

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رشته فیزیک هسته‌ای، گرایش هسته‌ای

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی با در نظر گرفتن مشتقات کسری

نگارنده: فاطمه السادات مظفری

استاد راهنما

دکتر حسن حسن‌آبادی

آبان ۱۳۹۶

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای فاطمه السادات مظفری با شماره دانشجویی ۹۴۱۶۷۳۴ رشته فیزیک گرایش هسته ای تحت عنوان بررسی سیستم های نسبی و غیر نسبی با در نظر گرفتن مشتقات کسری که در تاریخ ۱۳۹۶/۸/۱۵ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید. به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: ...): مردود

نوع تحقیق: نظری عملی

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استاد	دکتر حسن حسن آبادی	۱- استاد راهنمای اول
			۲- استاد راهنمای دوم
			۳- استاد مشاور
	استادیار	دکتر مسلم سوهانی	۴- نماینده تحصیلات تکمیلی
	استاد	دکتر علی اکبر رجبی	۵- استاد ممتحن اول
	استادیار	دکتر علی مس فروش	۶- استاد ممتحن دوم



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهتری مومنانی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: ...

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به

پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم،
و به مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم
همه مهر!

و به همسرم، اسطوره زندگیم، پناه مستقیم و امید بودنم.

سپاس گزارمی...

سپاس خدای را که سخنوران، دستوران او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دور در محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان و امدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بردشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نسیم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیاسیم و از ریشه آنها شلخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نشان دلیلی است بر بودنم. بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزوجل"؛ شایسته است که از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عنقوشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بوده اند؛ از هم سفر همربان زندگی ام، سید جوان، که با قلبی آکنده از عشق و معرفت محیطی سرشار از سلامت و امنیت برایم فراهم کرد که جز در سایه بیماری و بهدلی او به این منظور نائل نمی شدم، و از استاد فریخته و فرزانه ام؛ جناب آقای دکتر حسن حسن آبادی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از بیچ لگی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم، باشد که این خردترین، نحشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

فاطمه السادات مظفری

آبان ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب فاطمه السادات مظفری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک هسته‌ای دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بررسی سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی با در نظر گرفتن مشتقات کسری تحت راهنمایی دکتر حسن آبادی

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه السادات مظفری

آبان ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در سال‌های اخیر، ایده‌ی مشتق کسری در مکانیک کوانتومی را می‌توان یکی از خلاقانه‌ترین ایده‌ها در فیزیک دانست. با توجه به این ایده، می‌توان معادله شرودینگر را به صورت تعریفی جدید بازنویسی کرد. چنین فرمول‌بندی از مکانیک کوانتومی کاربردهای قابل توجهی در ریاضیات و فیزیک و دیگر شاخه‌های علوم دارد.

آقای هرمن با استفاده از این فرمول‌بندی، مدل‌های رفتار جمعی هسته‌ها را بازنویسی کردند و توانستند رفتار پیچیده‌ی هسته‌ها را بهتر بیان کنند. همچنین ایشان با تغییر مرتبه‌ی مشتق توانستند حالات متفاوت هسته‌ای را به خوبی توجیه کنند.

تعریف‌های متعددی برای مشتق‌های کسری وجود دارد که هرکدام به نوعی آن را بیان می‌کنند از جمله تعاریف ریمان-لیوویل^۱ و کاپوتو^۲ که از آن‌ها می‌توان به عنوان یک تعریف دقیق از مشتق کسری یاد کرد. اخیراً محققان مدلی را ارائه کرده‌اند که براساس آن مدل مشتقات کسری به صورت یک تعریف جدید و با فرم انطباقی ارائه می‌شود و منجر به نتایج جالب در این زمینه می‌گردد.

در این پایان‌نامه قصد داریم که ضمن معرفی کامل مشتق کسری به بررسی سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی با استفاده از مشتقات کسری در حضور پتانسیل‌های خاص بپردازیم.

کلمات کلیدی: مشتقات کسری، مشتق کسری انطباقی، نوسانگر هماهنگ کسری.

¹Riemann-Liouville

²Caputo

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. " On The Conformable Fractional Quantum Mechanics" accepted for publishing in J. Korean phys. Soc. (2017) .
2. " Investigation of Dirac equation using conformable fractional derivative" , accepted for publishing in J. Korean phys. Soc (2017).

فهرست مطالب

ق	فهرست تصاویر
ش	فهرست جداول
۱	۱ مفاهیم اولیه
۱	۱.۱ تاریخچه مشتق کسری
۳	۲.۱ مقدمات
۴	۳.۱ تابع گاما
۵	۴.۱ تابع میتاگ-لفلر
۶	۵.۱ انتگرال کسری
۷	۱.۵.۱ انتگرال کسری لیوویل
۷	۲.۵.۱ انتگرال کسری ریمان
۸	۶.۱ مشتق کسری
۸	۱.۶.۱ مشتق کسری ریمان-لیوویل
۹	۲.۶.۱ مشتق کسری گرانوالد-لتنیک
۱۱	۳.۶.۱ مشتق کسری کاپوتو
۱۴	۷.۱ تبدیلات لاپلاس
۱۵	۱.۷.۱ عملگر لاپلاس
۱۵	۲.۷.۱ تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال مرتبه کسری
۱۷	۳.۷.۱ عملگر لاپلاس معکوس
۱۹	۲ کاربرد های مشتق کسری در مکانیک کلاسیک
۱۹	۱.۲ حرکت ذره در حضور نیروی مقاوم ناشی از ویسکوزیته سیال
۲۱	۲.۲ حرکت در راستای قائم یک ذره در یک محیط با نیروی مقاوم کسری
۲۲	۳.۲ حرکت یک پرتابه با در نظر گرفتن نیروی مقاوم کسری

۲۷	مقدمه ای به مکانیک کوانتومی با روش انطباقی مشتقات کسری	۳
۲۷	۱.۳ مشتق کسری در روش انطباقی	
۲۹	۲.۳ معادله شرودینگر با مشتقات کسری	
۳۲	۳.۳ مولفه های مشتق کسری انطباقی در سه بعد	
۳۲	۱.۳.۳ معادله شرودینگر با مشتقات کسری در مختصات کروی	
۳۵	۴ معادله شرودینگر برای برخی پتانسیل های خاص با استفاده از روش کسر انطباقی	
	۱.۴ حل معادله شرودینگر کسری در روش انطباقی برای برخی از پتانسیل های	
۳۵	خاص	
	۱.۱.۴ حل معادله شرودینگر با مشتقات کسری برای پتانسیل نوسانگر	
۳۵	هماهنگ	
۴۲	۲.۱.۴ حل معادله شرودینگر با مشتقات کسری برای پتانسیل کلین - بیک	
۴۵	۳.۱.۴ حل معادله شرودینگر با مشتقات کسری برای پتانسیل هایپربولیک	
۴۷	۲.۴ حل معادله شرودینگر کسری با روش انطباقی برای سیستم دو ذره ای	
۴۸	۱.۲.۴ پتانسیل نوسانگر هماهنگ کسری در سیستم دودره ای	
۴۹	۲.۲.۴ پتانسیل کراتزر در سیستم دو ذره ای	
۵۱	۵ معادله دیراک با مشتقات کسری	
۵۱	۱.۵ حل معادله دیراک با مشتقات کسری	
۵۷	۶ نتیجه گیری	
۵۹	مراجع	

فهرست تصاویر

۲۳ $\alpha = ۱$ و $\alpha = ۰/۵$ ، $\alpha = ۰/۲$ برای حالت‌های $x(t)$ بر حسب t	۱.۲
۲۴ $C = ۰/۹$ و $C = ۰/۵$ ، $C = ۰/۰$ برای حالت‌های $x(t)$ بر حسب t	۲.۲
۲۴ $\alpha = ۱$ و $\alpha = ۰/۵$ ، $\alpha = ۰/۲$ برای حالت‌های $y(t)$ بر حسب t	۳.۲
۲۵ $C = ۰/۹$ و $C = ۰/۵$ ، $C = ۰/۰$ برای حالت‌های $y(t)$ بر حسب t	۴.۲
۳۸ برای نوسانگرکروی با مشتقات کسری α بر حسب α	۱.۴
۳۹ برای نوسانگر کروی با مشتقات کسری α بر حسب α	۲.۴
۴۰ برای نوسانگر کروی با مشتقات کسری α بر حسب α	۳.۴
۴۱ برای نوسانگر کروی با مشتقات کسری α بر حسب α	۴.۴
۴۲ برای نوسانگر کروی با مشتقات کسری α بر حسب α	۵.۴
۴۳ بیک بر حسب X کلین- پتانسیل	۶.۴
۴۵ بیک بر حسب X کلین- پتانسیل	۷.۴
۵۴ بر حسب مقادیر مختلف α انرژي	۱.۵
۵۴ بر حسب مقادیر مختلف n انرژي	۲.۵

فهرست جداول

۷	محاسبه انتگرال کسری ریمان- لیوویل برای توابع مختلف	۱.۱
۹	محاسبه مشتق کسری ریمان- لیوویل برای توابع مختلف	۲.۱
۱۳	محاسبه مشتق کسری کاپوتو برای توابع مختلف	۳.۱
۱۴	محاسبه مشتق کسری کاپوتو برای توابع مختلف	۴.۱
۱۴	مقایسه مشتق کسری کاپوتو و مشتق کسری ریمان- لیوویل	۵.۱
۲۸		مقایسه مشتق کسری کاپوتو و مشتق کسری انطباقی برای توابع $1, x, x^2$	۱.۳
		ویژه مقادیر انرژی برای حالت های مختلف نوسانگر هماهنگ با مشتقات	۱.۴
۳۷	کسری	

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تاریخچه مشتق کسری

حساب کسری^۱ را می‌توان یک علم جدید و قدیم نامید چرا که تا سال‌های اخیر، اکثر محققان از وجود چنین علمی آگاه نبودند و اغلب دانشمندان به تازگی این علم را در تحقیقات خود مدنظر گرفته‌اند. این علم در حقیقت زاینده سال ۱۶۹۵ میلادی می‌باشد. در این سال هوییتال^۲ در نامه‌ای خواستار توجیه معنای $\frac{d^n y}{dt^n}$ وقتی $n = \frac{1}{p}$ باشد، شد و لایبنیتز^۳ در پاسخ، رابطه نزدیک بین مشتقات کسری و سری‌های نامتناهی واگرا را مطرح کرد و نوشت: «اگرچه سری‌های واگرا و هندسه رابطه دوری باهم دارند، در سری‌های واگرا تنها مجاز به استفاده از توان‌های صحیح مثبت و منفی هستیم و تا به حال استفاده از آن توان‌های کسری را نداشتیم.» او ادامه می‌دهد: « $d^{\frac{1}{p}} x$ مساوی $x\sqrt[p]{\frac{dx}{x}}$ می‌باشد.» و اظهار می‌دارد: «این یک پارادکس آشکار است از چیزی که روزی نتایج مفیدی خواهد داشت.» [۱-۴]

پس از مطرح شدن این موضوع ریاضیدانان زیادی سعی در بسط و گسترش حسابان کسری نمودند که از این جمله می‌توان به تحقیقات اوایلر^۴ در سال ۱۷۳۰ و لاپلاس^۵ در سال ۱۸۱۲

^۱Fractional calculus

^۲Hopital

^۳Leibniz

^۴Euler

^۵Laplace

اشاره کرد. در سال ۱۸۱۹، لاکروا^۶، در کتاب خود، دو صفحه را به مبحث مشتق از مرتبه دلخواه اختصاص داد. او نشان داد که اگر $y = x^a$ باشد، آنگاه $\frac{d^{\frac{1}{q}}}{dx^{\frac{1}{q}}} y = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{q})} x^{a-\frac{1}{q}}$ و این نتیجه را به دست آورد که $\frac{d^{\frac{1}{q}}}{dx^{\frac{1}{q}}} y = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ که این نتیجه با نتایج حاصل از تعاریف بعدی ریمان نیز مطابقت دارد. در سال ۱۸۲۳، آبل^۷، اولین کاربرد حساب دیفرانسیل کسری را در مسائل فیزیکی (در مسائل همزمانی^۸، که مساله تعیین یک منحنی است به قسمی که اگر جسمی تحت تاثیر نیروی جاذبه بدون اصطکاک روی آن بلغزد، زمان حرکت آن مستقل از نقطه شروع حرکت باشد) ارائه داد. که این مساله را حل نکرد. [۵]

در سال ۱۸۸۴، لوران^۹، نظریه‌ی عملگرهای تعمیم یافته D^ν با ν حقیقی را منتشر کرد و با انتگرال گیری و مشتق گیری از مرتبه دلخواه مواجه شد. در سال ۱۹۸۲ نیز هوی ساید^{۱۰} مشتقات مرتبه کسری را در توسعه نظریه خط انتقال خود به کار برد. در سال ۱۹۳۶، جمانت^{۱۱} نظریه انتقال هوی ساید را ادامه داد و از مشتقات مرتبه کسری در خاصیت کشسانی استفاده کرد. [۶]

در سال ۱۹۷۴، راس^{۱۲}، اولین کنفرانس دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری و کاربردهای آن را برگزار کرد و دومین و سومین کنفرانس در این زمینه در سال ۱۹۸۴ در گلاسکو و ۱۹۸۹ در توکیو برگزار شد. در سال ۱۹۹۳، کنت میلر^{۱۳} و راس کتاب مقدمه‌ای بر دیفرانسیل و انتگرال و معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی کسری را به چاپ رساندند که این کتاب مطالب خوبی را برای دانشمندان و ریاضیدانان که در جستجوی مقدمه‌ای بر این موضوع جذاب هستند، ارائه می‌دهد.

در این کتاب حل معادلات

$$\left[D^{\frac{n}{q}} + a_1 D^{\frac{n-1}{q}} + \dots + a_{n-1} D^{\frac{1}{q}} + a_n D^0 \right] x(t) = y(t) \quad (1.1)$$

ارائه شده‌است. هنگامی که n و q اعداد صحیح مثبت و a_i ها ثابت هستند. در سال ۱۹۹۷، کولوانکر^{۱۴} در پایان‌نامه دکترای خود به مطالعه در مورد ارتباط بین فراکتال‌ها و حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری پرداخت. در سال ۲۰۰۰، هیلفر^{۱۵} کتابی با عنوان کاربردهایی از دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری را به چاپ رسانید و در بخش ۹ به کاربردهای ویژه این موضوع در علم فیزیک می‌پردازد. در سال ۲۰۰۳، اولین نشست علمی

⁶Lacroix

⁷Abel

⁸Tautochrone pro

⁹Laurent

¹⁰Heaviside

¹¹Gemant

¹²Ross

¹³Miller

¹⁴Kolwanker

¹⁵Hilfer

با موضوعیت حساب کسری در شیکاگو برگزارگردید. این نشست علمی بخشی از کنفرانس تکنیک طراحی مهندسی بود. سه کنفرانس برگزارشده‌ی قبلی در مورد حساب کسری به جنبه‌های ریاضی موضوع توجه‌داشته و در حقیقت کنفرانس‌هایی ریاضی بودند، اما نشست علمی شیکاگو با هدف توجه بیشتر به کاربردهای این علم برگزارگردید. پس از این نشست علمی، کنفرانس‌ها و نشست‌های علمی متعددی در زمینه دیفرانسیل کسری و کاربردهای آن برگزارگردیده، که از این میان می‌توان به کنفرانسی در زمینه دیفرانسیل کسری و کاربردهای آن در شهر بوردو فرانسه (۲۰۰۴) و نشست علمی در هلند و در شهر آیندهوون (۲۰۰۵) اشاره کرد. تحقیقات در مورد کاربرد حساب کسری در ابتدای مسیر خود قرارداد و هم اکنون تیم‌های کاری متفاوتی در دنیا مشغول مطالعه و تحقیق برای بسط و گسترش این شاخه نوظهور با قدمت ۳۱۰ ساله همچنان ادامه دارد. [۷-۹]

۲.۱ مقدمات

مشتملات و انتگرال سنتی، به عنوان یک بخش اصلی فناوری حرفه‌ای، ابزاری ضروری برای درک و کار با سیستم‌های طبیعی و مصنوعی می‌باشد. حساب کسری یکی از رشته‌های ریاضی مورد مطالعه بوده که از تعاریف عملگرهای مشتق و انتگرال معمولی به شیوه توان کسری نوشته می‌شود.

بنابر آموزه‌های ابتدای دوران تحصیل، توان را به عنوان نماد کوچکی برای آنچه که در اصل یک ضرب مکرر از یک مقدار عددی می‌باشد، آموختیم. این مفهوم در نوع خود قابل درک و به کار بردن است؛ اما این تعریف ریاضی، وقتی که توان‌هایی با مقادیر غیر صحیح در نظر گرفته شود، می‌تواند کاملاً پیچیده باشد. در حالی که هرکسی می‌تواند رابطه $x^3 = x \times x \times x$ را به وضوح درک کند، ولی کمتر کسی است که درک درستی از $x^{\frac{1}{2}}$ یا x^{π} را داشته باشد؛ اما این عبارات را می‌توان از طریق بسط سری‌های بی‌نهایت و یا به‌طور عملی‌تر با استفاده از ماشین حساب محاسبه کرد.

