(b(1)+.0002*rr.^2).*(1+sin(xx)/900) and change the line boundary condition;

U(dimr,dimx,1)=0;
U(:,,1)=T;

j=1;
for t=0:dt:dimt*dt,
    T=U(:,,j);
    j=j+1;

%the first drivate via R matrix
%*****
%*****

N(dimr,dimr)=0;
M(dimr,dimr)=0;

%*****
N(1,1)=-5/(2*dr);
N(1,2)=4/(2*dr);
N(1,3)=1/(2*dr);
N(dimr,dimr)=-N(1,1);
N(dimr,dimr-1)=-N(1,2);
N(dimr,dimr-2)=-N(1,3);

M(1,1)=1;
M(1,2)=2;
M(dimr,dimr)=1;

```

```

M(dimr,dimr-1)=2;
%*****
N(2,1)=-3/(dr);
N(2,3)=-N(2,1);
N(dimr-1,dimr)=-N(2,1);
N(dimr-1,dimr-2)=N(2,1);

M(2,1)=1;
M(2,2)=4;
M(2,3)=1;
M(dimr-1,dimr)=1;
M(dimr-1,dimr-1)=4;
M(dimr-1,dimr-2)=1;

%*****

alpha=1/4;
aprim=(16*alpha+32)/(40*alpha-1);
alpha=aprim;
zz1=(alpha+2)/(3*dr*alpha);
zz2=(4*alpha-1)/(12*dr*alpha);
N(3,1)=-zz2;
N(3,2)=-zz1;
N(3,4)=zz1;
N(3,5)=zz2;
N(dimr-2,dimr)=zz2;
N(dimr-2,dimr-1)=zz1;
N(dimr-2,dimr-3)=-zz1;
N(dimr-2,dimr-4)=-zz2;

M(3,2)=1;
M(3,3)=1/aprim;
M(3,4)=1;
M(dimr-2,dimr-1)=1;
M(dimr-2,dimr-2)=1/aprim;
M(dimr-2,dimr-3)=1;

%*****

alpha=1/3;
zz1=(alpha+2)/(3*dr*alpha);
zz2=(4*alpha-1)/(12*dr*alpha);
for n=4:dimr-3;
N(n,n+1)=zz1;
N(n,n-1)=-zz1;
N(n,n+2)=zz2;
N(n,n-2)=-zz2;

M(n,n-1)=1;
M(n,n)=1/alpha;
M(n,n+1)=1;
end,

```

```

%*****

moshf=M^(-1)*N;

clear M;
clear N;

%the second drivate via R matrix
%*****
%*****

N(dimr,dimr)=0;
M(dimr,dimr)=0;

%*****
N(1,1)=-3/2;
N(1,2)=0;
N(1,3)=3/2;

N(dimr,dimr)=13;
N(dimr,dimr-1)=-27;
N(dimr,dimr-2)=15;
N(dimr,dimr-3)=-1;

M(1,1)=1;
M(1,2)=2;
M(dimr,dimr)=1;
M(dimr,dimr-1)=11;
%*****

N(2,1)=12;
N(2,2)=-24;
N(2,3)=12;
N(dimr-1,dimr)=N(2,1);
N(dimr-1,dimr-1)=N(2,2);
N(dimr-1,dimr-2)=N(2,3);

M(2,1)=1;
M(2,2)=10;
M(2,3)=1;
M(dimr-1,dimr)=1;
M(dimr-1,dimr-1)=10;
M(dimr-1,dimr-2)=1;

for jjj=1:tul*3.2,
jz(ijj)=((ijj/tul).^4)*N(2,3)*4e-004;
end,

%*****

```

```

for n=3:dimr-2;

N(n,n+1)=4;
N(n,n-1)=4;
N(n,n)=-9;
N(n,n+2)=.5;
N(n,n-2)=.5;

M(n,n-1)=1;
M(n,n)=4;
M(n,n+1)=1;
end,

%*****
N=N./(dr*dr);

moshs=M^(-1)*N;

clear M;
clear N;

%the second drivate via X matrix
%*****
%*****

N(dimx,dimx)=0;
M(dimx,dimx)=0;

