به نام خدا

دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رساله دکتری فیزیک هسته‌ای

بررسی طیف انرژی و گذار فاز شکلی در هسته‌های بدون تقارن محوری

نگارنده: لیلا نادری

استاد راهنما:

دکتر حسن حسن آبادی

اردیبهشت ۱۳۹۶

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

گروه فیزیک هسته‌ای

رساله دکتری خانم لیلا نادری

تحت عنوان: بررسی طیف انرژی و گذار فاز شکلی در هسته‌های بدون تقارن محوری

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک رساله دکتری ارزیابی گردید و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:	
نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:	
نام و نام خانوادگی:			
نام و نام خانوادگی:			

به تمام آموزگارانم

از استاد ارجمند، فرهیخته و بزرگوارم جناب آقای دکتر حسن حسن‌آبادی برای راهنمائی‌ها و کمک‌های ارزنده و بی‌دریغ‌شان صمیمانه سپاسگزارم.

تعهد نامه

اینجانب لیلا نادری دانشجوی دوره دکتری رشته فیزیک، گرایش فیزیک هسته‌ای دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه "بررسی طیف انرژی و گذار فاز شکلی در هسته‌های بدون تقارن محوری" تحت راهنمائی دکتر حسن حسن‌آبادی، متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .

در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ اردیبهشت۱۳۹۶

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

ویژگی‌های هسته‌های تغییر شکل یافته‌ی بدون تقارن محوری در قالب مدل بور که هسته‌های زوج-زوج و تغییر شکل یافته‌ی بیضی‌گون را توصیف می کند، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. توابع پتانسیل مناسبی برای بررسی ویژگی‌های هسته‌های بدون تقارن محوری معرفی شده‌اند. حل‌های معادله‌ی ویژه مقداری هامیلتونی بور با انتخاب پتانسیل مناسب برای مطالعه و بررسی ویژگی‌های این هسته‌ها ارائه شده‌اند. این حل‌ها برای نقاط بحرانی‌ای که در آن‌ها انتظار می‌رود گذار فاز شکلی در هسته‌های بدون تقارن محوری رخ دهد، انجام شده‌اند. مشاهده‌پذیرهای توصیف کننده‌ی این سیستم-ها، طیف انرژی و آهنگ‌های گذار چهارقطبی الکتریکی، به دست آمده‌اند و با مقادیر تئوری و تجربی سایر مراجع مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. گذار فاز شکلی در این هسته‌ها مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

واژه های کلیدی: مدل هسته‌ای جمعی؛ مدل بور؛ هامیلتونی بور؛ هسته‌های بدون تقارن محوری؛ شدت گذار چهار قطبی الکتریکی؛ نقاط بحرانی؛ گذار فاز شکلی.

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. L. Naderi and H. Hassanabadi, "Bohr Hamiltonian and the Energy Spectra of the Triaxial nuclei", **Eur. J. Phys. Plus** 131 (2016) 5.
2. L. Naderi and H. Hassanabadi, "Bohr Hamiltonian with Eckart Potential for Triaxial nuclei", **Eur. J. Phys. Plus** 131 (2016) 133.
3. L. Naderi, H. Hassanabadi and H. Sobhani, "Bohr Hamiltonian with Time-dependent Potential", **Int. J. Mod. Phys. E** 25 (2016) 1650029.
4. L. Naderi and H. Hassanabadi, "Bohr Hamiltonian with Hyperbolic Pöschl-Teller Potential for Triaxial nuclei", **Eur. J. Phys. Plus** 132 (2017) 171.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جداول

مقدمه

زیربنای مطالعات ساختار هسته‌ای، در حال حاضر و در آینده، دو سوال زیر است:

- چگونه هسته‌های پیچیده از سازنده‌های ساده‌ی خود به وجود می‌آیند؟

این یک رویکرد فمتوسکوپیک[1] بر پایه‌ی نوکلئون‌ها و برهم کنش‌های آن‌هاست.

- چگونه این موجودات پیچیده سادگی‌ها و نظم‌های عجیب را به نمایش می‌گذارند؟ و تقارن-هایی که زیربنای این رفتارهاست چیست؟ الگوهای ساده چیستند و منشا آن‌ها چیست؟

این یک چشم‌انداز چند ذره‌ای[2] از نقطه‌نظر هسته به عنوان یک کل، با شکل‌ها ، مدهای برانگیختگی، تقارن‌ها، اعداد کوانتومی چندذره‌ای، و قوانین انتخاب‌اش است.

این دو سوال به طور ویژه‌ای، در حال حاضر و در آینده، به علت پیشرفت‌های چشمگیر فنی که اکنون اجازه می‌دهند سیستم‌های هسته‌ای در نقاطی بسیار دور از حالت تعادل، نقاطی که در آن‌ها هسته‌ها

[1]femtoscopic approach
[2] many-body perspective

ویژگی‌های کاملا متفاوت نسبت به حالت تعادل از خود بروز می‌دهند، مورد بررسی قرار گیرند، سوال‌های مناسبی‌اند [۱].

برای چندین دهه، مدل‌های هسته‌ای موجود بر پایه‌ی اطلاعاتی بنا می‌شدند که از مطالعه‌ی باریکه‌ها و هسته‌های پایدار به دست می‌آمدند. چشم‌اندازهای جدید ایجاد شده به مدل‌های بهتر و جدیدی می‌انجامند و مدل‌های قدیمی‌تر تصویر ناکاملی از این مدل‌های آموزنده‌تر در ناحیه‌ی تعادل یا نزدیک به تعادل‌اند.

بر این نکته لازم است تاکید شود که بیشتر این انقلاب‌ها در این زمینه، به علت پیشرفت‌های فنی در سه ناحیه‌ی: سیستم‌های شتابدهنده که قادر به ارسال باریکه‌های هسته‌های برانگیخته‌اند، تجهیزاتی که قادرند اطلاعات جدید را پردازش کنند (شدت باریکه‌ها ممکن است تا ده برابر اندازه و یا بسیار ضعیف‌تر از مقادیر مرسوم قدیمی باشند) و پیشرفت‌های شگفتی که در توانمندی‌های محاسباتی ظهور کرده‌اند، به وجود آمده‌اند. پیشرفت‌های اخیر در توانمندی‌های محاسباتی، دریافت و تحلیل اطلاعات جدید را ایجاد می‌کنند و همچنین تحولی درقابلیت انجام محاسبات مربوط به تئوری‌های میکروسکوپی به وجود می‌آورند [۱].

موفقیت‌های کلی مدل‌های ساده بر این حقیقت مهم تاکید دارند که با وجودی که هسته ترکیبی از صدها نوکلئون است که حدود 60% حجم هسته را اشغال می‌کنند و در مدارهایی با آهنگ 10^{21} بار در ثانیه می‌چرخند، نه تنها پیچیدگی عظیمی که پیش‌بینی می‌شود به وجود نمی آید بلکه با الگوهای بسیار ساده‌ای مواجه می‌شویم. این سادگی تا حدی نتیجه‌ی اصل پائولی و ظهور رفتارهای جمعی در سیستم‌های چندذره‌ای است [۱].

