

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک، گرایش ذرات بنیادی و
اطلاعات کوانتومی

نقش همبستگی های کوانتومی در آهنگ تولید آنتروپی دو نوسانگر هماهنگ جفت شده

نگارنده: بهاره نکونام

استاد راهنما

دکتر مرتضی رفیعی

دی ۱۳۹۸

تقدیم به...

پدر بزرگوالم که الفبای زندگی را به من آموخت و مادر دلسوزم که از اول آفرینش، هیچ واژه ای نتوانسته مهر او را معنی کند او که بی صدا شکست تا طلوع سپیده را نظاره گر باشد، برادر عزیزم که همیشه امیدبخش من بوده است و دوستان مهربانم که همواره در کنار من بوده اند. امیدوارم قادر به درک زیباییهای وجودشان باشم.

سپاس‌گزاری...

شکر و سپاس خدا را که بزرگ‌ترین امید و یاور در لحظه‌های زندگی است. از استاد ارجمند و اندیشمند جناب آقای دکتر مرتضی رفیعی به عنوان استاد راهنما که همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داده‌اند، کمال تشکر را دارم، بدون شک انجام این پایان‌نامه بدون کمک و راهنمایی‌های ارزنده ایشان امکان‌پذیر نبوده است.

بهاره نکونام

دی ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب بهاره نکونام دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان نقش همبستگی های کوانتومی در آهنگ تولید آنتروپی دو نوسانگر هماهنگ جفت شده، تحت راهنمایی مرتضی رفیعی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

بهاره نکونام

دی ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، دینامیک مسئله دو نوسانگر هماهنگ جفت شده را با استفاده از رهیافت معادلات کوانتومی لانژون بدست می آوریم و در ادامه با استفاده از این معادلات ماتریس هم وردایی را محاسبه می نماییم، و عبارتی برای آهنگ تولید آنتروپی در حالت پایا برای نوسانگرهای کوانتومی غیرتعادلی ارائه می دهیم که امکان تفسیر ساده از شروع بازگشت ناپذیری را فراهم می آورد. سپس آهنگ تولید آنتروپی و همبستگی های کوانتومی سیستم (اطلاعات متقابل) را با استفاده از ماتریس هم وردایی بدست می آوریم و در نهایت رفتار تولید آنتروپی را با همبستگی های کوانتومی سیستم مقایسه و تحلیل می نماییم. در نهایت نتایج خود را جهت تجزیه و تحلیل به یک تشدیدکننده نانومکانیکی و یک میدان کاواک (یک سیستم اپتو مکانیکی) نیز اعمال می نماییم.

کلمات کلیدی: نوسانگر هماهنگ کوانتومی، معادلات کوانتومی لانژون، آهنگ تولید آنتروپی، اطلاعات متقابل

فهرست مطالب

ک	فهرست تصاویر
۱	۱ مقدمات و اطلاعات کوانتومی
۲	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ مفاهیم اولیه کلاسیکی
۳	۱.۲.۱ ترمودینامیک کلاسیک
۴	۲.۲.۱ مکانیک آماری
۴	۳.۲.۱ مفهوم سیستم
۵	۴.۲.۱ تعادل ترمودینامیکی
۶	۵.۲.۱ فرآیند تعادلی
۶	۶.۲.۱ فرآیند غیر تعادلی
۶	۷.۲.۱ قوانین ترمودینامیک
۹	۳.۱ مفاهیم کوانتومی
۹	۱.۳.۱ همبستگی کوانتومی
۱۰	۲.۳.۱ درهم تنیدگی کوانتومی
۱۰	۳.۳.۱ نظریه اطلاعات
۱۱	۴.۳.۱ آنتروپی شانن
۱۱	۵.۳.۱ آنتروپی فون نویمان
۱۳	۶.۳.۱ ماتریس چگالی
۱۳	۷.۳.۱ ماتریس چگالی کاهش یافته
۱۴	۸.۳.۱ اطلاعات متقابل
۱۵	۴.۱ متغیرهای سیمپلکتیک، اندازه گیری آنتروپی و همبستگی حالات گاوسی
۱۵	۱.۴.۱ مقدمه
۱۶	۲.۴.۱ حالات گاوسی دو مدی
۱۸	۳.۴.۱ تعیین آنتروپی فون نویمان
۱۹	۵.۱ ویژه مقادیر سیمپلکتیک، اطلاعات متقابل و همبستگی ها

۲۰	نتیجه گیری	۶.۱
۲۱	ترمودینامیک کوانتومی و آهنگ تولید آنتروپی	۲
۲۲	برگشت ناپذیری در سیستم های کوانتومی	۱.۲
۲۳	معادلات حرکت سیستم	۱.۱.۲
۲۶	آهنگ تولید آنتروپی، همبستگی های کوانتومی	۲.۲
۲۶	کمیت همبستگی از طریق آنتروپی رینی	۱.۲.۲
۲۷	کمیت اطلاعات از طریق آنتروپی رینی مرتبه دو	۲.۲.۲
۳۲	رابطه بین آهنگ تولید آنتروپی و اطلاعات متقابل	۳.۲.۲
	محاسبه آهنگ تولید آنتروپی و همبستگی کوانتومی برای نوسانگرهای هماهنگ	۳
۳۵	جفت شده	
۳۶	تجزیه و تحلیل آهنگ تولید آنتروپی	۱.۳
۴۴	نوسان گرها و حمام های یکسان	۱.۱.۳
۴۵	همبستگی در یک سیستم نوری مکانیکی	۲.۳
۴۹	نتیجه گیری	۳.۳
۵۱	مراجع	
۵۷	پیوست آ	
۵۷	Mathematica	۱.آ

فهرست تصاویر

۳	۱.۱	موتور حرارتی کلاسیک کارنو
۷	۲.۱	قانون دوم ترمودینامیک بیان کلوین-پلانک
۸	۳.۱	قانون دوم ترمودینامیک بیان کلاسیوس
	۱.۲	در شکل (a) سیستم اتلاف محور، متشکل از جفت شدگی زیر سیستم های a و b، با یک آنتروپی همراه به یک حالت غیرتعادلی پایا می رسد، Π_s آهنگ تولید و Φ_s شار آنتروپی از سیستم به محیط است. در شکل (b) هر دو سیستم می توانند به عنوان مدل دو نوسانگر هماهنگ جفت شده با فرکانس های ω_a و ω_b به صورت خطی با قدرت برهم کنش G_{ab} همراه باشند. هر نوسان گر به حمام محلی مستقل با دمای T_a و T_b جفت شده است. آهنگها متناظرند با κ_a و κ_b نوسان گرها را می توان با یک میدان خارجی پمپ کرد(فلش های موجود در شکل ۲.۱).
۲۴	۲.۲	نوسان گرهای مربوط به شکل در ابتدا در تعادل حرارتی با تعدادی از برانگیختگی های N_a و N_b به ترتیب (دایره های شکسته) قرار دارند. با اتصال G، آنها به حالت ثابت می رسند که با $N_{a,s}$ و $N_{b,s}$ (دایره های کامل) مشخص می شوند. (a) نمونه ای از فرآیند ثابت ممنوع که در آن هر دو با توجه به مقادیر تعادل آنها کاهش می یابد، بنابراین منجر به $\Pi_s < 0$ می شود. (b) آنتروپی هنوز هم می تواند به صورت محلی کاهش یابد ($\mu_b < 0$) به عنوان نتیجه کاهش در تحریکات در تحریکات N_b ، $N_{b,s}$ ، اما این امر مستلزم آن است که تحریکات در حالت \hat{a} جمع می شوند.
۳۱	۳.۲	مقایسه آهنگ تولید آنتروپی Π_s/ω_b (خط پیوسته)، اطلاعات متقابل I (خط چین) برای شکل (a) $N_a = 0$ ، $\kappa_b = 0/5\omega_b$ ، $\kappa_a = 0/2\omega_b$ ، $G = 0/1\omega_b$ و $N_b = 0$ و $N_b = 10$ برای شکل (b) و در شکل (c) و (d) توزیع آنتروپی برای مقادیر $N_b = 0$ و $N_b = 10$ به ترتیب بدست آمده است.
۳۴		

- ۱.۳ آهنگ تولید آنتروپی Π_s/ω_b در شکل (a) و دو سهم آن μ_a/ω_b در شکل (b) و μ_b/ω_a در شکل (c) در برابر نسبت دو فرکانس؛ منحنی های پیوسته مطابق $k_a = k_b = 0.2$ است و در منحنی های خط چین $k_a = 0.2$ و $k_b = 0.5$ است. پارامترهای دیگر $N_a = N_b = 0$ ، $G = 0.1$ در شکل های (d) ، (e) ، (f) و در شکل های (a) ، (b) ، (c) همان موارد با $N_a = 0$ و $N_b = 100$ در حالت برانگیخته حرارتی را نشان می دهند و خط پیوسته آهنگ تولید آنتروپی و خط چین همبستگی های سیستم را نشان می دهد. ۳۸
- ۲.۳ آهنگ تولید آنتروپی $\Pi_s/\omega_{b,a}$ و دو سهم آن $\mu_a/\omega_{b,b}$ و $\mu_b/\omega_{b,a}$ در برابر نسبت N_b/N_a نوسان گرها دارای همان فرکانس $k_a = 0.2$ و $k_b = 0.5$ هستند و هر دو با مقاومت $G=0.05$ (منحنی های پیوسته) یا $G=0.2$ (منحنی های خط چین) همراه هستند. ۴۰
- ۳.۳ آهنگ تولید آنتروپی $\Pi_s/\omega_{b,a}$ و دو سهم آن $\mu_a/\omega_{b,b}$ و $\mu_b/\omega_{b,a}$ است، نسبت دو فرکانس برای (حالت پیوسته) به صورت $k_a = k_b = 0.2$ است، درحالیکه برای (حالت خط چین) $k_a = 0.2$ و $k_b = 0.5$ می باشد. پارامترهای دیگر $N_a = 0$ و $N_b = 10$ و $G=0.01$ برای نمودارهای (d)-(f) و برای نمودارهای (c)-(a) $G=0.6$ است. ۴۳
- ۴.۳ در شکل تنظیمات نوری مکانیکی: یک نوسان گر میکرو مکانیکی δq_b جفت شده با یک کاواک نوری δq_a نشان داده شده است، برای این تنظیم فقط کاواک پمپ شده است. ۴۵
- ۵.۳ مقایسه آهنگ تولید آنتروپی (خط چین) و اطلاعات متقابل (خط پیوسته) برحسب Δ با استفاده از مقادیر $g=0.1$ و $\gamma_m = 0.01$ و $k=0.5$ و $N = 10$ رسم شده است، ۴۷
- ۶.۳ ارزیابی تجربی از تولید آنتروپی برگشت ناپذیر با آهنگ Π_s در حالت پایای غیرتعادلی برای سیستم کاواک نوری مکانیکی صورت گرفته است. در سیستم کاواک نوری مکانیکی، g_{ab} دو برابر استاندارد آهنگ جفت شده نوری مکانیکی است، رفتار تنظیمات در نظر گرفته شده را نشان می دهد، در شکل خطوط پیوسته پیش بینی های تئوری را بر اساس مقادیر نشان می دهند، نقاط داده های تجربی را نشان می دهد و خطهای عمودی و افقی خطهای آزمایشگاهی را نشان می دهد. ۴۸

فصل ۱

مقدمات و اطلاعات کوانتومی

۱.۱ مقدمه

درفیزیک و علوم کامپیوتر، اطلاعات کوانتومی اطلاعاتی است که در حالت یک سیستم کوانتومی نگه داری می‌شوند. اطلاعات کوانتومی موضوع بنیادی مطالعه در نظریه اطلاعات کوانتومی است و می‌تواند با استفاده از تکنیک‌های مهندسی ای که به عنوان پردازش اطلاعات کوانتومی شناخته می‌شوند، دستکاری شود. اطلاعات کلاسیک می‌تواند توسط کامپیوترهای دیجیتال پردازش شود، از محلی به محل دیگر منتقل شود، به وسیله الگوریتم‌ها دستکاری شود، و با ریاضیات علوم کامپیوتر تجزیه و تحلیل شود، به همین صورت مفاهیم مشابهی درباره اطلاعات کوانتومی صادق است.

در حالی که واحد پایه اطلاعات کلاسیک بیت است، در اطلاعات کوانتومی واحد پایه کیوبیت است. بین اطلاعات کوانتومی و اطلاعات کلاسیکی، که تجلی آن در بیت است، تفاوت‌هایی وجود دارد که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

واحد اطلاعات کوانتومی کیوبیت است، برخلاف حالت‌های کلاسیک دیجیتال (که گسسته‌اند)، یک کیوبیت دارای حالت‌های پیوسته است، کیوبیت کوچکترین واحد ممکن اطلاعات کوانتومی است. با توجه به غیرپایا بودن سیستم‌های کوانتومی و عدم امکان کپی کردن حالت‌ها، ذخیره اطلاعات کوانتومی بسیار دشوارتر از ذخیره اطلاعات کلاسیک است. با استفاده از دروازه‌های کوانتومی می‌توان بیت‌های کلاسیک را در کیوبیت‌ها ذخیره کرد و سپس از آنها خواند. اطلاعات کوانتومی را می‌توان از طریق کانال کوانتومی انتقال داد، این مفهوم متناظر است با مفهوم کانال مخابراتی کلاسیک. پیام‌های کوانتومی دارای اندازه محدودی هستند که با واحد کیوبیت اندازه‌گیری می‌شوند. کانال‌های کوانتومی نیز دارای ظرفیت کانال محدودی هستند که با واحد کیوبیت در ثانیه اندازه‌گیری می‌شوند.

اطلاعات کوانتومی و تغییرات اطلاعات کوانتومی را می‌توان به‌طور کمی با استفاده از آنتروپی نظیر آنتروپی شانن، به نام آنتروپی فون نویمان، اندازه‌گیری کرد. با داشتن یک آنسامبل آماری از سیستم‌های مکانیکی کوانتومی با ماتریس چگالی ρ این آنتروپی از رابطه ی زیر به دست می‌آید:

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho), \quad (1.1)$$

می‌توان بسیاری از روش‌های آنتروپی مشابه در نظریه اطلاعات کلاسیک را به آنتروپی کوانتومی مشروط، تعمیم داد.

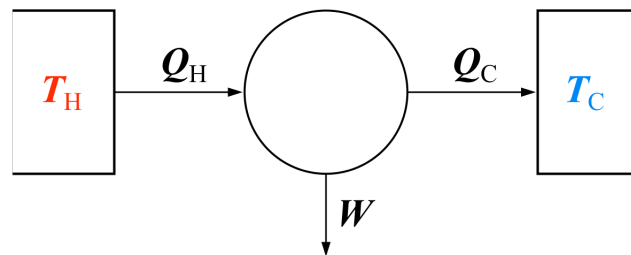
آنتروپی یک کمیت اساسی برای مشخص کردن فرآیندهای دینامیکی است: این مفهوم خصوصیت‌هایی مانند بی‌نظمی، اطلاعات و خصوصیت برگشت ناپذیری را دارد. هر تغییری که نشان دهنده یک وضعیت برگشت ناپذیر است منجر به تولید آنتروپی می‌شود [۱]. تعیین مقدار آنتروپی برگشت ناپذیر تولید شده توسط یک فرآیند معین، از اهمیت اساسی برخوردار است:

قانون دوم ترمودینامیک را می توان با توجه به محدودیت موجود در تولید آنتروپی بدست آورد که هرگز نمی تواند منفی باشد [۴۰]. در این فصل به معرفی مختصری از مفاهیم اولیه کلاسیکی می پردازیم، سپس مفاهیم کوانتومی را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲.۱ مفاهیم اولیه کلاسیکی

۱.۲.۱ ترمودینامیک کلاسیک

ترمودینامیک شاخه‌ای از علوم طبیعی است که به بحث راجع به گرما و نسبت آن با انرژی و کار می‌پردازد، که متغیرهای ماکروسکوپیکی مانند دما، انرژی داخلی، آنتروپی و فشار را برای توصیف حالت سیستم تعریف و چگونگی ارتباط آن‌ها و قوانین حاکم بر آن‌ها را بیان می‌نماید، همچنین رفتار میانگینی از تعداد زیادی از ذرات میکروسکوپی را بیان می‌کند. از دیدگاه تاریخی ترمودینامیک با آرزوی افزایش بازده موتورهای بخار گسترش یافت [۱]. به ویژه به سبب تلاش‌های فیزیکدان فرانسوی، نیکولا کارنو که اعتقاد داشت افزایش بازده موتورهای بخار می‌تواند رمز پیروزی فرانسه در نبردها ناپلئون باشد. او میزان تاثیر موتورهای بخار در تبدیل گرما به کار را برای اولین بار در سال ۱۸۴۲ و در فرآیند به حرکت درآوردن پیستون و توانایی چرخش بیان کرد. براساس مطالعات کارنو بالاترین بهره وری یک موتور تنها به اختلاف دما میان منبع موتور گرمایی و منبع مصرف کننده گرما وابسته است. و در ادامه بیان کرد که کار، محصول جانبی گرما است و به شکل طبیعی از جسم گرم تر به جسم سردتر منتقل می‌شود.



شکل ۱.۱: موتور حرارتی کلاسیک کارنو

۲.۲.۱ مکانیک آماری

مکانیک آماری به سیستم‌هایی با تعداد متغیرهای بسیار زیاد می‌پردازد. این متغیرها می‌توانند ذراتی چون اتم‌ها، مولکول‌ها، یا ذرات بنیادی باشند که تعداد آن‌ها می‌تواند هم‌مرتب با عدد آووگادرو باشد. مکانیک آماری شکوفایی خود را قبل از همه، مدیون دانشمندان کلاسیکی نظیر لودویگ بولتزمن، جوسایا ویلارد گییز و جیمز کلرک ماکسول می‌باشد. هدف مکانیک آماری پیش‌گویی، درک پدیده‌های ماکروسکوپی و محاسبه خواص آن‌ها از روی خواص مولکولهای منفرد سازنده آن سیستم است. مکانیک آماری مانند پلی است که خواص ذره‌ها (نتایج مکانیک کوانتومی) را به خواص ماکروسکوپی (نتایج ترمودینامیک) سیستم مربوط می‌کند. ترمودینامیک قادر است بین بسیاری از خواص ارتباط برقرار نماید، ولی در رابطه با مقدار آن و علتها هیچ اطلاعاتی نمیدهد. برعکس، در مکانیک آماری صحبت از علتها، چراها و اندازه‌گیری مقادیر است. [۲]

۳.۲.۱ مفهوم سیستم

یکی از مفاهیم اصلی در ترمودینامیک سیستم می‌باشد. سیستم ناحیه‌ای از فضا است که برای بررسی انتخاب می‌شود. این قسمت به وسیله مرزهایی از محیط اطراف خود جدا می‌شود. این مرزها می‌توانند فیزیکی یا فرضی باشند. به هر آنچه که خارج از این سیستم وجود دارد محیط گفته می‌شود. سیستم به وسیله مرزی از محیط جدا می‌شود. این مرز می‌تواند مرزی واقعی یا مجازی باشد. سیستم به سه نوع تقسیم می‌شود:

سیستم باز: به سیستمی باز گفته می‌شود که بتواند با محیط خود تبادل انرژی و ماده داشته باشند.

سیستم بسته: به سیستمی گفته می‌شود که با محیط خود تبادل ماده نداشته باشند. همانند: یک لیوان دارای هر ماده شیمیایی در ظرف سر بسته.

سیستم تک‌افتاده: به سیستمی تک‌افتاده گفته می‌شود که با محیط خود نه کار و نه انرژی مبادله کند. همانند ظرف عایق دارای هر نوع ماده شیمیایی با پیستون غیر روان و فلاکس.

۴.۲.۱ تعادل ترمودینامیکی

تعادل ترمودینامیکی در سیستم‌های ترمودینامیکی به حالتی گفته می‌شود که در آن سیستم در حالت تعادل مکانیکی، تعادل شیمیایی و تعادل گرمایی باشد. وقتی که مختصات ترمودینامیکی یک سیستم به هر طریقی، چه خود به خود و چه به سبب عوامل خارجی تغییر کنند، گفته می‌شود که سیستم تغییر حالت داده است. هنگامی که حالت یک جسم تغییر می‌کند، معمولاً برهم‌کنش‌هایی بین سیستم و محیط آن رخ می‌دهد. هنگامی که شرایط برای هر سه نوع تعادل مکانیکی، شیمیایی و گرمایی برقرار باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود که سیستم در حالت تعادل ترمودینامیکی است.

اگر سیستمی به هیچ وجه تحت تاثیر محیط قرار نگیرد، منزوی نامیده می‌شود. در کاربردهای علمی سیستم‌های منزوی از اهمیت کمی برخوردار هستند. در ترمودینامیک معمولاً با سیستم‌هایی سروکار داریم که به نحوی تحت تاثیر محیط قرار می‌گیرند.

برای برقراری تعادل گرمایی بایستی با وجود امکان انتقال گرما، انتقال خالص گرما از یک نقطه به نقطه دیگر نداشته باشیم. تابع حالت T (دما) مشخص می‌کند که آیا تعادل گرمایی برقرار است یا نه.