%*****
N(1,1)=-3/2;
N(1,2)=0;
N(1,3)=3/2;

N(dimx,dimx)=13;
N(dimx,dimx-1)=-27;
N(dimx,dimx-2)=15;
N(dimx,dimx-3)=-1;

M(1,1)=1;
M(1,2)=2;
M(dimx,dimx)=1;
M(dimx,dimx-1)=11;
%*****

N(2,1)=12;
N(2,2)=-24;
N(2,3)=12;
N(dimx-1,dimx)=N(2,1);
N(dimx-1,dimx-1)=N(2,2);
N(dimx-1,dimx-2)=N(2,3);

```

```

M(2,1)=1;
M(2,2)=10;
M(2,3)=1;
M(dimx-1,dimx)=1;
M(dimx-1,dimx-1)=10;
M(dimx-1,dimx-2)=1;

%*****

for n=3:dimx-2;

N(n,n+1)=4;
N(n,n-1)=4;
N(n,n)=-9;
N(n,n+2)=.5;
N(n,n-2)=.5;

M(n,n-1)=1;
M(n,n)=4;
M(n,n+1)=1;
end,

%*****

N=N./(dx*dx);

moshx=M^(-1)*N;

clear M;
clear N;

%*****
%step 1

Tprim=moshf*T;
%divide via R
Tprim(1,:)=0;
tprimrom(2:dimr,:)=Tprim(2:dimr,:)/rr(2:dimr,:);
Tprimrom(1)=0;
%tprim/r is calculated

%second drivate via X and R
tzegondr=moshs*T;
tzegondx=(moshx*T)';

ru=alphatermo*(tprimrom+tzegondr+tzegondx);

%*****
%*****

```

```

%step 2

t1=t+c1*dt;
T=T+c1*dt*ru;

Tprim=moshf*T;
Tprim(1)=0;
Tprimrom(1)=0;
%tprim/r is calculated

tprimrom(2:dimr,:)=Tprim(2:dimr,:)/rr(2:dimr,:);
tzegondr=moshs*T;

tzegondr=moshs*T;
tzegondx=(moshx*T)';

ru1=alphatermo*(tprimrom+tzegondr+tzegondx);

%*****
%step 3

t2=t1+(c2+d2)*dt;
T=T+(c2*ru1+d2*ru)*dt;

Tprim=moshf*T;
Tprim(1)=0;
Tprimrom(1)=0;
%%tprim/r is calculated

tprimrom(2:dimr,:)=Tprim(2:dimr,:)/rr(2:dimr,:);

tzegondr=moshs*T;
tzegondx=(moshx*T)';

ru2=alphatermo*(tprimrom+tzegondr+tzegondx);

%*****
%step 4

t3=t+dt;
U(:,j)=T+(c3*ru2+d3*ru1)*dt;

%boundary condition
U(1,j)=exp(-t3)*sin(X)+4*k*t3+1100;
U(:,dimx,j)=4*k*t3+k*r.^2+1100;
U(:,1,j)=U(:,dimx,j);

%the initial condition for aborting divergence

```



```

%*****

if (tul>3200)&(tul<4000)&(dimx==13)&(dimr==10),
    teste=(alphatermo/170e-6)^2.5*.9;
    for ii=2:dimr,

U(ii,:,j)=((U(ii-1,:,j)-U(ii,:,j-1))*dt*teste+U(ii,:,j-1));
        end,

    end,
    clear jz;
    %the initial condition for aborting divergence
    %*****

end,

[Xx,rr]=meshgrid(X,r);
for jj=1:dimt,
    t33=jj*dt-dt;
    t(jj)=t33;
    kl=abs(U(:, :,jj)-(exp(-t33)*sin(Xx)+4*k*t33+1100+k*rr.^2));
    hh=mean(kl.^2);
    err1(jj)=sqrt(mean(hh'));
end,
plot(t,err1);
grid on;
title('root of mean square error via time for all points');
figure;