برای دستیابی به توصیف روشنی از ساختار و ویژگی‌های هسته‌ها تاکنون مدل‌های هسته‌ای گوناگونی ارائه شده‌اند. قرار گرفتن نوکلئون‌ها در هسته‌هایی با مرز نسبتا مشخص منجر به ارائه‌ی مدل قطره مایعی شد. طبق این مدل بر انگیختگی‌های هسته‌ای مانند نوسانات سطح هسته متناظر با حرکت

جمعی ذرات است. این مدل، انرژی بستگی بسیاری از هسته‌ها را به خوبی توجیه می‌کند. از طرف دیگر مدل تک ذره‌ای وجود دارد که طبق این مدل حالت‌های هسته بر حسب حرکت یک ذره در یک میدان نیروی متوسط تعیین می‌شود. مدل اخیر پایداری هسته‌هایی با پوسته‌های بسته یا پر را توجیه می‌کند. هر دو مدل برای هسته‌هایی با تقارن کروی به کار می‌روند.

در حالت کلی هسته‌ها شکل متقارن کروی ندارند و اصطلاحا تغییر شکل‌یافته‌اند و لازم است مدل-هایی ارائه شوند که قادر به توجیه رفتار و ویژگی‌های این هسته‌ها باشند. مدل هسته‌ای جمعی مدلی است که حرکت‌های نوسانی و دورانی هسته‌های تغییر شکل‌یافته را توضیح می‌دهد. با وجودی که دو مدل قطره مایعی و مدل پوسته‌ای مسیرهای متفاوتی را برای مطالعه‌ی ساختار هسته و بیان ویژگی-های هسته در پیش می‌گیرند، بور[3] در صدد بر آمد که این دو مدل را با هم ترکیب کند و مدلی جدید، بر اساس مدل جمعی، ارائه دهد که طبق آن برهم‌کنش ذره با پوسته در نظر گرفته می‌شود. در این مدل فرض بر این است که ذره در یک پوسته‌ی تغییر شکل‌یافته حرکت می‌کند. مدل بور ویژگی-های هسته های تغییر شکل‌یافته را بر اساس جفت‌شدگی حرکت نوکلئون‌ها و نوسانات پوسته‌ی تغییر شکل‌یافته توضیح می‌دهد. در واقع مدل بور ترکیبی است از حرکت جمعی و حرکت تک‌ذره‌ای در هسته‌های اتمی.

وجود گشتاور چهارقطبی در هسته‌ها به این معنی است که در حالت کلی هسته‌ها دارای شکل متقارن کروی نیستند. در صورتی که هسته‌ها را تغییر شکل‌یافته در نظر بگیریم و نوکلئون‌ها را در این هسته-ها محبوس فرض کنیم گشتاور چهار قطبی الکتریکی در این هسته‌ها توجیه می‌شود. در واقع جفت-شدگی ذره‌ی منفرد با هسته‌ی تغییر شکل‌یافته منجر به جفت‌شدگی یا ترکیب گشتاور چهارقطبی ذره و پوسته می‌شود.

[3] A. Bohr

بور مدل خود را در سال ۱۹۵۲ در مقاله‌ای با عنوان " جفت‌شدگی نوسانات سطحی هسته‌ای با حرکت نوکلئون‌های منفرد" ارائه داد [۲]. مدل بور با همکاری بور و ماتلسون[۴] [۳]، منجر به ارائه‌ی هامیلتونی شد که شامل جمله‌های نوسانی و دورانی است. این هامیلتونی، هامیلتونی بور، هامیلتونی جمعی و گاهی هامیلتونی بور- ماتلسون نامیده می‌شود. در واقع ایده‌ی اولیه توسط رینواتر[۵] ارائه شده بود [۴]. رینواتر پیشنهاد کرد که نوکلئون‌هایی که بیرون از پوسته‌های بسته حرکت می‌کنند می‌توانند اثر قطبی‌کنندگی روی هسته داشته باشند که منجر به وجود گشتاور چهارقطبی در بعضی از هسته‌ها می‌شود. بور، ماتلسون و رینواتر در سال ۱۹۷۵ برای این کار مشترک جایزه‌ی نوبل دریافت کردند.

هامیلتونی بور بر حسب دو متغیر β و γ که به ترتیب انحراف از تقارن کروی و انحراف از تقارن محوری را نشان می‌دهند و سه زاویه ی اویلر که جهت‌گیری هسته را در فضا نشان می‌دهند، نوشته می‌شود.

بررسی معادله‌ی ویژه مقداری هامیلتونی بور با پتانسیل‌های گوناگون علاوه بر اهمیتی که از نظر تئوری دارد، برای مقایسه با داده‌های تجربی نیز اهمیت زیادی دارد [۸-۵]. حل‌های تحلیلی معادله‌ی ویژه مقداری بور در نقاط بحرانی، گذار فازهای کوانتومی شکلی بین سطوح هسته‌ای تغییر شکل‌یافته را توضیح می‌دهند [۱۱-۹]. معادله‌ی ویژه‌مقداری بور به روش‌های مختلف برای پتانسیل‌های مستقل از پارامتر γ، پتانسیل‌های وابسته به پارامتر γ با تقارن محوری ، و پتانسیل‌های وابسته به پارامتر γ و بدون تقارن محوری بررسی و حل شده‌اند. پس از جداکردن متغیرها در معادله، بخش‌های مربوط به پارامتر β و پارامتر γ به صورت دو معادله در می‌آیند و هر بخش با توجه به نوع پتانسیل حل می-شود. حالت‌هایی را که در آن‌ها پتانسیل مستقل از پارامتر γ باشد را حالت‌های γ- ناپایدار[۶] می‌نامند.

[4] B. R. Mottelson
[5] J. Rainwater
[6] γ -unstable

نخستین حل برای هامیلتونی بور توسط خود او ارائه شد [۲]. بور پتانسیل را مستقل از پارامتر γ و بخش وابسته به β را به صورت مدل نوسانگر هارمونیک در نظر گرفت. در مرجع [۱۲]، پتانسیل فقط تابعی از پارامتر β و به دو صورت نوسانگر ناهارمونیک و نوسانگر هارمونیک جابجاشده در نظر گرفته شده است. معادله‌ی ویژه‌برداری برای هر دو حالت حل شده است و توابع ویژه و طیف انرژی به دست آمده اند. برای پتانسیل‌های مستقل از پارامتر γ در مراجع [۱۴و۱۳]، بخش مربوط به پارامتر β در تابع پتانسیل به صورت تابع دیویدسون[۷] [۱۵] در نظر گرفته شده است، در مرجع [۹] به صورت چاه پتانسیل نامتناهی و در مرجع [۱۶] به صورت چاه پتانسیل متناهی. در مرجع [۹]، از بررسی‌های هامیلتونی بور نقطه‌ی بحرانی‌ای تعریف شده است که در آن شکل هسته از فاز کروی به حالت بیضی گون بدون تقارن محوری گذار می‌کند. همچنین برای حالت های γ- ناپایدار در مرجع [۱۷] وابستگی به پارامتر β در پتانسیل به صورت شبیه -کولنی[۸] و کراتزر[۹] [۱۸]، و در مرجع [۱۹] به صورت چند جمله ای بر حسب توان‌های زوج β، $\beta^{2n}, \quad n=1,2,3$، در نظر گرفته شده است. در مرجع [۲۰]، وابستگی به پارامتر β بر حسب توان‌های زوج و مختلف این پارامتر در نظر گرفته شده، و ویژگی‌های هامیلتونی بور تحت این شرایط مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