اگرچه انتگرال و مشتق دارای تعاریف پیچیده‌تری نسبت به توان هستند، اما باز هم می‌توان معانی فیزیکی قابل درک و نسبتاً ساده‌ای را برای عملگر مشتق و یا انتگرال متصور شد. با پذیرش برخی محدودیت‌ها (مانند پیوستگی تابع) تعداد متناهی (n بار) عمل انتگرال‌گیری را می‌توان به آسانی انجام داد، اما سوالی که در یک ذهن کنجکاو ایجاد می‌شود آن است که اگر n به اعداد صحیح محدود نباشد، چگونه می‌توان n انتگرال‌گیری انجام داد؟

در اولین نگاه، نمی‌توان مفهوم فیزیکی یا ریاضی خاصی را به این موضوع اختصاص داد، اما در ادامه نشان خواهیم داد که محاسبات کسری از همان تعاریف سنتی ریاضیات حاصل می‌شود. قبل از ورود به بحث مشتق کسری لازم است به چند تعریف ابتدایی از تابع گاما و تابع میتاگ-لفرو... بپردازیم. سپس به تعریف انتگرال و مشتق کسری^{۱۶} پرداخته و در ادامه به بررسی

¹⁶Fractional derivative

کاربردهای این عملگرها در معادلات دیفرانسیل کسری خواهیم پرداخت. [۱۰-۱۲]

۳.۱ تابع گاما

تابع گاما^{۱۷} در محاسبات مرتبه‌ی کسری اهمیت فراوانی دارد. می‌دانیم که برای اعداد طبیعی، به صورت زیر تعریف می‌شود: [۱۳]

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = \prod_{j=1}^n j \quad (2.1)$$

که از ویژگی‌های تابع فاکتوریل می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

$$1! = 1 \quad (3.1)$$

$$n! = n(n-1)! \quad (4.1)$$

تابع گاما را می‌توانیم روی مجموعه اعداد صحیح Z به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \quad (5.1)$$

که در اینجا $z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ می‌باشد. همچنین این تابع را می‌توانیم به صورت دیگری نیز تعریف کنیم:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \quad (6.1)$$

که در اینجا $\gamma = 0.57721$ می‌باشد که ثابت اویلر را مشخص می‌کند. وسعت هر دو تعریف روی اعداد صحیح Z عمومیت پیدا می‌کند. اما برای موارد $\text{Re}(z) > 0$ انتگرال ارائه شده زیر معتبر است:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (7.1)$$

با انتگرال گیری از رابطه (۷.۱) خواهیم داشت:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (8.1)$$

همچنین با انتگرال گیری مستقیم $\Gamma(1) = 1$ را داریم. با ادامه دادن رابطه (۸.۱) برای Z های مختلف خواهیم داشت:

$$\Gamma(1+n) = n! \quad (9.1)$$

¹⁷Gamma function

از این رو تابع گاما می تواند توصیف کننده تابع فاکتوریل نیز باشد. همچنین در چارچوب جبر کسری، معکوس تابع گاما برای $z = -n$ به صورت زیر است:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = 0 \quad (10.1)$$

که در اینجا $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ می باشد. همچنین ما می توانیم تعریف ضرایب دو جمله ای را به صورت زیر گسترش دهیم:

$$\binom{z}{v} = \frac{z!}{v!(z-v)!} = \frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(1+v)\Gamma(1+z-v)} \quad (11.1)$$

در ادامه می توانیم توابع گاما را به شکل زیر بنویسیم که بسیار زیاد مورد استفاده قرار می گیرد.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (12.1)$$

۴.۱ تابع میتاگ- لفلر

تابع میتاگ- لفلر^{۱۸} با نماد E_α برای $\alpha > 0$ توسط سری ارائه شده در زیر معرفی می شود که در کل فضا معتبر است:

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (13.1)$$

ویژگی های این تابع در سال ۱۹۰۳ توسط میتاگ- لفلر بررسی شد. این تابع در زمینه مشتق کسری دارای اهمیتی شبیه به تابع نمائی در ریاضیات است. از موارد خاص این تابع می توانیم به موارد زیر اشاره کنیم:

$$E_\gamma(+z^\gamma) = \cosh z; E_\gamma(-z^\gamma) = \cos z \quad (14.1)$$

$$E_{\frac{1}{\gamma}}(\pm z^{\frac{1}{\gamma}}) = e^z \left[1 + \operatorname{erf}(\pm z^{\frac{1}{\gamma}}) \right] = e^z \operatorname{erf}(\mp z^{\frac{1}{\gamma}}) \quad (15.1)$$

در اینجا $\operatorname{erf}(z)$ تابع خطا نام دارد و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (16.1)$$

فرم تعمیم یافته تابع میتاگ- لفلر نیز به صورت زیر داده می شود:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad (17.1)$$

همچنین برای موارد خاص داریم:

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z} \quad E_{\frac{1}{2},2}(z) = \frac{\sinh(z^{\frac{1}{2}})}{z^{\frac{1}{2}}} \quad (18.1)$$

¹⁸Mittag-Leffler

۵.۱ انتگرال کسری

برای ورود به مبحث مشتق کسری ابتدا لازم است که انتگرال کسری^{۱۹} را بیان و در ادامه مشتق کسری را بررسی کنیم. ما از علامت اختصاری ${}_a I$ برای عملگر انتگرال کسری استفاده می‌کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$${}_a I f(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi \quad (19.1)$$

انتگرال گیری از یک تابع به عنوان عملگر معکوس عمل مشتق گیری در نظر گرفته می‌شود.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)({}_a I) f(x) = f(x) \quad (20.1)$$

برای شروع ابتدا n انتگرال را در هم ضرب می‌کنیم:

$${}_a I^n f(x) = \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 \dots dx_{n-1} \quad (21.1)$$

با استفاده از فرمول کوشی انتگرال گیری مجدد، انتگرال کسری ریمان-لیوویل به صورت رابطه (۲۲.۱) به دست می‌آید:

$${}_a I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi \quad (22.1)$$

این رابطه به آسانی می‌تواند به حالت کسری تبدیل شود؛ می‌دانیم که $\Gamma(n+1) = n!$ پس خواهیم داشت:

$${}_a I_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (23.1)$$

$${}_a I_-^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\xi-x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (24.1)$$

در اینجا رابطه (۲۳.۱) برای $x > a$ و رابطه (۲۴.۱) برای $x < b$ معتبر است. همچنین ثابتهای a و b حدود بالا و پایین ناحیه انتگرال گیری را تعیین می‌کنند که می‌توانند به صورت دلخواه انتخاب شوند. از نظر هندسی ما می‌توانیم این دو رابطه را از هم تمییز دهیم و به آنها موارد چپ‌دست و راست‌دست بگوئیم. انتگرال چپ‌دست^{۲۰}، مقادیر انتگرال را برای $\xi < x$ که همان مقادیر سمت چپ x است بیان می‌کند و انتگرال راست‌دست^{۲۱}، مقادیر انتگرال را برای $\xi > x$ که همان مقادیر سمت راست x را بیان می‌کند. همانطور که می‌دانیم مقدار حقیقی انتگرال به انتخاب خاص دو ثابت a و b وابسته است. در واقع این تفاوت برای دو تعریف متفاوت استفاده

¹⁹Fractional integral

²⁰Left-handed

²¹Right-handed

شده برای یک انتگرال کسری قابل توجه خواهد بود. در جدول ۱.۱، انتگرال کسری ریمان-لیوویل (۲۲.۱) برای توابع مختلف محاسبه شده است.

جدول ۱.۱: محاسبه انتگرال کسری ریمان-لیوویل برای توابع مختلف

$f(x)$	انتگرال کسری ریمان-لیوویل ${}_a I_+^\alpha f(x)$
$const$	$\frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha \quad a \in \mathbb{R}; \alpha > 0$
$(x-a)^\beta$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} \quad a \in \mathbb{C}; \alpha > 0; \operatorname{Re}(\beta > -1)$
$e^{\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{\lambda x} \quad a = -\infty; \alpha > 0; \operatorname{Re}(\lambda > 0)$

۱.۵.۱ انتگرال کسری لیوویل

انتگرال کسری لیوویل برای $a = -\infty$ و $b = +\infty$ به صورت زیر تعریف می شود:

$${}_L I_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (25.1)$$

$${}_L I_-^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (\xi-x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (26.1)$$

۲.۵.۱ انتگرال کسری ریمان

انتگرال کسری ریمان نیز برای $a = 0$ و $b = 0$ به صورت زیر تعریف می شود:

$${}_R I_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (27.1)$$

$${}_R I_-^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^0 (\xi-x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (28.1)$$

به عنوان مثالی از انتگرال های کسری، روابط (۲۵.۱) تا (۲۸.۱) را برای تابع خاص $f(x) = e^{kx}$ به دست می آوریم:

$${}_L I_+^\alpha e^{kx} = k^{-\alpha} e^{kx} \quad k, x > 0 \quad (29.1)$$

$${}_L I_-^\alpha e^{kx} = (-k)^{-\alpha} e^{kx} \quad k < 0 \quad (30.1)$$

$${}_R I_+^\alpha e^{kx} = k^{-\alpha} e^{kx} \left(1 - \frac{\Gamma(\alpha, kx)}{\Gamma(\alpha)} \right) \quad x > 0 \quad (31.1)$$

$${}_R I_-^\alpha e^{kx} = (-k)^{-\alpha} e^{kx} \left(1 - \frac{\Gamma(\alpha, kx)}{\Gamma(\alpha)} \right) \quad x < 0 \quad (32.1)$$

در اینجا $\Gamma(\alpha, x)$ تابع گاما ناکامل است. همچنین با استفاده از تعریف انتگرال کسری لیوویل تابع e^{kx} برای $k > 0$ در کران پایین به صفر می رسد.

۶.۱ مشتق کسری

در بخش قبل انتگرال کسری ریمان و لیوویل ارائه شد. اکنون به معرفی مشتق مرتبه کسری می‌پردازیم. اگر عملگر مشتق را به اختصار برابر با D^α بگیریم خواهیم داشت: [۱۳-۱۶]

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} = D^\alpha \quad (۳۳.۱)$$

می‌دانیم که مفهوم انتگرال‌گیری کسری و مشتق‌گیری کسری صریحاً به هم وابسته هستند. برای اثبات این حقیقت می‌توانیم عملگر مشتق کسری D^α را به دو نیم تقسیم کنیم:

$$D^\alpha = D^m D^{\alpha-m} = \frac{d^m}{dx^m} {}_a I^{m-\alpha} \quad m \in \mathbb{N} \quad (۳۴.۱)$$

رابطه (۳۴.۱) را می‌توانیم از رابطه $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} = I^{-\alpha}$ نتیجه بگیریم. رابطه (۳۴.۱) بدان معنی است که مشتق کسری ممکن است به عنوان یک انتگرال کسری با یک مشتق استاندارد معمولی تفسیر شود. همچنین با برعکس کردن متوالی عملگرها می‌توانیم داشته باشیم:

$$D^\alpha = D^{\alpha-m} D^m = {}_a I^{m-\alpha} \frac{d^m}{dx^m} \quad m \in \mathbb{N} \quad (۳۵.۱)$$

در اینجا هم مشتق کسری به یک مشتق استاندارد معمولی و یک انتگرال کسری تجزیه می‌شود. هر دو تجزیه روابط (۳۴.۱) و (۳۵.۱) به نتایج مختلفی منجر می‌شود. می‌دانیم که مشتق استاندارد یک عملگر مکانی است اما انتگرال کسری اینطور نیست. مشتق کسری باید به عنوان معکوس انتگرال کسری شناخته شده باشد، که این یک عملگر غیرمکانی است. اکنون ما سه نوع مشتق کسری متفاوت را به نام‌های مشتق کسری ریمان-لیوویل، ^{۲۲} مشتق کسری کاپوتو و مشتق کسری گرانولد-لتنیکف ^{۲۳} ارائه می‌دهیم.

۱.۶.۱ مشتق کسری ریمان-لیوویل

ریمان و لیوویل با استفاده از عملگر انتگرال ریمان-لیوویل توانستند مشتق کسری یک تابع را برای حالت $\alpha > 0$ به دست بیاورند: [۱۲] [۱۴، ۱۵]

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad \alpha > 0, x > 0 \quad (۳۶.۱)$$

مشتق کسری ریمان-لیوویل به صورت زیر است:

$$D^\alpha f(x) = D^m J^{m-\alpha} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right] \quad (۳۷.۱)$$

²²Riemann-Liouville fractional derivative

²³Grunwald-Letnikov

که در آن $m - 1 < \alpha < m; m \in \mathbb{N}$ می باشد. همچنین برای مشتق مرتبه n یعنی D^n به این نکته توجه داریم که:

$$D^n J^n = I; J^n D^n \neq I \quad n \in \mathbb{N} \quad (38.1)$$

این رابطه قابل تعمیم به مشتقات کسری از مرتبه α می باشد. به عبارتی دیگر D^α معکوس چپ (نه معکوس راست) J^α می باشد. یعنی:

$$D^\alpha J^\alpha = I; J^\alpha D^\alpha \neq I \quad (39.1)$$

به عنوان مثالی برای مشتق کسری ریمان-لیوویل می توانیم فرض کنیم که: مثال ۱: اگر $f(t) = t$ و $m = 1$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه:

$$D^\alpha f(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t dt \right] = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (40.1)$$

مثال ۲: اگر $f(t) = e^t$ و $m = 1$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} e^t dt = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + e^x \operatorname{erf}[\sqrt{x}] \quad (41.1)$$

همچنین در جدول ۲.۱، مشتق کسری ریمان-لیوویل برای توابع مختلفی از جمله توابع مثلثاتی محاسبه شده است.

جدول ۲.۱: محاسبه مشتق کسری ریمان-لیوویل برای توابع مختلف

$f(x)$	مشتق کسری ریمان-لیوویل $D^\alpha f(x)$
$x^{\beta-1}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} \quad \beta > 0$
$e^{\lambda x}$	$(x)^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda x)$
$x^{\beta-1} e^{\lambda x}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \beta-\alpha; \lambda x)$
$x^{\beta-1} E_{\mu,\beta}(\lambda x^\mu)$	$x^{\beta-\alpha-1} E_{\mu,\beta-\alpha}(\lambda x^\mu) \quad \beta, \mu > 0$
$x^{\beta-1} {}_2F_1(\mu, \nu; \beta; \lambda x)$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} {}_2F_1(\mu, \nu; \beta-\alpha; \lambda x) \quad \beta > 0$
$\cos(\lambda x)$	$x^{-\alpha} E_{\frac{1}{2},1-\alpha}(-\lambda^2 x^2)$
$\sin(\lambda x)$	$x^{1-\alpha} \lambda E_{\frac{1}{2},2-\alpha}(-\lambda^2 x^2)$

۲.۶.۱ مشتق کسری گرانوالد-لتنیک

با توجه به اینکه فرمول های ریمان-لیوویل با ایده انتگرال گیری مکرر از یک تابع به دست می آید، ایده مشتق گیری مکرر نیز دیدگاهی مشابه برای به دست آوردن فرمول مشتق است که

توجه برخی از ریاضیدانان را جلب کرد. گرانوالد و لتنیف از پیشتازان این ایده بودند. برای به دست آوردن تعریفی برای مشتق کسری، از تعریف مشتق مرتبه اول شروع می‌کنیم. [۱۲-۱۴]

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (۴۲.۱)$$

با مشتق‌گیری دوباره رابطه (۴۳.۱) را خواهیم داشت:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2+h_1) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1} \quad (۴۳.۱)$$

که اگر $h = h_1 = h_2$ باشد، داریم:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \quad (۴۴.۱)$$

و با ادامه این روند می‌توان رابطه‌ی زیر را برای مشتقات مکرر به دست آورد:

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x+mh) \quad n \in \mathbb{N} \quad (۴۵.۱)$$

این عبارات را می‌توان برای مقادیر غیر صحیح n نیز استفاده کرد به شرط آنکه $\binom{n}{m}$ به جای تعریف شدن از طریق تابع فاکتوریل، با استفاده از تابع گاما تعریف شود. بنابراین مشتق کسری را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh) \quad (۴۶.۱)$$

کران بالای حاصل جمع، در رابطه فوق باید به بی‌نهایت میل کند و عبارت $\frac{x-a}{h}$ این خصوصیت را دارد. همانطور که فرمول ریمان-لیوویل برای انتگرال‌گیری کسری در تعریف مشتق کسری نیز مورد استفاده قرار گرفت، فرمول مشتق گرانوالد-لتنیف را نیز می‌توان برای انتگرال‌گیری کسری مورد استفاده قرار داد. ساده‌ترین تغییر برای استفاده از این فرمول در انتگرال‌گیری، استفاده از آن برای $\alpha < 0$ می‌باشد. در این حالت باید عبارت $\binom{-\alpha}{m}$ که در رابطه (۴۶.۱) به وجود می‌آید را با استفاده از تابع گاما تعریف کنیم.

$$\binom{-\alpha}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} \quad (۴۷.۱)$$

بنابراین مشتق کسری توسط فرمول گرانوالد-لتنیف به فرم زیر حاصل خواهد شد.

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} f(x-mh) \quad (۴۸.۱)$$

۳.۶.۱ مشتق کسری کاپوتو

فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ ، در این صورت مشتقات کسری کاپوتو ^{۲۴} تابع $f(x)$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$D_*^\alpha f(x) = \begin{cases} J^{m-\alpha} D^m f(x) = \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \right] & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m f(x)}{dx^m} & \alpha = m \end{cases} \quad (۴۹.۱)$$

با توجه به تعریف مشتق کسری کاپوتو می توانیم روابط زیر را داشته باشیم. اگر $f \in C_\mu^m$ ، $m \geq -1$ و $m \in \mathbb{N}$ ، $m-1 < \alpha < m$ در این صورت:

$$D_*^\alpha J^\alpha f(x) = f(x) \quad (۵۰.۱)$$

$$J^\alpha D_*^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(\circ^+) \frac{x^k}{k!} \quad x > \circ \quad (۵۱.۱)$$

رابطه (۵۱.۱) را می توان بنابر تعریف D_*^α و J^α به صورت زیر اثبات کنیم:

$$\begin{aligned} J^\alpha D_*^\alpha f(x) &= J^\alpha J^{m-\alpha} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x (x-t)^{m-1} f^{(m)}(t) dt \\ &= \frac{f^{(m)}(t)}{(m-1)!} \int_0^x (x-t)^{m-1} dt = \frac{f^{(m)}(\circ)(x-t)^m}{(m-1)!m} \Big|_x^\circ = \frac{f^{(m)}(\circ)}{m!} x^m \end{aligned} \quad (۵۲.۱)$$

از طرفی بسط مک لوران ^{۲۵} تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(\circ) \frac{x^k}{k!} + \frac{f^{(m)}(\circ)}{m!} x^m \quad (۵۳.۱)$$

حال با جایگذاری رابطه (۵۲.۱) در رابطه (۵۳.۱) خواهیم داشت:

$$J^\alpha D_*^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(\circ) \frac{x^k}{k!} \quad (۵۴.۱)$$

حال در مقایسه با دو تعریف کاپوتو و ریمان-لیوویل، قضیه زیر و نتایج آنرا بیان می کنیم: قضیه: اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $m \in \mathbb{N}$ ، $m-1 < \alpha < m$ ، در این صورت:

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(\circ) \quad (۵۵.۱)$$

اثبات: این قضیه طبق بسط تیلور ^{۲۶} تابع $f(x)$ حول نقطه صفر به صورت زیر اثبات می شود.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\circ) + x f'(\circ) + \frac{x^2}{2!} f''(\circ) + \frac{x^3}{3!} f'''(\circ) + \dots + f^{(n-1)}(\circ) + R_{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(\circ) + R_{m-1} \end{aligned} \quad (۵۶.۱)$$

^{۲۴}Caputo fractional derivative

^{۲۵}Mac Laurin series

^{۲۶}Taylor series

بنابر رابطه (۵۲.۱) داریم:

$$R_{m-1} = \int_0^x \frac{f^{(m)}(\tau)(x-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} d\tau = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x f^{(m)}(\tau)(x-\tau)^{m-1} d\tau = J^m f^{(m)}(x) \quad (57.1)$$

حال بنابر خاصیت خطی بودن عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل، فرمول مشتق کسری ریمان-لیوویل را برای توابع توانی مختلف به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= D^\alpha \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(\circ) + R_{m-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^\alpha x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(\circ) + D^\alpha R_{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(\circ) + D^\alpha J^m f^{(m)}(x) \quad (58.1) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(\circ) + J^{m-\alpha} f^{(m)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(\circ) + D_*^\alpha f(x) \end{aligned}$$

و این بدان معنی است که:

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(\circ) \quad (59.1)$$

نتیجه ۱: در مقایسه با دو تعریف کاپوتو و ریمان لیوویل داریم:

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(\circ^+) \frac{x^k}{k!} \right) \quad D_*^\alpha 1 \equiv \circ; \alpha > \circ \quad (60.1)$$

برای اثبات این نتیجه با توجه به رابطه (۵۵.۱)، مشتق کسری ریمان-لیوویل توابع توانی مختلف و همچنین خاصیت خطی بودن عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل رابطه (۶۱.۱) را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(x) &= D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(\circ) \\ &= D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^\alpha x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(\circ) \quad (61.1) \\ &= D^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(\circ) \right) \end{aligned}$$

نتیجه ۲: به طور کلی برای هر $m-1 < \alpha < m$ ، $x > \circ$ ، داریم:

$$D^\alpha f(x) = D^m J^{m-\alpha} f(x) \neq J^{m-\alpha} D^m f(x) = D_*^\alpha f(x) \quad (62.1)$$

یکی از پرکاربردترین توابع در بحث حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری، توابع توانی می باشد که قضیه زیر مشتق کسری را برای این توابع تعریف می کند.

قضیه ۱: مشتق کسری کاپوتو برای توابع توانی در رابطه زیر صدق می کند.

$$D_*^\alpha t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} = D^\alpha t^p & m-1 < \alpha < m; p > m-1; p \in \mathbb{R} \\ 0 & m-1 < \alpha < m; p \leq m-1; p \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (63.1)$$

اکنون به ذکر مثالی برای مشتق کسری کاپوتو می پردازیم:

مثال ۱: اگر $f(t) = t$ ، $m = 1$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه:

$$D_*^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f'(t) dt = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (64.1)$$

مثال ۲: اگر $f(t) = e^t$ ، $m = 1$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه:

$$D_*^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f'(t) dt = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + e^x \operatorname{erf}[\sqrt{x}] \quad (65.1)$$

در جدول ۳.۱ ، مشتق کسری کاپوتو برای توابع مختلف محاسبه شده است.