در صورتیکه T ها برابر باشند، تعادل گرمایی (حالات پایدار دما است یعنی دما در درون سیستم از نظر زمانی یکنواخت است.) برقرار است، در غیر اینصورت گرما از نقطه یا نقاط با دمای بالاتر به نقطه یا نقاط با دمای پایین‌تر جابجا می‌شود یا جریان می‌یابد تا زمانی که در نهایت T ها با هم برابر شوند. برای برقراری تعادل مکانیکی بایستی با وجود امکان جریان کار، جریان خالص کار از یک نقطه به نقطه دیگر نداشته باشیم. تابع حالت P (فشار) مشخص می‌کند که آیا تعادل مکانیکی برقرار است یا نه.

در صورتیکه P ها برابر باشند، تعادل مکانیکی (وقتی که هیچ‌گونه نیروی خنثی نشده‌ای در داخل سیستم و هم‌چنین بین سیستم و محیط آن وجود نداشته باشد، می‌گویند که سیستم در تعادل مکانیکی قرار دارد. اگر این شرایط برقرار نباشند، یا سیستم به تنهایی یا سیستم و محیط اطراف آن هر دو تغییر حالت خواهند داد و این تغییر حالت وقتی متوقف می‌شود که تعادل مکانیکی دوباره برقرار گردد.) برقرار است، در غیر اینصورت کار از نقطه یا نقاط با P بالاتر به نقطه یا نقاط با P پائین‌تر جریان می‌یابد تا زمانی که در نهایت P ها با هم برابر شوند. برای برقراری تعادل شیمیایی بایستی با وجود امکان جریان ماده، انتقال خالص ماده از یک نقطه به نقطه دیگر یا از یک فرم به فرم دیگر نداشته باشیم. تابع حالت μ (پتانسیل شیمیایی) مشخص می‌کند که آیا تعادل مادی برقرار است یا نه؟

در صورتی که μ ها برابر باشند، تعادل مادی برقرار است، در غیر اینصورت ماده از نقطه یا نقاط با μ پائین‌تر یا فرمها با μ بالاتر به نقطه یا نقاط با μ پائین‌تر جریان می‌یابد تا زمانی که در نهایت پتانسیل شیمیایی ها با هم برابر شوند.

۵.۲.۱ فرآیند تعادلی

یک تحول می‌تواند به طریق مختلفی تحول یابد، فرآیند تعادلی انتقال از یک حالت سیستم به حالت دیگر آن است. اگر دوسطح اولیه و ثانویه در یک سیستم یکسان باشد تعادل در آن سیستم برقرار است. فرآیند تعادلی می‌تواند بی‌نهایت آرام صورت گیرد. بعد از یک تغییر بسیار کوچک در پارامترها، تغییر بعدی تا رسیدن سیستم به حالت تعادل صورت نمی‌گیرد، یعنی تمام پارامترها در سراسر سیستم، با مقادیر ثابت فرض می‌شوند. بعد از آن مرحله بعدی صورت می‌گیرد و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. بنابراین، تمامی فرآیند شامل مدهای تعادلی متوالی است [۱]. چنین فرآیندی، فرآیند تعادلی نامیده می‌شود.

۶.۲.۱ فرآیند غیر تعادلی

در نظر بگیرید باید به یک حالت با حجم متفاوت برسیم. بدیهی است که اگر تحول به آرامی انجام نشود، فشار و دما برای مدت زیادی در حجم ثابت نخواهند بود. در حالت کلی صحبت درباره فشار و دمای سیمپلتیک بی معنی خواهد بود، چون آنها در نقاط مختلف متفاوت هستند. علاوه بر آن توزیع فشار و دما در یک حجم فقط به حالت های اولیه و نهایی بستگی ندارد بلکه به نحوه انجام این تحول وابسته است [۱]. بنابراین حالت های میانی در یک چنین فرآیندی، غیر تعادلی است و این فرآیند را غیر تعادلی می‌نامند.

۷.۲.۱ قوانین ترمودینامیک

قوانین ترمودینامیک به چهار قانونی فیزیکی گفته می‌شود که از واحدهای اصلی فیزیک مانند فشار، انرژی و آنتروپی برای توصیف سیستم‌های ترمودینامیکی در یک تعادل گرمایی استفاده می‌کند. این قوانین عبارت‌اند از:

قانون صفرم ترمودینامیک: قانون صفرم ترمودینامیک بیان می‌کند که اگر دو سیستم با سیستم سومی در حال تعادل گرمایی باشند، با یکدیگر در حال تعادلند.

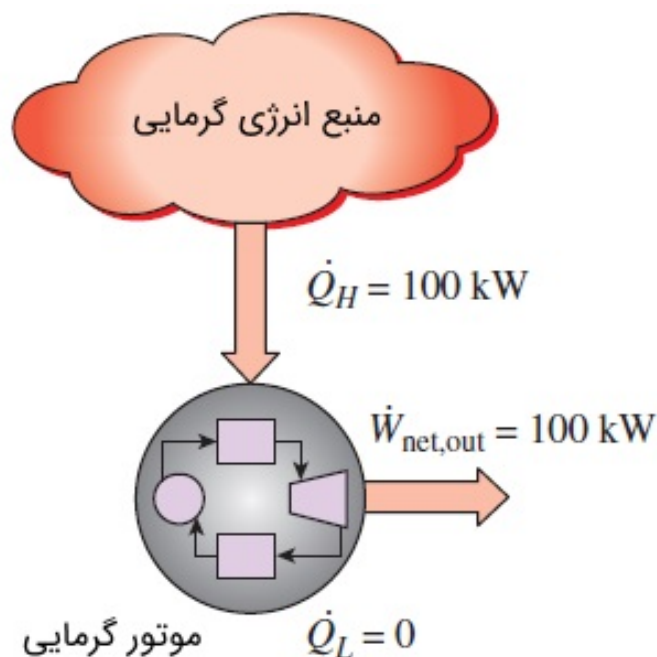
قانون اول ترمودینامیک: انرژی درونی یک سیستم منزوی ثابت و پایدار است. قانون اول ترمودینامیک که به عنوان قانون بقای کار و انرژی نیز شناخته می‌شود، می‌گوید: تغییر انرژی درونی یک سیستم برابر است با اختلاف گرمای داده شده به سیستم و کار انجام شده توسط محیط بر روی سیستم با علامت مثبت:

$$\Delta U = Q + W \quad (۲.۱)$$

قانون دوم ترمودینامیک: قانون دوم بیان می‌کند که در یک فرآیند مودینامیکی همواره با گذشت زمان آنتروپی افزایش می‌یابد، اما اگر فرآیند برگشت‌پذیر باشد آنتروپی ثابت می‌ماند. قانون دوم به دو صورت زیر بیان شده است:

بیان کلوین-پلانک:

در شرایط ایده‌آل، یک موتور حرارتی باید مقداری گرما به منبع سرد بدهد تا چرخه‌اش کامل شود. به عبارت دیگر، موتور حرارتی نمی‌تواند تمام گرمایی را که از منبع گرم دریافت کرده، به کار تبدیل کند. این محدودیتی که در راندمان حرارتی این دسته از موتورها وجود دارد، اساس تعریف کلوین-پلانک^۱ از قانون دوم ترمودینامیک است. به عبارت دیگر، لازمه عملکرد هر موتور حرارتی این است که با دو منبع گرما، یکی در دمای بالا و دیگری در دمای پایین، تبادل حرارتی انجام دهد. بیان کلوین-پلانک از قانون دوم ترمودینامیک را می‌توانیم به شیوه‌های دیگری نیز بیان کنیم [۷]. مثلاً می‌توان گفت که هیچ موتور حرارتی قادر به داشتن راندمان حرارتی ۱۰۰٪ نیست. همچنین به تعبیری دیگر و در مورد عملکرد یک نیروگاه، سیال کاری علاوه بر کوره باید با محیط اطراف نیز تبادل حرارتی داشته باشد. توجه کنید که محدودیت داشتن راندمان ۱۰۰٪ در موتور حرارتی، به خاطر داشتن اصطکاک یا سایر اثرات اتلاف انرژی نیست. این محدودیت شامل هر دو گروه موتورهای حرارتی ایده‌آل و واقعی می‌شود.

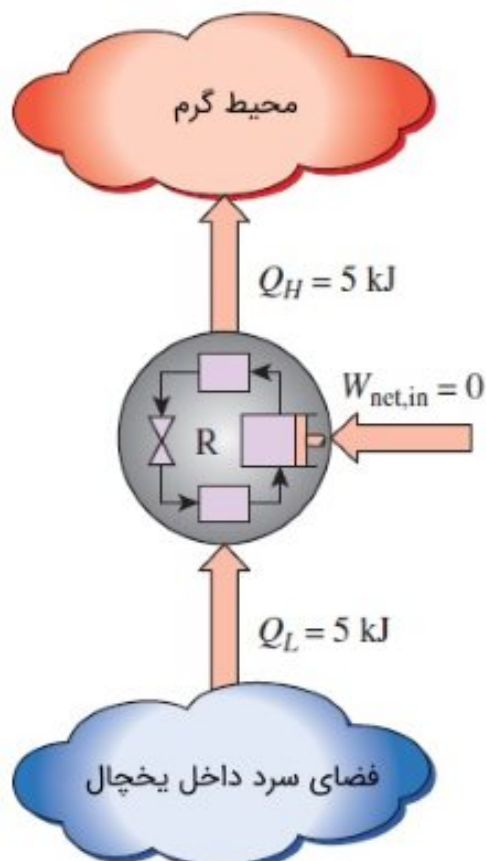


شکل ۲.۱: قانون دوم ترمودینامیک بیان کلوین-پلانک

¹Kelvin-Planck

بیان کلازیوس:

علاوه بر بیان کلونین-پلانک که قانون دوم ترمودینامیک را در مورد موتورهای گرمایی شرح می‌دهد، بیان دیگری از این قانون، به یخچال‌ها و پمپ‌های حرارتی می‌پردازد. قانون دوم ترمودینامیک به بیان کلازیوس^۱ به این صورت تعریف می‌شود که هیچ‌گاه گرما به صورت خود به خود از محیط سرد به محیط گرم منتقل نمی‌شود. کلازیوس بیان می‌کند ساخت یک دستگاه که در چرخه کار کند و حرارت را از محیط سرد به محیط گرم انتقال دهد، ممکن است و عملکرد چنین دستگاهی، نیازمند آن است که به عنوان مثال، کمپرسور یخچال، با استفاده از یک منبع توان خارجی مانند موتور الکتریکی، راه‌اندازی شود. به این ترتیب، برآیند تاثیر چنین دستگاهی روی محیط، علاوه بر انتقال حرارت از منبع سرد به منبع گرم، شامل مصرف انرژی به صورت کار هم خواهد بود. به عبارت دیگر، یخچال کاملاً با بیان کلازیوس از قانون دوم ترمودینامیک انطباق دارد. در قانون اول چیزی وجود ندارد که مانع تبدیل کامل گرما به کار شود. بنابراین قانون دوم یکی از نتایج قانون اول نیست بلکه خود قانون طبیعی جداگانه‌ای است که ناظر بر طبیعت است و قانون اول آن را دربر نمی‌گیرد. [۷]



شکل ۳.۱: قانون دوم ترمودینامیک بیان کلاسیوس

¹Clausius

قانون سوم ترمودینامیک: قانون سوم ترمودینامیک می‌گوید هنگامی که انرژی یک سیستم به حداقل مقدار خود میل می‌کند، آنتروپی سیستم به مقدار قابل چشم‌پوشی می‌رسد. این قانون بیان می‌کند که ممکن نیست از طریق یک سلسله فرآیند متناهی به صفر مطلق دست یافت. به عبارتی رسیدن به صفر مطلق محال است. البته به نزدیکیهای صفر مطلق می‌شود رسید، اما خود صفر مطلق قابل دسترس نمی‌باشد.

ترمودینامیک کوانتومی ترکیب طلایی دو پدیده فیزیک است، این نظریه سعی در توصیف مفاهیم ترمودینامیک با استفاده از نظریه اطلاعات کوانتومی دارد، مکانیک کوانتومی دارای دو خاصیت مهم (در هم تنیدگی و برهم نهی اطلاعات) است، که تفاوت آن با مکانیک کلاسیکی در همین دو خاصیت رغم می‌خورد. می‌توان ترمودینامیک را به بیان مسائل کوانتومی تعریف نماییم و در ادامه مفاهیم کوانتومی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳.۱ مفاهیم کوانتومی

۱.۳.۱ همبستگی کوانتومی

همبستگی کوانتومی یکی از پدیده‌های عجیب کوانتومی است که می‌تواند میان دو ذره که نسبت به هم فاصله دارند ارتباط ایجاد کند به شکلی که هر نوع تغییر در یکی از این ذره‌ها بلافاصله در ذره دیگر نیز تغییر به وجود آورد، حتی اگر هر یک از این ذره‌ها در یک سوی جهان قرار داشته باشند. یک سیستم کوانتومی، مجموعه‌ای از بخش‌هایی است که کاملاً به یکدیگر وابسته بوده و بر هم تاثیر می‌گذارند. این رفتار که به عنوان همبستگی کوانتومی شناخته می‌شود، همان عاملی است که محاسبات کوانتومی را بسیار پیچیده می‌کند. به همین دلیل، تجزیه، تحلیل رفتار یک سیستم کوانتومی (حتی متشکل از چند ذره)، بسیار دشوار است. حال فرض کنید برای توصیف یک ابر اتمی شامل چندین هزار اتم، محاسبات تا چه حد پیچیده خواهند شد! در این حالت، چاره‌ای جز استفاده از تقریب‌های بزرگ وجود ندارد. پس در نتیجه یک سیستم کوانتومی را باید به صورت یک مجموعه‌ی به هم پیوسته و کلی در نظر گرفت. همبستگی‌های کوانتومی عامل اصلی برتری سامانه‌های کوانتومی در انجام محاسبات و پردازش اطلاعات نسبت به سامانه‌های کلاسیکی هستند. به همین دلیل مطالعه این همبستگی‌ها و معیارهای آنها مورد توجه قرار گرفته است.

در ابتدا همبستگی کوانتومی^۱ را معادل درهم تنیدگی کوانتومی^۲ در نظر می‌گرفتند، اما معلوم شده است که سامانه‌های کوانتومی وجود دارند که بدون داشتن درهم تنیدگی محاسبات را سریعتر از بهترین الگوریتم‌های کلاسیکی انجام می‌دهند.

لذا معیارهای مختلف برای میزان همبستگی کوانتوم فراتر از درهم تنیدگی تعریف شده‌اند. [۳]

^۱Quantum correlation

^۲Quantum entanglement

۲.۳.۱ درهم تنیدگی کوانتومی

درهم تنیدگی کوانتومی می‌گوید «در سامانه‌های مرکب با وضعیت‌هایی مواجه می‌شویم که در آن اجزای سامانه دارای هیچ ویژگی نیستند بلکه فقط سامانه ی کل دارای دسته‌ای از ویژگی‌ها است.» به زبان ساده و به عنوان اولین مثال تاریخی، درهم‌تنیدگی جفت شدن خواص مکانیکی دو ذره است، ذراتی که پیش‌تر با یکدیگر در اندرکنش بوده و سپس از یک دیگر جدا شده‌اند به دلیل دارا بودن ویژگی درهم‌تنیدگی مشاهده اولین ذره منجر به تغییر آنی ذره دوم می‌گردد. آلبرت اینشتین درهم‌تنیدگی را رفتار عجیب در فاصله‌ی دور نامید. درهم‌تنیدگی برای ذراتی همچون فوتونها، الکترونها و حتی مولکول‌ها رخ می‌دهد. این اندرکنش فیزیکی مربوط به خواص نظیر مکان، تکانه، اسپین و قطبش و... است به گونه‌ای که با تعیین هر یک از خواص برای یکی از دو ذره همان خاصیت در دیگری تعیین می‌شود. به عبارت دیگر هر یک از ذرات جفت شده به خوبی توسط حالت کوانتومی مشابه توصیف می‌شوند. از پدیده درهم‌تنیدگی در رمزنگاری کوانتومی و رایانش کوانتومی استفاده می‌گردد. [۳]

۳.۳.۱ نظریه اطلاعات

تئوری نظریه اطلاعات کلاسیک به بررسی انتقال اطلاعات از یک نقطه به نقطه دیگر می‌پردازد. مساله تئوری اطلاعات کوانتومی همانند مساله تئوری اطلاعات کلاسیک یعنی انتقال پیام از یک نقطه به نقطه دیگر است، با این تفاوت که نحوه انتقال و حتی ماهیت پیام تحت تاثیر آثار کوانتومی است در نتیجه، نظریه کلاسیک نیاز به گسترش دارد به صورتی که در حالت خاصی که تمامی سیستم‌ها کلاسیکی باشند، نتایج به همان نتایج تئوری اطلاعات کوانتومی ختم می‌شوند. قدم اول در این راه تعمیم مفهوم آنتروپی به دنیای کوانتومی است که به آن آنتروپی فون نویمان می‌گوییم. جالب است بدانیم که آنتروپی فون نویمان (که تعمیمی از آنتروپی شانون است) قبل از آنتروپی شانون معرفی شده است. علی‌رغم مقدم بودن تعریف آنتروپی فون نویمان بر آنتروپی شانون تا قبل از دهه نود میلادی محققین نظریه اطلاعات توجه خاصی به نظریه کوانتومی اطلاعات نداشته‌اند، و چندین سال است که بررسی نظام مند نظریه اطلاعات کوانتومی شروع شده است. اگر چه بسیاری از نتایج دنیای کوانتومی شبیه نتایج کلاسیک هستند، اما مواردی از تفاوت‌های مورد توجه نیز به چشم می‌خورد. [۳] آنتروپی در نظریه اطلاعات معیاری عددی از میزان اطلاعات یا میزان تصادفی بودن یک متغیر تصادفی است. به بیان دقیق‌تر آنتروپی یک متغیر تصادفی، مقدار متوسط میزان اطلاعات حاصل از مشاهده ی آن است، به‌طور کلی آنتروپی معیاری از میزان ابهام یا بی‌نظمی سیستم است. اطلاعات متقابل سنجی برای اندازه‌گیری همبستگی‌های کل سیستم کوانتومی است، کلود شانون در مقاله ی انقلابی خود آنتروپی شانون را معرفی کرد و پایه‌گذار نظریه ی اطلاعات شد که در ادامه به آن می‌پردازیم.

۴.۳.۱ آنتروپی شانون

آنتروپی نخستین بار توسط شانون^۱ در سال ۱۹۴۸ بیان شد، که می توان آن را با بی نظمی معادل دانست، هرچه نظم سیستمی بالا رود آنتروپی آن کاهش می یابد و بالعکس، کاهش نظم باعث افزایش آنتروپی می شود. برای بیان کمی اطلاعات، نظریه اطلاعات مطرح شد. میزان اطلاعاتی که هر موضوع به ما می دهد، به وسیله نسبت تعداد سوالات لازم برای رسیدن به موضوع، اندازه گیری می شود. می توان گفت مفهوم آنتروپی شانون هسته اصلی نظریه اطلاعات را تشکیل می دهد و گاهی اوقات تحت عنوان اندازه عدم قطعیت به کار می رود. اگر موضوع مورد نظر، در فضایی غیر هم شانس قرار داشته باشد، [۴] متوسط تعداد سؤالهایی که برای رسیدن به موضوع لازم است، آنتروپی شانون (اطلاع شانون) گوئیم و با $H(p)$ نشان می دهیم. آنتروپی شانون متناسب با توزیع احتمال $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ عبارت است از:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_k) = - \sum_{i=1}^k p_i \log p_i \quad (۳.۱)$$

۵.۳.۱ آنتروپی فون نویمان

آنتروپی در نظریه اطلاعات کلاسیک به وسیله توزیع احتمال مشخص p_i بیان می شود طبیعی ترین روش برای تعریف این آنتروپی، آنتروپی شانون است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(\rho) = -k \sum_{i=1}^n (\rho_i \ln \rho_i) \quad (۴.۱)$$

که در آن k مقدار ثابت است و تابع توزیع احتمال است. همان گونه که تئوری اطلاعات کلاسیک مبنی بر آنتروپی شانون است تئوری اطلاعات کوانتومی نیز مبنی بر آنتروپی فون نویمان^۲ است. آنتروپی فون نویمان، آنتروپی یا اطلاعات به دست آمده از یک توزیع احتمال معین، معیار مناسبی از عدم قطعیت مربوط به توزیع است. اگر بسیاری از احتمالات بزرگ باشند، به طوری که بسیاری از رویدادهای ممکن احتمال رخداد قابل مقایسه ای داشته باشند، آنتروپی نیز زیاد خواهد بود. با این حال اگر یکی از احتمالات نزدیک به یک باشد آنتروپی کم خواهد بود معرفی آنتروپی در مکانیک کوانتومی به صورت معیاری از عدم قطعیت یا کمبود آگاهی درباره شکل بردار حالت مناسب و قابل استفاده خواهد بود، در تئوری اطلاعات، آنتروپی (و یا به صورت دقیق تر، آنتروپی شانون) امید ریاضی (میانگین) اطلاعات موجود در هر پیام دریافت شده است. در اینجا «پیام» لزوماً متن نیست و هر جریانی از اطلاعات می تواند باشد. آنتروپی هر پیام، مقدار عدم قطعیت آن است؛ هرچه پیام تصادفی تر باشد مقدار آن افزایش می یابد، و هرچه کمتر تصادفی باشد مقدار آن کاهش می یابد. مقصود در اینجا این است که

^۱shannon

^۲von Neumann

هرچه یک رویداد کمتر تصادفی باشد، در زمان رخداد اطلاعات بیشتری را فراهم می‌کند. اگر بدانیم سیستم در حالت خالص ویژه ای قرار دارد عدم قطعیت یا آنتروپی مربوطه باید صفر باشد [۴]. با این وجود برای حالت‌های مخلوط آنتروپی مقداری متفاوت خواهد داشت. طبیعی ترین روش برای تعریف این آنتروپی، آنتروپی فون نویمان است

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho) \quad (5.1)$$

که در آن ρ عملگر چگالی سیستم است، عملگر چگالی یک عملگر هرمیتی مثبت است و می‌تواند به شکل قطری نوشته شود:

$$\rho = \sum_m \rho_m |\rho_m\rangle \langle \rho_m| \quad (6.1)$$

که در آن حالت‌های $|\rho_m\rangle$ ویژه بردارهای راست هنجار ρ و ρ_m ها ویژه مقادیر مربوطه هستند که مجموع شان برابر ۱ است. با نوشتن ρ به این شکل آنتروپی فون نویمان به صورت زیر در می‌آید

$$S(\rho) = - \sum_m \rho_m \log \rho_m \quad (7.1)$$

که شکل یکسانی با آنتروپی شانون برای یک توزیع احتمالات با مقادیر $\{\rho_m\}$ دارد. آنتروپی فون نویمان کمینه مقدار خود یعنی صفر را اتخاذ می‌کند اگر و تنها اگر یکی از ویژه مقادیر برابر ۱ باشد، بقیه ویژه مقادیر صفر خواهد بود. در این وضعیت سیستم در حالت خالص زیر خواهد بود:

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| \Leftrightarrow S(\rho) = 0 \quad (8.1)$$

آنتروپی فون نویمان بیشینه مقدار خود یعنی $\log d$ را که d ابعاد فضای حالت است، فقط وقتی اتخاذ می‌کند که همه ρ_m ها برابر و دارای مقدار $1/d$ باشند. در این وضعیت عملگر چگالی مخلوط ترین شکل خود را داشته و با عملگر همانی متناسب است:

$$\rho = \frac{1}{d} I \Leftrightarrow S(\rho) = \log d \quad (9.1)$$

همچنین آنتروپی فون نویمان تحت یک تبدیل یکانی ناورد است:

$$S(U\rho U^\dagger) = S(\rho) \quad (10.1)$$

برای مشاهده ی این امر تنها توجه به این موضوع کافی است که آنتروپی فقط تابعی از ویژه مقادیر است و این ویژه مقادیر برخلاف ویژه بردارهای مربوطه با یک تبدیل یکانی تغییر نمی‌یابد. از اینجا نتیجه می‌شود که تحول طبیعی یک سیستم کوانتومی منزوی، آنتروپی فون نویمان آن را تغییر نمی‌دهد.