برای حالت‌هایی که در آن‌ها پتانسیل وابسته به پارامتر γ است و سیستم دارای تقارن محوری است حل‌های متعددی برای معادله ی ویژه مقداری بور ارائه شده است. در مرجع [۱۰]، بخش وابسته به β در پتانسیل به صورت چاه پتانسیل نامتناهی و بخش وابسته به γ به صورت نوسانگر هارمونیک در نظر گرفته شده است. در مرجع [۲۱]، بخش وابسته به γ در تابع پتانسیل به صورت نوسانگر هارمونیک و بخش وابسته به β در تابع پتانسیل به دو صورت کولنی و پتانسیل کراتزر در نظر گرفته شده است. در مرجع [۲۲]، تابع پتانسیل به صورت چاه پتانسیل نامتناهی بر حسب پارامتر γ و برای بخش وابسته به β، بر حسب توان‌های زوج این پارامتر در نظر گرفته شده است. برای چاه پتانسیلی

[7] Davidson
[8] Coulomb-like
[9] Kratzer

با دو حد مرزی برای بخش وابسته به β و نوسانگر هارمونیک برای بخش وابسته به γ، ویژه مقادیر و ویژه توابع معادله‌ی ویژه مقداری بور در مرجع [۲۳]، به دست آمده است ونتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

برای حالت‌هایی که شکل بیضی‌گون هسته به گونه‌ای است که دارای تقارن محوری نیست، پتانسیل تابعی است از هر دو متغیر β و γ. در این حالت مقدار پارامتر γ بین صفر و $\frac{\pi}{3}$ تغییر می‌کند. در مراجع [۲۷-۲۴]، نویسندگان به بررسی حالت‌هایی پرداخته‌اند که در آن‌ها هسته، بیضی‌گون بدون تقارن محوری در نظر گرفته می‌شود. در مرجع [۲۸]، حالت بدون تقارن محوری برای $\gamma=\frac{\pi}{6}$ مورد بررسی قرار گرفته است. مرجع [۱۱] نیز به بررسی حالت‌های بدون تقارن محوری اختصاص یافته است. در مرجع اخیر، پتانسیل به صورت مجموع دو بخش مربوط به دو پارامتر β و γ در نظر گرفته شده است و بستگی به پارامتر γ به صورت چاه پتانسیل نامتناهی و بستگی به پارامتر β به صورت نوسانگر هماهنگ است. در مرجع [۲۹]، فرض شده است که $\gamma=\frac{\pi}{6}$ و بخش وابسته به β، پتانسیل کراتزر در نظر گرفته شده است. در مرجع [۳۰] پتانسیل به صورت مجموع دو بخش مجزای وابسته به دو پارامتر تغییر شکل در نظر گرفته شده است. در مرجع اخیر، آن بخش از پتانسیل که به متغیر γ وابسته است، به صورت نوسانگر هماهنگی است که دارای یک کمینه در نقطه‌ی $\gamma=\frac{\pi}{6}$ است، و بخش وابسته به β، چاه پتانسیل نامتناهی است. در مرجع اخیر نتیجه‌گیری شده است که حل‌های هامیلتونی بور متناظر با پتانسیل فوق هسته‌هایی را توصیف می‌کنند که شکل‌شان از حالت بیضی‌گون کشیده به بیضی‌گون پخت تغییر می‌یابد. مرجع [۳۱] نیز به بررسی هسته‌های بدون تقارن محوری پرداخته است و در آن تابع پتانسیل و بخش γ ی آن مانند مرجع قبلی است ولی در بخش β ی آن پتانسیل دیویدسون به کار رفته است.

در مراجع بسیار دیگری [۴۷-۳۲] نیز ویژگی‌های هسته‌های تغییر شکل‌یافته در قالب بررسی هامیلتونی بور و مقایسه‌ی نتایج با روش‌های دیگر و ویژگی‌های تجربی مشاهده شده در هسته‌ها مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. علاوه بر این‌ها در مرجع [۴۸]، مروری کلی بر بسیاری از بررسی‌های پیشین نیز وجود دارد.

حل‌های تحلیلی معادله‌ی ویژه مقداری بور، با انتخاب تابع پتانسیل مناسب، منجر به استخراج مشاهده‌پذیرهای فیزیکی می‌شود که در تعیین ویژگی‌های ساختار هسته مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. این حل‌ها برای توصیف ویژگی‌های دینامیکی، تقارن‌ها، و گذار فازهای شکلی هسته به کار گرفته می-شوند. این حل‌ها حالت‌هایی را در سیستم توصیف می‌کنند که شواهد تجربی برای وجود هر یک از این حالت‌ها در هسته‌ها وجود دارد. نتایج حاصل از این حل‌ها به موازات نتایج حاصل از دیگر روش-های تئوری در مطالعه‌ی ساختار هسته، به همراه نتایج حاصل از مطالعات تجربی ما را به درک روشن-تری از قوانین حاکم بر این سیستم‌ها رهنمون می‌شوند.

این رساله که به بررسی هامیلتونی بور و نتایج حاصل از این بررسی‌ها می‌پردازد دارای بخش‌های زیر است.

در فصل یک، پس از مروری بر حرکت‌های جمعی در هسته‌ها به اختصار به بررسی مدل جمعی و مدل تک ذره‌ای می‌پردازیم. در ادامه‌ی فصل به مدل جمعی هندسی می‌پردازیم. و در انتها به تغییر شکل چهار قطبی در هسته‌ها می‌پردازیم که ما را به فصل بعدی رهنمون می‌شود.

در فصل دو، پس از بررسی تغییر شکل چهارقطبی با تفصیل بیشتر به مدل نوسانی- دورانی می-پردازیم. هامیلتونی این مدل را به صورت کلاسیک تعیین می‌کنیم و با کوانتیزه‌کردن هامیلتونی، هامیلتونی مورد نظر برای سیستم مورد نظرمان به دست می‌آید. مختصات مناسب را به کار می‌گیریم تا هامیلتونی بور که مورد نظرمان بود را به دست آوریم.

در فصل سه، مشاهده پذیرهایی که به طور تجربی قابل تعیین‌اند را بررسی می‌کنیم. مواردی از این مشاهده پذیرها به طور تئوری و از طریق بررسی هامیلتونی بور نیز قابل تعیین‌اند. هدف این فصل توضیح مفصل‌تر تغییر شکل در هسته‌ها و روشن کردن مسیر در جهت بررسی هامیلتونی بوراست.

در فصل چهار، به بررسی فازهای شکلی مختلف در هسته‌های تغییر شکل یافته‌ی چهارقطبی می-پردازیم. با بررسی ویژگی‌های مختلف در فازهای شکلی مختلف، گذار فازهای شکلی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مطالب این فصل و فصل پیشین هدف و مقصود ما را در پرداختن به فصل بعدی روشن می‌کنند.

در فصل پنج، مروری داریم به بررسی های انجام شده‌ی پیشین که در قالب مدل بور انجام شده‌اند.

در فصل شش، به حل هامیلتونی بور با پتانسیل‌های مناسب می‌پردازیم. ویژه توابع و ویژه مقادیر معادله‌ی ویژه مقداری بور را تعیین می‌کنیم و نتایج به دست آمده را با نتایج تجربی و نتایج تئوری سایر منابع مقایسه می‌کنیم.

بخش نهایی شامل نتیجه‌گیری از مطالعات و بررسی‌های آخرین فصل است.

مدل هسته ای جمعی

مقدمه

تغییر و تحول شکل هسته‌ها با تغییر تعداد نوکلئون‌های تشکیل دهنده‌ی آن‌ها از دیرباز مورد توجه بوده است، به عنوان مثال در مدل پوسته‌ای پربودن پوسته‌ها و اعداد جادویی بر پایه‌ی تغییر تعداد نوکلئون‌ها بنا شده است. وجود حالت‌های برانگیخته در هسته‌ها منجر به ارایه‌ی مدل جمعی شد که مدلی است ساده برای توضیح برانگیختگی‌های نوسانی در هسته‌های کروی شکل و برانگیختگی‌های نوسانی و دورانی در هسته‌هایی که به شکل بیضی‌گون دوارند.