جدول ۳.۱: محاسبه مشتق کسری کاپوتو برای توابع مختلف

$f(x)$	مشتق کسری کاپوتو $D_*^\alpha f(x)$
$const$	۰
x^p	$\begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha} = D^\alpha x^p & n-1 < \alpha < n; p > n-1; p \in \mathbb{R} \\ 0 & n-1 < \alpha < n; p \leq n-1; p \in \mathbb{N} \end{cases}$
$e^{\lambda x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n} x^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} = \lambda^n x^{n-\alpha} E_{\lambda, n-\alpha+1}(\lambda x)$
$\sin(\lambda x)$	$-\frac{1}{\Gamma} i (i\lambda)^n x^{n-\alpha} (E_{\lambda, n-\alpha+1}(i\lambda x) - (-1)^n E_{\lambda, n-\alpha+1}(-i\lambda x))$
$\cos(\lambda x)$	$\frac{1}{\Gamma} (i\lambda)^n x^{n-\alpha} (E_{\lambda, n-\alpha+1}(i\lambda x) + (-1)^n E_{\lambda, n-\alpha+1}(-i\lambda x))$

حل عددی مشتق کسری کاپوتو برای برخی توابع با α های مختلف در جدول ۴.۱ آمده است.

جدول ۴.۱: محاسبه مشتق کسری کاپوتو برای توابع مختلف

	$D_*^\alpha f(x)$	$D_*^{\frac{1}{2}} f(x)$	$D_*^{\frac{1}{2}} D_*^{\frac{1}{2}} f(x)$	$D_*^{\frac{1}{2}} D_*^{\frac{1}{2}} D_*^{\frac{1}{2}} f(x)$	$D_*^{\frac{1}{2}} D_*^{\frac{1}{2}} D_*^{\frac{1}{2}} D_*^{\frac{1}{2}} f(x)$
const	o	o	o	o	o
x	$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha}$	$1/1284 x^{\frac{1}{2}}$	۱	o	o
x^2	$\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha}$	$1/5045 x^{\frac{3}{2}}$	$2t$	$2/2568 x^{\frac{1}{2}}$	۲
x^3	$\frac{6}{\Gamma(4-\alpha)} x^{3-\alpha}$	$1/8054 x^{\frac{5}{2}}$	$3t^2$	$4/5135 x^{\frac{3}{2}}$	$6t$
x^4	$\frac{24}{\Gamma(5-\alpha)} x^{4-\alpha}$	$2/0633 x^{\frac{7}{2}}$	$4x^3$	$7/2216 x^{\frac{5}{2}}$	$12x^2$
x^5	$\frac{120}{\Gamma(6-\alpha)} x^{5-\alpha}$	$2/2926 x^{\frac{9}{2}}$	$5x^4$	$10/3166 x^{\frac{7}{2}}$	$20x^3$
$x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)} x^{\frac{1}{2}-\alpha}$	o/8862	o	o	o
$x^{\frac{3}{2}}$	$1/3292 x$	$1/5 x^{\frac{1}{2}}$	$1/3293$	o	o
e^x	$x^{n-\alpha} E_{1, n-\alpha+1}(x)$	$x^{\frac{1}{2}} E_{1, \frac{3}{2}}(x)$	e^x	$x^{\frac{1}{2}} E_{1, \frac{3}{2}}(x)$	e^x

همچنین برای مقایسه، در جدول ۵.۱، در ستون اول چهار تابع مختلف معرفی شده‌اند که برای آن‌ها مشتق کسری کاپوتو در ستون دوم و مشتق کسری ریمان-لیوویل در ستون سوم محاسبه شده‌است.

جدول ۵.۱: مقایسه مشتق کسری کاپوتو و مشتق کسری ریمان-لیوویل

$f(x)$	مشتق کسری کاپوتو $D_*^\alpha f(x)$	مشتق کسری ریمان-لیوویل $D^\alpha f(x)$
۱	o	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$
x	$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$
x^2	$\frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}$	$\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$
e^x	$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + e^x erf[\sqrt{x}]$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + e^x erf[\sqrt{x}]$

۷.۱ تبدیلات لاپلاس

در این بخش تبدیلات لاپلاس که به عنوان ابزار مهم در ریاضیات به حساب می‌آید را معرفی می‌کنیم. در مسیر حل معادلات دیفرانسیل از جمله نوع کسری آن به وسیله تبدیلات لاپلاس، معادله دیفرانسیل کسری به معادلات جبری تبدیل شده و سپس با حل معادلات جبری می‌توان معادلات مجهول را با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس به دست آورد. در این قسمت به معرفی و روابط موجود در تبدیلات لاپلاس می‌پردازیم. [۱۲]

۱.۷.۱ عملگر لاپلاس

فرض کنید تابع $f(x)$ برای $0 < x < \infty$ تعریف شده باشد، در این صورت تبدیل لاپلاس برای مقادیری از s که انتگرال زیر را متناهی کند، به صورت زیر قابل تعریف است:

$$F(s) = L[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \quad (۶۶.۱)$$

که s می تواند یک متغیر حقیقی یا مختلط باشد. توجه داشته باشید که انتگرال فوق را می توانیم به شکل زیر هم بنویسیم:

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x)e^{-sx} dx \quad (۶۷.۱)$$

برخی از تبدیلات لاپلاس مهم که در این فصل مورد استفاده قرار می گیرد، در این قسمت معرفی می شود.

برای $L[f(x)] = F(s)$ و $L[g(x)] = G(s)$ داریم:

$$\begin{aligned} L[f(x) + g(x)] &= F(s) + G(s) \\ L[x^\beta] &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}} \quad \beta > -1 \\ L[f^{(n)}(x)] &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ L[x^n f(x)] &= (-1)^n F^{(n)}(s) \\ L[\int_0^x f(x) dx] &= \frac{F(s)}{s} \\ L[\int_0^x f(x-t)g(t) dt] &= F(s)G(s) \end{aligned} \quad (۶۸.۱)$$

۲.۷.۱ تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال مرتبه کسری

تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$L[I^\alpha f(x)] = \frac{F(s)}{s^\alpha} \quad (۶۹.۱)$$

این رابطه با استفاده از انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ به صورت زیر اثبات می شود:

$$\begin{aligned} L[I^\alpha f(x)] &= L\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\right] = L\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x g(x-t)f(t) dt\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L[f * g] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} F(s)G(s) \end{aligned} \quad (۷۰.۱)$$

که در اینجا $g(x) = x^{\alpha-1}$ می باشد. بنابراین

$$G(s) = L[x^{\alpha-1}] = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \quad (۷۱.۱)$$

با جایگذاری (۷۱.۱) در (۷۰.۱) رابطه (۶۹.۱) ثابت می شود.

همچنین می‌توانیم تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان-لیوویل را برای $m-1 < \alpha \leq m$ از رابطه زیر به دست آوریم:

$$L[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(0)] \quad (72.1)$$

اثبات این تعریف را می‌توانیم از رابطه مشتق کسری ریمان-لیوویل به صورت زیر به دست بیاوریم:

$$L[D^\alpha f(t)] = L \left[\frac{d^m}{dt^m} I^{m-\alpha} f(t) \right] \quad (73.1)$$

حال بنابر فرمول تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه صحیح m داریم:

$$\begin{aligned} L[D^\alpha f(x)] &= s^m L[I^{m-\alpha} f(x)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^k \frac{d^{m-k-1}}{dt^{m-k-1}} I^{m-\alpha} f(0) \\ &= \frac{s^m F(s)}{s^{m-\alpha}} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(0)] \end{aligned} \quad (74.1)$$

لذا رابطه ثابت می‌شود.

همچنین تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو نیز برای $m-1 < \alpha \leq m$ ، $m \in \mathbb{N}$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$L[D_*^\alpha f(x)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (75.1)$$

برای اثبات این رابطه نیز بنابر تعریف عملگر مشتقات کسری کاپوتو از مرتبه $\alpha > 0$ داریم:

$$D_*^\alpha f(x) = I^{m-\alpha} f^{(m)}(x) \quad (76.1)$$

در اینجا $g(x) = D^m f(x)$ را در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$D_*^\alpha f(x) = I^{m-\alpha} g(x) \quad (77.1)$$

بنابر عملگر لاپلاس انتگرال کسری از مرتبه $m-\alpha$ برای تابع $g(x)$ به صورت:

$$L[D_*^\alpha f(x)] = L[I^{m-\alpha} g(x)] = s^{-(m-\alpha)} G(s) \quad (78.1)$$

می‌باشد که $G(s) = L[g(x)]$. با استفاده از فرمول تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه صحیح m داریم:

$$G(s) = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0) \quad (79.1)$$

بنابراین با جایگذاری (79.1) در (78.1) داریم:

$$(80.1)$$

$$L[D_*^\alpha f(x)] = s^{-(m-\alpha)} \left(s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0) \right) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

بنابراین:

$$L[D_*^\alpha f(x)] = \frac{s^m F(s) - s^{m-1} f(0) - s^{m-2} f'(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)}{s^{m-\alpha}} \quad (81.1)$$

۳.۷.۱ عملگر لاپلاس معکوس

تابع $f(x)$ ، تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ نامیده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} e^{sx} F(s) ds \quad (82.1)$$

که σ به اندازه کافی بزرگ است و $F(s)$ برای قسمت حقیقی $s \geq \sigma$ تعریف می‌شود. در اینجا به معرفی چند تعریف برای یافتن $f(x)$ از طریق تبدیل لاپلاس می‌پردازیم: برای $a \in \mathbb{R}$ ، $\alpha, \beta > 0$ و $s^\alpha > |a|$ فرمول تبدیل لاپلاس معکوس را به شکل زیر معرفی کنیم:

$$L^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a} \right] = x^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-ax^\alpha) \quad (83.1)$$

همچنین برای $a \in \mathbb{R}$ ، $\alpha \geq \beta > 0$ و $s^{\alpha-\beta} > |a|$ رابطه (۸۴.۱) را داریم:

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(s^\alpha + as^\beta)^{n+1}} \right] = x^{\alpha(n+1)-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k(\alpha-\beta) + (n+1)\alpha)} x^{k(\alpha-\beta)} \quad (84.1)$$

حال به ارائه مثالی از حل معادلات دیفرانسیل کسری به روش لاپلاس می‌پردازیم.
مثال: مساله مقدار اولیه ناهمگن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D_*^\alpha y(x) + D_*^\beta y(x) + y(x) = 1 + x \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases} \quad (85.1)$$

با فرض اینکه $L[y(x)] = F(s)$ ، از طرفین معادله عمل لاپلاس می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} L \left[D_*^\alpha y(x) + D_*^\beta y(x) + y(x) \right] &= [1 + x] \\ s^\alpha F(s) - sy(0) - y'(0) + \frac{s^\beta F(s) - sy(0) - y'(0)}{s^\beta} + F(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \\ s^\alpha F(s) - s - 1 + \frac{s^\beta F(s) - s - 1}{s^\beta} + F(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \\ F(s) \left(s^\alpha + s^\beta + 1 \right) &= \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \left(s^\alpha + s^\beta + 1 \right) \\ F(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (86.1)$$

حال با گرفتن لاپلاس معکوس از طرفین رابطه $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$ داریم:

$$y(x) = 1 + x \quad (87.1)$$

در فصل بعد به بیان کاربرد مشتق کسری در مکانیک کلاسیک می‌پردازیم که در آن از تبدیلات لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده شده است.

فصل ۲

کاربردهای مشتق کسری در مکانیک کلاسیک

۱.۲ حرکت ذره در حضور نیروی مقاوم ناشی از ویسکوزیته سیال

در این بخش هدف بررسی دینامیک یک ذره در حضور نیروی مقاوم ناشی از ویسکوزیته سیال می باشد. این نیروی مقاوم نقش نیروی اتلافی را دارد که باعث هدر رفتن انرژی می شود. ابتدا حرکت افقی یک ذره در حضور نیروی مقاوم ناشی از ویسکوزیته سیال را در نظر می گیریم. [۱۷] نیروی کسری به شکل زیر در نظر گرفته می شود:

$$F_{\alpha} = -CD_t^{\alpha}x(t) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.2)$$

در اینجا معادله نیوتن، معادله حرکت ذره را برای ما مقدر می سازد:

$$mD_t^{\alpha}x(t) = -CD_t^{\alpha}x(t) \quad (2.2)$$

که شرایط اولیه در اینجا به صورت زیر است:

$$x'(0) = V_0 \quad x(0) = 0 \quad (3.2)$$

به عبارت دیگر ما می دانیم که $F(s) = L[x(t)]$ ، بنابراین:

$$L[mD_t^\nu x(t)] = -L[CD_t^\alpha x(t)] \quad (۴.۲)$$

با توجه به معادله (۸۱.۱) معادله (۴.۲) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$m\{s^\nu F(s) - sx(\circ) - x'(\circ)\} = -C\{s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1}x(\circ)\} \quad (۵.۲)$$

با توجه به رابطه (۳.۲) :

$$m\{s^\nu F(s) - V_\circ\} = -Cs^\alpha F(s) \quad (۶.۲)$$

که در آن

$$F(s) = \frac{mV_\circ}{ms^\nu + Cs^\alpha} \quad (۷.۲)$$

به عبارت دیگر

$$x(t) = L^{-1}[F(s)] = V_\circ L^{-1} \left[\frac{1}{s^\nu + \frac{C}{m}s^\alpha} \right] \quad (۸.۲)$$

با مقایسه معادله (۸.۲) و (۸۳.۱) :

$$\alpha' = \nu - \alpha \quad \beta' = \nu \quad a = \frac{C}{m} \quad (۹.۲)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} x(t) &= V_\circ t E_{\nu-\alpha, \nu} \left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha} \right) \\ &= V_\circ t \left\{ \frac{1}{\Gamma(\nu)} + \frac{-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha}}{\Gamma(\nu-\alpha)} + \frac{\left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha}\right)^2}{\Gamma(\nu-2\alpha)} + \frac{\left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha}\right)^3}{\Gamma(\nu-3\alpha)} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (۱۰.۲)$$

با استفاده از رابطه بالا می توانیم سرعت را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{m} V_\circ t^{-\alpha} \left(m t^\alpha E_{\nu-\alpha, \nu} \left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha} \right) - C t^\nu \left(E_{\nu-\alpha, \nu-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - E_{\nu-\alpha, \nu-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (۱۱.۲)$$

همچنین شتاب نیز به صورت رابطه (۱۲.۲) نوشته می شود:

$$(۱۲.۲)$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{m^\nu} C t^{1-\nu\alpha} \left(V_\circ C t^\nu E_{\nu-\alpha, \nu-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha} \right) + (\nu + \alpha) \left(C t^\nu E_{\nu-\alpha, \nu-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - C t^\nu E_{\nu-\alpha, \nu-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha} \right) + m t^\alpha \left(E_{\nu-\alpha, \nu-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha} \right) - E_{\nu-\alpha, \nu-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\nu-\alpha} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

موارد خاص: برای $\alpha = \frac{1}{\nu}$ ، معادلات (۱۷.۱) و (۹.۲) را فرامی خوانیم و در رابطه (۱۰.۲) جایگذاری می کنیم:

$$(۱۳.۲)$$

$$x(t) = V_\circ t E_{\frac{\nu}{\nu}, \nu} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{\nu}{\nu}} \right) = V_\circ t \left\{ \frac{1}{\Gamma(\nu)} + \frac{-\frac{C}{m} t^{\frac{\nu}{\nu}}}{\Gamma(\frac{\nu}{\nu})} + \frac{\left(-\frac{C}{m} t^{\frac{\nu}{\nu}}\right)^2}{\Gamma(\nu)} + \frac{\left(-\frac{C}{m} t^{\frac{\nu}{\nu}}\right)^3}{\Gamma(\frac{\nu}{\nu})} + \dots \right\}$$

$$V(t) = \frac{1}{m} V_0 \left(m E_{\frac{r}{\sqrt{m}}, \frac{r}{\sqrt{m}}} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} \right) - C t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} \left(E_{\frac{r}{\sqrt{m}}, \frac{\delta}{\sqrt{m}}} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} \right) - E_{\frac{r}{\sqrt{m}}, \frac{\gamma}{\sqrt{m}}} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} \right) \right) \right) \quad (14.2)$$

$$(15.2)$$

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} C \sqrt{t} V_0 \left(-\delta m E_{\frac{r}{\sqrt{m}}, \frac{\delta}{\sqrt{m}}} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} \right) + 2 C t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} E_{\frac{r}{\sqrt{m}}, \frac{\gamma}{\sqrt{m}}} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} \right) + \delta m E_{\frac{r}{\sqrt{m}}, \frac{\gamma}{\sqrt{m}}} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} \right) - \delta C t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} E_{\frac{r}{\sqrt{m}}, \frac{\gamma}{\sqrt{m}}} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} \right) + \delta C t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} E_{\frac{r}{\sqrt{m}}, \frac{\delta}{\sqrt{m}}} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} \right) \right)$$

از این رو:

برای $C = 0$ رابطه (۱۰.۲) منجر می شود به:

$$x(t) = V_0 t \quad (16.2)$$

برای $\alpha = 1$ رابطه (۱۰.۲) منجر می شود به:

$$x(t) = V_0 t E_{1, \frac{r}{\sqrt{m}}} \left(-\frac{C}{m} t \right) \quad (17.2)$$

۲.۲ حرکت در راستای قائم یک ذره در یک محیط با نیروی مقاوم کسری

اکنون حرکت در راستای قائم در حضور یک نیروی مقاوم کسری را در نظر می گیریم که در آن نیروی بازگشتی متناسب با سرعت کسری وجود دارد. در اینجا ذره را در یک میدان گرانشی یکنواخت که به سمت پایین با سرعت اولیه صفر $V(0) = 0$ در حرکت است در نظر می گیریم. معادله حرکت به صورت زیر است:

$$m D_t^{\frac{r}{\sqrt{m}}} y(t) = mg - C D_t^{\alpha} y(t) \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (18.2)$$

که این رابطه شرایط اولیه زیر را دارد:

$$y(0) = y_0 \quad y'(0) = 0 \quad (19.2)$$

با توجه به تبدیل لاپلاس دوطرف معادله (۱۸.۲) خواهیم داشت:

$$m [s^{\frac{r}{\sqrt{m}}} F(s) - s y(0) - y'(0)] = \frac{mg}{s} - C \left[\frac{s F(s) - y(0)}{s^{1-\alpha}} \right] \quad (20.2)$$

با حل معادله (۲۰.۲) و با توجه به $f(s)$ ، خواهیم داشت:

$$F(s) = \frac{g}{[s^{\frac{r}{\sqrt{m}}} + \frac{C}{m} s^{\alpha+1}]} + \frac{y_0}{[s + \frac{C}{m} s^{\alpha-1}]} + \frac{\frac{C}{m} y_0}{[s^{\frac{r}{\sqrt{m}}-\alpha} + \frac{C}{m} s]} \quad (21.2)$$

پس با توجه به معادلات بالا می توانیم بنویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{g}{[s^{\frac{r}{\sqrt{m}}} + \frac{C}{m} s^{\alpha+1}]} \\ \beta' = \frac{r}{\sqrt{m}}; \alpha' = \frac{r}{\sqrt{m}} - \alpha \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_0}{[s + \frac{C}{m} s^{\alpha-1}]} \\ \beta' = 1; \alpha' = \frac{r}{\sqrt{m}} - \alpha \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{C}{m} y_0}{[s^{\frac{r}{\sqrt{m}}-\alpha} + \frac{C}{m} s]} \\ \beta' = \frac{r}{\sqrt{m}} - \alpha; \alpha' = \frac{r}{\sqrt{m}} - \alpha \end{array} \right\} \quad (22.2)$$

با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس $y(t) = L^{-1}[F(s)]$ ما خواهیم داشت:

$$y(t) = y_0 E_{\gamma-\alpha, 1} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) + gt^{\gamma} E_{\gamma-\alpha, \gamma} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) + \frac{C}{m} y_0 t^{\gamma-\alpha} E_{\gamma-\alpha, \gamma-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) \quad (23.2)$$