۶.۳.۱ ماتریس چگالی

ماتریس چگالی در مکانیک کوانتومی، یک ماتریس است که یک سامانه کوانتومی که در یک حالت ترکیبی^۱ است را توصیف می‌کند. چنین حالتی یک آنسامبل آماری از چندین حالت کوانتومی است و با یک حالت خالص^۲ که در آن سیستم کوانتومی با یک بردار حالت توصیف می‌شود تفاوت دارد. هنگام مطالعه سامانه‌های کوانتومی، حالت‌های ترکیبی در شرایطی ظاهر می‌شوند که نمی‌دانیم یا چه حالت خاصی روبه‌رو هستیم. برای نمونه، یک سامانه در تعادل ترمودینامیکی در چنین حالتی قرار دارد. یک مورد دیگر، شرایطی است که سامانه کوانتومی مورد نظر، از چند زیرسامانه تشکیل شده که درهم‌تنیده هستند. در این شرایط، هر زیرسامانه باید به صورت یک حالت ترکیبی توصیف شود، هرچند سامانه به‌طور کلی در یک حالت معین قرار داشته‌باشد. ماتریس چگالی، نمایشی از یک عملگر خطی به نام عملگر چگالی است، که با انتخاب یک مجموعه بردارهای پایه به دست می‌آید. عملگر چگالی دارای خواص زیر است:

$$1. \text{ رد این ماتریس برابر واحد است. } Tr(\rho) = 1$$

$$2. \text{ این ماتریس، عملگری هرمیتی است. } \rho = \rho^\dagger$$

$$3. \text{ این ماتریس مثبت است. } \rho \geq 0$$

و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (11.1)$$

که در آن $|\psi_i\rangle$ بردار حالت دستگاه و P احتمال حضور دستگاه در حالت $|\psi_i\rangle$ است. [۵]

۷.۳.۱ ماتریس چگالی کاهش یافته

برای بدست آوردن یک حالت از یک سامانه چند جزئی باید بر روی درجه‌های آزادی بخش‌های دیگر ردگیری می‌نماییم. به نتیجه‌ی این ردگیری، ماتریس چگالی کاهش یافته می‌گویند. ماتریس چگالی کاهش یافته برای تعریف زیردستگاه‌های یک سامانه کوانتومی بکار می‌رود. در حالت کلی ماتریس چگالی از دو زیر دستگاه A و B به صورت ρ_{AB} تعریف می‌شود. ماتریس چگالی کاهش یافته به صورت زیر است:

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) \quad (12.1)$$

درحقیقت با عمل ردگیری نسبت به جز دیگر اطلاعات مربوط به آن را حذف کردیم با فرض اینکه فضای هیلبرت سیستم A و B دو بعدی است، ماتریس چگالی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) = \langle b_1 | \rho_{AB} | b_1 \rangle + \langle b_2 | \rho_{AB} | b_2 \rangle \quad (13.1)$$

¹mixed

²pure

که در آن $|b_1\rangle$ و $|b_2\rangle$ پایه های راست هنجار در فضای حالت B هستند. [۵]

۸.۳.۱ اطلاعات متقابل

اطلاعات متقابل^۱ سنجه ای برای اندازه گیری همبستگی های کل یک سامانه کوانتومی است. برای یک متغیر تصادفی A که مقدار a دارد آنتروپی شانون به این صورت است:

$$H(A) = - \sum_a p_a \log p_a \quad (۱۴.۱)$$

که نشان دهنده احتمال متناظر A است. برای دو متغیر تصادفی A و B که باهم ترکیب شده اند آنتروپی شانون به این شکل بیان می شود:

$H(A, B) = - \sum p_{a,b} \log p_{a,b}$ که $p_{a,b}$ احتمال توزیع مشترک را نشان می دهد. مقدار کل همبستگی کلاسیک بین دو متغیر A و B به صورت زیر است:

$$I(A : B) = H(A) + H(B) - H(A, B) \quad (۱۵.۱)$$

که $H(A, B)$ همان اطلاعات متقابل کلاسیکی است. برای بیان روابط همبستگی و اطلاعات متقابل کلاسیکی در کوانتوم عدم قطعیت برای ماتریس چگالی ρ با آنتروپی فون نویمان بیان می شود.

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log \rho) \quad (۱۶.۱)$$

بنابراین تعمیم یافته $I(A:B)$ در کوانتوم به این صورت است:

$$I(\rho_{ab}) = S(\rho_a) + S(\rho_b) - S(\rho_{ab}) \quad (۱۷.۱)$$

مقدار $I(\rho_{ab})$ اطلاعات متقابل کوانتومی نامیده می شود و یک نظریه جامع از همبستگی کل (کلاسیک و کوانتوم) در حالت کوانتومی است [۳].

¹Mutual information

۴.۱ متغیرهای سیمپلکتیک، اندازه گیری آنتروپی و همبستگی حالات گاوسی

آنتروپی فون نویمان و اطلاعات متقابل، حالت های گاوسی دو مدی را بر اساس عناصر ماتریس هم وردایی بدست می آوریم. به نقش کلیدی متغیرهای سیمپلکتیک اشاره می شود. نشان می دهیم که آنتروپی فون نویمان به دو متغیر سیمپلکتیک^۱ بستگی دارد، در حالی که آنتروپی خطی تنها با یک متغیر تعیین می شود.

۱.۴.۱ مقدمه

اطلاعات کوانتومی با سیستم های متغیر پیوسته به سرعت در حال توسعه است و به نظر می رسد که دیدگاههای بسیار امیدوار کننده ای را در مورد تحقق تجربی و بینش های نظری جامع ارائه می دهد. در چنین شرایطی، حالات گاوسی هم از نظر اهمیت مفهومی و هم به دلیل اهمیت آن در کاربردهای آزمایشی، نقش برجسته ای ایفا می کنند و بیشترین توجه محققان این حوزه را به خود جلب کرده اند. آنها ساده ترین حالت هایی هستند که می توانند در آزمایشگاه ایجاد و کنترل شوند، و با موفقیت در رمزنگاری کوانتومی و روش های انتقال کوانتومی بکار گرفته شدند [۷]. علاوه بر این، آنها داوطلبان احتمالی برای پردازش محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته هستند. به طور خاص، حالت های دو مدی گاوسی در این سالها مورد توجه بسیاری قرار گرفته اند، این ساده ترین نمونه اولیه از یک سیستم دو مدی متغیر پیوسته است. در مورد این تئوری، خصوصیات کیفی درهم تنیده حالت های گاوسی دو مدی با تعیین معیارهای لازم و کافی برای تفکیک پذیری آنها کاملاً توسعه یافته است. توصیف کمی محاسبه پذیر درهم تنیدگی برای چنین حالاتی نیز موجود است، به دلیل تعامل با محیط، هر حالت کوانتومی خالص که در برخی از فرآیندهای اطلاعات کوانتومی دخیل است، در یک حالت آمیخته تحول می یابد. بنابراین، یکی دیگر از ویژگی های مورد نظر بسیار مهم در نظریه اطلاعات کوانتومی، تعیین میزان اختلال یک حالت کوانتومی است. به طور خلاصه یادآوری می کنیم که درجه اختلال یک حالت کوانتومی را می توان با آنتروپی فون نویمان $S_V(\rho)$ یا آنتروپی خطی $S_L(\rho)$ مشخص کرد. چنین مقادیری برای سیستمهای متغیر پیوسته به شرح زیر تعریف می شوند [۸،۹]:

$$S_V(\rho) \equiv -\text{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (18.1)$$

$$S_V(\rho) \equiv 1 - \text{Tr}(\rho^2) \equiv 1 - \mu(\rho) \quad (19.1)$$

¹symplectic

از آنجایی که جایی که $\mu \equiv Tr(\rho^2)$ نشان دهنده خلوص حالت ρ است. آنتروپی خطی حالت گاوسی n مدی دلخواه را می توان به راحتی محاسبه کرد، در حالی که ارزیابی آنتروپی فون نویمان، به طور کلی، نیاز به یک روش فنی بیشتر دارد. لذا استفاده از آنتروپی فون نویمان مرجح است، این امکان را برای توصیف دقیق تر از مشخص سازی اختلال و همبستگی برای حالات گاوسی چند مدی فراهم می آورد. درحقیقت، آنتروپی فون نویمان برخلاف آنتروپی خطی، بر روی حالات حاصل ضرب تانسور جمع پذیر است. علاوه بر این، ما نشان خواهیم داد که برای حالت های دو مدی گاوسی، آنتروپی فون نویمان به دو متغیر سیمپلکتیک بستگی دارد، در حالی که آنتروپی خطی کاملاً توسط یک ناوردای تعیین می شود [۱۰]. با دانستن دانش آنتروپی فون نویمان از یک حالت دو مدی عمومی می توان اطلاعات متقابل را بدست آورد:

$$I(\rho) = S_V(\rho_1) + S_V(\rho_2) - S_V(\rho_{1,2}) \quad (20.1)$$

در اینجا ρ_i ماتریس چگالی کاهش یافته زیر سیستم i است)، که مقدار کل همبستگی ها (کوانتوم به علاوه کلاسیک) موجود در یک مد را محاسبه می کند [۱۱]. آنتروپی فون نویمان از حالت گاوسی n مدی در برخی از آثار قابل توجه در مورد ظرفیت کانال های گاوسی توسط هولوو و همکاران تعیین شده است. در این پژوهش ساختار ریاضیاتی را که توسط این نویسندگان ارائه شده است، توضیح می دهیم، و آن را دوباره به شکلی که از لحاظ مفهومی ساده برای استفاده های کاربردی و طرح های آزمایشی کاملاً مفید باشد، مجدداً شرح می دهیم. برای انجام این کار، ما یک تجزیه و تحلیل کامل و دقیق از اصول اولیه چارچوب سیمپلکتیک محدود به مورد دو مدی ارائه و یک روش ساده و شفاف برای ارزیابی آنتروپی فون نویمان و اطلاعات متقابل حالات گاوسی دو مدی ارائه می دهیم [۱۲].

۲.۴.۱ حالات گاوسی دو مدی

یک سیستم متغیر پیوسته دو مدی، شرح داده شده توسط فضای هیلبرت $H = H_1 \otimes H_2$ ، در نظر می گیریم. عملگر نابودی که در فضای H_k فعالیت می کند را، a_k می نامیم. به همین ترتیب:

$$\hat{x}_k = (a_k + a_k^\dagger) / \sqrt{2} \quad (21.1)$$

$$\hat{p}_k = -i(a_k - a_k^\dagger) / \sqrt{2} \quad (22.1)$$

عملگرهای چارک حالت k هستند، متغیرهای فضای فاز مربوطه x_k و p_k هستند. مجموعه حالات با توابع مشخصه گاوسی است. بنابراین، یک حالت گاوسی کاملاً با گشتاورهای آماری اول و دوم خود، یعنی به ترتیب با بردار مقادیر متوسط $\bar{X} \equiv (\langle \hat{x}_1 \rangle, \langle \hat{p}_1 \rangle, \langle \hat{x}_2 \rangle, \langle \hat{p}_2 \rangle)$ و ماتریس هم وردایی $\sigma \equiv \frac{1}{2} (\langle \hat{x}_i \hat{x}_j + \hat{x}_j \hat{x}_i \rangle - \langle \hat{x}_i \rangle \langle \hat{x}_j \rangle)$ مشخص می شود [۱۳]. گشتاورهای اول برای اهداف ما بی اهمیت خواهند بود و (همانطور که همیشه با استفاده از میانگین های یک

تبدیل یکانی موضعی امکان پذیر است) بدون هیچ گونه ضرر و زیان برای کلیه نتایج ما، آنها را به صفر می‌رسانیم. برای سادگی، در σ هم به حالت گاوسی و هم به ماتریس هم‌وردایی آن اشاره خواهد شد. با توجه به سه ماتریس (2×2) α, β, τ داریم:

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} a & \tau \\ \tau^T & \beta \end{pmatrix} \quad (23.1)$$

دو زیرماتریس دیگر از σ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{42} & \sigma_{44} \end{pmatrix} \quad (24.1)$$

نقش ممتاز توسط δ و ϵ در توصیف عملکرد عملیات سیمپلکتیک جهانی در σ ایفا می‌شود که در ذیل مشخص خواهد شد. مثبت بودن ρ و رابطه جابجایی برای عملگرهای فضای فاز قید زیر را اعمال می‌گردد تا اطمینان حاصل شود که σ یک ماتریس هم‌وردایی معتبر باشد، ماتریس هم‌وردایی، ماتریسی است که اعضای آن همبستگی بین پارامترهای مختلف سیستم را نشان می‌دهند.

$$\sigma + \frac{i}{\hbar} \Omega \geq 0 \quad (25.1)$$

جایی که Ω به شکل معمول

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad \omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (26.1)$$

در ادامه، ما از نمایش شبه احتمال ویگنر^۱ استفاده می‌کنیم، که به عنوان تبدیل فوریه از تابع مشخصه متقارن مرتب شده تعریف شده است [۱۵، ۱۶]. در تصویر فضای فاز ویگنر، حاصل ضرب تانسوری $H = H_1 \otimes H_2$ فضاهای هیلبرت H_i از دو مد منجر به جمع مستقیم $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ فضاهای فاز Γ_i می‌شود. به عنوان یک نتیجه از قضیه استون فون نویمان^۲ یک تحول سیمپلکتیک در فضای فاز جهانی Γ معادل با یک عملگر یکانی در فضای هیلبرت است. در ادامه به یک تبدیل $S_l = S_1 \oplus S_2$ اشاره خواهیم کرد که هرکدام از آنها $S_i \in S_{p(2,R)}$ به عنوان "یک عملگر سیمپلکتیک موضعی" عمل می‌کنند. تبدیل یکانی معادل یک تبدیل یکانی موضعی $U_l = U_1 \otimes U_2$ که هر U_i بر روی H_i عمل می‌کند. نامساوی (۲۵.۱) معادل قید زیر است:

$$\text{Det} \alpha + \text{Det} \beta + 2 \text{Det} \tau \leq \frac{1}{\hbar} + 4 \text{Det} \sigma \quad (27.1)$$

تابع ویگنر حالت گاوسی، نوشته شده بر اساس متغیرهای چارک فضای فاز:

¹wigner

²Stone-Von Neumann

$$W(X) = \frac{e^{-\frac{1}{2}X\sigma^{-1}X^T}}{\pi\sqrt{Det\sigma}} \quad (28.1)$$

X بردار $\Gamma \in (x_1, p_1, x_2, p_2)$ نوشته شده است. به طور کلی، تابع ویگنر تحت عملیات سیمپلکتیک به عنوان یک کمیت عددی تبدیل می شود، در حالی که ماتریس هم وردایی σ با توجه به $\sigma \rightarrow S^T \sigma S$, $S \in S_{P(4,R)}$ تبدیل می شود. همانطور که واضح است، برای هر ماتریس هم وردایی σ یک عمل کانونی موضعی $S_l = S_1 \oplus S_2$ وجود دارد که σ را بصورت "فرم استاندارد" σ_{sf} در می آورد [۱۷].

$$S_l^T \sigma S_l = \sigma_{sf} \equiv \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (29.1)$$

که در آن، a, b, c_1, c_2 توسط چهار ثابت موضعی سیمپلکتیک زیر تعیین می شود:

$$Det\sigma = (ab - c_1^2)(ab - c_2^2), \quad Det\alpha = a^2 \quad (30.1)$$

$$Det\beta = b^2 \quad (31.1)$$

$$Det\gamma = C_1 C_2 \quad (32.1)$$

بنابراین، ضرایب فرم استاندارد مربوط به هر ماتریس هم وردایی منحصر به فرد است.

۳.۴.۱ تعیین آنروپی فون نویمان

کمیت زیر را تعریف می نمایم:

$$\Delta(\sigma) = Det\alpha + Det\beta + 2Det\gamma \quad (33.1)$$

که در آن α, β, γ در معادله (۳۳.۱) تعریف شده اند. با توجه به تعریف یک حالت گرمایی با میانگین تعداد فوتون \bar{n} بصورت زیر تعریف می نمایم:

$$v_{\bar{n}} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^k |k\rangle \langle k| \quad (34.1)$$

$Det\sigma$ و $\Delta(\sigma)$ را برحسب مقادیر سیمپلکتیک n_{\mp} بصورت زیر تعریف می نمایم.

$$Det\sigma = Detv_{n_{\mp}} = n_{-}^2 n_{+}^2 \quad (35.1)$$

$$\Delta(\sigma) = \Delta(v_{n_{\mp}}) = n_{-}^2 + n_{+}^2$$

از حل دستگاه معادلات بالا:

$$n_{\mp}(\sigma) = \sqrt{\frac{\Delta(\sigma) \mp \sqrt{\Delta(\sigma)^2 - 4 \text{Det}\sigma}}{2}} \quad (36.1)$$

است. توجه داشته باشید که نامساوی (۲۴.۱) معادل $n_{\mp} \geq \frac{1}{2}$ است در حالیکه ملاک لازم و کافی برای یک حالت که خالص باشد، $n_- = n_+ = 1/2$ است (می توان به راحتی نشان داد که معادل $\text{Det}\sigma = 1/16$ است). با دانستن مقادیر ویژه سیمپلتیک و میانگین تعداد فوتون حرارتی مرتبط با آن، آنتروپی فون نویمان $S_V(\sigma)$ یک حالت گاوسی دو مدی دلخواه تعیین می شود.

آنتروپی فون نویمان $S_V(\sigma)$ یک حالت گاوسی دو مدی دلخواه برابر با یکی از حاصلضرب تانسور مد حرارتی $v_{n_{\mp}}$ بصورت زیر بیان می شود.

$$S_v(\sigma) = f[n_-(\sigma)] + f[n_+(\sigma)] \quad (37.1)$$

که n_{\mp} توسط معادلات (۳۶.۱) داده شده و

$$f(x) \equiv \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (38.1)$$

نشان داده ایم که آنتروپی فون نویمان از حالت گاوسی دو مدی σ بستگی به دو متغیر $\Delta(\sigma)$ و $\text{Det}\sigma$ دارد.