بررسی و مطالعه‌ی تجربی تحول ساختاری در هسته‌ها با افزایش تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها و عدد جرمی، برای درک این پدیده‌ها و ارایه‌ی توضیحات بر پایه‌ی حرکت‌های نوکلئونی از پیشرفت بسیار چشمگیری برخوردار بوده است. علاوه بر پیشرفت در مطالعه و بررسی هسته‌های تغییر شکل‌یافته، مطالعه‌ی نواحی که در آن تغییر (شکل) ساختاری اتفاق می‌افتد نیز بسیار قابل ملاحظه بوده است، تغییر شکل‌هایی که با تغییر حتی دو نوکلئون اتفاق می‌افتند. توصیف گذار فاز کوانتومی مربوط به این تغییر ساختارها در سال‌های اخیر از پیشرفت سریعی برخوردار بوده است [۵۰].

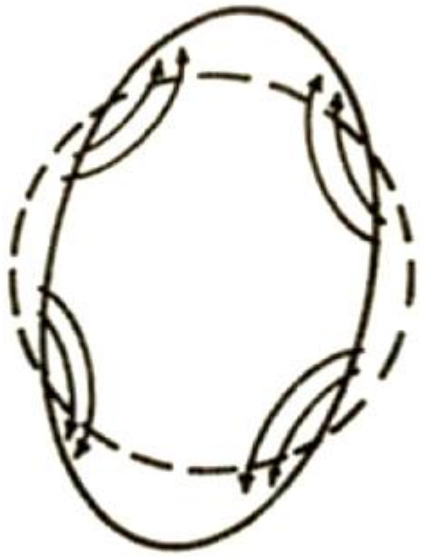
در این فصل، ابتدا مروری خواهیم داشت بر وجود حرکت جمعی[۱۰] در هسته‌ها. سپس ساختار پوسته-ای هسته و نوکلئون‌های ظرفیت و نقش آن‌ها در ایجاد تغییر شکل در هسته‌های اتمی مورد بررسی قرار می‌گیرند. سپس مدل جمعی هندسی[۱۱] و تغییر شکل‌های چند قطبی[۱۲] مطرح می‌شوند. و در بخش آخر تغییر شکل چهارقطبی[۱۳] که بنای فصل بعدی را تشکیل می‌دهد، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

حرکت جمعی در هسته‌های اتمی

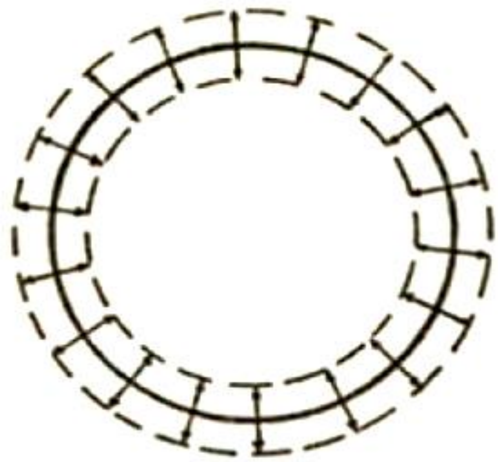
چندین اثر در هسته‌های اتمی وجود دارد که بر حرکت جمعی نوکلئون‌ها در هسته ، حرکت هماهنگ تعدادی نوکلئون با فازهای معین، اشاره دارد. به عنوان مثال، چهار نوع حرکت جمعی مهم در هسته-های اتمی به شرح زیرند، [۵۱].

۱) نوسان‌های سطح هسته: نوسانات پوسته‌ی هسته به معنی حرکت نوکلئون‌ها از یک ناحیه‌ی هسته‌ی کروی‌شکل به ناحیه‌ی دیگر است، شکل (۱-۱). جهت‌های پیکان‌ها در شکل، این حرکت‌های جمعی منظم را نشان می‌دهند. در شکل (۱-۲) نوسانات هماهنگ و متناوب شعاع هسته حول شعاع تعادلی R_0 نشان داده شده است. در این شکل نیز جهت پیکان‌ها جهت حرکت جمعی را نشان می‌دهند. در این حالت چگالی ماده‌ی هسته کروی‌شکل متناوبا افزایش و یا کاهش می‌یابد. در این حالت نوسان شعاع پوسته‌ی هسته حول مقدار تعادلی منجر به نوسان‌های چگالی می‌شود.

[10] Collective motion
[11] geometric collective model
[12] multipole deformation
[13] quadrupole deformation

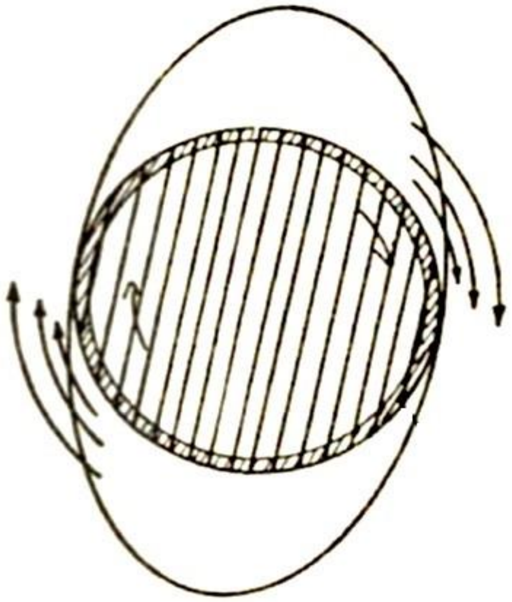


شکل (۱-۱). نوسان سطح هسته، جهت پیکان‌ها جهت حرکت نوکلئون‌ها را نشان می‌دهد، [۵۱].



شکل (۱-۲). مد انقباض و انبساط در هسته، در این حالت نوسان‌های شعاعی پوسته‌ی هسته منجر به نوسان‌های چگالی می‌شود،[۵۱].

۲) دوران‌ها: دوران‌های هسته‌ی تغییر شکل‌یافته مثال دیگری ازحرکت همدوس[۱۴] و هم فاز ماده‌ی هسته‌ای است. گویی نوعی موج جزر و مدی[۱۵] از نوکلئون‌ها حول قلب[۱۶] هسته در حرکت است، شکل (۱-۳). در این حرکت‌ها، می‌توان فرض کرد که بخش داخلی و کروی-شکل ماده‌ی هسته بدون حرکت است و فقط برآمدگی‌های ایجاد شده‌ی بیرون از بخش کروی شکل در حرکت‌اند.

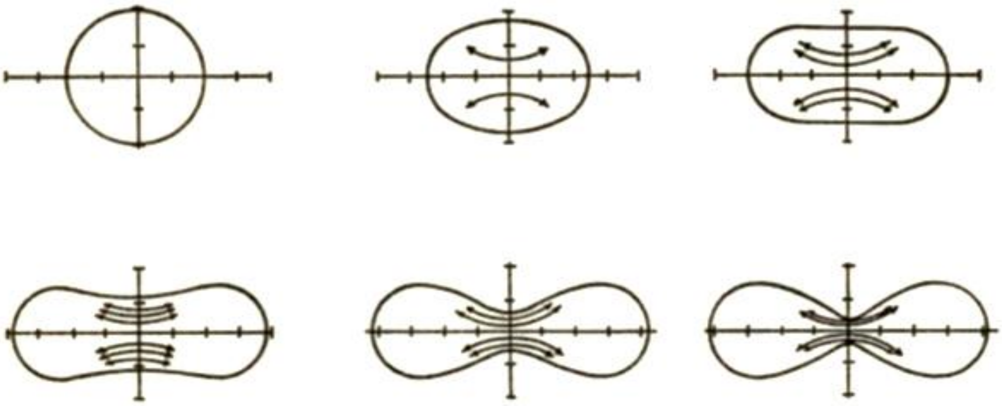


شکل (۱-۳). دوران هسته‌ی تغییر شکل‌یافته. موجی از ماده‌ی هسته‌ای حول قلب هسته می‌گردد، [۵۱].