برای مورد خاص $\alpha = 1$:

$$y(t) = y_0 E_{1, 1} \left(-\frac{C}{m} t \right) + gt^{\gamma} E_{1, \gamma} \left(-\frac{C}{m} t \right) + \frac{C}{m} y_0 t E_{-\alpha, \gamma-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t \right) \quad (24.2)$$

در ادامه خواهیم داشت:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\gamma!} gt^{\gamma} + \frac{1}{\gamma!} \left(-\frac{C}{m} \right) gt^{\gamma} + \frac{1}{\gamma!} \left(\frac{C}{m} \right)^2 gt^{\gamma} + \dots \quad (25.2)$$

به ازای $C \rightarrow 0$:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\gamma!} gt^{\gamma} \quad (26.2)$$

پس برای $\alpha = \frac{1}{\gamma}$ خواهیم داشت:

$$y(t) = y_0 E_{\frac{\gamma}{\gamma}, 1} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{\gamma}{\gamma}} \right) + gt^{\gamma} E_{\frac{\gamma}{\gamma}, \gamma} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{\gamma}{\gamma}} \right) + \frac{C}{m} y_0 t^{\frac{\gamma}{\gamma}} E_{\frac{\gamma}{\gamma}, \frac{\gamma}{\gamma}} \left(-\frac{C}{m} t^{\frac{\gamma}{\gamma}} \right) \quad (27.2)$$

همچنین برای سادگی می توانیم بنویسیم:

$$y(t) = y_0 \frac{1}{\Gamma(1)} + gt^{\gamma} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + \frac{-\frac{C}{m} t^{\frac{\gamma}{\gamma}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma}\right)} + \frac{\frac{C}{m} t^{\frac{\gamma}{\gamma}}}{\Gamma(2)} + \dots \right\} \quad (28.2)$$

با توجه به اینکه $\Gamma(2) = 1!$ است داریم:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\gamma!} gt^{\gamma} + \frac{C}{m} \frac{gt^{\gamma}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma}\right)} + \dots \quad (29.2)$$

۳.۲ حرکت یک پرتابه با در نظر گرفتن نیروی مقاوم کسری

در اینجا حرکت یک پرتابه^۱ را در یک مقاومت متوسط در نظر می گیریم که در آن نیروی بازگشتی متناسب با سرعت کسری وجود دارد. در این صورت روابط زیر را خواهیم داشت:

$$mD_t^{\gamma} x(t) = -CD_t^{\alpha} x(t) \quad mD_t^{\gamma} y(t) = -mg - CD_t^{\alpha} y(t) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (30.2)$$

این روابط شرایط اولیه زیر را دارند:

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad x'(0) = V_0 \cos \theta \quad y'(0) = V_0 \sin \theta \quad (31.2)$$

¹Projectile

با اعمال تبدیلات لاپلاس برای دو طرف معادله (۳۰.۲) خواهیم داشت:

$$F(s) = \frac{V_0 \cos \theta}{ms^2 + Cs^\alpha} \quad (32.2)$$

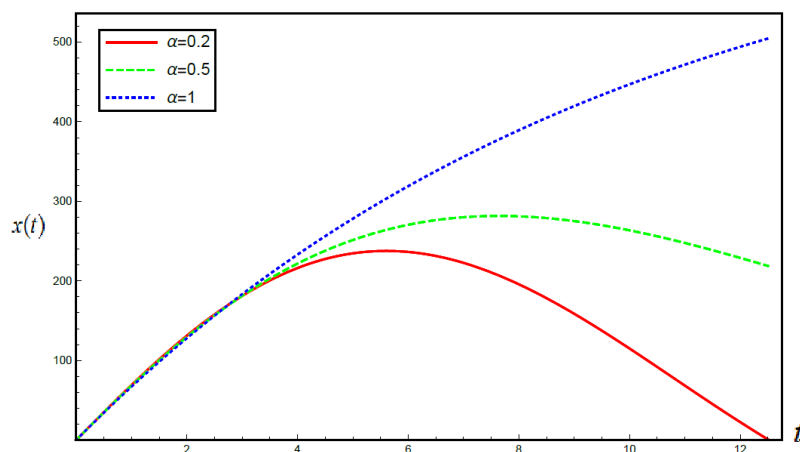
$$G(s) = -\frac{mg}{ms^2 + Cs^{\alpha+1}} + \frac{V_0 \sin \theta}{ms^2 + Cs^\alpha} \quad (33.2)$$

که $F(s)$ و $G(s)$ تبدیلات لاپلاس $x(t)$ و $y(t)$ هستند. با استفاده از تبدیلات لاپلاس و تابع میتاگ-لفلر خواهیم داشت:

$$x(t) = V_0 \cos \theta t E_{\alpha,2} \left(-\frac{C}{m} t^{2-\alpha} \right) \quad (34.2)$$

$$y(t) = -gt^\alpha E_{\alpha,3} \left(-\frac{C}{m} t^{3-\alpha} \right) + V_0 \sin \theta t E_{\alpha,2} \left(-\frac{C}{m} t^{2-\alpha} \right) \quad (35.2)$$

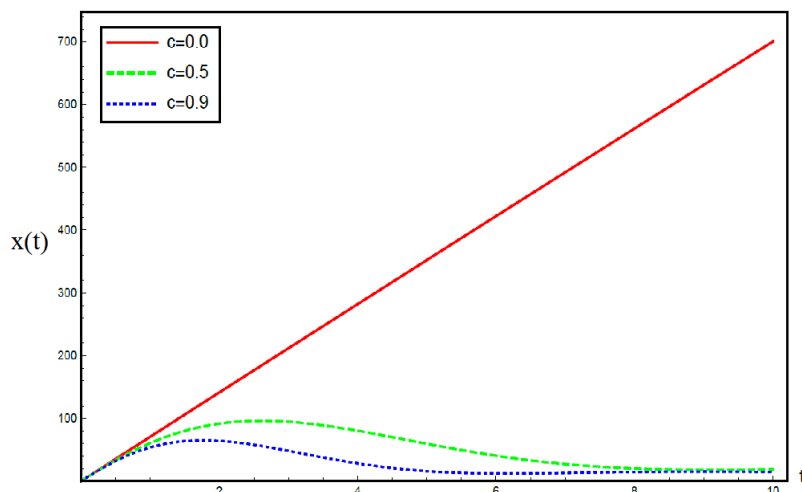
در شکل ۱.۲، نمودار $x(t)$ بر حسب t برای حالت $\alpha = 0.2$ ، $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 1$ رسم شده است:



شکل ۱.۲: نمودار $x(t)$ بر حسب t برای حالت‌های $\alpha = 0.2$ ، $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 1$

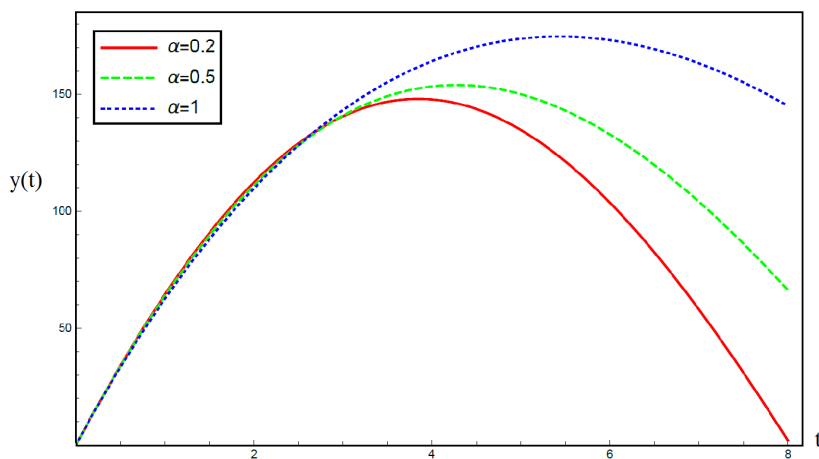
همانطور که ملاحظه می‌کنید، هنگامی که $\alpha = 0.2$ است، برد پرتابه در زمان $t = 12/5$ ثانیه طی می‌شود ولی با افزایش α ، به $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 1$ برد پرتابه و زمان هر دو افزایش پیدا می‌کنند.

در شکل ۲.۲، نمودار $x(t)$ بر حسب t برای حالت $C = 0.0$ ، $C = 0.5$ و $C = 0.9$ رسم شده است:



شکل ۲.۲: نمودار $x(t)$ بر حسب t برای حالت های $C = 0/9$ و $C = 0/5$ ، $C = 0/0$

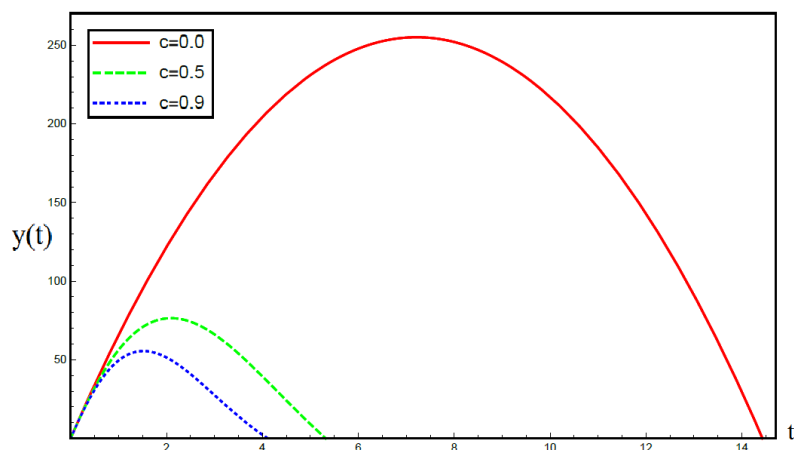
ملاحظه می کنید هنگامی که $C = 0/0$ است برد پرتابه به صورت خطی می باشد و نسبت به زمان به طور مستقیم تغییر می کند و با افزایش C ، برد پرتابه و زمان کاهش پیدا می کنند. در شکل ۳.۲ ، نمودار $y(t)$ بر حسب t برای حالت $\alpha = 0/2$ ، $\alpha = 0/5$ و $\alpha = 1$ رسم شده است:



شکل ۳.۲: نمودار $y(t)$ بر حسب t برای حالت های $\alpha = 0/2$ ، $\alpha = 0/5$ و $\alpha = 1$

همانطور که ملاحظه می کنید، هنگامی که $\alpha = 0/2$ است، در زمان $t = 4$ ثانیه ماکزیمم ارتفاع به دست می آید و با افزایش α ، به $\alpha = 0/5$ و $\alpha = 1$ ماکزیمم ارتفاع و زمان آن هر دو افزایش پیدا می کنند.

در شکل ۴.۲ ، نمودار $y(t)$ بر حسب t برای حالت $C = 0/9$ و $C = 0/5$ ، $C = 0/0$ رسم شده است:



شکل ۴.۲: نمودار $y(t)$ بر حسب t برای حالت‌های $C = 0/0$ ، $C = 0/5$ و $C = 0/9$

ملاحظه می‌کنید زمانی که $C = 0/0$ است ماکزیمم ارتفاع در زمان $t = 7$ ثانیه اتفاق می‌افتد در صورتی که با افزایش C ، ماکزیمم ارتفاع و زمان آن کاهش پیدا می‌کنند. با مشتق‌گیری از $x(t)$ و $y(t)$ نسبت به زمان سرعت را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$x'(t) = \frac{1}{m} t^{-\alpha} V_0 \cos \theta \left(m t^\alpha E_{\gamma-\alpha, 2} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) - C t^\gamma \left(E_{\gamma-\alpha, 3-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) - E_{\gamma-\alpha, 4-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) \right) \right) \quad (36.2)$$

$$y'(t) = \frac{1}{m} t^{-\alpha} \left(-2 g m t^{1+\alpha} E_{\gamma-\alpha, 3} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) - 2 C g t^\gamma E_{\gamma-\alpha, 5-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) + m t^\alpha V_0 \sin \theta E_{\gamma-\alpha, 2} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) - C t^\gamma V_0 \sin \theta E_{\gamma-\alpha, 3-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) + C t^\gamma (g t + V_0 \sin \theta) E_{\gamma-\alpha, 4-\alpha} \left(-\frac{C}{m} t^{\gamma-\alpha} \right) \right) \quad (37.2)$$

اگر برد و زمان مورد نیاز برای کل مسیر را توسط R' و T' به ترتیب مشخص کنیم، خواهیم داشت:

$$y(t = T') = 0 \quad (38.2)$$

اکنون موردی را در نظر می‌گیریم که در آن $\alpha = 1 - \varepsilon$ و ε یک ضریب کوچک است. در این مورد داریم:

$$E_{\gamma-\alpha, l} \sim \frac{1}{\left(-\frac{C}{m} t\right)^{l-1}} \left[e^{-\frac{C}{m} t} - \sum_{n=0}^{l-2} \left(-\frac{C}{m} t\right)^n \right] + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\Gamma(n+l)} F(n+l-1) \left(-\frac{C}{m} t\right)^n + \varepsilon L n t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\Gamma(n+l)} \left(-\frac{C}{m} t\right)^n \quad (39.2)$$

با استفاده از معادله (۳۸.۲) و معادله (۳۹.۲) برای اولین مرتبه در ε خواهیم داشت:

$$T' = \frac{2 V_0 \sin \theta}{g} \left(1 - \frac{C V_0 \sin \theta}{3 m g} \right) + \varepsilon \frac{2 C V_0^2 \sin^2 \theta}{3 m g^2} \left(-\gamma + \frac{13}{6} + L n \frac{2 V_0 \sin \theta}{g} \right) \quad (40.2)$$

اگر $\alpha = 1$ را در نظر بگیریم:

$$T' \rightarrow T = \frac{2V_0 \sin \theta}{g} \left(1 - \frac{CV_0 \sin \theta}{3mg} \right) \quad (41.2)$$

همچنین از رابطه برد به صورت زیر به دست می آید:

$$R' = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{g} \left(1 - \frac{4CV_0 \sin \theta}{3mg} \right) + \varepsilon \frac{2V_0^3 C \sin^2 \theta \cos \theta}{9mg^2} \quad (42.2)$$

اگر $\alpha = 1$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$R' \rightarrow R = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{g} \left(1 - \frac{4CV_0 \sin \theta}{3mg} \right) \quad (43.2)$$

بنابراین:

$$\Delta R = R' - R = \varepsilon \frac{2CV_0^3 \sin^2 \theta \cos \theta}{9mg^2} > 0 \quad (44.2)$$

ΔR تغییرات برد با توجه به مقاومت کسری داده شده می باشد.

فصل ۳

مقدمه ای به مکانیک کوانتومی با روش انطباقی مشتقات کسری

۱.۳ مشتق کسری در روش انطباقی

در این بخش هدف آن است که به بررسی معادله شرودینگر با مشتقات کسری بپردازیم. [۱۸] برای $0 < \alpha \leq 1$ ، مشتق انطباقی چپ^۱ به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_{a|x}^{\alpha} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \varepsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon} \quad (1.3)$$

همچنین مشتق انطباقی راست^۲ نیز به صورت زیر است:

$$D_{x|b}^{\alpha} f(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \varepsilon(b-x)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon} \quad (2.3)$$

به همین ترتیب می توانیم برای $0 < \alpha \leq 1$ ، انتگرال انطباقی^۳ چپ را نیز به صورت زیر تعریف کنیم:

$$I_{a|x}^{\alpha} f(x) = \int_a^x (\xi - a)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (3.3)$$

¹Left conformable derivative

²Right conformable derivative

³Left conformable integral

همچنین انتگرال انطباقی راست^۴ نیز به صورت زیر است:

$$I_{x|b}^{\alpha} f(x) = \int_a^x (b - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (۴.۳)$$

همچنین CFD^۵ و CFI^۶ روابط زیر را حاصل می کنند:

$$\begin{aligned} D_{a|x}^{\alpha} I_{a|x}^{\alpha} f(x) &= f(x) \\ I_{a|x}^{\alpha} D_{a|x}^{\alpha} f(x) &= f(x) - f(a) \end{aligned} \quad (۵.۳)$$

مورد $a = 0$ را در نظر می گیریم، بنابراین رابطه $D_{0|x}^{\alpha} = D_x^{\alpha}$ را خواهیم داشت. پس می توانیم CFD را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$D_x^{\alpha} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon} \quad (۶.۳)$$

در اینجا نیز $0 < \alpha \leq 1$ و D_x^{α} یک CFD راست است. با استفاده از نقش هوییتال^۷ ما می توانیم CFD را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$D_x^{\alpha} f(x) = x^{1-\alpha} f'(x) \quad (۷.۳)$$

با صرف نظر کردن از ضرایب، خروجی رابطه (۷.۳)، همان مشتق کسری کاپوتو خواهد بود:

$$D_{0|x}^{\alpha, C} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^x (x - \xi)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\xi^n} f(\xi) d\xi \quad (۸.۳)$$

در اینجا $n = [\alpha] + 1$ و $[x]$ یک عدد صحیح کوچکتر یا معادل با x ایجاد می کنند. جدول ۱.۳ مقایسه ای را انجام می دهد بین مشتق کسری انطباقی و مشتق کسری کاپوتو هنگامی که هر دو روی توابع $1, x, x^2$ برهمکنش انجام می دهند.