۵.۱ ویژه مقادیر سیمپلتیک، اطلاعات متقابل و همبستگی ها

اطلاعات متقابل $I(\sigma)$ یک حالت گاوسی σ بصورت زیر تعریف شده است:

$$I(\sigma) = S_v(\sigma_1) + S_v(\sigma_2) - S_v(\sigma) \quad (38.1)$$

که σ_i مخفف حالت تک مدی کاهش یافته با ردگیری در زیر سیستم $i \neq j$ بدست می آید [۱۷]. با دانستن $S_v(\sigma)$ می توان اطلاعات متقابل $I(\sigma)$ حالت گاوسی دو مدی دلخواه را بصورت زیر بیان نمود.

$$I(\sigma) = f(a) + f(b) - f[n_-(\sigma)] - f[n_+(\sigma)] \quad (39.1)$$

که $a = \sqrt{\text{Det}\alpha}$ ، $b = \sqrt{\text{Det}\beta}$ در رابطه (۳۸.۱) تعریف شده است. σ را به فرم استاندارد σ_{sf} ، که توسط معادله (۲۹.۱) تعریف شده است، در نظر می گیریم. عناصر ماتریس a و b از σ_{sf} به راحتی از یک σ عمومی حاصل می شوند، زیرا $\text{Det}\alpha = a^2$ و $\text{Det}\beta = b^2$ ناوردا هستند. توجه

کنید که ، از آنجا که $S_v(\sigma)$ یا مقادیر $S_v(\sigma_i)$ تحت عملیات یکانی موضعی تغییر ناپذیر هستند، $I(\sigma) = I(\sigma_{sf})$ است. رد جزئی از σ_{sf} نسبت به زیر سیستم i منجر می شود به $\sigma_1 = \text{diag}(a, a)$ و $\sigma_2 = \text{diag}(b, b)$ معادله (۳۸.۱) بر نقش مهم مقادیر ویژه سیمپلکتیک $n_{\mp}(\sigma_{sf})$ در تعیین مقدار کل همبستگی های موجود در یک حالت کوانتومی یک سیستم متغیر پیوسته ، در قیاس با مقادیر سیمپلکتیک ترانهاده جزئی σ_{sf} در توصیف میزان همبستگی کوانتومی نقش ایفا می کند [۱۹، ۱۸] برای روشن تر کردن این نکته، حالت متقارن σ_{sym} ، یعنی حالتی را که فرم استاندارد آن $a = b$ است را در نظر می گیریم.

$$I(\sigma_{sym}) = 2f(a) - f[n_-(\sigma_{sym})] - f[n_+(\sigma_{sym})] \quad (40.1)$$

که در آن $n_{\mp} = \sqrt{(a \mp c_1)(a \mp c_2)}$ ویژه مقادیر سیمپلکتیک هستند. از طرف دیگر، مقادیر سیمپلکتیک ماتریس هم وردایی ترانهاده جزئی $\tilde{\sigma}_{sym}$ (که از σ_{sym} با تغییر دادن علامت c_2 بدست آمده است). $\tilde{n}_{\mp} \equiv n_{\mp}(\tilde{\sigma}_{sym}) = \sqrt{(a \mp c_1)(a \mp c_2)}$ به طور خاص ، برای حالت درهم تنیده، کوچکترین مقادیر سیمپلکتیک $\tilde{n}_- = \sqrt{(a - |c_1|)(a - |c_2|)}$ است. ویژه مقادیر سیمپلکتیک \tilde{n}_- تمام اطلاعات مربوط به درهم تنیدگی حالت را بیان می کند، زیرا معیار لازم و کافی برای درهم تنیدگی $\tilde{n}_- < 1/2$ است و درهم تنیدگی تشکیل $E_F(\sigma_{sym})$ بصورت زیر است [۱۴]

$$E_f(\sigma_{sym}) = \max \{0, g[\tilde{n}_-]\} \quad (41.1)$$

که

$$g(x) \equiv \frac{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2}{2x} \ln \left(\frac{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2}{2x} \right) - \frac{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2}{2x} \ln \left(\frac{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2}{2x} \right) \quad (42.1)$$

بدست می آوریم که به طور صریح معادل $I(\sigma)/2$ برای یک حالت خالص متقارن است. تعیین کمیت همبستگی کوانتومی ارائه شده توسط معیار منفی که برای مدهای غیر متقارن نیز قابل محاسبه است، حالت گاوسی دو مدی σ را به یک تابع ساده از $\tilde{n}_-(\sigma)$ کاهش می دهد [۱۹، ۲۰]

۶.۱ نتیجه گیری

با به دست آوردن آنتروپی فون نویمان و اطلاعات متقابل، میزان آمیختگی و همبستگی کلی حالات گاوسی دو مدی را مشخص کرده ایم. مقایسه این مقادیر با درهم تنیدگی تشکیل حالت های متقارن نشان می دهد که یک اطلاعات مهم در مورد همبستگی های کلاسیک کوانتومی و در مقادیر سیمپلکتیک ماتریس هم وردایی و ترانهاده آن وجود دارد.

فصل ۲

ترمودینامیک کوانتومی و آهنگ تولید آنتروپی

۱.۲ برگشت ناپذیری در سیستم های کوانتومی

قانون دوم ترمودینامیک بیان می کند که در یک فرآیند ترمودینامیکی همواره با گذشت زمان آنتروپی افزایش می یابد، به بیان دیگر هیچ فرآیند ترمودینامیکی وجود ندارد که با گذشت زمان با افزایش آنتروپی همراه نباشد طبق این قانون، وقتی سیستم با محیط اطراف خود تبادل انرژی کند، به صورت زیر خواهد بود: [۲۱]

$$\Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T} \quad (1.2)$$

که در آن δQ گرمایی است که توسط سیستم جذب می شود. و در واقع مقداری از انرژی به صورت گرما در محیط از بین می رود [۲۲، ۲۳]. در ادامه می توان با استفاده از رابطه ی (۱.۲) و در شرایطی که سیستم در حالت پایا قرار داشته باشد آهنگ تولید آنتروپی برای یک سیستم متشکل از دو نوسانگر هماهنگ جفت شده به صورت زیرمورد بررسی قرار می گیرد:

$$\frac{dS}{dt} = \phi(t) + \Pi(t), \quad (2.2)$$

که در آن، $\phi(t)$ شار آنتروپی ناشی از تبادل گرما بین سیستم و محیط است و $\Pi(t) > 0$ آهنگ تولید آنتروپی ناشی از فرآیندهای درونی سیستم است. آهنگ تولید آنتروپی یک کمیت بسیار کلیدی در بررسی و مطالعه بازگشت ناپذیری فرآیندهای غیرتعادلی است. این کمیت همواره مثبت است و هرگاه سیستم با محیط به تعادل گرمایی برسد صفر می شود در شرایط پایا (جایی که حالت سیستم تغییر نکند)، سمت چپ رابطه ی (۲.۲) صفر است و بنابراین رابطه ی $\Pi_s = \Phi_s \geq 0$ برقرار است که مقدار صفر مربوط به حالت تعادل است. بنابراین، به نظر می رسد بررسی یکی از دو کمیت Φ_s یا Π_s در حالت پایا دانش ما را نسبت به منشأ برگشت ناپذیری در سیستم های کوانتومی افزایش می دهد [۲۴]. با این حال، اگرچه تولید آنتروپی با توجه به وابستگی کامل آن به مسیر میکروسکوپی سیستم کاملاً مشخص است، تعداد کمی از اصطلاحات مفید برای موارد مورد نظر در دسترس است که فاقد اندازه گیری می باشد، فقط تعداد محدودی از اندازه گیری های تجربی گزارش شده است. اخیراً اولین اندازه گیری آهنگ تولید آنتروپی در سیستم های کوانتومی گزارش شده است [۲۵].

۱.۱.۲ معادلات حرکت سیستم

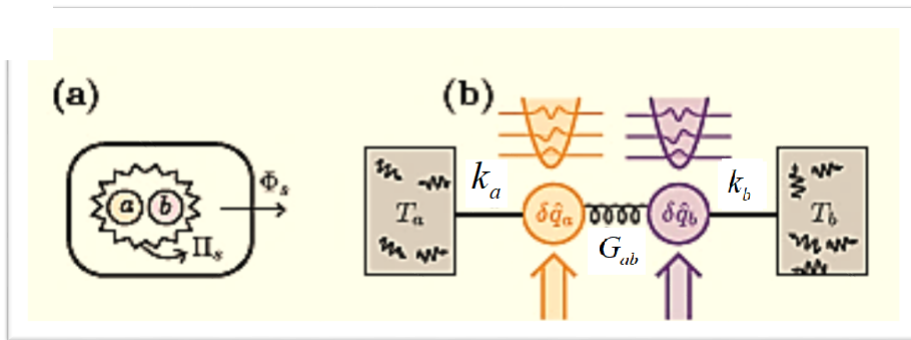
آهنگ تولید آنتروپی برای یک سیستم متشکل از دو نوسانگر هماهنگ جفت شده در حالت پایا هدف اصلی تحقیق ماست که ما از آن برای ارزیابی برگشت ناپذیری در یک سیستم کوانتومی دو بخشی شامل دو نوسانگر استفاده می کنیم.

ترازهای انرژی در هر دو نوسانگر متفاوت است این دو نوسانگر با یکدیگر جفت شده تا به تعادل برسند، اگر سیستم در حالت پایا باشد تغییرات آنتروپی برابر با صفر است و آهنگ تولید آنتروپی برابر با شار آنتروپی است که سیستم به محیط می دهد با علامت منفی، اگر این تعادل گرمایی باشد تولید آنتروپی در سیستم نداریم و صفر است و در غیر این صورت اگر تعادل گرمایی نباشد حتی اگر پایا باشد، آهنگ تولید آنتروپی یک مقدار بزرگتر از صفر دارد، بنابراین قانون دوم ترمودینامیک را می توان برحسب آهنگ تولید آنتروپی بیان نمود که در آن آهنگ تولید آنتروپی برای سیستم کل همواره بزرگتر مساوی صفر است. برای سیستمی که به تعادل می رسد یک حالت نهایی وجود دارد که به صورت آمیخته است. دینامیک این سیستم را از روش معادلات لانژون و با استفاده از ماتریس هم وردایی می توان بدست آورد [۴۴]. با مطالعه و مقایسه رفتار این کمیت با همبستگی های کوانتومی سیستم، و برحسب پارامترهای سیستم مانند بسامدهای نوسانگرها و قدرت جفت شدگی، نقش هم بستگی های کوانتومی در آهنگ تولید آنتروپی را بررسی می نماییم.

مباحث مطرح شده را برای هامیلتونی دو نوسانگر هماهنگ جفت شده که به صورت زیر است بیان می نماییم:

$$H = \frac{\hbar\omega_a}{2}(\hat{q}_a^2 + \hat{p}_a^2) + \frac{\hbar\omega_b}{2}(\hat{q}_b^2 + \hat{p}_b^2) + \hbar G\hat{q}_a\hat{q}_b \quad (3.2)$$

دو نوسانگر توسط عملگرهای میدانی \hat{a} و \hat{b} توضیح داده شده اند، که دارای فرکانس ω_a و ω_b است، دو نوسان گر بصورت خطی با قدرت برهم کنش G همراه هستند، جاییکه $\hat{q}_{a,b}$ و $\hat{p}_{a,b}$ از لحاظ عملکرد و حرکت بدون بعد هستند.



شکل ۱.۲: در شکل (a) سیستم اتلاف محور، متشکل از جفت شدگی زیر سیستم های a و b ، با یک آنتروپی همراه به یک حالت غیرتعادلی پایا می رسد، Π_s آهنگ تولید و Φ_s شار آنتروپی از سیستم به محیط است. در شکل (b) هر دو سیستم می توانند به عنوان مدل دو نوسانگر هماهنگ جفت شده با فرکانس های ω_a و ω_b به صورت خطی با قدرت برهم کنش G_{ab} همراه باشند. هر نوسان گر به حمام محلی مستقل با دمای T_a و T_b جفت شده است. آهنگها متناظرند با κ_a و κ_b نوسان گرها را می توان با یک میدان خارجی پمپ کرد(فلش های موجود در شکل ۲.۱).

این دو نوسانگر باهم جفت شده و ناشی از این جفت شدگی برانگیختگی هایی است که به دلیل تفاوت در سطح تراز آنها بوجود می آید، این ترازها نمایانگر دما هستند که N آمار برانگیختگی در آمار فرمی دیراک است و نشان دهنده ی T (دما) است و به صورت $N_{a,b} = (e^{hw_{a,b}/K_B T_{a,b}} - 1)^{-1}$ نمایش داده می شود. فرض می شود که حمام ها از یکدیگر مستقل باشند. سپس سیستم در معرض بردار نوفه کوانتومی (سیستم با حمام خود برهم کنش می کند و اثر اتلاف آن با محیط به صورت بردار نوفه به شکل دستی به معادلات وارد می شود) قرار می گیرد که توسط عملگرهای ورودی $\hat{a}^{in}, \hat{a}^{in,\dagger}$ و بر اساس معادله زیر بدست می آید:

$$\langle \hat{a}^{in,\dagger}(t)\hat{a}^{in}(t) \rangle = N_a \delta(t-t), \langle \hat{a}^{in}(t)\hat{a}^{in,\dagger}(t) \rangle = (N_a + 1)\delta(t-t) \quad (4.2)$$

(همچنین به صورت مشابه برای \hat{b}^{in}).

معادلات لانژون^۱ را با استفاده از معادلات هایزنبرگ به صورت زیر بیان می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{dq_a}{dt} &= -k_a \delta p_a + \omega_a \delta q_a + \sqrt{2k_a q_a^{in}} \\ \frac{dp_a}{dt} &= -\omega_a \delta q_a - k_a \delta p_a + G \delta q_b + \sqrt{2k_a p_a^{in}} \\ \frac{dq_b}{dt} &= -k_b \delta q_b + \omega_b \delta p_b + \sqrt{2k_b q_b^{in}} \\ \frac{dp_b}{dt} &= -k_b \delta p_b - \omega_b \delta q_b + G \delta q_a + \sqrt{2k_b p_b^{in}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

سرانجام، اتلاف در حمام محلی با آهنگ k_a و k_b رخ می دهد. دینامیک باز به دست آمده را می توان با معادله کوانتومی لانژون $\hat{u} = A\hat{u}(t) + \hat{N}(t)$ برای بردار عملگرهای چهار بعدی $\hat{u} = (\hat{q}_a, \hat{p}_a, \hat{q}_b, \hat{p}_b)^T$ توصیف کرد، جایی که ماتریس A از رابطه زیر بدست می آید:

$$A = \begin{pmatrix} -k_a & \omega_a & \circ & \circ \\ -\omega_a & -k_a & G & \circ \\ \circ & \circ & -k_b & \omega_b \\ G & \circ & -\omega_b & -k_b \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

در حالی که بردار نوفه عبارت است از $\hat{N} = (\sqrt{2k_a q_a^{in}}, \sqrt{2k_a p_a^{in}}, \sqrt{2k_b q_b^{in}}, \sqrt{2k_b p_b^{in}})^T$ و ویژگی خطی دینامیک، همراه با انتخاب حالات گاوسی اولیه، دلالت بر این دارد که توزیع احتمال دو نوسان گر در هر زمان دارای توصیف گاوسی است [۲۸]. بنابراین توضیحات کاملی از سیستم از لحاظ آماری و با توجه به عملگرهای درجه چهار ارائه می شود، که می تواند در ماتریس هم وردایی σ دارای مقدار $\sigma = \langle \hat{u}_i(t) \rangle \langle \hat{u}_j(t) \rangle - \langle \{ \hat{u}_i(t), \hat{u}_j(t) \} \rangle / 2$ باشد [۲۹]. معادله حرکت برای ماتریس هم وردایی عبارت است از:

$$\dot{\sigma} = A\sigma + \sigma A^T + D, \quad (7.2)$$

که در آن ماتریس انتشار توسط $D = (1 + 2N_a)k_a \mathbf{1}_a \oplus (1 + 2N_b)k_b \mathbf{1}_b$ بیان می شود. رقابت بین دو حمام در دماهای مختلف باعث می شود سیستم از حالت تعادل خارج شود [۳۰]. علاوه بر این خروجی مربوط به معادله (۲.۲) با قسمت پراکندگی دینامیک مطابقت نخواهد داشت. بنابراین، اتصال منسجم بین نوسان گرهای کوانتومی بر غیرقابل برگشت پذیری کلی تأثیر می گذارد. ما فرض می کنیم که این سیستم همیشه پایا و دارای یک حالت غیر تعادلی باشد به گونه ای که ماتریس هم وردایی ثابت σ_s از طریق معادله $A\sigma_s + \sigma_s A^T = -D$ بدست آید. در ادامه بیان های صریح و واضحی برای آهنگ تولید آنتروپی $\Pi(t)$ و شار آنتروپی $\Phi(t)$ که در معادله (۲.۲) وجود دارد ارائه خواهیم داد.

¹langevin equation

۲.۲ آهنگ تولید آنروپی، همبستگی های کوانتومی

۱.۲.۲ کمیت همبستگی از طریق آنروپی رینی

اطلاعات متقابل اشتراک گذاشته شده توسط دو سیستم، به این صورت است: $I(\rho_{a:b}) = S(\rho_a) + S(\rho_b) - S(\rho_{ab})$ هنگامی که دو سیستم کاملاً با هم مرتبط نیستند، آنروپی مشترک آنها برابر است با مجموع آنروپی های کاهش یافته [۳۱، ۳۲]. در حالی که روش استاندارد برای تعیین کمیت آنروپی استفاده از آنروپی فون نویمان است، ماهیت گاوسی موجود در اینجا با دو حالت ماتریس هم وردایی مشخص می شود، لازم به ذکر است که هامیلتونی نوسانگرها دارای عملگرهای خلق و فنا ی مربعی هستند، حالت پایه یا حالت گرمایی آن دارای توزیع طبیعی بوده و بنابراین یک حالت گاوسی است. از آنجاییکه برهم کنش بین نوسانگرها خطی است، حالت گاوسی اولیه در زمان به صورت گاوسی باقی می ماند.

$$\sigma_{ab} = \begin{pmatrix} \sigma_a & c_{ab} \\ c_{ab}^T & \sigma_b \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

که استفاده از عبارت دیگری برای آنروپی را نشان می دهد. که به نام آنروپی شانون ویگنر $W(\sigma_{ab}) = e^{-u^T \sigma^{-1} ab u / 2} / (\pi^2 \sqrt{\det \sigma_{ab}})$ شناخته می شود و خوانده میشود:

$$S(\sigma_{ab}) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 u w(\sigma_{ab}) \log W(\sigma_{ab}). \quad (10.2)$$

که بردار متغیرهای فضای فاز است. برای توزیعهای گاوسی این عبارت را می توان به راحتی ارزیابی و ارائه کرد [۳۳-۳۶]:

$$S(\sigma_{ab}) = \frac{1}{2} \log(\det \sigma_{ab}) \quad (11.2)$$

که $S(\sigma_{ab})$ مطابق است با آنروپی عمومی رینی^۱ از مرتبه ۲ و $S_2(\rho) = -\log \text{Tr} [\rho^2]$ تمام خواص مورد نیاز برای اندازه گیری آنروپی، مانند تقسیم پذیری را برخوردار است. سپس می توانیم اطلاعات متقابل را بصورت $I(\sigma_{a:b}) = S(\sigma_{ab} \| \sigma_a \oplus \sigma_b)$ تعریف نماییم، از معادله ی (۱۱.۲) می توان معادله ی زیر را نتیجه گرفت:

$$I(\sigma_{a:b}) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\det \sigma_{ab}}{\det \sigma_a \det \sigma_b} \right). \quad (12.2)$$

¹Rényi

۲.۲.۲ کمیت اطلاعات از طریق آنتروپی رینی مرتبه دو

در این قسمت به همبستگی مبتنی بر آنتروپی رینی مرتبه دوم خواهیم پرداخت. حالت n مد را به صورت ρ در نظر میگیریم و تابع ویگنر را به صورت $W_\rho(X)$ با مقدار مرتبط می گیریم، آنتروپی شانون را به صورت

$S(W_\rho) = -2^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} d^{2n}X W_\rho(X) \log W_\rho(X)$ محاسبه می نماییم. به خصوص، اگر تابع گاوسی (با میانگین صفر) با ماتریس هم وردایی σ ، به صورت تابع ویگنر که در زیر آماده است عمل کند:

$$W_\sigma(X) = \frac{1}{\pi \sqrt{\det \sigma}} e^{-\frac{1}{2} X^T \sigma^{-1} X} \quad (۱۳.۲)$$

آنتروپی شانون در شرایط $S(W_\sigma) \equiv S_\sigma$ به صراحت توسط معادله زیر قابل ارزیابی است:

$$S_\sigma = \frac{1}{2} \log \det \sigma + n \log \pi e \quad (۱۴.۲)$$

تابع گاوسی این عبارت دارای یک ضریب ثابت آنتروپی تعمیم یافته رینی مرتبه دوم است، آنتروپی رینی از مرتبه α به صورت:

$$S_\alpha(\rho) = (1 - a)^{-1} \log Tr[\rho^\alpha], \quad \alpha \geq 0$$

تعریف شده است و تعمیم آنتروپی کاربردی خواهد بود. (در واقع می توان نشان داد که در حد $1 \rightarrow \alpha$ آنتروپی فون نویمان به صورت $S_1 = -Tr \rho \log \rho$ نوشته می شود). هنگامی که $\alpha = 2$ ، آنتروپی رینی بیان بسیار ساده ای به صورت $S_2(\rho) = -\log Tr \rho^2$ می گیرد که دارای لگاریتم منفی است. تابع گاوسی را می توان به صورت $Tr \rho^2 = (\pi/2)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} d^{2n}X W_\sigma^2(X) = (\pi/2)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} d^{2n}X W_\sigma(X) \log W_\sigma(X)$ با مقایسه بیان اخیر با معادله (۱۴.۲) خواهیم داشت: $S_\sigma = S_2 + n \log \frac{\pi}{2} e$ که معادله ما را اثبات می کند.