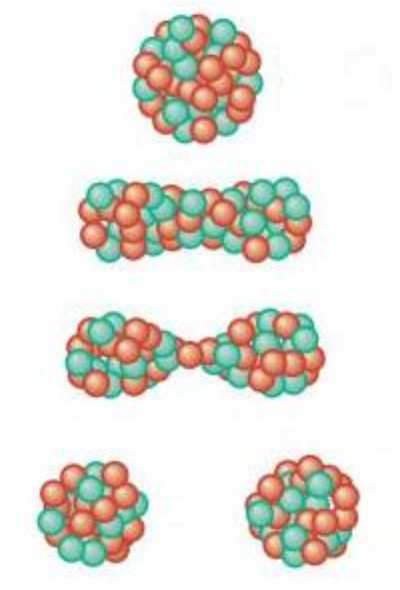
۳) شکافت هسته: فرآیند شکافت هسته‌ای مثال بسیار آشکاری از حرکت جمعی نوکلئون‌ها در هسته‌های اتمی است. در فرآیند شکافت هسته‌ای، نوکلئون‌های موجود در هسته به تدریج از هم جدا می‌شوند تا هسته به دو قسمت تقسیم شود. مراحل مختلف این فرآیند، که از یک هسته‌ی کروی آغاز می‌شود و تا ایجاد دو هسته‌ی کروی ادامه دارد، در شکل‌های (۱-۴) و (۱-۵) نشان داده شده‌اند. جهت پیکان‌ها در شکل (۱-۴) جهت حرکت ماده‌ی هسته را نشان می‌دهند.

---

[14] coherent
[15] tidal wave
[16] core



شکل (۱-۴). فرآیند شکافت هسته‌ای. مراحل مختلف ممکن در این فرآیند نشان داده شده‌اند، [۵۱].

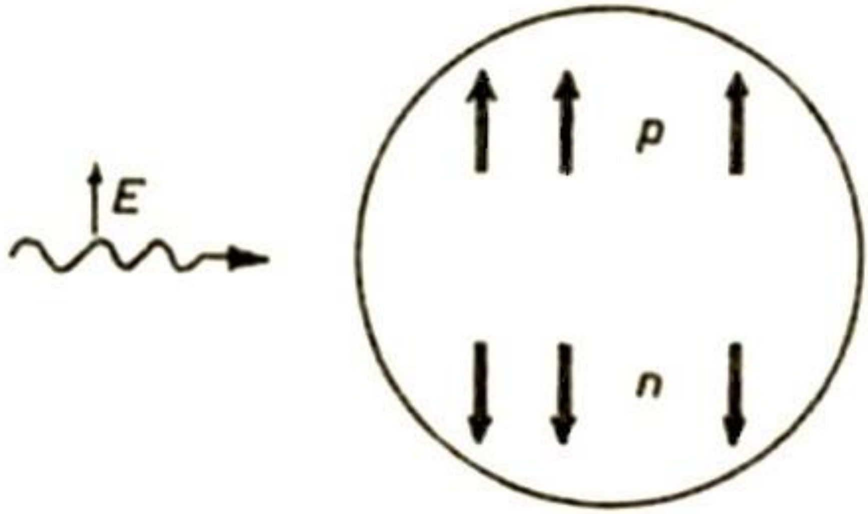


شکل (۱-۵). فرآیند شکافت هسته‌ای. تغییر شکل هسته‌ی اولیه و جابه‌جا شدن نوکلئون‌ها در طی این فرآیند نشان داده شده است.

۴) تشدید شدید فوتونی هسته[۱۷] : در این اثر هنگام فرود فوتون بر هسته حرکت جمعی نوکلئون‌ها اتفاق می‌افتد. پروتون‌ها تحت تاثیر میدان الکتریکی فوتون در یک جهت حرکت می‌کنند و به علت اینکه مرکز جرم باید ثابت بماند، نوترون‌ها در خلاف جهت حرکت پروتون-

[17] photonuclear giant resonance

ها حرکت می‌کنند. شکل هسته در طی این فرآیند تغییر نمی‌کند، درحالی‌که پروتون‌ها و نوترون‌ها به طور هماهنگ ولی در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند، شکل (۱-۶).

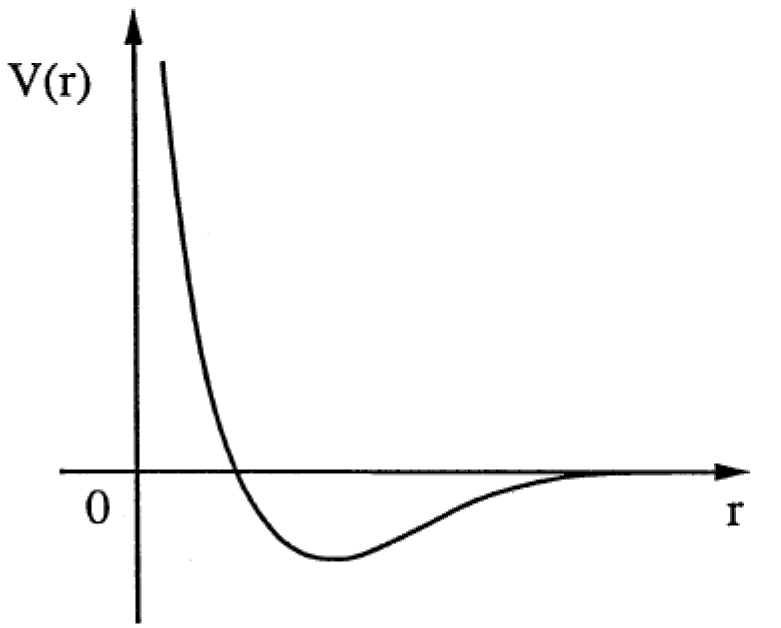


شکل (۱-۶). شکل نمادین حرکت دو قطبی در هسته‌ها. میدان الکتریکی یک پرتو γ، E، پروتون‌ها را به سمت بالا می‌راند. برای این‌که مرکز جرم ثابت بماند نوترون‌ها به سمت پایین حرکت می‌کنند، [۵۱].

ساختار پوسته‌ای هسته

نیروی هسته‌ای که نوکلئون‌ها را در هسته گرد هم می‌آورد، دارای دو مولفه است، برهم کنش جاذبه‌ای کوتاه-برد بین هر دو نوکلئون، و دافعه‌ای هسته در فاصله‌های حتی نزدیکتر، شکل (۱-۷). نیروی هسته‌ای لازم است که کوتاه-برد باشد (در حد چند فرمی)، به دلیل منشاء آن که تبادل مزونی است. ویژگی اول نوکلئون‌ها را به صورت یک سیستم چند- ذره ای دور هم نگه می‌دارد، در حالی‌که ویژگی دوم نوکلئون‌ها را به اندازه‌ی کافی از هم دور نگه می‌دارد. ویژگی اخیر از در هم فرو ریختن هسته جلوگیری می‌کند و در عین حال باعث می‌شود که چگالی نوکلئون‌ها در

داخل هسته تقریبا ثابت بماند، [۵۲]. این ویژگی در چگالی هسته، به عنوان اشباع چگالی[۱۸] شناخته می‌شود.