%    plots and figures

y=exp(-t3).*sin(X)+4*k*t3+1100+k*r(dimr)^2;
Tp=U(dimr,:,j);
err=((y-Tp)*100./y);
subplot(3,1,1);
aa=plot(X,Tp);
set(aa,'linewidth',2);
grid on;
title('calculated temp on surface at end');
subplot(3,1,2);
aa=plot(X,y);
set(aa,'linewidth',2);
grid on;
title('real temp on surface at end');
subplot(3,1,3);
aa=plot(err,'*');
set(aa,'linewidth',2);
grid on;
title('error via % between calculated and real temp');
clear a* c* d* e* r* y* i* o* p* q* w* s* f* g* h* j* k* l* z* x* v* n* m*;

```

ضمیمه ب

۲-۸ کد کامپیوتری استفاده شده برای داده های تجربی به زبان برنامه نویسی MATLAB

%all files and programs should be copied in matlab drive, work subfolder to
%run correctly for example: c:\matlab6.5\work\data.txt

% The important variables
% U at the last of program is temprature, U(R,X,T) is the 3d matrix and show
%temp of structure in any time and any point
%t is time as second and U temp as centigrade degree

```
clear all;  
clc;  
a=load('taha.txt');  
bt=a(:,1);  
bu=a(:,2);  
tul=length(bt);  
bt=bt/60;
```

```
%dr and dimr are the resolution and number of grids in R  
dimr=10;  
dr=1/(dimr-1);  
r0=0;  
r=r0:dr:dimr*dr-dr/2;  
r=r';
```

```
%dx and dimx are the resolution and number of grids in x  
dimx=13;  
%pi or 2pi should be entered in this line  
dx=2*pi/(dimx-1);  
X=0:dx:dx*dimx-dx/2;
```

```
%dt and dimt are temporary resolution and number of grids in t  
dimt=5000;  
dt=max(bt)/dimt;  
t0=0;
```

```
%  
alphatermo=(170e-6);
```

```
%rang kutta coefficient  
c1=8/15;  
c2=5/12;  
c3=3/4;  
d1=0;  
d2=-17/60;  
d3=-5/12;
```

```

j=0;
a(1,3)=0;

%regression of input condition
for i=1:3:tul-2,
    j=j+1;
    a(j,:)=polyfit(bt(i:i+2),bu(i:i+2),2);
end,
if (i~=tul-2),
    j=j+1;
    a(j,1:2)=polyfit(bt(i+2:tul),bu(i+2:tul),1);
end,

a(j,:)=[0 a(j,1:2)];

j=0;
u=0;
k=0;

for i=1:3:tul-2,
    j=j+1;
    k=1+u;
    p=bt(i):dt:bt(i+2);
    u=length(p)+k-1;
    t(k:u)=p;
    clear p;
    s=a(j,:);
    ss=t(k:u);
    b(k:u)=polyval(s,ss);

end,

%*****

tul=length(b);
U(dimr,dimx,1)=0;
[xx,rr]=meshgrid(X,r);

% the first line that function of t in t=0 be input via the function of t
% and X for example in f(x,t)=b*(1+exp(-t3/360)*sin(X)/900) you should
% enter U(:,,1)=(b(1)+.0002*rr.^2).*(1+sin(xx)/900) and change the line
boundary condition;
U(:,,1)=b(1)+.0002*rr.^2+sin(xx);

dt=60*dt;

j=1;
for i=1:tul-1,
    T=U(:,,j);
    j=j+1;
    tt=60*t(j);

```

```

%the first drivate via R matrix
%*****
%*****

N(dimr,dimr)=0;
M(dimr,dimr)=0;

%*****
N(1,1)=-5/(2*dr);
N(1,2)=4/(2*dr);
N(1,3)=1/(2*dr);
N(dimr,dimr)=-N(1,1);
N(dimr,dimr-1)=-N(1,2);
N(dimr,dimr-2)=-N(1,3);
M(1,1)=1;
M(1,2)=2;
M(dimr,dimr)=1;
M(dimr,dimr-1)=2;
%*****

N(2,1)=-3/(dr);
N(2,3)=-N(2,1);
N(dimr-1,dimr)=-N(2,1);
N(dimr-1,dimr-2)=N(2,1);