توزیع آنتروپی با استفاده از آنتروپی شانون از تابع ویگنر و طبق معادله (۱۴.۲) اندازه گیری می شود. از آنجا که ما به آهنگ آنتروپی علاقه مندیم، مقدار ثابت موجود در معادله بالا قابل صرف نظر می باشد، به این ترتیب می توانیم اشتراک ها را حذف کنیم و آنتروپی را فقط توسط S نشان دهیم. دینامیک سیستم، همانطور که در قسمت اول آورده شده است، به عنوان راه حل معادلات کوانتومی لانژون برای بردار $\hat{u} = (\hat{q}_a, \hat{p}_a, \hat{q}_b, \hat{p}_b)^T$ توصیف شده است. نهایتاً می توان آن را به عنوان تعریف معادله فوکر-پلانک^۱ برای تابع ویگنر $w(u, t)$ که به صورت زیر است بیان نمود:

$$\partial_t W = -div J(u, t) \quad (۱۵.۲)$$

¹ Fokker Planck

جایی که $u = (q_a, p_a, q_b, p_b)^T$ یک نقطه در فضای فاز باشد و ما برای بردار جریان احتمالی خواهیم داشت:

$$J(u, t) = AuW(u, t) - \frac{1}{\mathcal{F}} D \partial_u W(u, t). \quad (16.2)$$

ماتریسهای A و D که در معادله (۱۶.۲) ذکر شدند در قسمت قبل تعریف شده است و ∂u شیب فضای فاز می باشد. با معرفی عملگر معکوس زمان $E = \text{diag}(-1, 1, -1, 1)$ ، متغیرهای دینامیکی را می توان با توجه به تقارن آنها تقسیم کرد. بر این اساس ماتریس A تقسیم می شود در مؤلفه غیر قابل برگشت $A^{irr}(Eu) = E(A^{irr}u)$ که حتی با توجه به ویژگی معکوس زمان و برگشت پذیری $A^{rev}(Eu) = -E(A^{rev}u)$ همچنان یکنواخت می باشد، آنها می توانند به صورت $A^{irr} = \frac{1}{\mathcal{F}}(A + EAE^T)$ ، $A^{rev} = \frac{1}{\mathcal{F}}(A - EAE^T)$ بوده و صریحا به صورت های زیر باشند:

$$A^{irr} = \text{diag}(-k_a, -k_a, -k_b, -k_b), \quad (17.2)$$

$$A^{rev} = \begin{pmatrix} \circ & \omega_a & \circ & \circ \\ -\omega_a & \circ & G & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \omega_b \\ G & \circ & -\omega_b & \circ \end{pmatrix} \quad (18.2)$$

در حالی که $D \equiv D^{irr}$ این جدایی شامل یک تقسیم مشابه در جریان احتمال $J(u, t) = J^{rev}(u, t) + J^{irr}(u, t)$ می شود که

$$J^{rev}(u, t) = A^{rev}uW(u, t), \quad (19.2)$$

و

$$J^{irr}(u, t) = A^{irr}uW(u, t) - \frac{1}{\mathcal{F}} D \partial W(u, t) \quad (20.2)$$

متوجه می شویم که با توجه به معادله (۱۸.۲)، قسمت برگشت پذیر جریان احتمال واگرایی صفر خواهد بود از $\text{div} J^{rev}(u, t) = W(u, t) \text{Tr}[\partial_u(A^{rev}u)] = 0$. شرط تعادل در حالت $J_{eq}(u) \equiv 0$ بدست می آید و ذکر می شود که تابع مربوطه $W_{eq}(u)$ به واسطه تغییر زمان، بدون تغییر باقی می ماند، یعنی $W_{eq}(Eu) = W_{eq}(u)$ این شرایط با برگشت پذیری میکروسکوپی مطابقت دارد و در این حالت ماتریس هم وردایی سیستم به صورت $\sigma_{eq} = (Na + 1/2) 1_a \oplus (Nb + 1/2) 1_b$ خواهد بود پس بنابراین دو حالت به صورت حالت گرمایی محلی^۱ توصیف می شود. از طرف دیگر، وقتی $\text{div} J_s(u) \equiv 0$ باشد سیستم در حالت ثابت غیر تعادلی قرار می گیرد. اگر از معادله (۱۶.۲) برای محاسبه آهنگ آنتروپی استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\mathcal{F}} \int du \text{div} J(u, t) \log W(u, t). \quad (21.2)$$

¹locally thermal states

سپس، می توانیم انتگرال را به صورت

$$\begin{aligned} \operatorname{div} J(u, t) \log W(u, t) &= \operatorname{div} J^{irr}(u, t) \log w(u, t) = \\ &= \operatorname{div}(J^{irr}(u, t) \log W(u, t)) - J^{irr}(u, t)^T \partial_u (\log W(u, t)) \end{aligned}$$

بنویسیم، و متوجه می شویم که در قسمت اول وقتی یکپارچگی داشته باشیم در نتیجه قضیه استوکس از بین می رود (فرض می کنیم چگالی احتمال در مرز فاز ناپدید می شود). بنابراین، آهنگ تولید آنتروپی به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\mathcal{F}} \int du \frac{1}{W(u, t)} J^{irr}(u, t)^T \partial_u W(u, t). \quad (22.2)$$

در آخر با استفاده از معادله ی (۲۰.۲)، معادله ی (۲.۲) را برای شار آنتروپی و آهنگ تولید آنتروپی بصورت زیر بازنویسی می نماییم.

$$\Phi(t) = -\frac{1}{\mathcal{F}} \int du \mathcal{J}^{irr}(u, t)^T D^{-1} A^{irr} u, \quad (23.2)$$

$$\Pi(t) = \frac{1}{\mathcal{F}} \int du \frac{\mathcal{J}^{irr}(u, t)^T D^{-1} J^{irr}(u, t)}{W(u, t)}. \quad (24.2)$$

با توجه به عدم منفی بودن آن، می توان آهنگ تولید آنتروپی را محاسبه کرد. علاوه بر این، با توجه به تابع توزیع ویگنر استفاده شده در معادله ی (۱۳.۲) در صورتی که نیاز باشد از آن مشتق بگیریم با انجام برخی محاسبات ساده ی ریاضی و با استفاده از مشتق ماتریسی می توان به رابطه ی $\partial_u W_\sigma(u, t) = -W_\sigma(u, t) \sigma^{-1}(t) u$ همان X در معادله ی (۱۳.۲) است [۴۵] و مؤلفه برگشت ناپذیر احتمال جریان که در معادله (۲۰.۲) به آن اشاره شده بود خواهد بود $J^{irr}(u, t) = W_\sigma(u, t) (A^{irr} u + D) \sigma^{-1}(t) u$ و انتگرال معادله (۲۴.۲) می تواند به صورت زیر تغییر شکل دهد:

$$\Pi(t) = \frac{1}{\mathcal{F}} \operatorname{Tr} [\sigma^{-1} D] + \mathcal{J} \operatorname{Tr} [A^{irr}] + \mathcal{J} \operatorname{Tr} [(A^{irr})^T D^{-1} A^{irr} \sigma]. \quad (25.2)$$

از طرف دیگر، اگر مشتق آنتروپی شانون از تابع ویگنر و طبق معادله (۱۳.۲) محاسبه نماییم، خواهیم داشت $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\mathcal{F}} \operatorname{Tr} [\sigma^{-1} \partial_t \sigma]$ که در این معادله، معادله ژاکوبی را به مشتق تعیین کننده اعمال کردیم. با درج ماتریس هم وردایی موجود در معادله (۸.۲) خواهیم داشت:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\mathcal{F}} \operatorname{Tr} [\sigma^{-1}(t) D] + \operatorname{Tr} [A^{irr}]. \quad (26.2)$$

بنابراین با مقایسه بیان اخیر با معادله (۲۵.۲) می توانیم بنویسیم:

$$\Pi(t) = \frac{dS}{dt} - \Phi(t) \quad (27.2)$$

جایی که

$$\Phi(t) = -\operatorname{Tr} [A^{irr}] - \mathcal{J} \operatorname{Tr} [(A^{irr})^T D^{-1} A^{irr} \sigma(t)] \quad (28.2)$$

به ویژه ، وقتی سیستم به وضعیت پایا برسد خواهیم داشت:

$$\Pi_s = Tr [A^{irr}] + 2Tr [(A^{irr})^T D^{-1} A^{irr} \sigma_s]. \quad (29.2)$$

حالت دوم اکنون به شکل ماتریس بوده که می تواند به راحتی توسط تابع زیر مورد ارزیابی قرار گیرد:

$$\Pi_s = 2k_a \left(\frac{[\sigma_s]_{11} + [\sigma_s]_{22}}{2N_a + 1} - 1 \right) + 2k_b \left(\frac{[\sigma_s]_{33} + [\sigma_s]_{44}}{2N_b + 1} - 1 \right) \quad (30.2)$$

که در نتیجه، نتایج در معادله (۳۱.۲) نمایش داده شده است. بیان تحلیلی سان برای Π_s را می توان با شروع از معادله (۲.۲) استخراج کرد. به بیان ساده معادله زیر برای آهنگ ثابت تولید آنتروپی استفاده می شود:

$$\Pi_s = 2k_a \left(\frac{\langle \hat{q}_a^2 \rangle_s + \langle \hat{p}_a^2 \rangle_s}{2N_a + 1} - 1 \right) + 2k_b \left(\frac{\langle \hat{q}_b^2 \rangle_s + \langle \hat{p}_b^2 \rangle_s}{2N_b + 1} - 1 \right), \quad (31.2)$$

که در آن $\langle \cdot \rangle_s$ مشخص می کند که مقادیر مورد انتظار در حالت ثابت گرفته می شود. از آنجا که اصطلاح اول (دوم) فقط به مقادیر برچسب گذاری شده توسط a (b) بستگی دارد، ما آن را سهم a (b) در آهنگ تولید آنتروپی می نامیم و آن را μ_a (μ_b) می نامیم. بنابراین داریم:

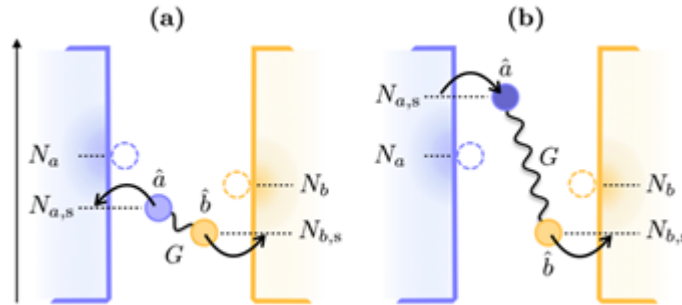
$$\mu_k = 2k_k \left(\frac{N_{k,s} + 1/2}{N_k + 1/2} - 1 \right), \quad (k = a, b) \quad (32.2)$$

جایی که تعیین کردیم $N_a = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{eq}$ و $N_{a,s} = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_s$ به طور مشابه برای μ_b . ویژگی اصلی معادله (۳۲.۲) این است که این برگشت ناپذیری حاصل از فرآیند ثابت را به تغییر در آهنگ برانگیختگی های انجام شده توسط هر نوسان گر با توجه به ارزش تعادل پیوند می دهد ، بنابراین تولید آنتروپی را به صورت بسیار ساده بیان می کند. اگر سیستم تعادلی باشد، هر نوسانگر با حمام خود و با معادله (۳۲.۲) دارای تعادل می شود. می بینیم که Π_s به طور یکسان از بین می رود. همچنین $\Pi_s = \mu_a + \mu_b \geq 0$ از معادله (۳۲.۲) نتیجه می گیریم، هیچ فرآیندی که همزمان منجر به $N_{a,s} < N_a$, $N_{b,s} < N_b$ شود نمی تواند رخ دهد، حالت ترمودینامیکی زمان به صورت یک قید (محدودیت) در دو نوسان گر تعریف می گردد.

نمونه ای از روند ممنوع در شکل زیر ترسیم شده است. با این حال ، هیچ چیز از کاهش موضعی آنتروپی جلوگیری نمی کند، به عنوان مثال $\mu_b < 0$ همانطور که در نمودار (b) نشان داده شده است، تا زمانی که با $\mu_a > -\mu_b$ جبران شود. چنین شرایطی مستلزم $N_{b,s} < N_b$ است و بنابراین مطابق با یک نوسانگر خنک کننده منجر به یک نوسان گر می گردد. این همچنین نشان می دهد که، به طور جداگانه، نه μ_a و نه μ_b می توانند به عنوان یک تولید آنتروپی تعبیر شود. با نگاهی به معادله (۳۱.۲) ما متوجه می شویم که هیچ وابستگی صریح از Π به عناصر خارج از مورب ماتریس هم وردایی وجود ندارد. همبستگی بین دو حالت در بیان کامل مقادیر مورد انتظار پنهان است. مطلوب خواهد بود که یک شکل جایگزین برای

$\mu_{a,b}$ وجود داشته باشد، جایی که نقش همبستگی های ایجاد شده در حالت پایا صریح است که توسط معادله ی زیر بیان شود:

$$\mu_a = \frac{G}{N_a + 1/2} \langle \hat{p}_a \hat{q}_b \rangle_s, \quad \mu_b = \frac{G}{N_b + 1/2} \langle \hat{p}_a \hat{q}_b \rangle_s, \quad (33.2)$$



شکل ۲.۲: نوسان گرهای مربوط به شکل در ابتدا در تعادل حرارتی با تعدادی از برانگیختگی های N_a و N_b به ترتیب (دایره های شکسته) قرار دارند. با اتصال G ، آنها به حالت ثابت می رسند که با $N_{a,s}$ و $N_{b,s}$ (دایره های کامل) مشخص می شوند. (a): نمونه ای از فرآیند ثابت ممنوع که در آن هر دو با توجه به مقادیر تعادل آنها کاهش می یابد، بنابراین منجر به $\Pi_s < 0$ می شود. (b): آنتروپی هنوز هم می تواند به صورت محلی کاهش یابد ($\mu_b < 0$) به عنوان نتیجه کاهش در تحریکات در تحریکات N_b ، اما این امر مستلزم آن است که تحریکات در حالت \hat{a} جمع می شوند.

جایی که داریم $\langle \hat{p}_a \hat{q}_b \rangle_s = [\sigma_s]_{14}$ ، $\langle \hat{p}_a \hat{q}_b \rangle_s = [\sigma_s]_{23}$ ، از معادله (۳۲.۲)، به صراحت می بینیم که Π_s برای سیستم های بدون استفاده از بین می رود، زیرا هرنوسانگر بطور مستقل با حمام خود تعادل می یابد. معادله (۳۲.۲) به صورت کمی عدم برگشت پذیری را با برخی از عملکردهای همبستگی متغیرهای دینامیکی پیوند می دهد.

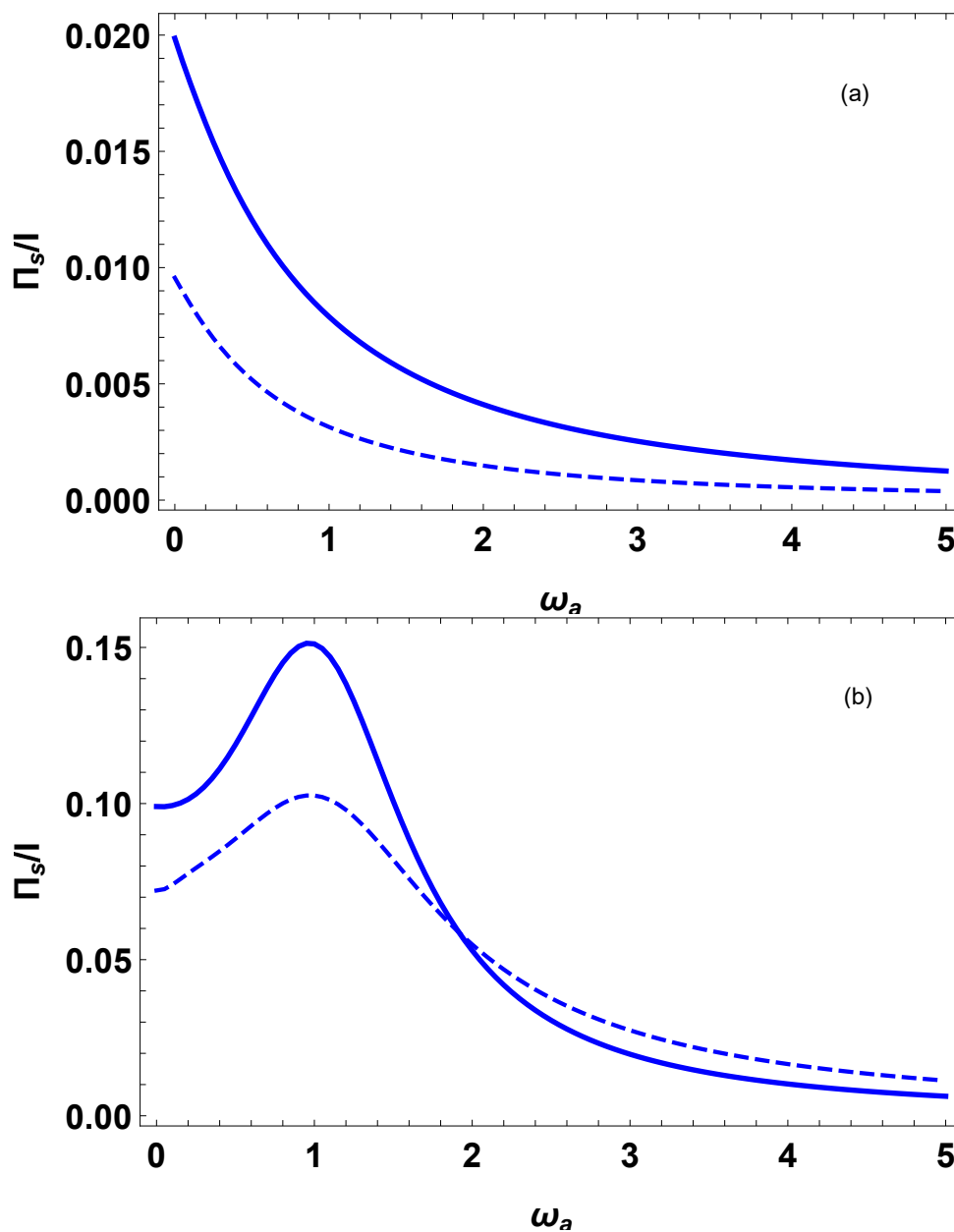
۳.۲.۲ رابطه بین آهنگ تولید آنتروپی و اطلاعات متقابل

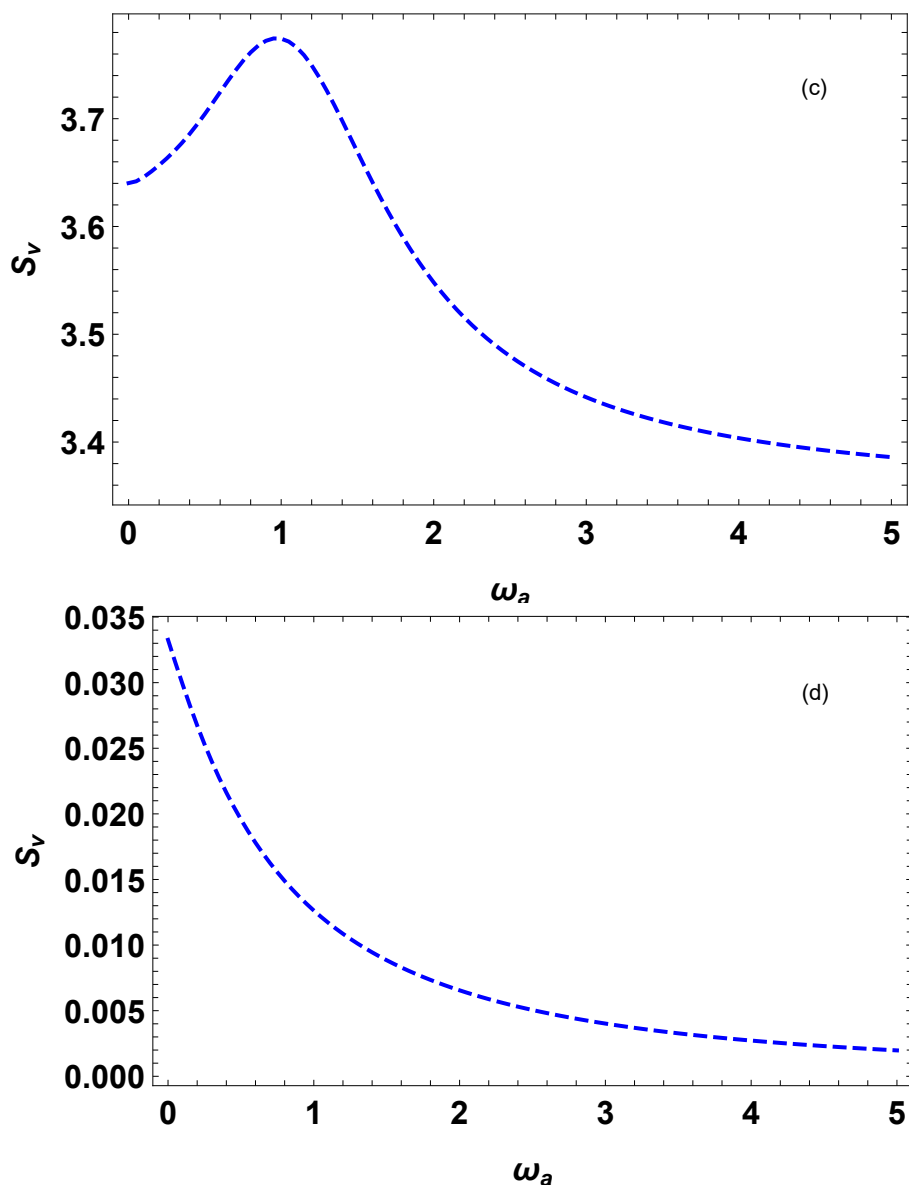
بیان اطلاعات متقابل بین دو نوسان گر در حالت پایا، هیچ ارتباطی با آهنگ تولید آنتروپی ندارد: Π_s یک تابع منطقی است در حالی که در معادله (۴.۳) مشاهده خواهیم کرد که I لگاریتمی است. علاوه بر این، اطلاعات متقابل را نمی توان به مجموع دو حالت جداگانه کاهش داد زیرا هر یک قابل تغییر به یک نوسان گر واحد است. این حقایق منعکس کننده منشأ متفاوت ترم^۱ است. از طرف دیگر، با توجه به معادله (۳۲.۲) می دانیم که Π_s به وضوح با موقعیت همبستگی در بین نوسان گرها مرتبط است، به طوری که ممکن است فرد درباره ارتباط احتمالی بین آهنگ آنتروپی تولید شده و همبستگی های موجود در سیستم تعجب کند. در حقیقت، با مقایسه Π_s و I ، همانطور که در شکل (۲.۲) انجام شده است، متوجه یک شباهت چشمگیر می شویم: علی رغم شکل عملکردی متفاوت آنها، I به وضوح یک تابع یک به یک از Π_s می باشد. این نشانگر اولین مدرکی است مبنی بر اینکه برگشت ناپذیری حاصل از فرآیند ثابت و مقدار کل همبستگی های مشترک بین دو حالت کاملاً مرتبط می باشند. هنگامی که نوسان گرها غیرقابل انعطاف یا دور از دسترس هستند و بنابراین به طور مؤثر از هم جدا می شوند، آنها به طور جداگانه به تعادل حرارتی می رسند و حالت کلی سیستم از حالت های گرمایی محلی تشکیل شده و مقادیر بازده هر دو شامل Π_s و I می باشد. یکی دیگر از ویژگی های قابل توجه این دو این است که، وقتی تعداد برانگیختگی های حرارتی $N_a = N_b = N$ یکسان باشد، Π_s و I هر دو از نظر N مستقل هستند. همانطور که می توان تصور کرد، این مورد به آهنگ درهم تنیدگی^۲ در صورت وجود و توسط دو نوسان گر غیرمشترک بستگی دارد.