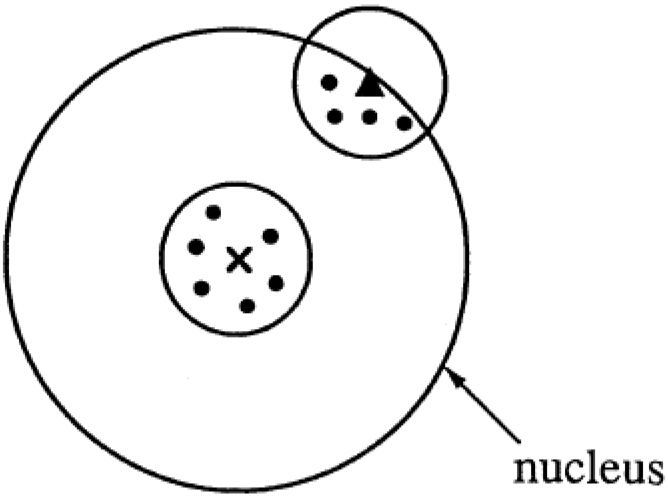
شکل (۱-۷). شکل نمادین نیروی بین دو نوکلئون به عنوان تابعی از فاصله ، [۵۱].

یک نوکلئون در داخل هسته نیروی جاذبه‌ی نوکلئون‌های اطراف را حس می‌کند، این اثر به عنوان پتانسیل میانگین برای نوکلئون در نظر گرفته می‌شود. برد نیروی هسته‌ای از اندازه ی هسته کوچکتر است، و چگالی نوکلئون‌ها داخل هسته ثابت است. بنابراین تعداد نوکلئون‌های تحت تاثیر در محدوده-ی معینی از یک نوکلئون خاص در داخل هسته، تقریبا ثابت می‌ماند.

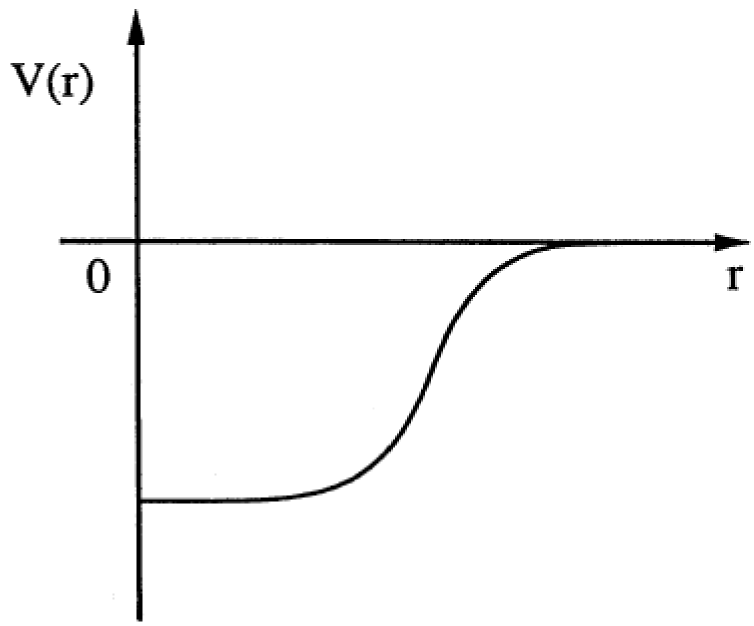
نوکلئون‌هایی که کاملا درون هسته‌اند پتانسیل یکسانی را حس می‌کنند که ناشی از نوکلئون‌های اطراف‌شان است. بنابراین پتانسیل متوسط در درون هسته ثابت می‌ماند. نوکلئونی که در نزدیکی سطح هسته قرار گرفته است فقط نیروی قوی نوکلئون‌های اطراف خود را حس می‌کند. بنابر این، این نوکلئون در مقایسه با نوکلئون‌های واقع در قلب هسته، در پتانسیل ضعیف تری قرار می‌گیرد، شکل

[18] saturation of density

(۱-۸). در نتیجه پتانسیل متوسط هسته به عنوان تابعی از فاصله تا مرکز هسته مانند شکل (۱-۹) خواهد بود.



شکل (۱-۸). برهم کنش نوکلئون-نوکلئون در هسته. نوکلئونی که با علامت ضربدر مشخص شده است با نوکلئون‌هایی (نقطه‌ها) که در بازه ی نیروی کوتاه-برد هسته ای‌اند بر هم کنش دارد. نوکلئون واقع در سطح که با علامت مثلث مشخص شده است، با تعداد کمتری نوکلئون(نقطه‌ها) درون دایره‌ی اطراف مثلث برهم-کنش دارد، [۵۲].



شکل (۱-۹). پتانسیل متوسط نوکلئون‌ها درون هسته. r فاصله از مرکز هسته است، [۵۲].

نوکلئون‌های محصور در هسته در چنین پتانسیلی حرکت می‌کنند و مدارهای تک ذره‌ای را تشکیل می‌دهند. ترازهای انرژی این نوکلئون‌ها مطابق ساختار پوسته‌ای تعیین می‌شود. اگر تعداد پروتون‌ها یا نوترون‌ها یکی از اعداد جادویی باشند، مدار متناظر بسته خواهد بود. در غیر این‌صورت بالاترین پوسته‌ی نیمه‌پر پوسته‌ی ظرفیت نامیده می‌شود. مدارهای متناظر مدارهای ظرفیت نامیده می‌شوند. پروتون‌ها یا نوترون‌های موجود در این مدارها نیز به عنوان پروتون‌ها یا نوترون‌های ظرفیت شناخته می‌شوند. نوکلئون‌های موجود در پوسته‌های کاملا پر پایین‌تر، قلب (بخش مرکزی) بی‌حرکت[۱۹] هسته را تشکیل می‌دهند.

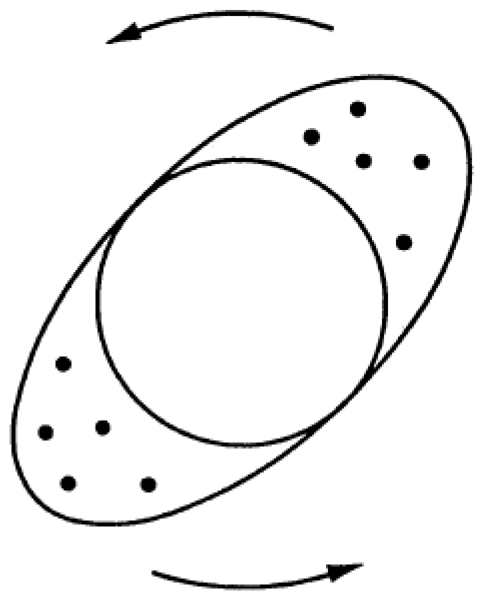
نوکلئون‌های واقع در سطح هسته در مقایسه با نوکلئون‌های داخلی‌تر کمتر مقیدند. در نتیجه هر چه مساحت سطح کوچکتر باشد انرژی بستگی بیشتر خواهد بود. برای یک حجم معین کوچکترین مساحت را سطح یک کره داراست. بنابراین قلب بی‌حرکت هسته به شکل کره خواهد بود. اندازه‌ی حجم به دلیل ویژگی اشباع ثابت می‌ماند.