M(2,1)=1;
M(2,2)=4;
M(2,3)=1;
M(dimr-1,dimr)=1;
M(dimr-1,dimr-1)=4;
M(dimr-1,dimr-2)=1;

%*****

alpha=1/4;
aprim=(16*alpha+32)/(40*alpha-1);
alpha=aprim;
zz1=(alpha+2)/(3*dr*alpha);
zz2=(4*alpha-1)/(12*dr*alpha);
N(3,1)=-zz2;
N(3,2)=-zz1;
N(3,4)=zz1;
N(3,5)=zz2;
N(dimr-2,dimr)=zz2;
N(dimr-2,dimr-1)=zz1;
N(dimr-2,dimr-3)=-zz1;
N(dimr-2,dimr-4)=-zz2;

M(3,2)=1;
M(3,3)=1/aprim;
M(3,4)=1;
M(dimr-2,dimr-1)=1;
M(dimr-2,dimr-2)=1/aprim;

```

```

M(dimr-2,dimr-3)=1;

%*****

alpha=1/3;
zz1=(alpha+2)/(3*dr*alpha);
zz2=(4*alpha-1)/(12*dr*alpha);
for n=4:dimr-3;
N(n,n+1)=zz1;
N(n,n-1)=-zz1;
N(n,n+2)=zz2;
N(n,n-2)=-zz2;

M(n,n-1)=1;
M(n,n)=1/alpha;
M(n,n+1)=1;
end,

%*****

moshf=M^(-1)*N;

clear M;
clear N;

%the second drivate via R matrix
%*****
%*****

N(dimr,dimr)=0;
M(dimr,dimr)=0;

%*****
N(1,1)=-3/2;
N(1,2)=0;
N(1,3)=3/2;

N(dimr,dimr)=13;
N(dimr,dimr-1)=-27;
N(dimr,dimr-2)=15;
N(dimr,dimr-3)=-1;

M(1,1)=1;
M(1,2)=2;
M(dimr,dimr)=1;
M(dimr,dimr-1)=11;
%*****

N(2,1)=12;
N(2,2)=-24;
N(2,3)=12;

```

```

N(dimr-1,dimr)=N(2,1);
N(dimr-1,dimr-1)=N(2,2);
N(dimr-1,dimr-2)=N(2,3);

M(2,1)=1;
M(2,2)=10;
M(2,3)=1;
M(dimr-1,dimr)=1;
M(dimr-1,dimr-1)=10;
M(dimr-1,dimr-2)=1;

for jjj=1:tul*3.2,
jz(jjj)=(jjj/tul).^4*N(2,3)*4e-004;
end,

%*****

for n=3:dimr-2;

N(n,n+1)=4;
N(n,n-1)=4;
N(n,n)=-9;
N(n,n+2)=.5;
N(n,n-2)=.5;

M(n,n-1)=1;
M(n,n)=4;
M(n,n+1)=1;
end,

%*****
N=N./(dr*dr);

moshs=M^(-1)*N;

clear M;
clear N;

%the second drivate via X matrix
%*****
%*****

N(dimx,dimx)=0;
M(dimx,dimx)=0;

%*****
N(1,1)=-3/2;
N(1,2)=0;
N(1,3)=3/2;

N(dimx,dimx)=13;
N(dimx,dimx-1)=-27;

```

```

N(dimx,dimx-2)=15;
N(dimx,dimx-3)=-1;
M(1,1)=1;
M(1,2)=2;
M(dimx,dimx)=1;
M(dimx,dimx-1)=11;
%*****

N(2,1)=12;
N(2,2)=-24;
N(2,3)=12;
N(dimx-1,dimx)=N(2,1);
N(dimx-1,dimx-1)=N(2,2);
N(dimx-1,dimx-2)=N(2,3);

M(2,1)=1;
M(2,2)=10;
M(2,3)=1;
M(dimx-1,dimx)=1;
M(dimx-1,dimx-1)=10;
M(dimx-1,dimx-2)=1;

%*****

for n=3:dimx-2;