¹terms

²entanglement

سرانجام، می توان مقدار همبستگی کوانتومی بین دو حالت را با توجه به آنتروپی رینی بیان کرد. باتوجه به نمودارهای زیر مشاهده می کنیم که رفتار آنتروپی از اطلاعات متقابل پیروی می کند [۲۶].





شکل ۳.۲: مقایسه آهنگ تولید آنتروپی Π_s/ω_b (خط پیوسته)، اطلاعات متقابل I (خط چین) برای شکل (a) $G = \circ/\omega_b, \kappa_a = \circ/2\omega_b, \kappa_b = \circ/5\omega_b, N_a = \circ$ و $N_b = \circ$ و $N_b = 1^\circ$ برای شکل (b) و در شکل (c) و (d) توزیع آنتروپی برای مقادیر $N_b = 1^\circ$ و $N_b = \circ$ به ترتیب بدست آمده است.

فصل ۳

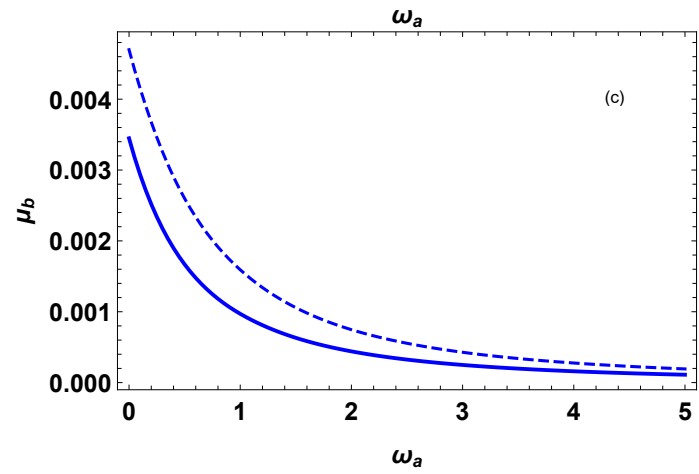
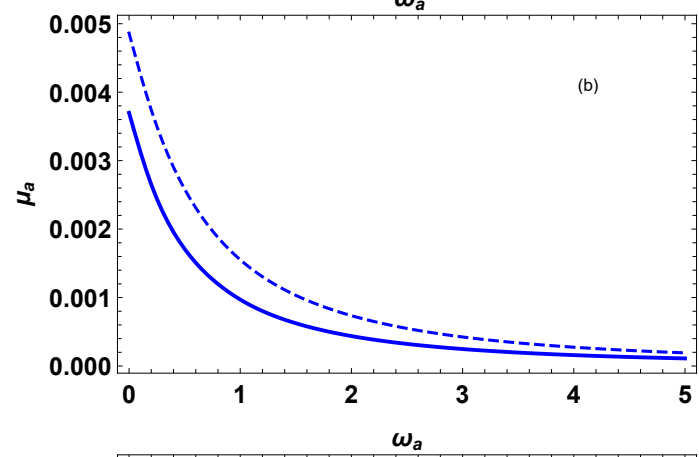
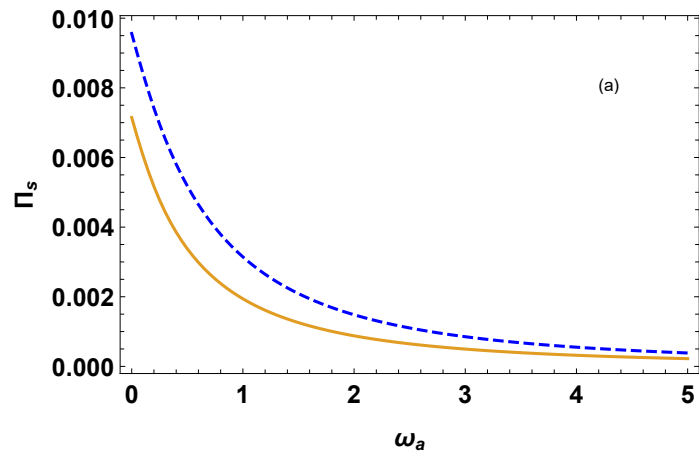
محاسبه آهنگ تولید آنترופی و
همبستگی کوانتومی برای نوسانگرهای
هماهنگ جفت شده

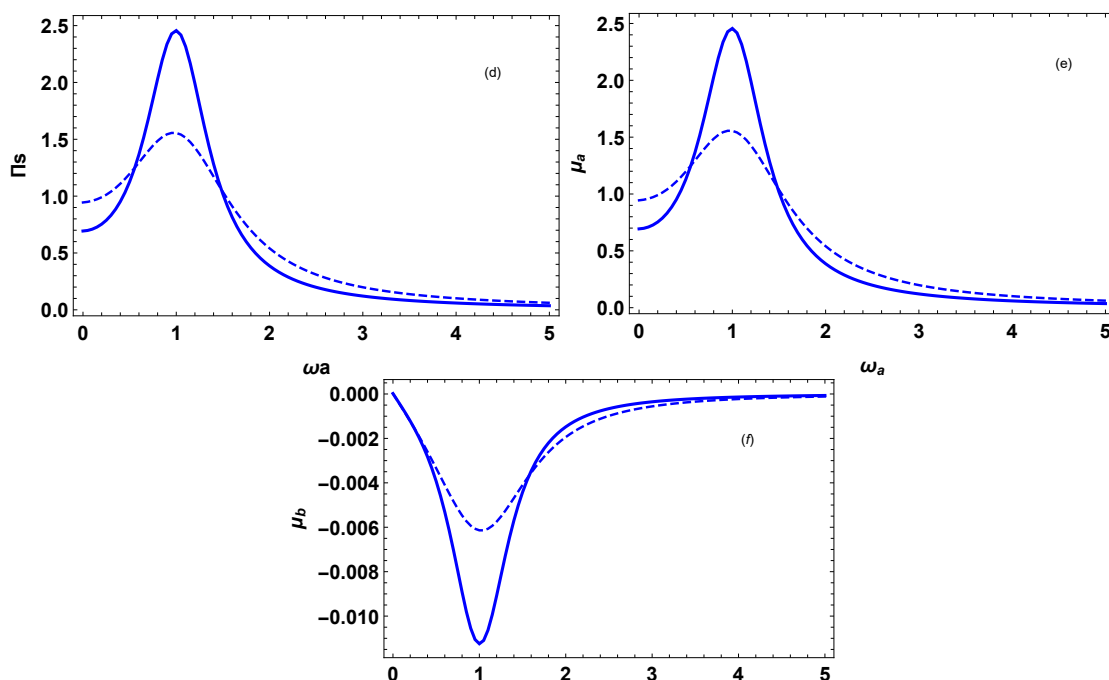
۱.۳ تجزیه و تحلیل آهنگ تولید آنتروپی

در این فصل به طور کامل رفتارهای تولید آنتروپی ثابت را بیان می کنیم. به خاطر راحتی، همه فرکانس ها توسط ω_b فراخوانده شده اند، بنابراین ما با مقادیر بی بعد سروکار داریم. با این حال، برای جلوگیری از افزونگی، تغییر مقیاس به جز در شکل ها و زیرنویس های مربوط، جایی که مقادیر مربوط به صراحت در واحدهای ω_b نشان داده شده است حذف خواهد شد و همان نماد نگهداری می شود.

در شکل (۳.۱) آهنگ تولید آنتروپی ثابت را به همراه اجزای b و μ_a در برابر فرکانس ω_a نشان داده ایم. در شکل های (a) – (c) مایع گرمایی در حالت پایه^۱ قرار دارند^۰ $N_a = N_b =$ و می بینیم که μ_a و μ_b هر دو مثبت و بسیار مشابه هستند (اگرچه برابر نیستند). این امر به این دلیل است که حالت اشغال پایا فقط با توجه به حالت اولیه آنها و با نگاه کردن به معادله (۱۰.۲) می توانند افزایش پیدا کنند. اگر برخی پارامترهای حرارتی اولیه را در یک نوسان گر در نظر بگیریم، همانطور که در شکل ۱ (d) – (f) برای مورد $N_b > 0$ نشان داده شده است، می بینیم $\Pi_s \approx \mu_a$ دارای یک اوج مشخص در $\omega_a = 1$ است. به طور متناظر، μ_b شیب منفی را نشان می دهد. اختلاف معنی داری در بزرگی بین μ_a و μ_b وجود دارد که مثبت بودن کلی Π تضمین می کند.

¹ground





شکل ۱.۳: آهنگ تولید آنتروپی Π_s/ω_b در شکل (a) و دو سهم آن μ_a/ω_b در شکل (b) و μ_b/ω_a در شکل (c) در برابر نسبت دو فرکانس؛ منحنی‌های پیوسته مطابق $k_a = k_b = \pi/2$ است و در منحنی‌های خط چین $k_a = \pi/2$ و $k_b = \pi/5$ است. پارامترهای دیگر $N_a = N_b = 0$ ، $G = \pi/4$ در شکل‌های (d)، (e)، (f) و در شکل‌های (a)، (b)، (c) همان موارد با $N_a = 0$ و $N_b = 100$ در حالت برانگیخته حرارتی را نشان می‌دهند و خط پیوسته آهنگ تولید آنتروپی و خط چین همبستگی‌های سیستم را نشان می‌دهد.

با مقایسه شکل‌های (a) و (d) متوجه می‌شویم که ایجاد برخی عدم تعادل بین جمعیت اولیه نوسان گر باعث رشد Π می‌شود، بنابراین شاهد برگشت ناپذیری ناشی از انتقال^۱ هستیم، زیرا نوسانگرهای جفت شده^۲ در حال حاضر واسطه شار گرمای خالص بین دو حمام هستند. علاوه بر این، با توجه به معادله (۳۲.۲)، مقدار منفی پایدار μ_b حاکی از کاهش برانگیختگی ثابت $N_{b,s} < N_b$ و در نتیجه خنک‌کنندگی مؤثر نوسان گر b (همانطور که در شکل ۳.۲ (b) ترسیم شده است) است. حداکثر (حداقل) در نظر گرفته شده توسط μ_a, μ_b در $\omega_a = 1$ ، یعنی وقتی نوسان گرها دارای فرکانس یکسان هستند، به شرح زیر قابل درک است. برای $\omega_a \approx 1$ و در صورتیکه $G < \omega_a$ ، ما می‌توانیم چارچوب چرخان^۳ را حرکت داده و تقریب موج چرخش را اعمال کنیم، به طوری که هامیلتون حالت $H_I \propto \hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{b}^\dagger$ را می‌گیرد دومی یک تعامل تبادل خالص است و از این رو برای انتقال گرما مطلوب است، بنابراین توضیح می‌دهد که چرا درجه برگشت ناپذیری بزرگ است [۳۱]. این خصوصیات با جزئیات بیشتر در قسمت چهارم هنگام پرداختن به خنک‌کننده به کمک یک کاواک نوری مکانیکی مورد بحث

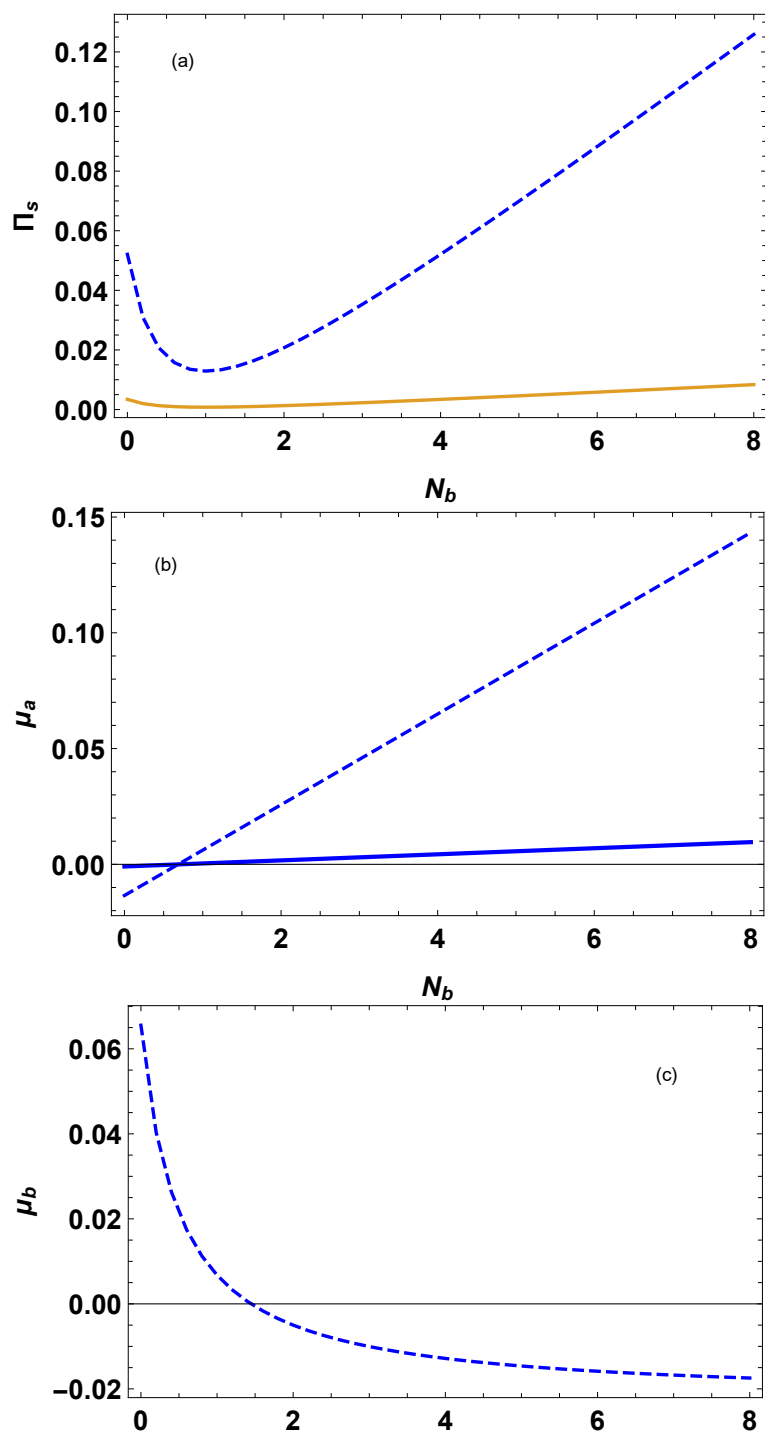
¹transport

²coupled oscillators

³rotating frame

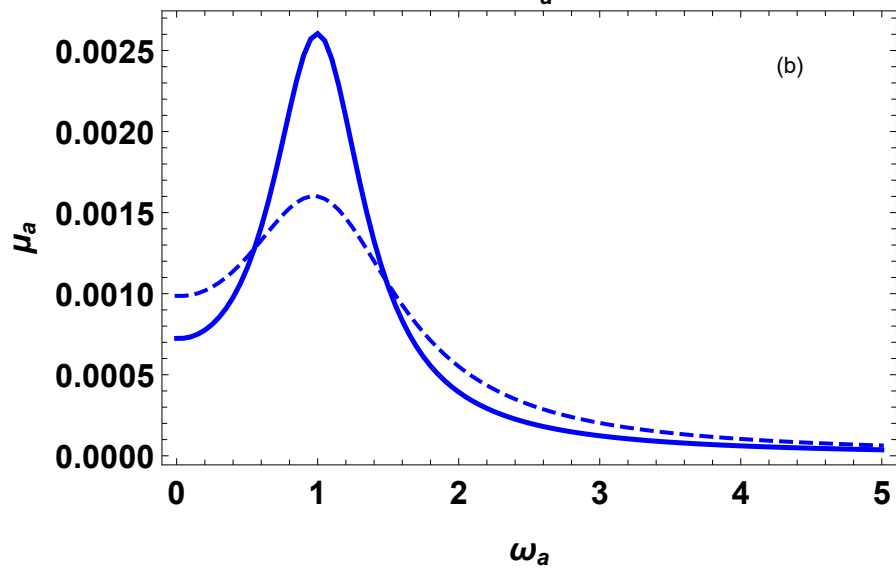
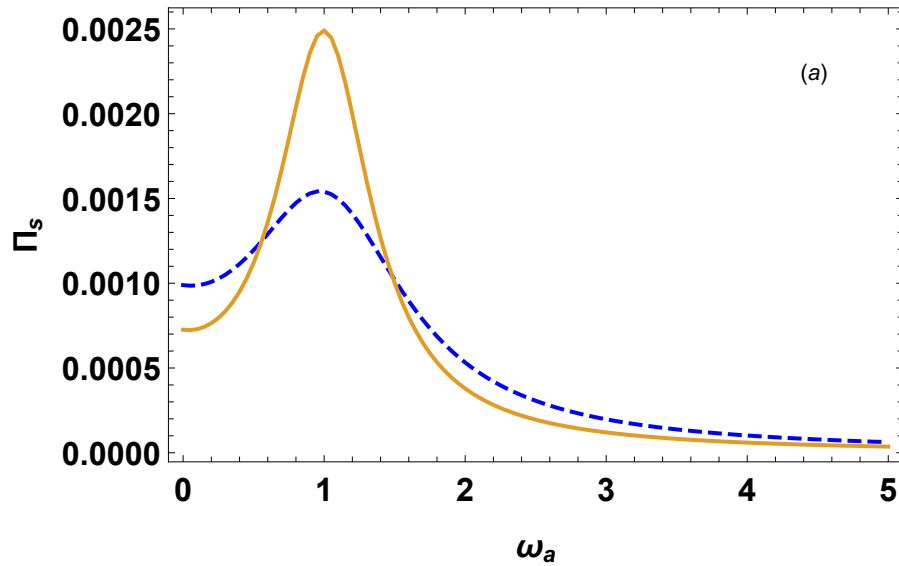
قرار خواهد گرفت. از طرف دیگر، از شکل ۱.۳ برداشت می‌کنیم که Π_s برای $\omega_a \geq 1$ به صفر تمایل دارد. این امر به این دلیل است که وقتی نوسان گرها بسیار دور از تشدید^۱ هستند، به طور مؤثر جدا می‌شوند، به طوری که هر یک از آنها حمام خود را گرم می‌کنند. سرانجام، ما همچنین می‌توانیم نقشی را که آهنگ کاهش اتلاف $k_{a,b}$ در تولید آنتروپی برگشت ناپذیر دارد را بررسی کنیم. منحنی های پیوسته دارای آهنگ یکسان $k_a = k_b$ بوده، در حالی که منحنی های خط چین به مقادیر مختلف $k_a = 0.2$ و $k_b = 0.5$ اشاره دارند. هنگامی که درجه حرارت $T_{a,b}$ مربوط به حمام ها و فرکانس ها $\omega_{a,b}$ به گونه ای باشد که تعداد اولیه تحریکات حرارتی یکسان باشد، یعنی $N_a = N_b = N$ ، میزان تولید آنتروپی در N مستقل می‌شود، که این یک ویژگی بارز تقارن بین دو زیر سیستم است. همچنین، در شکل ۲.۳ مشاهده می‌کنیم که Π_s برای $N_a = N_b$ به حداقل خود می‌رسد، در حالی که N_b بیش از N_a است، Π_s به لحاظ خطی با توجه به N_b رشد می‌کند، یعنی متناسب با عدم تعادل در جمعیت. برای $N_b/N_a < 1$ شاهد افزایش ناگهانی آهنگ تولید آنتروپی هستیم، که با این حال برای $N_b = 0$ محدود باقی مانده است. برخی از بینش ها کمی بیشتر می‌تواند در حد جفت کوچک باشند، پس از گسترش $\mu_{a,b}$ در سری توان G ، با استفاده از عبارات زیر می‌توان به این نتیجه رسید که G یکنواخت است.