سطح هسته و نوکلئون‌ها

قلب بی‌حرکت هسته شامل مدارهایی است که کاملا توسط نوکلئون ها پر شده‌اند. اگر همه‌ی زیر-حالت‌های مغناطیسی، $m=-j,-j+1,\dots,j-1,j$، متعلق به یک مدار با اندازه حرکت زاویه‌ای j کاملا پر شده باشند سیستم همسانگرد خواهد بود، یعنی کروی. از آنجا که مدارهای قلب بی‌حرکت هسته کاملا اشغال شده‌اند، قلب بی‌حرکت کروی‌شکل است. در نتیجه تغییر شکل هسته از فرم کروی به نوکلئون‌های ظرفیت مربوط می‌شود. شکل (۱-۱۰) نشان می‌دهد که نوکلئون‌های ظرفیت

[19] inert core

شکل تغییر یافته را ایجاد می‌کنند، در حالی‌که قلب بی‌حرکت هسته که دارای اندازه حرکت زاویه‌ای صفر است کروی می‌ماند. در حقیقت، دوران خارجی حالت قلب بی‌حرکت هسته که کروی است را تغییر نمی‌دهد. در عوض نوکلئون‌های ظرفیت می‌توانند به طور فضایی[۲۰] همبسته[۲۱] شوند که در نتیجه‌ی آن یک حرکت جمعی ایجاد می‌شود. این حرکت-ها شامل دوران بیضی‌گون دوار، نوسانات سطح نسبت به حالت تعادل کروی و حالات میانی‌اند. شکل (۱-۱۰) حرکت جمعی دورانی را نشان می‌دهد. این حرکت‌ها عموما دارای اندازه حرکت زاویه‌ای‌اند و مجموعه حالت‌هایی را در هسته ایجاد می‌کنند که حالت‌های جمعی چهارقطبی نامیده می‌شوند، [۵۲].



شکل (۱-۹). حرکت دورانی هسته. نوکلئون‌های بیرون از قلب کروی هسته این حرکت را ایجاد می‌کنند، [۵۲].

اگر دو نوکلئون در یک مدار در حرکت باشند تابع موج آن‌ها بیشترین بر هم‌نهی را خواهد داشت و انرژی بستگی به علت نیروی هسته‌ای کوتاه-برد بیشترین مقدار را خواهد داشت. با وجود این، اصل طرد پائولی اجازه نمی‌دهد که دو فرمیون یکسان در یک حالت کوانتومی قرار گیرند. با داشتن یک پروتون و یک نوترون که آشکارا متفاوت‌اند این تناقض برطرف می‌شود. وقتی دو نوکلئون در یک سطح

[20] spatially
[21] correlated

حرکت می‌کنند تغییر چگالی رخ می‌دهد و شکل هسته متفاوت از شکل کروی می‌شود. به علت ویژگی اشباع شدگی چنین تغییری در چگالی ماده‌ی قلب بی‌حرکت هسته رخ نمی‌دهد. بنابر این بر هم کنش پروتون و نوترون در پوسته‌ی ظرفیت، در پوسته‌های نیمه پر، نقش مهمی در تغییر شکل هسته از فرم کروی دارد، [۵۲].

برهم‌کنش نوکلئون‌های ظرفیت درون هسته متفاوت از برهم‌کنش بین نوکلئون‌های آزاد است. نیروی هسته‌ای کوتاه-برد دو نوکلئون را به هم نزدیک می‌کند به طوری که تابع موج آن‌ها بر هم می‌افتد. هر چه بر هم نهی فضایی توابع موج دو نوکلئون بیشتر باشد برهم کنش بین آن‌ها بزرگ‌تر خواهد بود. چون دو فرمیون یکسان، حالت دو پروتون یا دو نوترون، نمی‌توانند حالت‌های کوانتومی یکسان اشغال کنند آن‌ها در یک مدار ولی در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند. بنابر این حالت‌های کوانتومی این دو فرمیون یکسان متفاوت خواهد بود. اندازه حرکت زاویه‌ای کل این سیستم دو نوترونی یا دو پروتونی نیز صفر خواهد بود. چون هیچ محور دوران مرجحی وجود ندارد سیستم شکل کروی خواهد داشت [۵۲].

مدل جمعی هندسی

در هسته‌های تغییر شکل یافته، شعاع هسته از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود [۵۴ و ۵۳]

$$R = R_0\left(1+\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\right) \qquad (1-1)$$

که در آن شعاع هسته بر حسب هماهنگ‌های کروی بسط داده شده است و R_0 شعاع هسته در حالت تعادل کروی است. پارامترهای $\alpha_{\lambda,\mu}$ مختصاتی‌اند که تغییر شکل هسته را بیان می‌کنند و $\mu=-\lambda,\ldots,\lambda$. به دلیل اینکه شعاع هسته حقیقی است و

$$Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi) = (-1)^{\mu} Y_{\lambda-\mu}(\theta,\phi) \qquad (2-1)$$

بنابراین

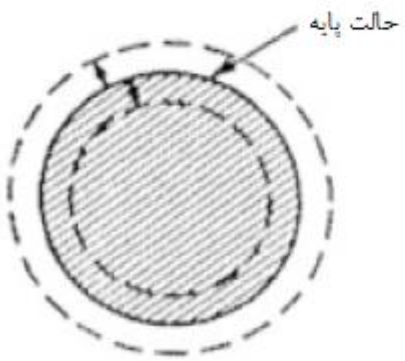
$$\alpha^*_{\lambda\mu} = (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda-\mu} \qquad (3-1)$$

در این مدل هسته به صورت قطره‌ای دیده می شود که با مجموعه مختصات α توصیف می‌شود.

تغییر شکل‌های چندقطبی

با توجه به رابطه‌ی (۱-۱) می‌توان انواع مختلف تغییر شکل را به صورت زیر در نظر گرفت.

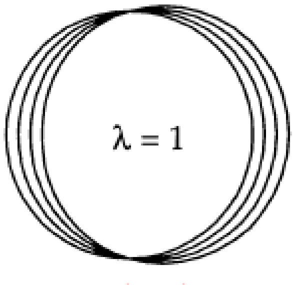
الف) مد تک قطبی[۲۲]: که در آن $\lambda = 0$، در این حالت $Y_{00} = \frac{1}{4\pi}$، و در صورتی که $\alpha_{00} \neq 0$، شعاع هسته تغییر می‌یابد، شکل (۱-۱۱). این مد در اصطلاح، مد تنفس[۲۳] نامیده می‌شود. از آنجایی‌که برای متراکم کردن ماده‌ی هسته انرژی بسیار زیادی لازم است، در مطالعه‌ی برانگیختگی‌های پایین، این مد در نظر گرفته نمی‌شود.



شکل (۱-۱۱). مد تک قطبی ($\lambda = 0$)، [۵۳].

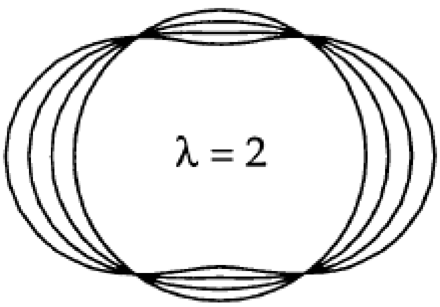
[22] monopole mode
[23] breathing mode

ب) مد دو قطبی[24]: که در آن $\lambda=1$، دراین حالت فقط مرکز جرم هسته جابجا می‌شود، شکل (۱-۱۲). این مد در بررسی برانگیختگی‌های هسته وارد نمی‌شود.