جدول ۱.۳: مقایسه مشتق کسری کاپوتو و مشتق کسری انطباقی برای توابع $1, x, x^2$

$f(x)$	مشتق کسری انطباقی D_x^{α}	مشتق کسری کاپوتو $D_{*,x}^{\alpha}$
۱	۰	۰
x	\sqrt{x}	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$
x^2	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$

از ویژگی های مشتق انطباقی می توانیم به موارد زیر اشاره کنیم:
(۱) خطی بودن^۸

$$D_x^{\alpha} (af(x) + bg(x)) = aD_x^{\alpha} f(x) + bD_x^{\alpha} g(x) \quad (۹.۳)$$

⁴Right conformable integral

⁵Conformable Fractional Derivative

⁶Conformable Fractional Integral

⁷Hopital

⁸Linearity

(۲) روش لایب نیتز^۹

$$D_x^\alpha(f(x)g(x)) = [D_x^\alpha f(x)]g(x) + f(x)D_x^\alpha g(x) \quad (10.3)$$

(۳) روش زنجیره‌ای^{۱۰}

$$D_x^\alpha f(g(x)) = [D_{g(x)}^\alpha f(g(x))][D_x^\alpha g(x)]g(x)^{\alpha-1} \quad (11.3)$$

اکنون ما می‌توانیم $X_\alpha(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم: [۲۰]

$$X_\alpha(x) = \int_0^x |t|^{\alpha-1} dt \quad (12.3)$$

اگر $x > 0$ باشد:

$$X_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} \quad (13.3)$$

اگر $x < 0$ باشد:

$$X_\alpha(x) = -\frac{(-x)^\alpha}{\alpha} \quad (14.3)$$

از رابطه (۱۳.۳) و (۱۴.۳) نیز می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$X_\alpha(x) = \frac{|x|^{\alpha-1} x}{\alpha} \quad (15.3)$$

که

$$X_\alpha(-\infty) = -\infty \quad X_\alpha(\infty) = \infty \quad (16.3)$$

معکوس این رابطه نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_\alpha^{-1}(x) = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} |x|^{\frac{1}{\alpha}-1} x \quad (17.3)$$

نتیجه‌ی مشتق کسری روی تابع $X_\alpha(x)$ عبارتست از:

$$D_x^\alpha X_\alpha = 1 \quad D_x^\alpha X_\alpha^n = n X_\alpha^{n-1} \quad (18.3)$$

۲.۳ معادله شرودینگر با مشتقات کسری

در مکانیک کوانتومی کسری، معادله شرودینگر وابسته به زمان به صورت زیر است: [۲۱، ۲۳]

$$i\hbar_\alpha^\alpha D_t^\alpha \Psi(x, t) = H_\alpha(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha) \Psi(x, t) = \left(\frac{\hat{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + V_\alpha(\hat{x}_\alpha) \right) \Psi(x, t) \quad (19.3)$$

⁹Leibniz rule

¹⁰Chain rule

که در اینجا تابع موج کسری به صورت زیر است:

$$\Psi(x, t) = u(x)e^{i\left(\frac{\hbar_\alpha}{\alpha}|x|^{\alpha-1} - \frac{\omega_\alpha}{\alpha}|t|^{\alpha-1}\right)} \quad (20.3)$$

این در صورتی است که $u(x) = Ae^{i\phi}$ می باشد و مختصات تعمیم یافته \hat{p}_α و \hat{x}_α عبارتند از:

$$\hat{p}_\alpha = \frac{\hbar_\alpha}{i} D_x^\alpha \quad \hat{x}_\alpha = x \quad (21.3)$$

با یک تابع ساده در x ، مشتق کسری انطباقی به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_x^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon} = |x|^{1-\alpha} \partial_x f(x) \quad (22.3)$$

در فضای هیلبرت مربوط به مکانیک کوانتومی کسری یک بعدی، ضرب داخلی به صورت زیر داده می شود:

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) f(x) |x|^{\alpha-1} dx \quad (23.3)$$

مقدار چشم داشتی برای یک عملگر فیزیکی O با توجه به حالت $\Psi(x, t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle O \rangle = \langle \Psi | O | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) O \Psi(x, t) |x|^{\alpha-1} dx \quad (24.3)$$

اگر O یک عملگر هرمیتی باشد، یعنی:

$$\langle O \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi | O \Psi \rangle \quad (25.3)$$

از ویژگی (۳) ما می توانیم براحتی هرمیتی بودن عملگر مکان و عملگر تکانه را بررسی کنیم. همچنین می توان رابطه (۲۰.۳) را با جملات طول موج $(\lambda_\alpha), \alpha$ و دوره $(T_\alpha), \alpha$ به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Psi(x, t) = u(x)e^{2\pi i\left(\frac{1}{\lambda_\alpha}x - \frac{1}{T_\alpha}t\right)} \quad (26.3)$$

از رابطه $p = \frac{h}{\lambda}$ و رابطه پلانک $E = \frac{h}{T}$ ما داریم که:

$$\hat{x}_\alpha \Psi(x, t) = x \Psi(x, t) \quad \hat{p}_\alpha \Psi(x, t) = p^\alpha \Psi(x, t) \quad (27.3)$$

که به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$\hat{x}_\alpha \rightarrow x \quad \hat{p}_\alpha \rightarrow \frac{\hbar_\alpha}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad \hat{H}_\alpha \rightarrow i\hbar_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \quad (28.3)$$

که در اینجا $\hbar_\alpha = \frac{h}{(2\pi)^\alpha}$ و \hat{H}_α یک عملگر هامیلتونی^{۱۱} است. از معادله (۲۷.۳) ما می دانیم که عملگر مکان، \hat{x}_α دارای بعد طول، عملگر تکانه، \hat{p}_α دارای بعد (حرکت) و عملگر هامیلتونی

¹¹Hamiltonian operator

دارای بعد (انرژی) می باشد.

با استفاده از عملگرهای (۲۸.۳) معادله شرودینگر کسری به صورت زیر می باشد:

$$i\hbar_{\alpha}^{\alpha} D_t^{\alpha} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar_{\alpha}^{2\alpha}}{2m^{\alpha}} (D_x^{\alpha})^2 + V_{\alpha}(x) \right] \Psi(x, t) \quad (29.3)$$

که در اینجا نیز انرژی پتانسیل در این فضا دارای بعد (انرژی) می باشد. در مکانیک کوانتومی کسری، عملگر جابجایی دو عملگر مکان^{۱۲} و عملگر تکانه^{۱۳} به صورت زیر مشخص می شود:

$$[\hat{x}_{\alpha}, \hat{p}_{\alpha}] = i\hbar_{\alpha}^{\alpha} |\hat{x}|^{1-\alpha} \quad (30.3)$$

اگر برای $t > 0$ تابع موج را به صورت $\Psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar_{\alpha}} E^{\alpha} t^{\alpha}} u(x)$ در نظر بگیریم، معادله شرودینگر مستقل از زمان را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\left[-\frac{\hbar_{\alpha}^{2\alpha}}{2m^{\alpha}} (D_x^{\alpha})^2 + V_{\alpha}(x) \right] u(x) = E^{\alpha} u(x) \quad (31.3)$$

از معادله (۳۱.۳) می توان معادله پیوستگی را به صورت زیر به دست آورد:

$$D_t^{\alpha} \rho_{\alpha}(x, t) + D_x^{\alpha} j_{\alpha}(x, t) = 0 \quad (32.3)$$

که در اینجا چگالی احتمال^{۱۴} در این فضا، یعنی $\rho_{\alpha}(x, t)$ توسط رابطه زیر داده می شود:

$$\rho_{\alpha}(x, t) = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) \quad (33.3)$$

و شار احتمال^{۱۵} یعنی $j_{\alpha}(x, t)$ نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$j_{\alpha}(x, t) = \frac{\hbar_{\alpha}^{\alpha}}{2m^{\alpha}i} (\Psi^*(x, t) D_x^{\alpha} \Psi(x, t) - \Psi(x, t) D_x^{\alpha} \Psi^*(x, t)) \quad (34.3)$$

همچنین در مشتق کسری انطباقی، می توانیم معادله شرودینگر مستقل از زمان را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left[-\frac{\hbar^{2\alpha}}{2m^{\alpha}} (D_X^{\alpha})^2 + V(X) \right] U(X) = E^{\alpha} U(X) \quad (35.3)$$

که در اینجا

$$D_X^{\alpha} = x^{1-\alpha} \partial_x = \frac{1}{X'(x)} \partial_x = \frac{d}{dX} \quad (36.3)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\left[-\frac{\hbar^{2\alpha}}{2m^{\alpha}} \frac{d^{\alpha}}{dX^{\alpha}} + V(X) \right] U(X) = E^{\alpha} U(X) \quad (37.3)$$

¹²Position operator

¹³Momentum operator

¹⁴Probability density

¹⁵Probability flux

۳.۳ مولفه های مشتق کسری انطباقی در سه بعد

ما می توانیم مشتق کسری انطباقی در حالت سه بعدی را به صورت زیر معرفی کنیم:

$$D_x^\alpha f(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}, y, z) - f(x, y, z)}{\varepsilon} = x^{1-\alpha} \partial_x f(x, y, z) \quad (38.3)$$

$$D_y^\alpha f(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \varepsilon y^{1-\alpha}, z) - f(x, y, z)}{\varepsilon} = y^{1-\alpha} \partial_y f(x, y, z) \quad (39.3)$$

$$D_z^\alpha f(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \varepsilon z^{1-\alpha}) - f(x, y, z)}{\varepsilon} = z^{1-\alpha} \partial_z f(x, y, z) \quad (40.3)$$

عملگر گرادیان مشتق کسری انطباقی به صورت زیر معرفی می شود:

$$\vec{D}^\alpha = \hat{e}_x D_x^\alpha + \hat{e}_y D_y^\alpha + \hat{e}_z D_z^\alpha \quad (41.3)$$

و دیورژانس مشتق کسری انطباقی نیز برای هر بردار $\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z$ به صورت زیر است:

$$\vec{D}^\alpha \cdot \vec{A} = D_x^\alpha A_x + D_y^\alpha A_y + D_z^\alpha A_z \quad (42.3)$$

همچنین عملگر کرل مشتق کسری انطباقی نیز به صورت زیر معرفی می گردد:

$$\vec{D}^\alpha \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ D_x^\alpha & D_y^\alpha & D_z^\alpha \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (43.3)$$

و در نهایت عملگر لاپلاسین مشتق کسری انطباقی به صورت زیر داده می شود:

$$(D^\alpha)^2 = \vec{D}^\alpha \cdot \vec{D}^\alpha = x^{2-2\alpha} \partial_x^2 + y^{2-2\alpha} \partial_y^2 + z^{2-2\alpha} \partial_z^2 + (1-\alpha)[x^{1-2\alpha} \partial_x + y^{1-2\alpha} \partial_y + z^{1-2\alpha} \partial_z] \quad (44.3)$$

۱.۳.۳ معادله شرودینگر با مشتقات کسری در مختصات کروی

بردار مکان سه بعدی در کسر انطباقی به شکل زیر داده می شود:

$$\vec{R} = \frac{x^\alpha}{\alpha} \hat{e}_x + \frac{y^\alpha}{\alpha} \hat{e}_y + \frac{z^\alpha}{\alpha} \hat{e}_z \quad (45.3)$$

$$\vec{D}^\alpha \cdot \vec{R} = 1 \quad \vec{D}^\alpha \times \vec{R} = 0 \quad (46.3)$$

همچنین اندازه بردار مکان کسری برابر است با:

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{\left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y^\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{z^\alpha}{\alpha}\right)^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (47.3)$$

برای مختصات کروی خواهیم داشت:

$$X = \frac{x^\alpha}{\alpha} = R \sin \theta \cos \phi \quad (48.3)$$

$$Y = \frac{y^\alpha}{\alpha} = R \sin \theta \sin \phi \quad (49.3)$$

$$Z = \frac{z^\alpha}{\alpha} = R \cos \theta \quad (50.3)$$

$$R = \frac{r^\alpha}{\alpha} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha} \quad (51.3)$$

و در نهایت برای مشتق کسری در مختصات کروی خواهیم داشت:

$$\nabla^2 \alpha = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi^2} \quad (52.3)$$

در فصل ۴، به حل معادله شرودینگر کسری با روش انطباقی برای پتانسیل های خاص می پردازیم که در آنجا از رابطه (۵۲.۳) استفاده می کنیم.

فصل ۴

معادله شرودینگر برای برخی پتانسیل‌های خاص با استفاده از روش کسر انطباقی

۱.۴ حل معادله شرودینگر کسری در روش انطباقی برای برخی از پتانسیل‌های خاص

در این فصل به حل معادله شرودینگر با مشتقات کسری برای برخی از پتانسیل‌های خاص می‌پردازیم:

۱.۱.۴ حل معادله شرودینگر با مشتقات کسری برای پتانسیل نوسانگر هماهنگ

پتانسیل نوسانگر هماهنگ کسری را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V = \frac{1}{2} m \omega^\alpha R^\alpha \quad (1.4)$$

می‌دانیم که در اینجا $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ و $R = \frac{r^\alpha}{\alpha}$ می‌باشد. پتانسیل نوسانگر را در معادله شرودینگر کسری جایگذاری کرده و آن را برحسب مختصات کروی به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \alpha}{2m^\alpha} (D^\alpha)^2 + V \right) \Psi(R, \theta, \varphi) = E^\alpha \Psi(R, \theta, \varphi) \quad (2.4)$$

$$-\frac{\hbar^2 \alpha}{2m^\alpha} \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Psi(R, \theta, \varphi)}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi(R, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi(R, \theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{1}{2} m^\alpha \omega^2 R^2 \Psi(R, \theta, \varphi) = E^\alpha \Psi(R, \theta, \varphi) \quad (3.4)$$

با در نظر گرفتن $\Psi(R, \theta, \varphi) = \Psi(R) Y_{LM}(\theta, \varphi)$ معادله (۳.۴) به سادگی تبدیل به رابطه زیر می‌شود:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \left[-L(L+1) - \frac{m^2 \alpha \omega^2 R^4}{\hbar^2 \alpha} + \frac{2m^\alpha E^\alpha}{\hbar^2 \alpha} R^2 \right] \right\} \Psi(R) = 0 \quad (4.4)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $R^2 = s$ معادله آشنای زیر بدست می‌آید و می‌توانیم رابطه (۴.۴) را به روش نیکوروف-اووارف حل کنیم:

$$\left\{ \frac{d^2}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{d}{ds} + \frac{1}{s^2} \left[-\frac{m^2 \alpha \omega^2 s^2}{4 \hbar^2 \alpha} + \frac{2m^\alpha E^\alpha}{2 \hbar^2 \alpha} s - \frac{L(L+1)}{4} \right] \right\} \Psi(s) = 0 \quad (5.4)$$

با مقایسه رابطه (۵.۴) و معادله دیفرانسیل در روش نیکوروف-اووارف که در رابطه زیر معرفی شده است، موارد (۶.۴) به دست می‌آوریم:

$$\left\{ \frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{1}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} [-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3] \right\} \Psi(s) = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3}{2}; \alpha_2 = 0; \alpha_3 = 0; \xi_1 = \left(\frac{m^2 \alpha \omega^2}{2 \hbar^2 \alpha} \right)^2; \xi_2 = \frac{m^\alpha E^\alpha}{\hbar^2 \alpha}; \xi_3 = \frac{L(L+1)}{4} \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2}; \alpha_5 = 0; \alpha_6 = \left(\frac{m^2 \alpha \omega^2}{2 \hbar^2 \alpha} \right)^2; \alpha_7 = -\frac{m^\alpha E^\alpha}{\hbar^2 \alpha}; \alpha_8 = \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{4} \right)^2 \\ \alpha_9 &= \left(\frac{m^2 \alpha \omega^2}{2 \hbar^2 \alpha} \right)^2; \alpha_{10} = 1 + 2 \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{4} \right); \alpha_{11} = \frac{m^\alpha \omega^2}{\hbar^2 \alpha}; \alpha_{12} = \frac{L}{2}; \alpha_{13} = -\frac{m^2 \alpha \omega^2}{2 \hbar^2 \alpha} \end{aligned} \quad (6.4)$$

می‌دانیم که اگر $\alpha_3 = 0$ باشد تابع موج از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Psi(s) = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13} s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11} s) \quad (7.4)$$

پس برای معادله شرودینگر رابطه (۵.۴)، تابع موج $\Psi(s)$ به صورت زیر خواهد شد:

$$\Psi(s) = s^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{m^2 \alpha \omega^2}{2 \hbar^2 \alpha} s} L_n^{L+\frac{1}{2}} \left(\frac{m^\alpha \omega^2}{\hbar^2 \alpha} s \right) \quad (8.4)$$

همچنین با تغییر متغیر $s = \frac{r^2 \alpha}{\alpha^2}$ ، می‌توانیم تابع موج را برحسب r بدست بیاوریم:

$$\Psi(r) = \left(\frac{r^2 \alpha}{\alpha^2} \right)^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{m^2 \alpha \omega^2}{2 \hbar^2 \alpha} \frac{r^2 \alpha}{\alpha^2}} L_n^{L+\frac{1}{2}} \left(\frac{m^\alpha \omega^2}{\hbar^2 \alpha} \frac{r^2 \alpha}{\alpha^2} \right) \quad (9.4)$$

حل معادله شرودینگر کسری در روش انطباقی برای برخی از پتانسیل های خاص ۳۷

همچنین ویژه مقدار انرژی را نیز به صورت زیر خواهیم داشت:

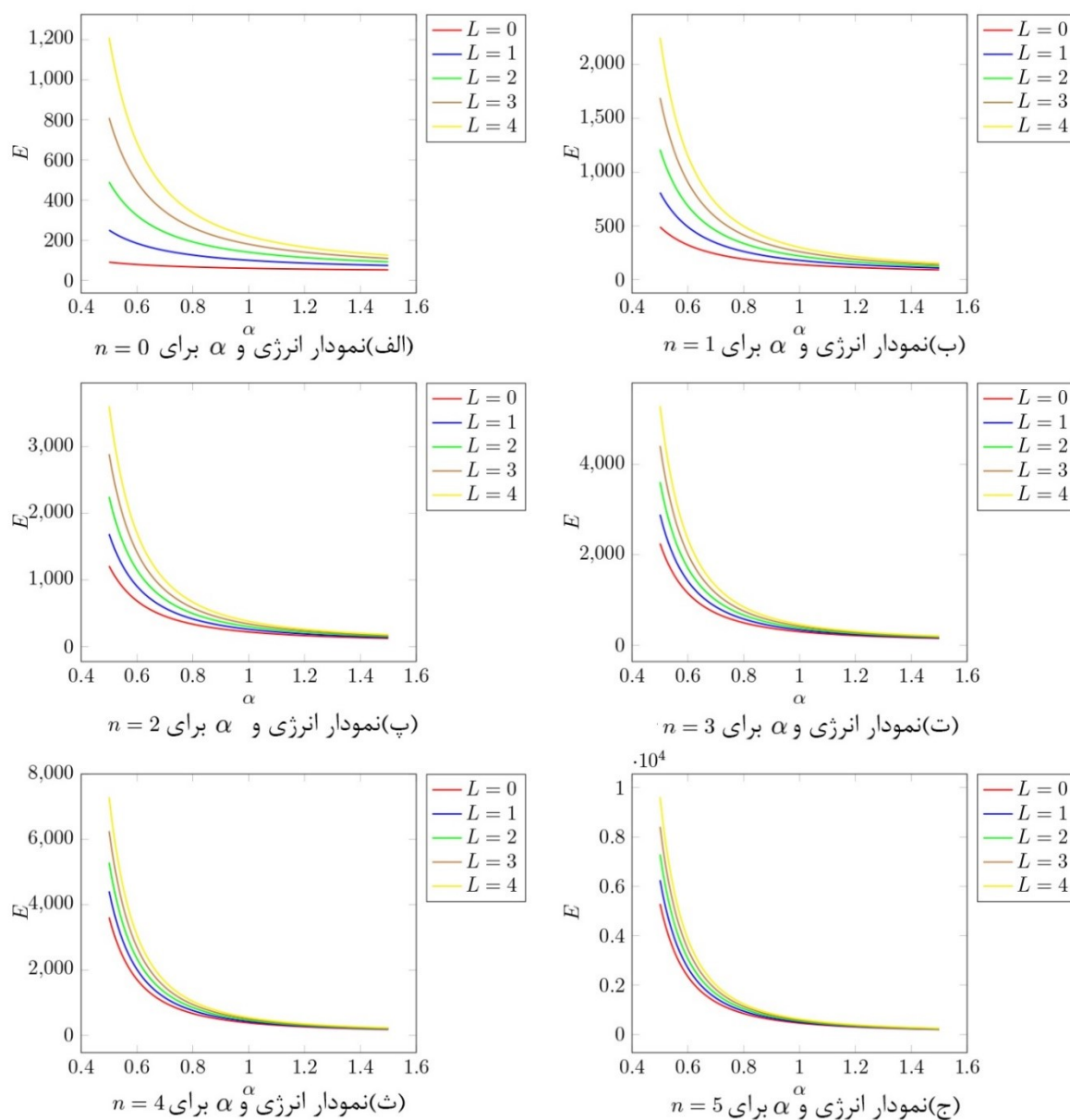
$$E_n = \hbar\omega \left(2n + L + \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (10.4)$$

در جدول ۱.۴ ویژه مقدار انرژی را برای مقادیر مختلف α, n, L به دست آورده ایم.

جدول ۱.۴: ویژه مقادیر انرژی برای حالت های مختلف نوسانگر هماهنگ با مشتقات کسری

$ n, l\rangle$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 1$
$ 0, 0\rangle$	7/59375	2/25	1/78464	1/5
$ 1, 0\rangle$	525/219	12/25	5/98742	3/5
$ 2, 0\rangle$	5032/84	30/25	11/4199	5/5
$ 3, 0\rangle$	23730/5	56/25	17/7864	7/5
$ 4, 0\rangle$	77378/1	90/25	24/9315	9/5
$ 0, 1\rangle$	97/6563	6/25	3/70242	2/5
$ 1, 1\rangle$	1845/28	20/25	8/57355	4/5
$ 2, 1\rangle$	11602/9	42/25	14/4979	6/5
$ 3, 1\rangle$	44730/5	72/25	21/2687	8/5
$ 4, 1\rangle$	127628/0	110/25	28/7635	10/5
$ 0, 2\rangle$	525/219	12/25	5/98742	3/5
$ 1, 2\rangle$	5032/84	30/25	11/4199	5/5
$ 2, 2\rangle$	23730/5	56/25	17/7864	7/5
$ 3, 2\rangle$	77378/1	90/25	24/9315	9/5
$ 4, 2\rangle$	201136/0	132/25	32/7554	11/5
$ 0, 3\rangle$	1845/28	20/25	8/57355	4/5
$ 1, 3\rangle$	11602/9	42/25	14/4979	6/5
$ 2, 3\rangle$	44370/5	72/25	21/2687	8/5
$ 3, 3\rangle$	127628/0	110/25	28/7635	10/5
$ 4, 3\rangle$	305176/0	156/25	36/899	12/5

همچنین در شکل ۱.۴، ویژه مقادیر انرژی بر حسب α برای مقادیر مختلف α, n, L رسم شده است.