N(n,n+1)=4;
N(n,n-1)=4;
N(n,n)=-9;
N(n,n+2)=.5;
N(n,n-2)=.5;
M(n,n-1)=1;
M(n,n)=4;
M(n,n+1)=1;
end,

%*****

N=N./(dx*dx);

moshx=M^(-1)*N;

clear M;
clear N;

%*****
%step 1

Tprim=moshf*T;
%divide via R
Tprim(1)=0;
tprimrom(2:dimr,:)=Tprim(2:dimr,:)./rr(2:dimr,:);

```

```

Tprimrom(1)=0;
%tprim/r is calculated
%second drivate via X and R
tzegondr=moshs*T;
tzegondx=(moshx*T)';

ru=alphatermo*(tprimrom+tzegondr+tzegondx);

%*****
%*****
%step 2

t1=tt+c1*dt;
T=T+c1*dt*ru;

Tprim=moshf*T;
Tprim(1)=0;
Tprimrom(1)=0;
%tprim/r is calculated

tprimrom(2:dimr,:)=Tprim(2:dimr,:)/rr(2:dimr,:);
tzegondr=moshs*T;

tzegondr=moshs*T;
tzegondx=(moshx*T)';

ru1=alphatermo*(tprimrom+tzegondr+tzegondx);

%*****
%step 3

t2=t1+(c2+d2)*dt;
T=T+(c2*ru1+d2*ru)*dt;

Tprim=moshf*T;
Tprim(1)=0;
Tprimrom(1)=0;
%%tprim/r is calculated

tprimrom(2:dimr,:)=Tprim(2:dimr,:)/rr(2:dimr,:);

tzegondr=moshs*T;
tzegondx=(moshx*T)';

ru2=alphatermo*(tprimrom+tzegondr+tzegondx);

%*****
%step 4

t3=tt+dt;
U(:,j)=T+(c3*ru2+d3*ru1)*dt;

```



```

%boundary condition
U(1,:,j)=b(j)+exp(-t3/360)*sin(X);
%the initial condition for aborting divergence
%*****
%*****

if (dimr~=10) break; end,
    if (dimx~=13) break; end,
        if (tul>3200)&(tul<4000)&(dimx==13)&(dimr==10),
            teste=(alphatermo/170e-6)^2.5*.9;
            for ii=2:dimr,
U(ii,:,j)=(U(ii-1,:,j)-U(ii,:,j-1))*dt*teste+U(ii,:,j-1));
                end,

            end,
clear jz;
%the initial condition for aborting divergence
%*****
%*****

end,
uu=1:tul;
k(uu)=U(dimr,(dimx+1)/2,uu);
k1(uu)=U(1,(dimx+1)/2,uu);
%temperature of core and surface via t, red for core and blue for
%surface
plot(t,k,'r',t,k1,'b');
grid on;
figure;
%the start temperature for t=0;
surf(U(:, :, 1));
grid on;
figure;
%the final temperature for t=720 second;
surf(U(:, :, tul));
grid on;
figure;