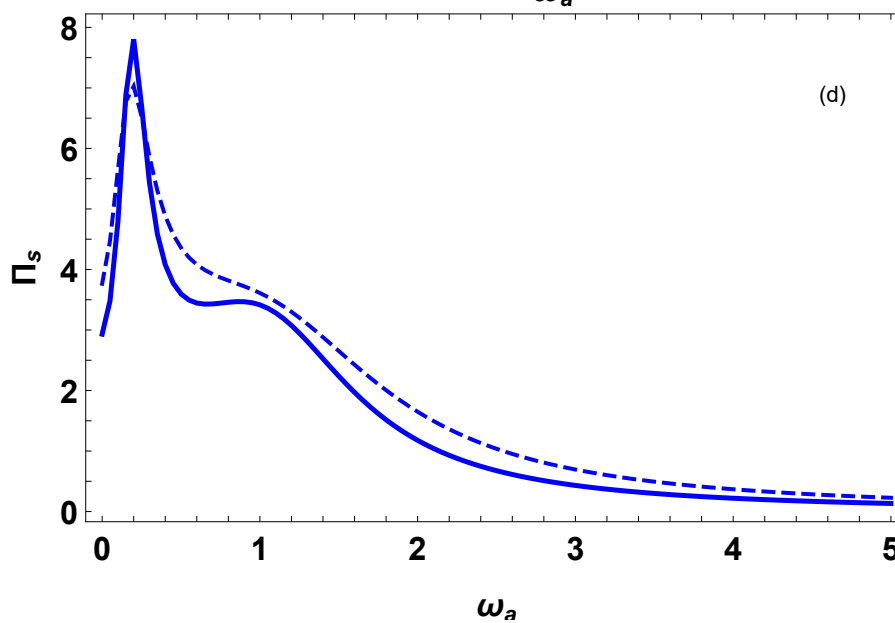
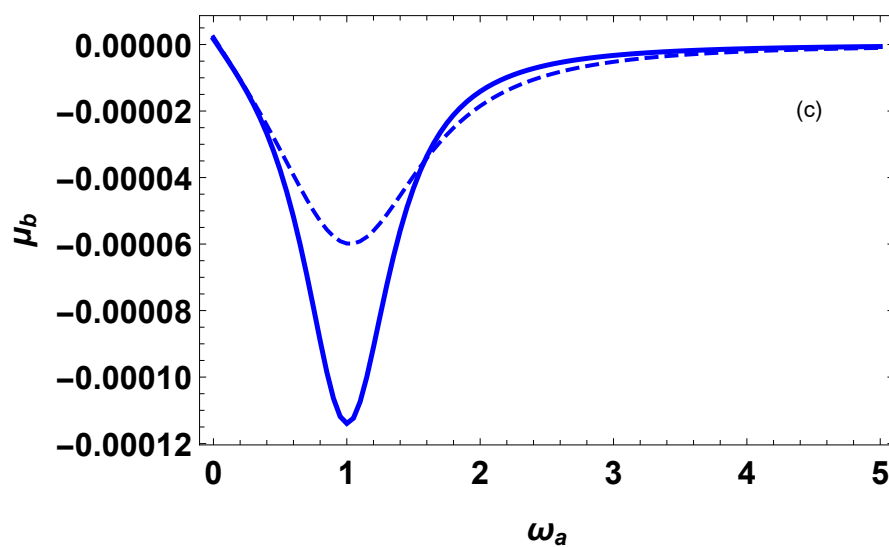
¹resonance

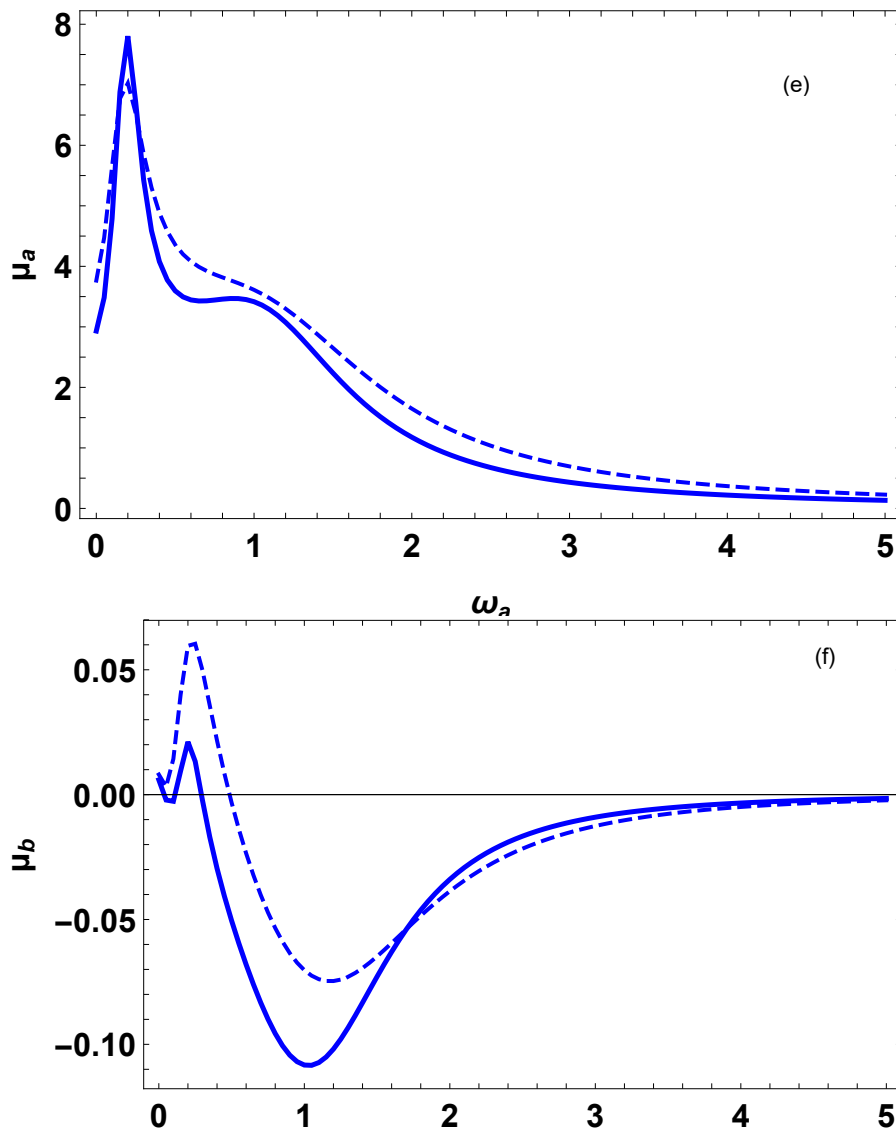


شکل ۲.۳: آهنگ تولید آنتروپی $\Pi_s/\omega_{b,a}$ و دو سهم آن $\mu_b/\omega_{b,a}$ و $\mu_a/\omega_{b,b}$ در برابر نسبت N_b/N_a . نوسان گرها دارای همان فرکانس $k_a = 0/2$ و $k_b = 0/5$ هستند و هر دو با مقاومت $G=0.05$ (منحنی های پیوسته) یا $G=0.2$ (منحنی های خط چین) همراه هستند.

با توجه به شکل ۱.۳ (f) مقدار μ_b می تواند منفی باشد، با این حال، اگر مرحله ی بعد را در حالت انبساط در نظر بگیریم، با توجه به نمودارهای زیر خواهیم دید که μ_b ، از $\omega_a \geq 1$ به صفر می رسد.







شکل ۳.۳: آهنگ تولید آنتروپی $\Pi_s/\omega_{b,a}$ و دو سهم آن $\mu_a/\omega_{b,b}$ و $\mu_b/\omega_{b,a}$ است، نسبت دو فرکانس برای (حالت پیوسته) به صورت $k_a = k_b = 0.2$ است، درحالیکه برای (حالت خط چین) $k_a = 0.2$ و $k_b = 0.5$ می باشد. پارامترهای دیگر $N_a = 0$ و $N_b = 10$ و $G = 0.01$ برای نمودارهای (d)-(f) و برای نمودارهای (a)-(c) $G = 0.6$ است.

با مقایسه و بررسی شکل (a) ۳ در $G=0.01$ با شکل (d) ۱ که برای $G=0.1$ از آنجا که Π_s با دو مرتبه افت همان شکل را حفظ می کند. از طرف دیگر، در شکل (d) ۳ نمونه ای از برهم کنش قوی را نشان می دهیم، که در آن مقاومت کاواک جفت شده بیش از آهنگ اتلاف است و با فرکانسهای نوسان قابل مقایسه است.

۱.۱.۳ نوسان گرها و حمام های یکسان

اگر حمام ها دارای درجه حرارت T مشابه باشند و نوسانگرها همان فرکانس ω را داشته باشند، منجر به $N = (e^{hw/K_{BT}} - 1)^{-1}$ می شود. ما می توانیم میزان تولید آنتروپی را مستقیماً با یک عنصر واحد از ماتریس هم وردایی از حالت نوسان گرها مرتبط کنیم. ما در این مورد میزان تولید آنتروپی را Π_s در نظر می گیریم، که توسط معادله $\langle \hat{q}_a \hat{q}_b \rangle_s$ بدست می آید که متناسب با عنصر ماتریس $[\sigma_s]_{13}$ است. با استفاده از فرم صریح ورودی ماتریس هم وردایی، داریم

$$\tilde{\Pi}_s = \frac{G^2 k_{tot} [G^2 (k_{tot}^2 - 3K_a K_b + 1) + 4K_a K_b \chi_{ab}]}{2(\chi_{ab} - G^2)[G^2 + k_a k_b (k_{tot}^2 + 4)} \quad (1.3)$$

که $\chi_{ab} = (k_a^2 + 1)(k_b^2 + 1)$ قرار دادیم. معادله (۱.۳) نشان می دهد که برای دو نوسان گر یکسان در صورت عدم وجود گرادیان حرارتی، تولید آنتروپی مستقل از N است. علاوه بر این اگر،

$$k_a = k_b = k$$

(و آنتروپی $\tilde{\Pi}_k$ باشد) خواهیم داشت

$$\tilde{\Pi}_k = \frac{G^2 k (k^2 + 1)}{(k^2 + 1)^2 - G^2} \quad (2.3)$$

با داشتن دو نوسان گر یکسان در حمام های یکسان، سیستم^۱ در متقارن ترین حالت خود قرار میگیرد، و حالت پایا^۲ حاصل نزدیکترین حالت ممکن برای تعادل است. بر این اساس، می توان تأیید کرد که در این سناریو تولید آنتروپی به حداقل می رسد. علاوه بر این، یک محاسبه دقیق نشان می دهد که، در این حالت، نوسان گرها به طور مساوی در تولید آنتروپی نقش دارند، یعنی $\tilde{\mu}_a = \tilde{\mu}_b = \tilde{\Pi}_k/2$

¹open system

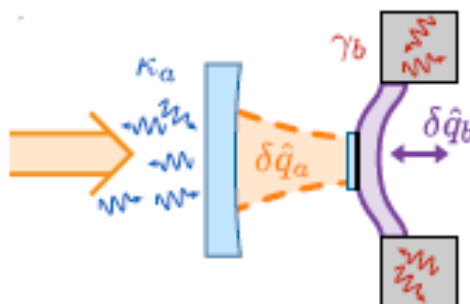
²stationary state

۲.۳ همبستگی در یک سیستم نوری مکانیکی

در این بخش ما اطلاعات خود را برای توصیف برگشت ناپذیری در یک سیستم نوری مکانیکی^۱ توضیح می دهیم. دستگاههای نوری مکانیکی امکان دستکاری منسجم سیستمهای مکانیکی میکروسکوپی را امکان پذیر می سازند. به این ترتیب، به تازگی از یک چارچوب ترمودینامیک در حالت کوانتومی و به عنوان یک کاندید خوب بر روی ماشین آلات حرارتی کوانتومی [۳۷-۴۳] استفاده شده است. سیستم مورد نظر ما یک کاواک نوری مکانیکی با طول L ایجاد میکند که توسط لیزر با فرکانس ω_0 و قدرت $\varepsilon = \sqrt{2P_K/h\omega_0}$ ایجاد می شود P قدرت لیزر و k نرخ فروپاشی^۲ کاواک است. یک حالت مکانیکی با فرکانس ω_m که به دلیل فشار تابش میتواند کاواک ایجاد کند. هامیلتونی سیستم دارای معادله ی زیر است:

$$\hat{H}_0 = h\Delta_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{h\omega_m}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2) - h g_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{q} + ih\varepsilon(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (3.3)$$

که $\Delta_0 = \omega_c - \omega_0$ به معنی جدا کننده پمپ کاواک^۳ است، \hat{q} و \hat{p} طبقه بندی کننده مکانیکی بدون بعد هستند، و قدرت فشار تابش با تک فوتون^۴ اندازه گیری می شود و دارای آهنگ $g_0 = \frac{\omega_c x_{zpf}}{L}$ است که در آن $x_{zpf} = \sqrt{\hbar/m\omega_m}$ تعریف نقطه صفر^۵ از تشدیدگر مکانیکی است، که دینامیک سیستم نیز تحت تأثیر قرار می دهد.



شکل ۴.۳: در شکل تنظیمات نوری مکانیکی: یک نوسان گر میکرو مکانیکی δq_b جفت شده با یک کاواک نوری δq_a نشان داده شده است، برای این تنظیم فقط کاواک پمپ شده است.

حالت مکانیکی تحت تأثیر نیروی تصادفی براونی^۶ با میانگین صفر $\xi(t)$ قرار دارد، که برای کیفیت مکانیکی بالا ماکرووین دارای آهنگ اتلاف γ_m می باشد. میدان داخل کاواک متصل به

¹optomechanic

²decay

³cavity pump detuning

⁴single-photon

⁵zero-point

⁶Brownian stochastic

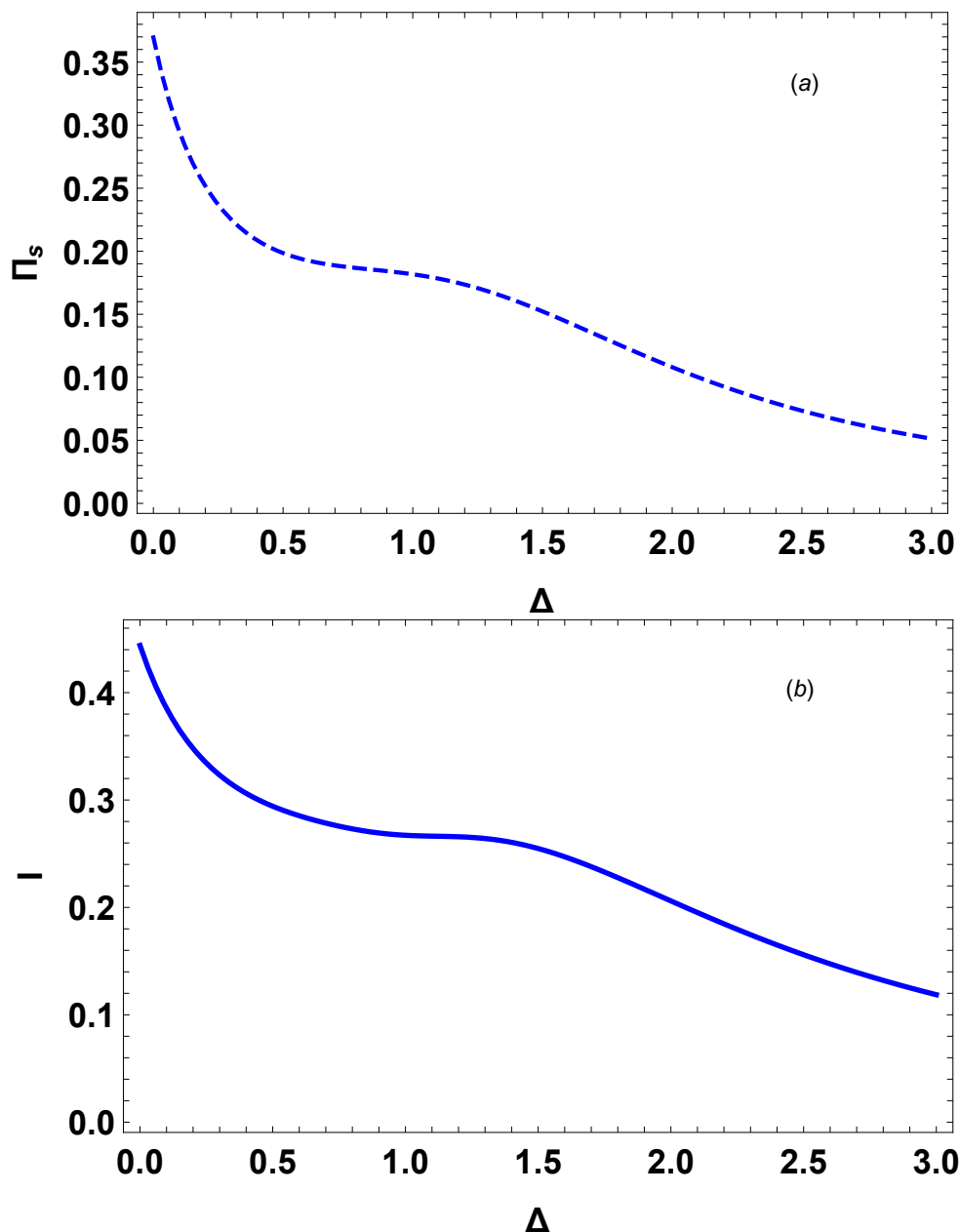
میدان الکترومغناطیسی خلاء خارج توسط نوفه ورودی \hat{a}^{in} توصیف می گردد. بردار نوفه داده شده عبارتست از $\hat{N} = (\circ, \hat{\xi}, \sqrt{2k}\hat{X}^{in}, \sqrt{2k}\hat{Y}^{in})^T$ به عنوان یک محرک قوی، به شرط آنکه این سیستم در يك وضعیت پایدار باقی بماند، میدان کاواک به مقدار پایا دامنه $\langle \hat{a} \rangle_s = a$ می رسد که در این حالت می توان نوسانات کوانتومی کوچک را در اطراف حالت پایا کلاسیک در نظر گرفت. معادلات لانژون را با استفاده از معادلات هایزنبرگ به صورت زیر بیان می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\omega_m \delta p \\ \frac{dp}{dt} &= -\omega_m \delta q - \gamma_m \delta p + G \delta X \\ \frac{dx}{dt} &= -k \delta x + \Delta \delta y + \sqrt{2k_1} x_1^{in} + \sqrt{2k_2} x_2^{in} \\ \frac{dy}{dt} &= -k \delta y - \Delta \delta x + G \delta q + \sqrt{2k_1} y_1^{in} + \sqrt{2k_2} y_2^{in} \end{aligned} \quad (4.3)$$

اتلاف با آهنگ $k = k_1 + k_2$ رخ می دهد. این روش منجر به تعامل خطی $\hat{H}_I = 2hg\delta\hat{q}\delta\hat{X}$ بین عملگرهای نوسان گر مکانیکی $(\delta\hat{q})$ و نوری $(\delta\hat{X})$ و یک اتصال جفت نوری مکانیکی پیشرفته $g = \frac{\sqrt{2}g_0|\varepsilon|}{\sqrt{k^2 + \Delta^2}}$ که $\Delta = \Delta_0 - \frac{g_0^2|a|^2}{\omega_m}$ می باشد، می شود. این روش منجر به تعامل خطی $\hat{H}_I = 2hg\delta\hat{q}\delta\hat{X}$ بین عملگرهای نوسان گر مکانیکی $(\delta\hat{q})$ و نوری $(\delta\hat{X})$ و یک اتصال جفت نوری مکانیکی پیشرفته $g = \frac{\sqrt{2}g_0|\varepsilon|}{\sqrt{k^2 + \Delta^2}}$ که $\Delta = \Delta_0 - \frac{g_0^2|a|^2}{\omega_m}$ می باشد، می شود. از این رو، سیستم نوری مکانیکی مطابق با مدل انتزاعی ما از نوسانگرهای کوانتومی خطی، مشروط بر اینکه نوسان گر \hat{a} تحت عنوان نوسانات کوانتومی میدان کاواک و \hat{b} عملگر نوسان گر مکانیکی معرفی می شود. می توانیم با استفاده از معادله کوانتومی لانژون $\delta\dot{u}(t) = A\delta u(t) + N(t)$ برای بردار عملگرهای چهار بعدی $\hat{u} = (\hat{q}_a, \hat{p}_a, \hat{q}_b, \hat{p}_b)^T$ توصیف کرد و توسط عملگرهای بردار صفر که شامل $(\delta\hat{q}, \delta\hat{p}, \delta\hat{X}, \delta\hat{Y})^T$ و پارامترهای زیر می باشد: $k_1 = k, k_2 = \gamma_m, N_b = N, N_a = \circ, \omega_a = \Delta, \omega_b = \omega_m, G = 2g$ ، جایی که ماتریس A از رابطه زیر بدست می آید:

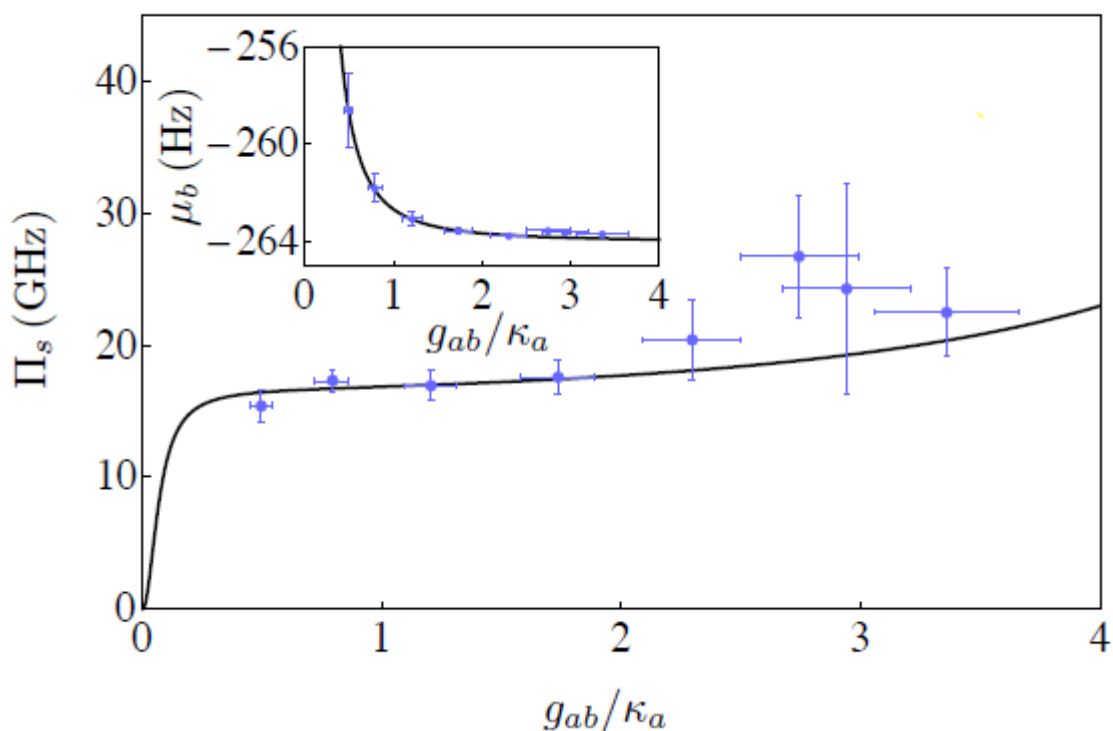
$$A = \begin{pmatrix} \circ & \omega_m & \circ & \circ \\ -\omega_m & -\gamma_m & G & \circ \\ \circ & \circ & -k & \Delta \\ G & \circ & -\Delta & -k \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

در شکل زیر مشاهده می کنیم که رفتار آنتروپی از اطلاعات متقابل پیروی می کند و با افزایش اختلال آنتروپی و اطلاعات متقابل به سمت صفر میل می کنند.