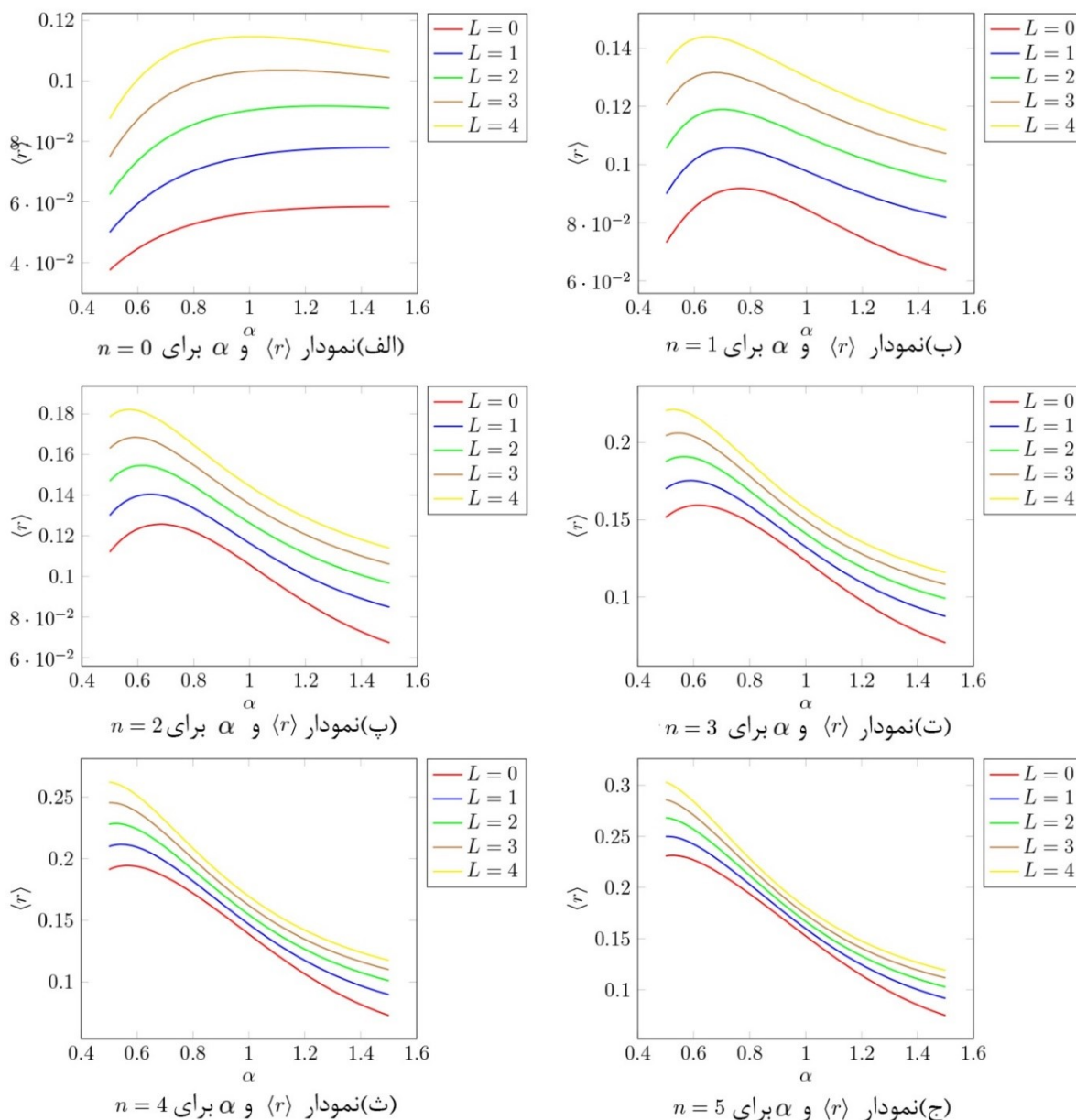


شکل ۱.۴: نمودار انرژی بر حسب α برای نوسانگر کروی با مشتقات کسری

می‌توان مقدار چشم‌داشتی r را به صورت زیر به دست آورد:

$$\langle r \rangle = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} R^{\gamma l + \gamma + \frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{m^{\alpha} \omega^{\alpha}}{\hbar^{\alpha}} R^{\gamma}} \left(L_n^{l + \frac{1}{\gamma}} \left(\frac{m^{\alpha} \omega^{\alpha}}{\hbar^{\alpha}} R^{\gamma} \right) \right)^2 dR \quad (11.4)$$

در شکل ۲.۴، $\langle r \rangle$ بر حسب α برای مقادیر مختلف n, L رسم شده است.

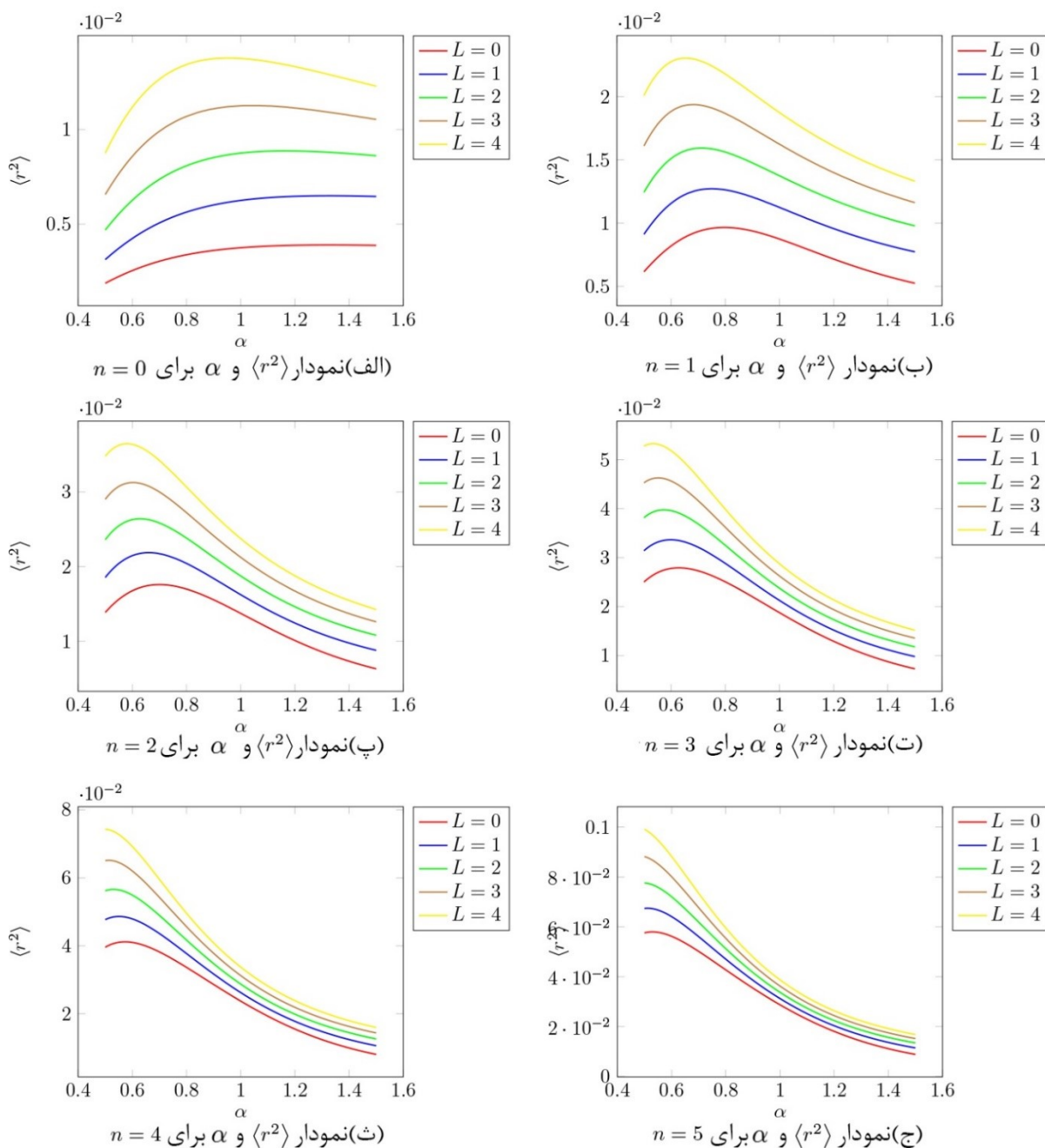


شکل ۲.۴: نمودار $\langle r \rangle$ بر حسب α برای نوسانگر کروی با مشتقات کسری

همچنین مقدار چشم داشتی r^2 نیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\langle r^2 \rangle = \alpha^{\frac{2}{\alpha}} \int_0^{\infty} R^{2l+2+\frac{2}{\alpha}} e^{-\frac{m^{\alpha}\omega^{\alpha}}{\hbar^{\alpha}} R^{\alpha}} \left(L_n^{l+\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{m^{\alpha}\omega^{\alpha}}{\hbar^{\alpha}} R^{\alpha} \right) \right) \right)^2 dR \quad (12.4)$$

در شکل ۳.۴، نمودار $\langle r^2 \rangle$ بر حسب α برای مقادیر مختلف α, n, L رسم شده است.

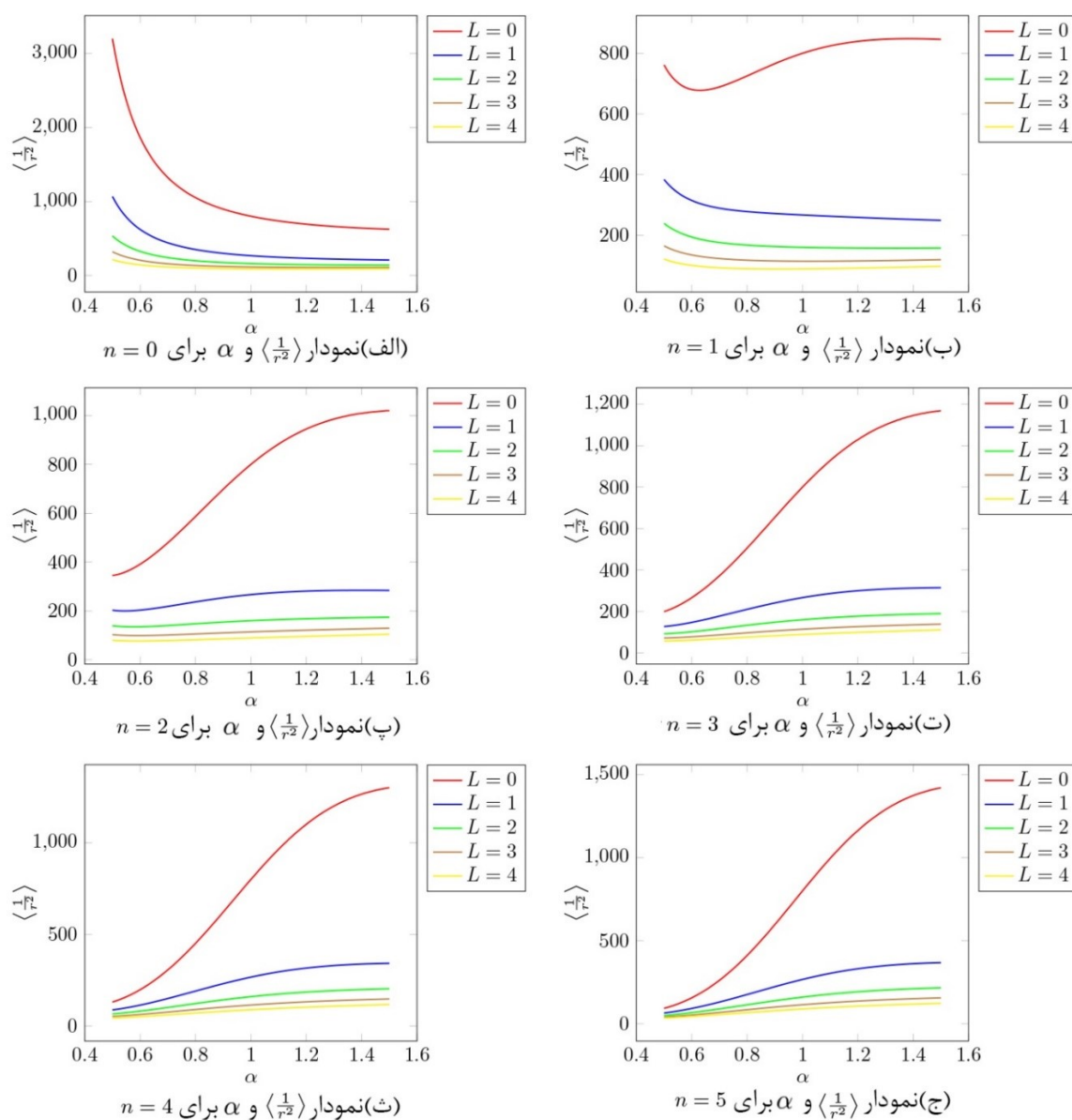


شکل ۳.۴: نمودار $\langle r^2 \rangle$ بر حسب α برای نوسانگر کروی با مشتقات کسری

همچنین مقدار چشم‌داشتی $\frac{1}{r^2}$ نیز به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \alpha^{-\frac{2}{\alpha}} \int_0^{\infty} R^{2l+2-\frac{2}{\alpha}} e^{-\frac{m^{\alpha}\omega^{\alpha}}{\hbar^{\alpha}} R^{\alpha}} \left(L_n^{l+\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{m^{\alpha}\omega^{\alpha}}{\hbar^{\alpha}} R^{\alpha} \right) \right) \right)^2 dR \quad (13.4)$$

در شکل ۴.۴ نمودار $\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle$ بر حسب α رسم شده‌است.

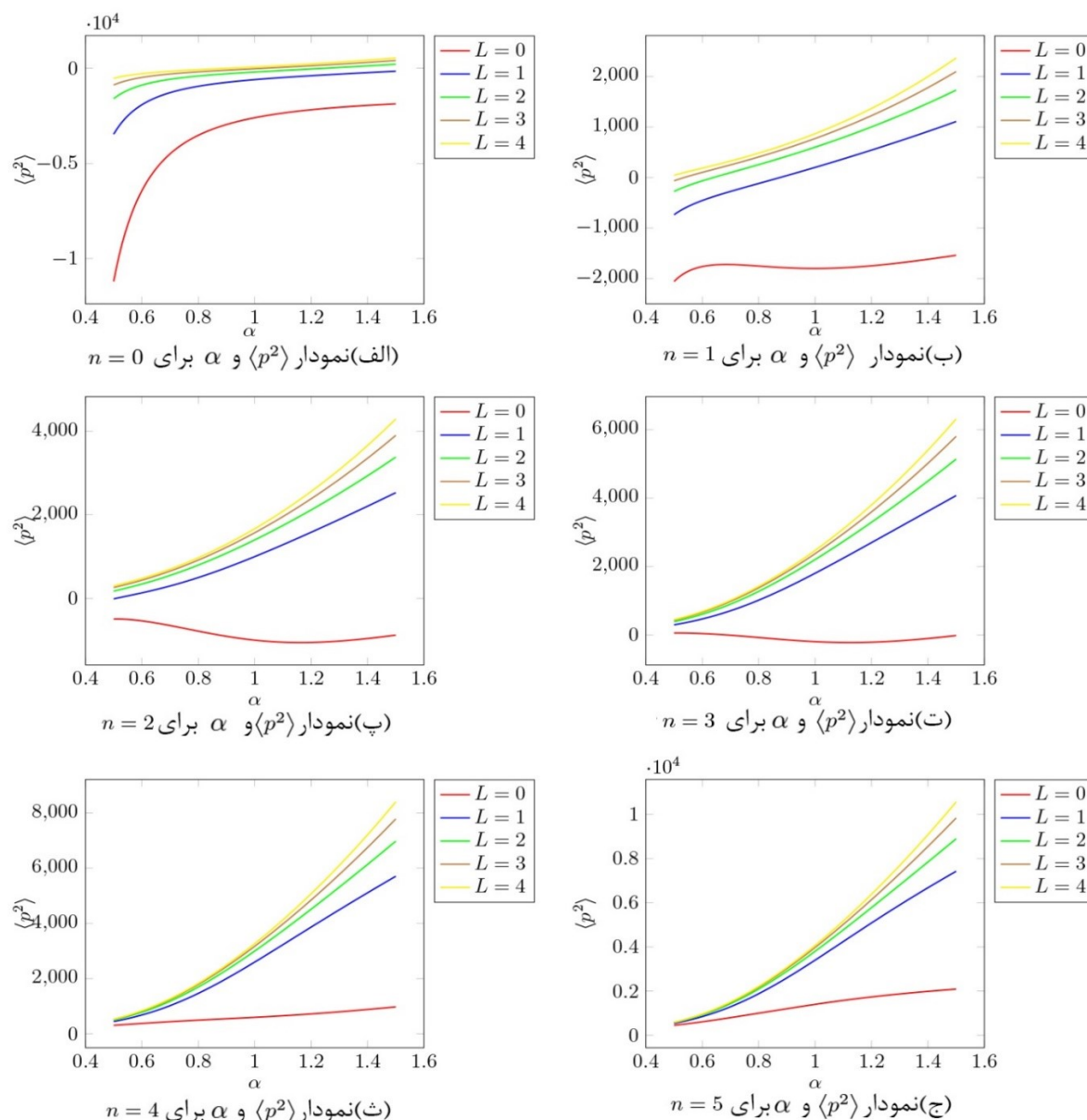


شکل ۴.۴: نمودار $\langle \frac{1}{r^2} \rangle$ بر حسب α برای نوسانگر کروی با مشتقات کسری

در نهایت مقدار چشم داشتی p_r^2 نیز به صورت رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\langle p_r^2 \rangle = -\hbar^2 \alpha \int_0^\infty (R)^l e^{-\frac{m^\alpha \omega^\alpha}{\hbar^\alpha} R^\alpha} L_n^{l+\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{m^\alpha \omega^\alpha}{\hbar^\alpha} R^\alpha \right) \frac{\partial^2}{\partial R^\alpha} \left[R^{l+\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{m^\alpha \omega^\alpha}{\hbar^\alpha} R^\alpha} L_n^{l+\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{m^\alpha \omega^\alpha}{\hbar^\alpha} R^\alpha \right) \right] dR \quad (14.4)$$

در شکل ۵.۴ نمودار $\langle p_r^2 \rangle$ بر حسب α رسم شده است.