clear a* c* d* e* r* y* i* o* p* q* w* s* f* g* h* j* k* l* z* x* v* n* m*;

```

- 1- Frank P.Incropera , David P.Dewitt, Introduction to Heat Transfer, Fourth Edition, Bahram Poosti, ISBN: 964-6904-44-0
- 2- Glossary of Metallurgical Terms and Engineering Tables, American Society for Metals,1979.
- 3- Heat Treatment of Steel, Course 10, Lesson 3, Metals Engineering Institute, American Society Of Metals,1981
- 4- Heat Treatment of Steel, Course 10, Lesson 6, Metals Engineering Institute, American Society Of Metals,1977
- 5- Heat Treatment of Steel, Course 10, Lesson 7, Metals Engineering Institute, American Society Of Metals,1977
- 6- J.R.Cannon, Determination of certain Parameters in Heat Conduction Problems, J.Math. Anal. Appl., 8,188-201(1964)
- 7- Klaus A.Hoffmann, Steve T.Chiang, Computational Fluid Dynamics For Engineers, Volume one, A.R.Azimian,ISBN: 964-6029-35-3
- 8- M.J.Maghrebi, A Study of the Evolution of Intense Focal Structure in Spatially Developing three Dimensional Plane Wakes, Phd thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, 1999
- 9- Sanjiva K.Lele, Compact Finite Difference Schemes with Spectral- Like Resolution, Journal of Computational Physics,1992, Vol 103
- 10- Vedat S.Arpaci, Conduction Heat Transfer, Wesley, 66-25602,1966
- 11- Tavernier-P Szpunar-JA, Modeling of Recrystallization Textures, ACTA METALURGICA ET MATERIALIA, 1991, Vol 39, Iss 4, pp 549-556
- 12- Reti-T Gergely-M, Computerized Process Planning in Heat-Treatment Practice Using Personal Computers, HEAT TREATMENT OF METALS, 1991, Vol 18, Iss 4, pp 117-121
- 13- Gao-JX Shao-BH Zhang-K, A Study of the Mechanism of Consolidating Metal-Powder Under Explosive-Impulsive Shock-Waves, JOURNAL OF APPLIED PHYSICS, 1991, Vol 69, Iss 11, pp 7547-7555

- 14- Sellars-CM, Modeling Micro structural Development During Hot-Rolling, MATERIALS SCIENCE AND TECHNOLOGY, 1990, Vol 6, Iss 11, pp 1072-1081
- 15- Campbell-PC Hawbolt-EB Brimacombe-JK, Micro structural Engineering Applied to the Controlled Cooling of Steel Wire Rod.1. Experimental-Design and Heat-Transfer, METALURGICAL TRANSACTION A-PHYSICAL METALURGY AND MATERIALS SCIENCE, 1991, Vol 22, Iss 11, pp 2769-2778
- 16- Pietrzyk-M Kusiak-H Korhonen-AS Malinen-M, Thermal mechanical and Micro structural Model for Reverse Hot-Rolling, SCANDINAVIAN JOURNAL OF METALLURGY, 1992, Vol 21, Iss 5, pp 229-232
- 17- Umemoto-M Hiramatsu-A Moriya-A Watanabe-T Nanba-S Nakajima-N Anan-G Higo-Y, Computer Modeling of Phase-Transformation form Work-Hardened Austenite, ISIJ INTERNATIONAL, 1992, Vol 32, Iss 3, pp 306-315
- 18- Kern-A Degenkolbe-J Musgen-B Schriever-U, Computer Modeling for the prediction of Micro structure Development and Mechanical-Properties of Hsla Steel Plates, ISIJ INTERNATIONAL, 1992, Vol 32, Iss 3, pp 387-394
- 19- Yoshie-A Fujioka-M Watanabe-Y Nishioka-K Morikawa-H, Modeling of Micro structural Evolution and Mechanical Properties of Steel Plates Produced by Thermomechanical Control Process, ISIJ INTERNATIONAL, 1992, Vol 32, Iss 3, pp 395-404
- 20- Watanabe-Y Shimomura-S Funato-K Nishioka-K Yoshie-A Fujioka-M, Integrated Model for Micro structural Evolution and Properties of Steel Manufactured in Production Line, ISIJ INTERNATIONAL, 1992, Vol 32, Iss 3, pp 405-413
- 21- Wang-KF Chandrasekar-S Yang-HTY, Finite-Element Simulation of Induction Heat-Treatment, JOURNAL OF MATERIALS ENGINEERING AND PERFORMANCE, 1992, Vol 1, Iss 1, pp 97-112
- 22- Karhausen-K Kopp-R, Model for Integrated Process and Micro structure, STEEL RESEARCH, 1992, Vol 63, Iss 6, pp 247-256

- 23- Kwon-O, A Technology for the Prediction and Control of Micro structural Changes and Mechanical-Properties in Steel, ISIJ INTERNATIONAL, 1992, Vol 32, Iss 3, pp 350-358