شکل ۵.۳: مقایسه آهنگ تولید آنتروپی (خط چین) و اطلاعات متقابل (خط پیوسته) برحسب Δ با استفاده از مقادیر $g=0.1$ و $\gamma_m = 0.1$ و $k=0.5$ و $N = 10$ رسم شده است.

در شکل زیر نتایج آزمایشگاه و نتایج تئوری مبتنی بر روابط استفاده شده در این متن بدست آمده است، خط پیوسته نشان دهنده ی نتایج تئوری و نقاط نشان دهنده ی نتایج بدست آمده از اندازه گیری آزمایشگاه است، آنتروپی برحسب قدرت برهم کنش رسم شده است و در مقادیر زیر هم خوانی زیادی وجود دارد [۴۴].



شکل ۶.۳: ارزیابی تجربی از تولید آنتروپی برگشت ناپذیر با آهنگ Π_s در حالت پایای غیرتعدالی برای سیستم کاواک نوری مکانیکی صورت گرفته است. در سیستم کاواک نوری مکانیکی، g_{ab} دو برابر استاندارد آهنگ جفت شده نوری مکانیکی است، رفتار تنظیمات در نظر گرفته شده را نشان می دهد، در شکل خطوط پیوسته پیش بینی های تئوری را بر اساس مقادیر نشان می دهند، نقاط داده های تجربی را نشان می دهد و خطهای عمودی و افقی خطاهای آزمایشگاهی را نشان می دهد.

۳.۳ نتیجه گیری

اندازه و پیچیدگی محدوده های کوانتومی بر سیستمها در حال افزایش است، توسعه یک تئوری دینامیکی تبادل گرمای غیرقابل برگشت برای سیستم های کوانتومی میکروسکوپی که دارای محدودیت زمان انتقال هستند انجام میگیرد. در این کار ما گامی در جهت ارزیابی کمی آنتروپی برگشت ناپذیر ایجاد شده در یک سیستم کوانتومی در حال تعامل توسط یک فرآیند اتلاف ثابت برداشته ایم، ابتدا، ما دو عبارت جایگزین برای میزان تولید آنتروپی ثابت را ارائه کردیم که به روش ساده ای برگشت ناپذیر بودن فرآیند را به ویژگی های دینامیک سیستم باز مربوط می کند. دوم، بین آهنگ تولید آنتروپی و همبستگی های کلی و کوانتومی مشترک بین دو زیر سیستم ارتباط برقرار کردیم و نشان دادیم که چگونه شروع برگشت ناپذیری، که میزان خروج از تحولات برگشت پذیری شبه استاتیک را تعیین می کند، و مقدار همبستگی های ایجاد شده توسط یک فرآیند باید به عنوان ویژگی های مکمل مشاهده شود. نتایج ما تصویری روشنی از غیرقابل برگشت پذیری در سیستم نوری مکانیکی کاواک را نشان داد. نتایج ما نشان می دهد که افزایش قدرت برهم کنشی تبادل را بیشتر می کند و آهنگ تولید آنتروپی افزایش می یابد، و همچنین مشاهده می کنیم که آهنگ تولید آنتروپی از همبستگی های سیستم پیروی می کند و به این نتیجه می رسیم که اگر در سیستم همبستگی وجود نداشته باشد آهنگ تولید آنتروپی هم از بین می رود و همبستگی های کوانتومی منجر به آهنگ تولید آنتروپی می شوند و همچنین آهنگ تولید آنتروپی همواره مثبت است، تحقق نتایج ما در آزمایشگاه، یک سیستم نوری مکانیکی است. کاربردهای احتمالی کار ما مربوط به بهینه سازی ماشینهای حرارتی کوانتومی است که در حالت پایا کار می کنند. به عنوان مثال، مدل مورد نظر ما می تواند به عنوان نمونه ای از ماشین حرارتی کوانتومی مستقل که ارتباطات کوانتومی حالت پایدار را ایجاد می کند عمل کرده ولی فقط از طریق گرما تغذیه می شود، به همین علت ما عملکرد چنین دستگاهی را مورد بررسی قرار می دهیم. این امر باعث می شود به سمت تعادل وابسته به زمان با هدف مهندسی تعامل سیستم های کوانتومی با حداقل تولید آنتروپی برویم.

مراجع

- [۱] مارک والدو زیمانسکی، ریچارد دیتمن، توتونچی، شریفیان عطار، هادیزاده، (۱۳۹۳) ”حرارت و ترمودینامیک“، نشر دانشگاهی، شماره ۱۹۸، دوره ۵
- [۲] دیوید هالیدی، رابرت رزینک، برل واکر، خوش بین خوش نظر، محمد شیرازی، شمس، (۱۳۹۵) ”مبانی فیزیک مکانیک گرما(شماره ها و نوسان)“، دانشگاه تبریز نیاز دانش، شماره ۵۶۶، دوره ۱
- [۳] استفان بارنت، صوفیانی، ابراهیمی، (۱۳۹۵) ”اطلاعات کوانتومی“ دانشگاه تبریز، شماره ۳۶۵، دوره اول
- [۴] کریمی پور، (۱۳۹۳) ”درس نامه رایانش و اطلاعات کوانتومی“ دانشگاه صنعتی شریف،
- [۵] S. L. Braunstein and A. K. Pati Eds. (۲۰۰۲)، ”Quantum Information Theory with Continuous Variables“ **Kluwer Dordrecht**.
- [۶] H. J. Kimble and D. F. Walls. (۱۹۸۷)، ”Squeezed states of the electromagnetic field: Introduction to feature issue“ **JOSA B**، ۴، ۱۰، pp ۱۴۴۹
- [۷] F. Grosshans، G. Van Assche، J. Wenger، R. Brouri، N.J. Cerf، and P. Grangier. (۲۰۰۳)، ”Quantum Information Theory with Continuous Variables“ **Nature**، ۴۲۱، ۶۹۲۰ pp ۲۳۸
- [۸] A. Furusawa، J. L. Sorensen، S. L. Braunstein، C. A. Fuchs، H. J. Kimble، and E. S. Polzik. (۱۹۹۸)، ”Unconditional quantum teleportation“ **Science**، ۲۸۲، ۵۳۸۹ pp ۷۰۹-۷۰۶
- [۹] Zhang، Tian Cai، K. W. Goh، C. W. Chou، P. Lodahl، and H. Jeff Kimble. (۲۰۰۳)، ”Quantum teleportation of light beams“ **Physical Review**، ۶۷، ۳ pp ۰۳۳۸۰۲

- [١٠] Lloyd, Seth, and Samuel L. Braunstein.(١٩٩٩), ” Quantum computation over continuous variables” **Springer**, pp ١٧-٩
- [١١] Ralph, Timothy C., W. J. Munro, and Gerard J. Milburn.(٢٠٠٢), ” Quantum computation based on linear optics” **International Society for Optics and Photonics**, ٤٩١٧ pp ١٢-١
- [١٢] Vidal, Guifré, and Reinhard F. Werner.(٢٠٠٢), ” Computable measure of entanglemen” **Physical Review** , ٤٦٥,٣ pp ٠٣٢٣١٤
- [١٣] Giedke, Géza, Michael M. Wolf, O. Krüger, R. F. Werner, and J. Ignacio Cirac.(٢٠٠٣), ” Entanglement of formation for symmetric Gaussian states” **Physical review letters**, ٩١,١٠ pp ١٠٧٩٠١
- [١٤] Serafini, A., Illuminati, F., De Siena, S.(٢٠٠٣), ” Symplectic invariants, entropic measures and correlations of Gaussian states” **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, ٣٧,٢ pp L٢١
- [١٥] Henderson, Leah, and Vlatko Vedral.(٢٠٠١), ” Classical, quantum and total correlations” **Journal of physics A: mathematical and general**, ٣٤,٣٥ pp ٤٨٩٩
- [١٦] Holevo, Alexander S., Masaki Sohma, and Osamu Hirota.(١٩٩٩), ” Capacity of quantum Gaussian channels” **Physical Review**, ٥٩,٣ pp ١٨٢٠
- [١٧] Holevo, Alexander S., and Reinhard F. Werner.(٢٠٠١), ”Evaluating capacities of bosonic Gaussian channels” **Physical Review**, ٤٣,٣ pp ٠٣٢٣١٢
- [١٨] .١٤ See, e.g., S. M. Barnett and P. M. Radmore.(١٩٩٧), ” Methods in Theoretical Quantum Optics” **Clarendon Press – Oxford**, pp ١٦١
- [١٩] Simon, R., E. C. G. Sudarshan, and N. Mukunda.(١٩٨٧), ” Gaussian-Wigner distributions in quantum mechanics and optics” **Physical Review**, ٣٦,٨ pp ٣٨٤٨

- [٢٠] Agarwal, G. S.(١٩٧١), ” Entropy, the Wigner distribution function, and the approach to equilibrium of a system of coupled harmonic oscillators ” **Physical Review**, ٢٣,٢ pp ٨٢٨
- [٢١] Botero, Alonso, and Benni Reznik.(٢٠٠٣), ”Modewise entanglement of Gaussian states” **Physical Review**, ٦٧,٥ pp ٠٥٢٣١١
- [٢٢] Huang, H., and Girish S. Agarwal.(١٩٩٤), ” General linear transformations and entangled states” **Physical Review**, ٤٩,١ pp ٥٢
- [٢٣] Brunelli, M., Paternostro, M.(٢٠١٦), ”Irreversibility and correlations in coupled quantum oscillators” **arXiv preprint arXiv**, ١٦١٠ pp ٠١١٧٢
- [٢٤] Esposito, Massimiliano, and Christian Van den Broeck.(٢٠١٠), ”Three faces of the second law. I. Master equation formulation” **Physical Review**, ٨٢,١ pp ٠١١١٤٣
- [٢٥] Kosloff, Ronnie, and Amikam Levy.(٢٠١٤), ” Quantum heat engines and refrigerators: Continuous devices” **Annual review of physical chemistry**, ٦٥ pp ٣٩٣–٣٦٥
- [٢٦] Henderson, Leah, and Vlatko Vedral.(٢٠٠١), ”Classical, quantum and total correlations” **Journal of physics A: mathematical and general**, ٣٤,٣٥ pp ٦٨٩٩
- [٢٧] Huber, Marcus, Martí Perarnau-Llobet, Karen V. Hovhannisyan, Paul Skrzypczyk, Claude Klöckl, Nicolas Brunner, and Antonio Acín.(٢٠١٥), ” Thermodynamic cost of creating correlations” **New Journal of Physics**, ١٧,٦ pp ٠٦٥٠٠٨
- [٢٨] Aspelmeyer, Markus, Tobias J. Kippenberg, and Florian Marquardt. ,(٢٠١٤) ” Cavity optomechanics” **Reviews of Modern Physics**, ٨٦,٤ pp ١٣٩١
- [٢٩] Callen, H. B.(١٩٨٥), ” Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics, Wiley” , New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore

- [٣٠] Prigogine, I.(١٩٦٨), ” Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes John Wiley and Sons”, New York
- [٣١] Seifert, Udo.(٢٠١٢), ”Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines” **Reports on progress in physics**, ٧٥,١٢ pp ١٢٦٠٠١
- [٣٢] Tomé, Tânia, and Mário J. de Oliveira.(٢٠١٠), ” Entropy production in irreversible systems described by a Fokker-Planck equation” **Physical Review**, ٨٢,٢, pp ٠٢١١٢٠
- [٣٣] Spinney, Richard E., and Ian J. Ford.(٢٠١٢), ” Entropy production in full phase space for continuous stochastic dynamics” **Physical Review**, ٨٥,٥ pp ٠٥١١١٣
- [٣٤] Asadian, A., D. Manzano, M. Tiersch, and H. J. Briegel.(٢٠٠٣), ” Heat transport through lattices of quantum harmonic oscillators in arbitrary dimensions” **Physical Review**, ٨٧,١ pp ٠١٢١٠٩
- [٣٥] Vedral, Vlatko.(٢٠٠٢), ”The role of relative entropy in quantum information theory” **Reviews of Modern Physics**, ٧٤,١ pp ١٩٧
- [٣٦] Adesso, Gerardo, Davide Girolami, and Alessio Serafini.(٢٠١٢), ” Measuring Gaussian quantum information and correlations using the Rényi entropy of order α ” **Physical review letters**, ١٠٩,١٩ pp ١٩٠٥٠٢
- [٣٧] Verhagen, Ewold, Samuel Deléglise, Stefan Weis, Albert Schliesser, and Tobias J. Kippenberg.(٢٠١٢), ” Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode” **Nature**, ٤٨٢,٧٣٨٣ pp ٦٣
- [٣٨] Zhang, Keye, Francesco Bariani, and Pierre Meystre.(٢٠١٤), ” Quantum optomechanical heat engine” **Physical review letters**, ١١٢,١٥ pp ١٥٠٦٠٢
- [٣٩] Brunelli, Matteo, Andre Xuereb, Alessandro Ferraro, Gabriele De Chiara, Nicolai Kiesel, and Mauro Paternostro.(٢٠١٥), ” Out-of-equilibrium thermodynamics of quantum optomechanical systems” **New Journal of Physics**, ١٧,٣ pp ٠٣٥٠١٦

- [٤٠] Elouard, Cyril, Maxime Richard, and Alexia Auffèves.(٢٠١٥), ” Reversible work extraction in a hybrid opto-mechanical system” **New Journal of Physics**, ،١٧،٥ pp ٥٥٥٠١٨
- [٤١] Mari, Andrea, Alessandro Farace, and Vittorio Giovannetti.(٢٠١٥), ” Quantum optomechanical piston engines powered by heat” **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, ،٢٨،١٧ pp ١٧٥٥٠١
- [٤٢] Gelbwaser-Klimovsky, David, and Gershon Kurizki.(٢٠١٥), ”Work extraction from heat-powered quantized optomechanical setups” **Scientific reports**, ،٥ pp ٧٨٠٩
- [٤٣] Mitchison, Mark T., Marcus Huber, Javier Prior, Mischa P. Woods, and Martin B. Plenio.(٢٠١٦), ” Autonomous quantum thermal machines in atom-cavity systems” **arXiv preprint arXiv**, ،١٦٠٣ pp ٠٢٠٨٢
- [٤٤] Brunelli, M., Fusco, L., Landig, R., Wieczorek, W., Hoelscher-Obermaier, J., Landi, G., De Chiara, G. ،(٢٠١٨) ”Experimental determination of irreversible entropy production in out-of-equilibrium mesoscopic quantum systems”**Physical review letters**, ،(١٦)١٢١ .١٦٠٦٠٤
- [٤٥] Kakofengitis, D., Steuernagel, O. .(٢٠١٧) ”Wigner’s quantum phase space current in weakly anharmonic weakly excited two-state systems”**European Physical Journal Plus**, ٢٠١٧.٠٧.١٤

پیوست آ

پیوست آ

Mathematica ۱.آ

کد

```
 $\omega_b = 1;$   
 $K_a = 0.2;$   
 $K_b = 0.5;$   
 $N_a = 0;$   
 $N_b = 0;$   
 $G = 0.1;$   
 $j_{min} = 0;$   
 $j_{max} = 5;$   
 $step = \frac{j_{max} - j_{min}}{100};$   
 $Table[\omega_a[j] = j \omega_b, \{j, j_{min}, j_{max}, step\}];$ 
```

```

Do[A = {{-Ka,  $\omega a[j]$ , 0, 0}, {- $\omega a[j]$ , -Ka, G, 0}, {0, 0, -Kb,  $\omega b$ },
      {G, 0, - $\omega b$ , -Kb}};
D0 = {{(1 + 2 Na) Ka, 0, 0, 0}, {0, (1 + 2 Na) Ka, 0, 0},
      {0, 0, (1 + 2 Nb) Kb, 0}, {0, 0, 0, (1 + 2 Nb) Kb}};
Airr = {{-Ka, 0, 0, 0}, {0, -Ka, 0, 0}, {0, 0, -Kb, 0}, {0, 0, 0, -Kb}};
v = LyapunovSolve[A, -D0];
II1[j] = Tr[Airr] + 2 Tr[AirrT.Inverse[D0].Airr.v];
u1 =  $\frac{G}{Na + \frac{1}{2}}$  v[[3, 2]];
u2 =  $\frac{G}{Nb + \frac{1}{2}}$  v[[4, 1]];
 $\alpha$  = {{v[[1, 1]], v[[1, 2]]}, {v[[2, 1]], v[[2, 2]]}};
 $\beta$  = {{v[[3, 3]], v[[3, 4]]}, {v[[4, 3]], v[[4, 4]]}};
 $\gamma$  = {{v[[1, 3]], v[[1, 4]]}, {v[[2, 3]], v[[2, 4]]}};
 $\gamma^T$  = {{v[[3, 1]], v[[3, 2]]}, {v[[4, 1]], v[[4, 2]]}};
 $\delta$  = Det[ $\alpha$ ] + Det[ $\beta$ ] + 2 Det[ $\gamma$ ];
np = Sqrt[( $\delta$  + Sqrt[ $\delta^2 - 4$  Det[v]]) / 2];
nm = Sqrt[( $\delta$  - Sqrt[ $\delta^2 - 4$  Det[v]]) / 2];
f[x_] := (x + 0.5) Log[x + 0.5] - (x - 0.5) Log[x - 0.5];
sv[j] = f[np] + f[nm];
ii[j] = f[Sqrt[Det[ $\alpha$ ]]] + f[Sqrt[Det[ $\beta$ ]]] - f[nm] - f[np];
, {j, jmin, jmax, step}]

```

Aabstract

In this thesis, we obtain the dynamics of the problem of two coupled harmonic oscillators using the Langevin quantum equation approach. We then calculate the covariance matrix using these equations and we provide the term for non-equilibrium entropy production rate for quantum oscillators, which allows us to give a simple interpretation of the irreversible start. Then we obtain the entropy production rate and the quantum system correlations, mutual information, via covariant matrix, numerically. Finally, we apply our results to the analysis for a nano-mechanical resonator(optomechanics).

Keywords:quantom Oscillator, quantum langevin equations, entropy production rate, mutual information



M.Sc. Thesis in Particle Physics

MSc Thesis in

**The role of quantum correlations in the
entropy production rate of two coupled
quantum oscillators**

By: Bahare Nekounam

Supervisor:
Dr.Morteza Rafiee

January 2020