شکل ۵.۴: نمودار $\langle p_r^2 \rangle$ بر حسب α برای نوسانگر کروی با مشتقات کسری

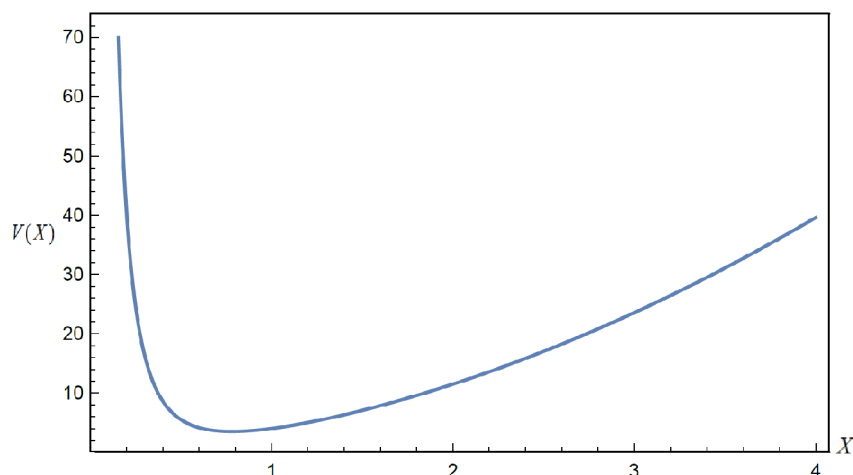
۲.۱.۴ حل معادله شرودینگر با مشتقات کسری برای پتانسیل کلین-بیک

پتانسیل کلین-بیک^۱ به صورت زیر تعریف می‌شود: [۲۲]

$$V(X) = \alpha' X^{\gamma} + \beta' X - \frac{\gamma'}{X} + \frac{\eta'}{X^2} \quad (15.4)$$

¹Killingbeck potential

در شکل ۶.۴، نمودار پتانسیل کلین- بیک برحسب X رسم شده است:



شکل ۶.۴: نمودار پتانسیل کلین- بیک برحسب X

در اینجا معادله شرودینگر کسری مستقل از زمان را به صورت زیر در نظر گرفته و پتانسیل مورد نظر را در آن جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^{\gamma\alpha}}{\sqrt{m^\alpha}} \frac{d^\gamma}{dX^\gamma} + V(X) \right] U(X) &= E^\alpha U(X) \\ \left[-\frac{\hbar^{\gamma\alpha}}{\sqrt{m^\alpha}} \frac{d^\gamma}{dX^\gamma} + \left(\alpha' X^\gamma + \beta' X - \frac{\gamma'}{X} + \frac{\eta'}{X^\gamma} \right) \right] U(X) &= E^\alpha U(X) \end{aligned} \quad (16.4)$$

اگر $U(X) = X^A e^{-BX} e^{-CX^\gamma} f(X)$ را در نظر بگیریم معادله (۱۶.۴) را به صورت زیر به دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} f''(X) + \left\{ -4CX - 2B + \frac{2A}{X} \right\} f'(X) \\ + \left\{ B^2 - 2C - 4AC + \frac{2E^\alpha m^\alpha}{\hbar^{\gamma\alpha}} + \frac{-2AB + \frac{2\gamma' m^\alpha}{\hbar^{\gamma\alpha}}}{X} \right\} f(X) = 0 \end{aligned} \quad (17.4)$$

از تغییرمتغیر $s = \sqrt{2C}X$ استفاده می کنیم و رابطه بالا را به صورت ساده زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{d^\gamma f(s)}{ds^\gamma} + \left(-2s - \frac{\sqrt{2}B}{\sqrt{C}} + \frac{2A}{s} \right) \frac{df(s)}{ds} + \\ \left(\frac{B^2 - 2C - 4AC + \frac{2E^\alpha m^\alpha}{\hbar^{\gamma\alpha}}}{2C} + \frac{1}{\sqrt{2C}} \frac{-AB + \frac{2\gamma' m^\alpha}{\hbar^{\gamma\alpha}}}{s} \right) f(X) = 0 \end{aligned} \quad (18.4)$$

که در اینجا

$$C = \pm \frac{\sqrt{\alpha' m^\alpha}}{\sqrt{2} \hbar^\alpha} \quad B = \pm \frac{\beta' \sqrt{m^\alpha}}{\sqrt{2} \alpha' \hbar^\alpha} \quad A = \frac{\hbar^{\gamma\alpha} \pm \sqrt{\Lambda \eta' m^\alpha \hbar^{\gamma\alpha} + \hbar^{4\alpha}}}{2 \hbar^{\gamma\alpha}} \quad (19.4)$$

که با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$C = \frac{\sqrt{\alpha' m^\alpha}}{\sqrt{2} \hbar^\alpha} \quad B = \frac{\beta' \sqrt{m^\alpha}}{\sqrt{2} \alpha' \hbar^\alpha} \quad A = \frac{\hbar^{\gamma\alpha} + \sqrt{\Lambda \eta' m^\alpha \hbar^{\gamma\alpha} + \hbar^{4\alpha}}}{2 \hbar^{\gamma\alpha}} \quad (20.4)$$

۴۴ معادله شرودینگر برای برخی پتانسیل‌های خاص با استفاده از روش کسر انطباقی

اکنون با استفاده از معادله هیون^۲ به صورت زیر و مقایسه آن با رابطه (۱۸.۴) ، a, b, c و d به دست می‌آید:

$$H''(z) + \left(-2z - b + \frac{1+a}{z}\right) H'(z) + \left(-2 - a + c + \frac{-b(a+1) - \frac{d}{\gamma}}{z}\right) H(z) = 0 \quad (21.4)$$

$$a = 2A - 1 \quad (22.4)$$

$$b = \frac{B}{\sqrt{2C}} \quad (23.4)$$

$$c = \frac{B^2 - 2C - 4AC + \frac{2E\alpha}{m^{\alpha} h^{\alpha}}}{2C} + 2A + 1 \quad (24.4)$$

$$d = \frac{-4\gamma m^{\alpha}}{h^{\alpha} \sqrt{2C}} \quad (25.4)$$

همچنین می‌توانیم $D = \frac{-b(a+1)}{\gamma} - \frac{d}{\gamma}$ را در نظر بگیریم و از طریق روش سری‌ها به صورت زیر معادله را حل می‌کنیم:

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \quad H'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n s^{n-1} \quad H''(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n s^{n-2} \quad (26.4)$$

به عبارت دیگر معادله (۲۱.۴) را می‌توانیم به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} & [(1+a)c_1 + Dc_0]z^{-1} + [2c_1 - bc_1 + (1+a)2c_1 + (-2-a+c)c_0 + Dc_1] \\ & \times \sum_{N=1}^{\infty} [(N+2)(N+1)c_N + 2 - 2Nc_N - b(N+1)c_N + 1 + (1+a)(N+2)c_N \\ & + 2(-2-a+c)c_N + Dc_{N+1}]z^N = 0 \end{aligned}$$

بنابراین ما روابط بازگشتی را برای ضرایب سری‌ها به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{D}{(1+a)}c_0 \\ c_1 &= \frac{(2+a-c)c_0 + (b-D)c_1}{(a+2)^2} \quad (28.4) \\ c_{n+1} &= \frac{(2n+a-c)c_n + (-D+bn)c_n}{(n+1)(a+n+1)} \quad n = 2, 3, 4, \dots, +1 \end{aligned}$$

و در نهایت تابع موج را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$U(X) = X^A e^{-BX} e^{-CX^{\gamma}} H(\sqrt{2C}X) \quad (29.4)$$

که در آن

$$2n + a - c = 0 \quad (30.4)$$

$$-D + bn = 0 \quad (31.4)$$

²Heun equation

۳.۱.۴ حل معادله شرودینگر با مشتقات کسری برای پتانسیل هایپربولیک

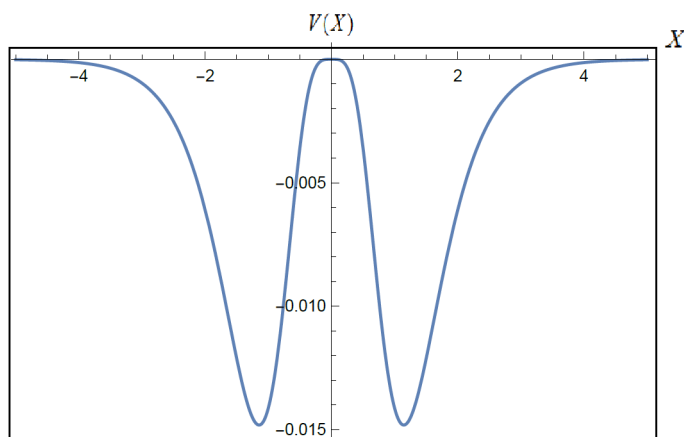
پتانسیل هایپربولیک^۳ زیر را در نظر می‌گیریم که توسط دو پارامتر فیزیکی V_0 و δ تعریف می‌شود. همچنین عمق و پهنا ی پتانسیل با دو پارامتر $q = -2, 0, 2, 4, 6$ و $p = -2, 0, \dots, q$ تعریف می‌شوند:

$$V(X) = -V_0 \frac{\sinh^p(\delta X)}{\cosh^q(\delta X)} \quad (32.4)$$

اگر دو مقدار خوش رفتار $(p, q) = (6, 4)$ را برای پتانسیل بالا در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$V(X) = -V_0 \frac{\sinh^6(\delta X)}{\cosh^4(\delta X)} \quad (33.4)$$

در شکل ۷.۴، نمودار پتانسیل هایپربولیک (۳۳.۴) بر حسب X رسم شده است:



شکل ۷.۴: نمودار پتانسیل کلین-بیک بر حسب X

با جایگذاری رابطه (۳۳.۴) در رابطه معادله شرودینگر کسری منطبق شده مستقل از زمان خواهیم داشت:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\varepsilon}{\delta^2} + \frac{\xi \sinh^4(z)}{\delta^2 \cosh^6(z)} \right] U(z) = 0 \quad (34.4)$$

که در اینجا $\varepsilon = \frac{\gamma m^\alpha E^\alpha}{\hbar^{\gamma \alpha}}$ ، $\xi = \frac{\gamma m^\alpha V_0}{\hbar^{\gamma \alpha}}$ و $\delta X = z$ می‌باشد. به مجرد ساختن تغییر متغیر $s = \text{sech}^2 z$ در محدوده $-\infty < X < \infty$ و $0 < s < 1$ به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$s^2(1-s) \frac{d^2}{ds^2} \Psi(s) + s \left(1 - \frac{3}{2}s \right) \frac{d}{ds} \Psi(s) + \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{\delta^2} + \frac{\xi}{\delta^2} s(1-s)^2 \right) \Psi(s) = 0 \quad (35.4)$$

³Hyperbolic potetial

اگر فرض کنیم که $\Psi(s) = e^{(\frac{\omega}{\delta})s} f(s)$ و آن را در رابطه (۳۵.۴) جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$s^2(1-s) \frac{d^2}{ds^2} f(s) + \left(\omega s^2(1-s) + s(1 - \frac{\gamma}{\delta} s) \right) \frac{d}{ds} f(s) + \left(s^2(1+s) \frac{\omega^2}{\delta^2} + \frac{\omega}{\delta} s(1 - \frac{\gamma}{\delta} s) + \frac{\omega^2}{\delta^2} s(1-s)^2 - \frac{\beta^2}{\delta^2} \right) f(s) = 0 \quad (36.4)$$

با در نظر گرفتن $f(s) = s^{\frac{\beta}{\delta}} y(s)$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2}{ds^2} y(s) + \left(\omega + \frac{\beta+1}{s} + \frac{\gamma+1}{s-1} \right) \frac{d}{ds} y(s) + \left(\frac{\lambda}{s} + \frac{\nu}{s-1} \right) y(s) = 0 \quad (37.4)$$

که در اینجا

$$\omega = -\frac{\sqrt{\xi}}{\delta} \quad \beta = -i\frac{\sqrt{\xi}}{\delta} \quad \gamma = -\frac{1}{\delta} \quad (38.4)$$

$$\lambda = \frac{1}{\delta}(\omega(\omega+2) + 2\omega\beta - \beta(\beta+1)) \quad \nu = \frac{1}{\delta}(\omega + \beta(\beta+1))$$

این معادله دیفرانسیل را می‌توانیم از طریق تابع هیون حل کنیم.

$$H_C(\omega, \beta, \gamma, \tau, \eta, s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\omega, \beta, \gamma, \tau, \eta, s) s^n \quad |s| < 1 \quad (39.4)$$

بنابراین با انتخاب

$$y(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \quad y'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n s^{n-1} \quad y''(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n s^{n-2} \quad (40.4)$$

معادله (۳۷.۴) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$(41.4)$$

$$s(s-1) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n s^{n-2} + \omega s(s-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^{n-1} + (\beta+1)(s-1) \sum_{n=0}^{\infty} n c_n s^{n-1} + (\gamma+1)s \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^{n-1} + \mu(s-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n + \nu s \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n = 0$$

با محاسبات بیشتر خواهیم داشت:

$$(42.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} [n(n+1)c_{n+1} - (n+2)(n+1)c_{n+1} + \omega n c_n - \omega(n+1)c_{n+1}(\beta+1)(n+1)c_{n+1} - (\beta+1)(n+1)c_{n+2} + (\gamma+1)(n+1)c_{n+1} \lambda c_{n+1} + \nu c_n] - (\beta+1)c_1 - \lambda c_0 = 0$$

که در اینجا

$$\tau = \lambda + \nu - \frac{\omega}{\delta}(\beta + \gamma + 2) = \frac{1}{\delta} \frac{\xi}{\delta^2} \quad (43.4)$$

$$\eta = \frac{\omega}{\delta}(\beta + 1) - \mu - \frac{1}{\delta}(\beta + \gamma + \beta\gamma) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{(\xi + \xi)}{\delta^2} \right)$$

همچنین ضریب c_n ، سه رابطه‌ی بازگشتی را نتیجه می‌دهد:

$$A_n c_n = B_n c_{n-1} + D_n c_{n-2} \quad c_{-1} = 0 \quad c_0 = 1 \quad (44.4)$$

با تغییرمتغیر $n \rightarrow n - 2$ خواهیم داشت:

$$A_n = 1 + \frac{\beta}{n} \quad (45.4)$$

$$B_n = 1 + \frac{1}{n}(\beta + \gamma - \omega - 1) + \frac{1}{n^2} \left\{ \eta - \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \omega) - \frac{\omega\beta}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} \right\} \quad (46.4)$$

$$D_n = \frac{\alpha}{n^2} \left(\frac{\lambda}{\omega} + \frac{\beta + \gamma}{2} + n - 1 \right) \quad (47.4)$$

با انجام محاسبات تابع موج معادله شرودینگررابطه (۳۵.۴) به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} \Psi(x)_s &= \text{sech}^\beta \left(\delta \frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \exp \left[\frac{\omega}{2} \text{sech}^2 \left(\delta \frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \right] H_c \left(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \eta, \text{sech}^2 \left(\delta \frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \right) \\ \Psi(x)_a &= \tanh \left(\delta \frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \left(1 - \tanh^2 \left(\delta \frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \right)^{\frac{\beta}{2}} \exp \left[-\frac{\omega}{2} \tanh^2 \left(\delta \frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \right] \\ &\quad \times H_c \left(-\omega, -\gamma, \beta, -\lambda, \eta, \frac{\omega}{2}, \tanh^2 \left(\delta \frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \right) \end{aligned} \quad (48.4)$$

۲.۴ حل معادله شرودینگرکسری با روش انطباقی برای سیستم دو ذره ای

برای دو ذره با جرم‌های یکسان معادله شرودینگر کسری به صورت زیر است:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \alpha}{2m^\alpha} \left(\frac{d^2}{dX_1^2} + \frac{d^2}{dX_2^2} \right) + V(X_1, X_2) \right] U(X_1, X_2) = E^\alpha U(X_1, X_2) \quad (49.4)$$

که در اینجا $X_1 = \frac{x_1^\alpha}{\alpha}$; $X_2 = \frac{x_2^\alpha}{\alpha}$ همان X_2 و X_1 هستند. اکنون می‌توانیم از تعاریف زیر استفاده کنیم:

$$X_r = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \quad X_c = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad (50.4)$$

با نوشتن X_1 و X_2 را برحسب X_c و X_r خواهیم داشت:

$$X_1 = X_c + \frac{\sqrt{2}}{2} X_r \quad X_2 = X_c - \frac{\sqrt{2}}{2} X_r \quad (51.4)$$

با جایگذاری رابطه (۵۱.۴) در رابطه (۴۹.۴) خواهیم داشت:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \alpha}{2m^\alpha} \left(\frac{d^2}{dx_c^2} + 2 \frac{d^2}{dx_r^2} \right) + V(X_c, X_r) \right] U(X_c, X_r) = E^\alpha U(X_c, X_r) \quad (52.4)$$

اکنون می‌توانیم معادله (۵۲.۴) را به دو بخش وابسته به X_c و X_r تقسیم کنیم:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \alpha}{m^\alpha} \frac{d^2}{dX_r^2} + V(X_r) \right] U(X_r) = E_r^\alpha U(X_r) \quad (53.4)$$

$$-\frac{\hbar^2 \alpha}{2m^\alpha} \frac{d^2}{dX_c^2} U(X_c) = E_c^\alpha U(X_c) \quad (54.4)$$

اکنون به عنوان مثال، به حل معادله شرودینگر کسری در حضور پتانسیل‌های مختلف می‌پردازیم:

۱.۲.۴ پتانسیل نوسانگر هماهنگ کسری در سیستم دوزره ای

اگر فرض کنیم که:

$$V(X_c, X_r) = \frac{1}{\alpha^2} k |X_1 - X_2|^2 \quad (55.4)$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$V(X_r) = k X_r^2 \quad (56.4)$$

با جایگذاری رابطه (55.4) در رابطه (53.4) و استفاده از مختصات کروی داریم:

$$-\frac{\hbar^{\nu\alpha}}{2m^\alpha} \left[\frac{1}{X_r^\nu} \frac{\partial}{\partial X_r} \left(X_r^\nu \frac{\partial U(X_r)}{\partial X_r} \right) + \frac{1}{X_r^\nu \sin^\nu \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^\nu \theta \frac{\partial U(X_r)}{\partial X_r} \right) + \frac{1}{X_r^\nu \sin^{2\nu} \theta} \frac{\partial U(X_r)}{\partial \varphi^2} \right] + k X_r^\nu U(X_r) = E_r^\alpha U(X_r) \quad (57.4)$$

با ساده‌سازی و استفاده از تغییرمتغیر $X_r^\nu = s$ خواهیم داشت:

$$\left\{ \frac{d^2}{ds^2} + \frac{3}{2s} \frac{d}{ds} + \frac{1}{s^2} \left[-\frac{m^\alpha k}{4\hbar^{\nu\alpha}} s^2 + \frac{m^\alpha E_r^\alpha}{4\hbar^{\nu\alpha}} s - \frac{L(L+1)}{4} \right] \right\} U(X_r) = 0 \quad (58.4)$$

با استفاده از روش نیکوروف-اووارف، تابع موج نوسانگر هماهنگ کسری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U(s) = s^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{\sqrt{m^\alpha k}}{2\hbar^\alpha} s} L_n^{L+\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{m^\alpha k}}{\hbar^\alpha} s \right) \quad (59.4)$$

می‌توانیم رابطه (59.4) را برحسب X_r نیز بنویسیم:

$$U(X_r) = \left(\frac{x_r^{\nu\alpha}}{\alpha^2} \right)^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{\sqrt{m^\alpha k}}{2\hbar^\alpha} \frac{x_r^{\nu\alpha}}{\alpha^2}} L_n^{L+\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{m^\alpha k}}{\hbar^\alpha} \frac{x_r^{\nu\alpha}}{\alpha^2} \right) \quad (60.4)$$

حال به حل معادله دیفرانسیل ذره آزاد در رابطه (54.4) می‌پردازیم.

$$-\frac{\hbar^{\nu\alpha}}{2m^\alpha} \frac{d^2}{dX_c^2} U(X_c) = E_c^\alpha U(X_c) \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (61.4)$$

با انجام اندکی از محاسبات تابع موج برحسب X_c را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$U(X_c) = e^{ik \frac{x_c^\alpha}{\alpha}} \quad (62.4)$$