- 24- Senuma-T Suehiro-M Yada-H, Mathematical-Models for Predicting Micro structural Evolution and Mechanical-Properties of Hot Strips, ISIJ INTERNATIONAL, 1992, Vol 32, Iss 3, pp 423-432
- 25- Artyukhin-EA Ivanov-GA Nenarokomov-AV, Determining the Thermo physical Characteristics of materials on the Basis of Nonsteady Temperature-Measurements, HIGH TEMPRATURE, 1993, Vol 31, Iss 2, pp 269-274
- 26- Pietrzyk-M Kedzierski-Z Kusiak-H Madej-W Lenard-JG, Evaluation of the Microstructure in the Hot-Rolling Process, 1993, Vol 64, Iss 11, pp549-556
- 27- Kurpisz-K Nowak-AJ, BEM Approach to Inverse Heat-Conduction Problems, ENGINEERING ANALYSIS WITH BOUNDARY ELEMENTS, 1992, Vol 10, Iss 4, pp 291-297
- 28- Li-YM Fouladgar-J Develey-G, Inverse Problem Methodology in an Induction-Heating System, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, 1994, Vol 30, Iss 5, Part 2, pp 3076-3079
- 29- Loureiro-AJR Fernandes-AA, Toughness of CG Hazs of Welds in Q-and-T Steels, WELDING JOURNAL, 1994, Vol 73, Iss 9, pp S225-S232
- 30- Huang-CH Yan-JY Chen-HT, Function Estimation in Predicting Temperature-Dependent Thermal-Conductivity Whithout Internal Measurements, JOURNAL OF THERMOPHYSICS AND HEAT TRANSFER, Vol 9, Iss 4, pp 667-673
- 31- Lehnert-W Cuong-ND Wehage-H, Simulation of Austenitic Micro structure in Rod and Wire Rolling of Quenched and Tempered Steel Grades, STEEL RESEARCH, 1995, Vol 66, Iss 11, pp 470-475
- 32- Prasad-A Jha-S Mishra-Ns, Modeling of Micro structural Evolution During Accelerated Cooling of Hot Strip on the Runout Table, STEEL RESEARCH, 1995, Vol 66, Iss 10, pp 416-423

- 33- Huang-CH Yan-JY, An Inverse Problem in Simultaneously Measuring Temperature-Dependent Thermal-Conductivity and Heat-Capacity, INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER, 1995, Vol 38, Iss 18, pp 3433-3441
- 34- Priestner-R Zhou-C, Simulation of Micro structural Evolution in Nb-Ti Micro alloyed Steel During Hot Direct Rolling, IRONMAKING & STEELMAKING, 1995, Vol 22, Iss 4, pp326-332
- 35- Wang-KF Chandrasekar-S Yang-HTY, Finite-Element Simulation of Moving Induction Heat-Treatment, JOURNAL OF MATERIALS ENGINEERING AND PERFORMANCE, 1995, Vol 4, Iss 4, pp 460-473
- 36- Teoh-LL, Thermomechanical Processing and Micro structure of Micro alloyed Steel Bar and Wire Rod Products, JOURNAL OF MATERIALS PROCESSING TECHNOLOGY, 1995, Vol 48, Iss 1-4, pp 475-481

Abstract:

In this work we studied the 2D transient heat conduction problem by means of compact finite difference method. To achieve this, an inverse method was employed. The method used both the temperature-time history and the spatial rate of change of the temperature-time trace at the middle of a cylindrical bar as a Dirichlet and Neumann type boundary conditions. The spatial derivatives in the thermal heat conduction equation were approximated numerically using the compact finite difference scheme of Lele. The temporal derivative of the governing equation was treated according to the compact third order Runge Kutta method developed by A. Wary. The solution of the governing equation was obtained using the methods just described. For this reason a MATLAB code was developed and verified against an exact solution and the results of an experimental data. The inverse simulation has also been verified by applying a direct method which uses the temperature distribution at the final stage of the inverse simulation. The results of the simulation indicate the accuracy of the proposed algorithm for solving both the inverse and direct heat conduction problems. Two more simulations were also conducted with different thermal diffusivities. The results show that the temperature is quickly changes for the simulation with the high thermal diffusivity than the other simulation which used a lower thermal diffusivity.