که در اینجا $k^2 = \frac{2m^\alpha E_c^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}}$ می‌باشد. در نهایت تابع موج کل برابر است با:

$$U(X) = U(X_c)U(X_r) = e^{ikX_c} \left(\frac{x_r^{\nu\alpha}}{\alpha^2} \right)^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{\sqrt{m^\alpha k}}{2\hbar^\alpha} \frac{x_r^{\nu\alpha}}{\alpha^2}} L_n^{L+\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{m^\alpha k}}{\hbar^\alpha} \frac{x_r^{\nu\alpha}}{\alpha^2} \right) \quad (63.4)$$

$$U(x) = e^{ik \frac{x_c^\alpha}{\alpha}} \left(\frac{x_r^{\nu\alpha}}{\alpha^2} \right)^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{\sqrt{m^\alpha k}}{2\hbar^\alpha} \frac{x_r^{\nu\alpha}}{\alpha^2}} L_n^{L+\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{m^\alpha k}}{\hbar^\alpha} \frac{x_r^{\nu\alpha}}{\alpha^2} \right) \quad (64.4)$$

۲.۲.۴ پتانسیل کراتزر در سیستم دو ذره ای

فرض می‌کنیم پتانسیل کراتزر^۴ به صورت زیر است:

$$V(X_1, X_2) = \frac{a}{|X_1 - X_2|} + \frac{b}{|X_1 - X_2|^2} \quad (۶۵.۴)$$

می‌توانیم پتانسیل را برحسب X_r به صورت رابطه (۶۶.۴) بنویسیم:

$$V(X_r) = \frac{a}{\sqrt{2}X_r} + \frac{b}{2X_r^2} \quad (۶۶.۴)$$

با جایگذاری رابطه (۶۶.۴) در رابطه (۵۳.۴) و استفاده از مختصات کروی رابطه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^{\nu\alpha}}{\nu m^\alpha} \left[\frac{1}{X_r^\nu} \frac{\partial}{\partial X_r} \left(X_r^\nu \frac{\partial U(X_r)}{\partial X_r} \right) + \frac{1}{X_r^\nu \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U(X_r)}{\partial X_r} \right) + \frac{1}{X_r^\nu \sin^2 \theta} \frac{\partial U(X_r)}{\partial \varphi^2} \right] \\ & + \left(\frac{a}{\sqrt{2}X_r} + \frac{b}{2X_r^2} \right) U(X_r) = E_r^\alpha U(X_r) \end{aligned} \quad (۶۷.۴)$$

با انجام محاسبات و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$(۶۸.۴)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dX_r^2} + \frac{2}{X_r} \frac{d}{dX_r} + \frac{1}{X_r^2} \left[\frac{m^\alpha E_r^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} X_r^2 - \frac{am^\alpha}{\sqrt{2}\hbar^{\nu\alpha}} X_r - \left(\frac{bm^\alpha}{2\hbar^{\nu\alpha}} + L(L+1) \right) \right] \right\} U(X_r) = 0$$

با مقایسه رابطه (۶۸.۴) با معادله دیفرانسیل در روش نیکوروف-اووارف تابع موج را برحسب X_r به دست می‌آوریم:

$$(۶۹.۴)$$

$$U(X_r) = \left(\frac{x_r^\alpha}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{\nu} + \sqrt{\frac{bm^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} + (L+\frac{1}{\nu})^2}} e^{-\sqrt{-\frac{m^\alpha E_r^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} \frac{x_r^\alpha}{\alpha}} L_n^{\sqrt{\frac{bm^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} + (L+\frac{1}{\nu})^2}} \left(2\sqrt{-\frac{m^\alpha E_r^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} \frac{x_r^\alpha}{\alpha}} \right)$$

همچنین برای ذره‌ی آزاد نیز تابع موج بر حسب X_c به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U(X_c) = e^{ik \frac{x_c^\alpha}{\alpha}} \quad (۷۰.۴)$$

و در نهایت تابع موج کل برابر خواهد شد با:

$$(۷۱.۴)$$

$$\begin{aligned} U(X) &= U(X_c)U(X_r) \\ &= e^{ikX_c} (X_r) \left(\frac{x_r^\alpha}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{\nu} + \sqrt{\frac{bm^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} + (L+\frac{1}{\nu})^2}} e^{-\sqrt{-\frac{m^\alpha E_r^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} X_r} L_n^{\sqrt{\frac{bm^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} + (L+\frac{1}{\nu})^2}} \left(2\sqrt{-\frac{m^\alpha E_r^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} X_r} \right) \end{aligned} \quad (۷۲.۴)$$

$$U(x) = e^{ik \frac{x_c^\alpha}{\alpha}} \left(\frac{x_r^\alpha}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{\nu} + \sqrt{\frac{bm^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} + (L+\frac{1}{\nu})^2}} e^{-\sqrt{-\frac{m^\alpha E_r^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} \frac{x_r^\alpha}{\alpha}} L_n^{\sqrt{\frac{bm^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} + (L+\frac{1}{\nu})^2}} \left(2\sqrt{-\frac{m^\alpha E_r^\alpha}{\hbar^{\nu\alpha}} \frac{x_r^\alpha}{\alpha}} \right)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود $U(x)$ ، تابعی از توابع لاگر می‌باشد.

⁴Crozzier potential

فصل ۵

معادله دیراک با مشتقات کسری

۱.۵ حل معادله دیراک با مشتقات کسری

معادله دیراک با مشتقات کسری^۱ به صورت زیر تعریف می شود: [۲۴، ۲۵]

$$[\gamma^\mu \partial_\mu^\alpha + m^\alpha] \Psi(x, t) = 0 \quad (1.5)$$

در معادله (۱.۵)، بخش زمانی و بخش فضایی را جدا کرده و طرفین را در γ^4 ضرب می کنیم. می دانیم که $(\gamma^4)^2 = 1$ می باشد، پس برای معادله دیراک کسری خواهیم داشت:

$$[(\gamma^4)^2 \partial_4^\alpha + \gamma^4 \gamma^k \partial_k^\alpha + \gamma^4 m^\alpha] \Psi(x, t) = 0 \quad (2.5)$$

که γ^4 و γ^k را صریحاً به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

¹Fractional Dirac equation

و در اینجا I یک ماتریس 2×2 واحد می باشد و σ_k ها ماتریس های 2×2 پائولی هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

با فرض اینکه روش جداسازی متغیرها را می توانیم به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\Psi(x, t) = F(t)U(x) \quad (6.5)$$

با جداسازی بخش فضایی و بخش زمانی فرض می کنیم که هر دو معادل با E هستند، پس به دست می آوریم که:

$$(\partial_t^\alpha)F(t) = -E^\alpha F(t) \quad \partial_x = x^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \quad (7.5)$$

بنابراین، معادله (۲.۵) را می توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\left[-E^\alpha I + \gamma^4 \gamma^1 x^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^4 m^\alpha \right] U(x) = 0 \quad (8.5)$$

با به کار بردن ماتریس ها در رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} -E^\alpha + m^\alpha & 0 & 0 & -ix^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -E^\alpha + m^\alpha & -ix^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -ix^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} & -E^\alpha - m^\alpha & 0 \\ -ix^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -E^\alpha - m^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (9.5)$$

بنابراین:

$$\begin{pmatrix} (-E^\alpha + m^\alpha)U_1 - ix^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} U_4 \\ (-E^\alpha + m^\alpha)U_2 - ix^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} U_3 \\ (-ix^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x})U_2 - (E^\alpha + m^\alpha)U_3 \\ (-ix^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x})U_1 - (E^\alpha + m^\alpha)U_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} (a') \\ (b') \\ (c') \\ (d') \end{matrix} \quad (10.5)$$

با مقایسه رابطه (a') با (b') و (c') با (d') می توانیم نتیجه بگیریم که $U_1 = U_2; U_3 = U_4$ می باشد. بنابراین، ما از معادله (c') استفاده می کنیم و به جای U_3 و U_4 ، U_2 و U_1 را به کار می بریم. بنابراین U_4 عبارتست از:

$$U_4 = \frac{-ix^{1-\alpha}}{(E^\alpha + m^\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} U_1 \quad (11.5)$$

اکنون رابطه (۱۱.۵) را در (a') جایگذاری می‌کنیم:

$$\left[-E^{\alpha}I + \gamma^{\epsilon} \gamma^{\lambda} x^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^{\epsilon} m^{\alpha}\right] U(x) = 0 \quad (12.5)$$

حال از تغییرمتغیر $X = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}$ استفاده می‌کنیم و با جایگذاری آن در رابطه (۱۲.۵) خواهیم داشت:

$$\left[\frac{\partial^{\alpha}}{\partial X^{\alpha}} + (E^{\alpha} - m^{\alpha})\right] U_1(X) = 0 \quad (13.5)$$

اگر فرض کنیم که $m^{\alpha} \rightarrow m^{\alpha} + s^{\alpha}$ و $s^{\alpha} = aX + \frac{b}{X}$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\left[\frac{\partial^{\alpha}}{\partial X^{\alpha}} + E^{\alpha} - m^{\alpha} - a^{\alpha} X^{\alpha} - \frac{b^{\alpha}}{X^{\alpha}} - \alpha ab - \alpha am^{\alpha} X - \frac{\alpha bm^{\alpha}}{X}\right] U_1(X) = 0 \quad (14.5)$$

همچنین اگر فرض کنیم که $U_1(X) = X^A e^{-X(B+DX)} \varphi(X)$ است، معادله دیفرانسیل زیر را خواهیم داشت که شبیه به معادله هیون می‌باشد.

$$\begin{aligned} \varphi''(X) + \left[\frac{\alpha A}{X} - \alpha B - \alpha DX\right] \varphi'(X) + \left[-\frac{1}{X}(\alpha AB + \alpha bm^{\alpha}) - \alpha D(\alpha A + 1) \right. \\ \left. + B^{\alpha} + E^{\alpha} - m^{\alpha} - \alpha ab\right] \varphi(X) = 0 \end{aligned} \quad (15.5)$$

با مقایسه رابطه (۱۵.۵) و تابع هیون نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{1 + \alpha b^{\alpha}}}{\alpha} \\ B &= m^{\alpha} \\ D &= \frac{a}{\alpha} \end{aligned} \quad (16.5)$$

و

$$a = 1 \quad (17.5)$$

همچنین جملات تابع هیون را نیز به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\varphi(X) = H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', X) \quad (18.5)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= \sqrt{1 + \alpha b^{\alpha}} \\ \beta' &= \alpha m^{\alpha} \\ \gamma' &= (\alpha + \sqrt{1 + \alpha b^{\alpha}})(1 - a) + E^{\alpha} - \alpha ab \\ \delta' &= \alpha bm^{\alpha} \end{aligned} \quad (19.5)$$

برای به دست آوردن انرژی از سری‌ها کمک می‌گیریم: (۲۰.۵)

$$U_1(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \quad ; U_1'(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n X^{n-1} \quad ; U_1''(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n X^{n-2}$$

با جایگذاری رابطه (۲۰.۵) در (۱۴.۵) به راحتی به دست می آید که:

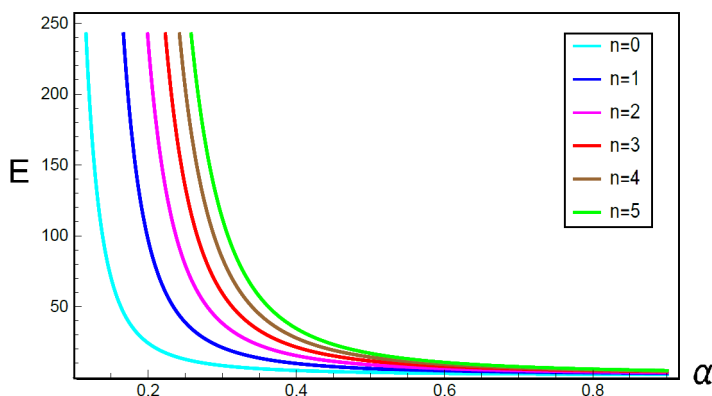
$$\sum_{n=0}^{\infty} \{[(n+2)(n+1) + (n+2)(1+\alpha')]c_{n+2} + [-\beta'(n+1) - \frac{\delta'+(1+\alpha')\beta'}{4}]c_{n+1} + [\gamma' - \alpha' - 2 - 2n]c_n\}X^n = 0 \quad (21.5)$$

با حل معادله دیفرانسیل رابطه (۲۱.۵) می توانیم ویژه مقدار انرژی و ضریب دیگر پتانسیل یعنی b را بیابیم.

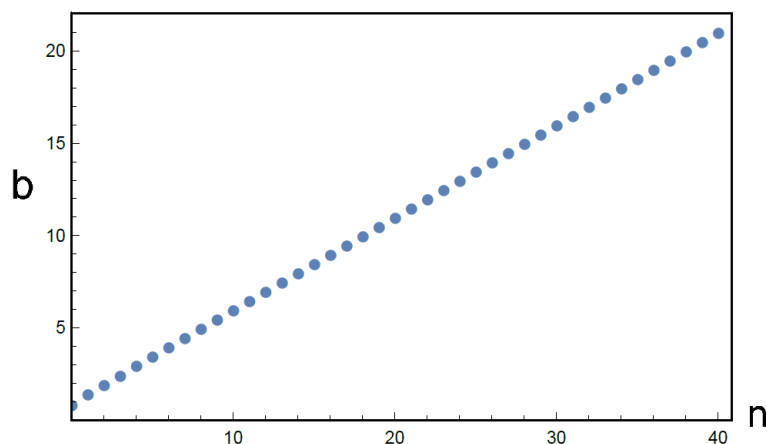
$$E = \left(2n - \left(2 + \sqrt{1 + 4b^2}\right)\right)^{\frac{1}{2\alpha}} \quad (22.5)$$

$$b = \sqrt{\frac{(n+2)^2}{4} - \frac{1}{4}} \quad (23.5)$$

با داشتن a و b ، می توان s^α را بر حسب عدد کوانتومی n نوشت. همچنین می توان نمودار E را بر حسب مقادیر مختلف α و نمودار b را بر حسب مقادیر مختلف n به صورت زیر رسم کرد:



شکل ۱.۵: نمودار انرژی بر حسب مقادیر مختلف α



شکل ۲.۵: نمودار b بر حسب مقادیر مختلف n

حل معادله دیراک با مشتقات کسری ۵۵

همانطور که در نمودار انرژی شکل ۱.۵ مشاهده می شود، با افزایش α تبهگنی در انرژی به وجود می آید.

فصل ۶

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه با استفاده از تعریف جدیدی برای مشتق کسری، ذرات نسبیتی و غیرنسبیتی را در حضور برهم‌کنش‌های متفاوت مورد بررسی قرار دادیم. در ابتدا مفاهیم اولیه مشتق کسری را بیان کردیم و به تعریف اشکال گوناگون آن پرداختیم. سپس کاربردهای مشتق کسری در مکانیک کلاسیک را بررسی کرده و مقدماتی را درباره‌ی مشتقات کسری با روش انطباقی در مکانیک کوانتومی بیان کردیم. ما توانستیم معادله شرودینگر کسری انطباقی را در حضور پتانسیل‌های خاص حل کنیم که از جمله آن‌ها می‌توان به پتانسیل نوسانگرهماهنگ کسری اشاره کرد. با داشتن تابع موج می‌توانیم اطلاعات مفیدی از سیستم تحت بررسی به‌دست بیاوریم، که در اینجا این امر محقق شد و توانستیم از روی توابع موج به‌دست آمده نمودارهای متعددی را رسم کنیم. همچنین برای یک سیستم دوزره‌ای معادله شرودینگر کسری را به‌دست آوردیم و آن را برای چند پتانسیل بررسی کردیم، در آخر نیز به معرفی معادله دیراک با مشتقات کسری و بررسی آن پرداختیم.

مراجع

- [1] I. Podlubny, Fractional differential equations, (San Diego, CA: Academic Press) (1999)
- [2] V. V. Kullish and J. L. Lage, J. Heat Transfer 122, 372 (1999)
- [3] J. D. Gabano and T. Poinot, Phys. Scr. 2009 014015 (2009)
- [4] A. Dzieliński, D. Sierociuk, Fractional order model of beam heating process and its experimental verification (Springer: Netherlands) (2010)
- [5] N. Wiener, Proc. Lond. Math. Soc. 22 454 (1924).
- [6] R. Agarwal, S. Hristova, and D. O'Regan, Fract. Calc. Appl. Anal. 19 290 (2016)
- [7] S. Arshad, V. Lupulescu, and D. O'Regan, Fract. Calc. Appl. Anal. 17, 259 (2014)
- [8] X. Liu, M. Jia, and W. Ge, Adv. Difference Equ. 2013 126 (2013)
- [9] Z. Mansour, Fract. Calc. Appl. Anal. 17 61 (2014)
- [10] D. O'Regan and S. Staněk, Nonlinear Dyn. 71 641 (2013)
- [11] I. Podlubny, Fractional Differential Equations (Academic Press: San Diego) (1999)
- [12] سید میلاد حسینی، دکتر مهدی قوتمند و دکتر حجت احسنی، حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری با روش نیمه تحلیلی، پایان نامه کارشناسی ارشد، شاهرود، ۱۳۹۳.
- [13] R. Herman, Fractional Calculus an Introduction for physicists, Germany, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2011.
- [14] M. Rahimi, Application of Fractional Differential Equation, Mathematical Sciences, Vol. 4, 2010.
- [15] B. Ahmad and J. J. Nieto, Riemann-Liouville fractional differential equations with fractional boundary conditions, Fixed Point Theory, 13(2012), No. 2, 329-336.

-
- [16] S. Z. Ride and A. A. M. Arafa, New method for solving Lineary fractional Differential equations, 2011.
- [17] W. S. Chung, S. Zare and H. Hassanabadi, Some Applications Of Fractional Calculus In Classical Mechanics.
- [18] W. S. Chung, S. Zare and H. Hassanabadi, Dynamics of a particle in a viscoelastic medium with conformable derivative, Int J Theor phys, 2016.
- [19] S. Kazem, Exact solution of some Linear fractional differential equations by Laplace Tranc-form, International Journal Of Nonlinear Science, Vol. 16(2013) No. 1, PP. 3-11.
- [20] W. S. Chung, S. Zare and H. Hassanabadi, On the conformable fractional quantum mechan-ics, 2016.
- [21] S. Zare , H. Hassanabadi, and W. S. Chung, Scattering study of a modified Cusp potential in conformable fractional formalism, commun. Theor. Phys, 67 250, 2017.
- [22] S. Zare , H. Hassanabadi, and W. S. Chung, Investigation of conformable fractional Schrodinger equation in presence of Killingbeck and Hyperbolic potentials, 2016.
- [23] F. B. Adda and J. Cresson, Fractional differential equations and the Schrodinger equation, Applied Mathematics and Computation, Vol. 161, 232-345, 2005.
- [24] S. I. Muslih, O. P. Agrawal and D. Baleanu, A fractional Dirac equation and its solution, J. Phys. A: Math Theor. 43, 2010.
- [25] A. Raspini, Simple solution of the fractional Dirac equation of order , Physca Scripta Vols. 64, 20-22, 2001.

Aabstract

In recent years, the idea of fractional derivative in quantum mechanics can be considered as one of the most creative ideas in physics. Given this idea, the Schrödinger equation can be rewritten in a new form. Such a formulation of quantum mechanics has significant applications in mathematics, physics, and other fields of science.

Mr. Hermann rewrote the collective behavior patterns of the nuclei and could describe the complex behavior of the nuclei by using this formulation. Also he was able to justify different nuclear states by changing the order of the derivative.

There are several definitions for the fractional derivatives, that each of them expresses it in a different way, including the definitions of Riemann-Liouville and Caputo, which can be described as an exact definition of fractional derivative.

Recently, researchers found a model from the fractional derivative model that presents a new definition with an adaptive form and leads to interesting results in this field.

In the thesis, we want to introduce the fractional derivative and as well as to describe the relativistic and non-relativistic systems by using the fractional derivatives in the presence of specific potentials.

Key Words: Fractional derivative, Conformable fractional derivative, Fractional harmonic oscillator.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Physics and Nuclear Engineering

MSc Thesis in: Nuclear Physics

**Investigation of relativistic and
non-relativistic by considering fractional
derivatives**

By: Fateme Satdat Mozaffari

Supervisor

Hassan Hassanabadi

November 2017