شکل (۱-۱۲). مد دو قطبی ($\lambda=1$)، [۵۳].

ج) مد چهار قطبی[25]: که در آن $\lambda=2$، مهم ترین برانگیختگی‌های با انرژی پایین هسته مربوط به تغییر شکل چهارقطبی است، شکل (۱-۱۳).



شکل (۱-۱۳). مد چهار قطبی ($\lambda=2$)، [۵۳].

در این حالت شکل هسته از حالت کروی به صورت یک بیضی‌گون دوار در می‌آید. برانگیختگی‌های دورانی هسته در این مد دارای اهمیت بسیارند. تغییر شکل چهارقطبی در هسته‌ها و ویژگی‌های مربوط به این مد موضوع رساله‌ی حاضراست

[24] dipole mode
[25] quadrupole mode

تغییر شکل چهار قطبی

اگر درجه آزادی چهارقطبی $(\lambda = 2)$را انتخاب کنیم، که پایین‌ترین حالت‌های برانگیخته‌ی هسته را بیان می‌کنند، و در حالتی که مقادیر α کوچک باشند شکل هسته به صورت بیضی‌گون در می‌آید. فرض بر این است که چگالی هسته تغییر نمی‌کند. در واقع شکل هسته را پتانسیل ناشی از نوکلئون-های درون هسته تعیین می‌کند. همچنین فرض می‌شود که حرکت دورانی در مقایسه با حرکت درونی خیلی کندتر باشد. اگر توزیع نوکلئونی کند دوران کند، این دوران تأثیر چندانی بر ساختار هسته یا بر مدارهای نوکلئونی نخواهد داشت [۵۴].

هسته‌ای که به صورت بیضی‌گون است می‌تواند جهت‌گیری دلخواهی در فضا داشته باشد. در این حالت به جای پنج مختصه ی $\alpha_{\lambda,\mu}$ می توانیم پنج مختصه ی $(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ را به کار گیریم. که در آن θ_i ها زوایای اویلراند و جهت‌گیری زاویه‌ای بیضی‌گون را در فضا بیان می‌کنند و دو مختصه‌ی دیگر β و γ، که مختصات داخلی نامیده می‌شوند، میزان تغییر شکل یافتگی را نسبت به شکل کروی نشان می‌دهند. β معیاری است از میزان انحراف نسبت به تقارن کروی و γ معیاری از میزان انحراف از تقارن محوری است. زوایای اویلر جهت‌گیری محورهای متصل به جسم (محورهای اصلی) را نسبت به محورهای ثابت در فضا (سیستم مختصات آزمایشگاه) نشان می‌دهند.

تغییر شکل یافتگی هسته به صورت بیضی‌گون، بر حسب β ، را می‌توان با رابطه‌ی زیر نشان داد

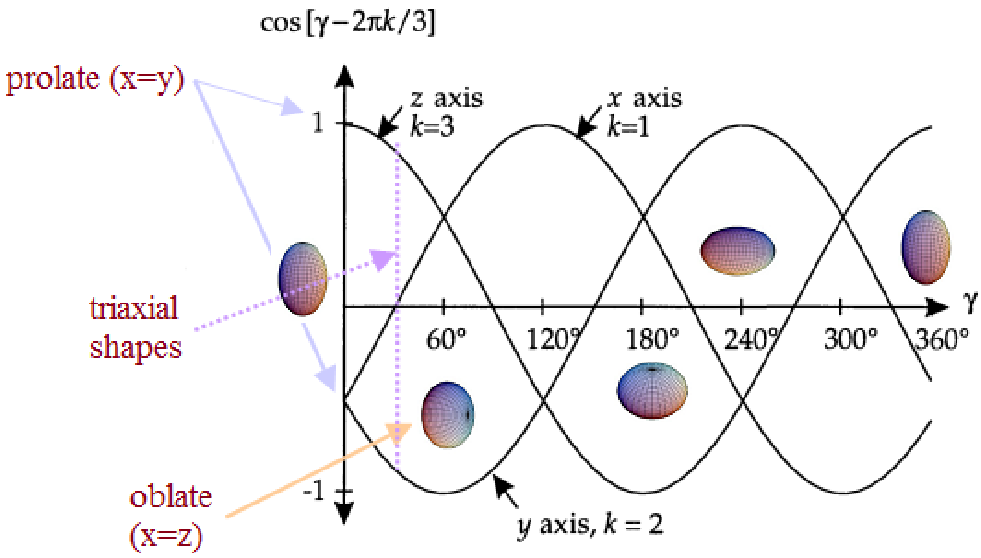
$$R_k = R_0 \left[1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos(\gamma - \frac{2}{3}\pi k) \right] \qquad (4-1)$$

که در آن $k = 1, 2, 3$. این شعاع‌ها بیضی‌گون را در دستگاه مختصات اصلی توصیف می‌کنند.

و تغییرات شعاع به صورت زیر است

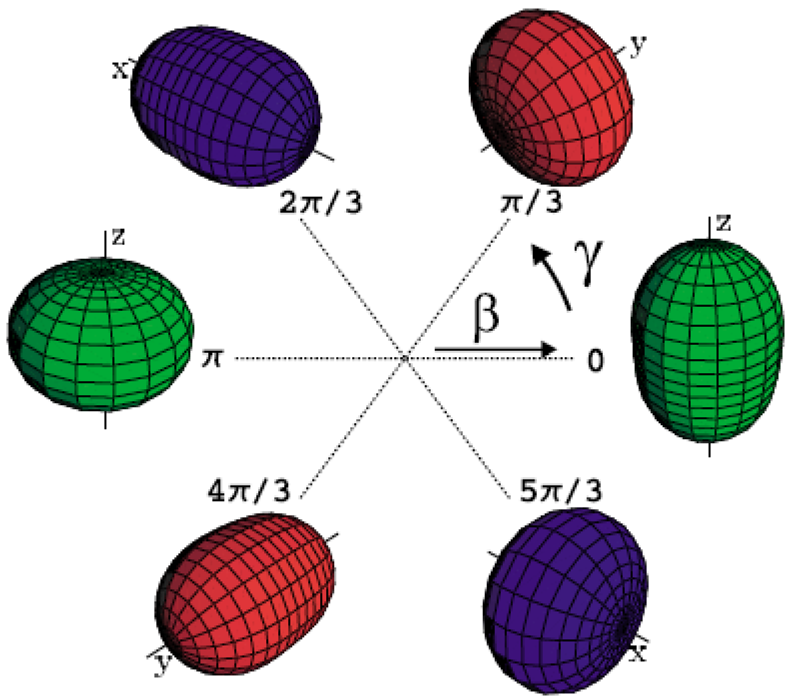
$$\delta R_k = R_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos(\gamma - \frac{2}{3}\pi k) \qquad (5-1)$$

$\beta=0$ شکل کروی را نشان می‌دهد و اگر $\beta\neq 0$ هسته شکل بیضی‌گون دارد. هر چه β بزرگتر باشد هسته تغییر شکل بیشتری یافته است. پارامتر γ انحراف از تقارن محوری را نشان می‌دهد، در حالتی که $(n\in\mathbb{Z})$ $\gamma=\frac{n\pi}{3},$ دو محور از سه محور متصل به سیستم برابرند، شکل (۱-۱۴). در این شکل، حالت بیضی‌گون به ازای مقادیر مختلف پارامتر γ نشان داده شده است. محورهای مختصات نشان داده در شکل که ویژگی بیضی‌گون را نمایان می‌کنند محورهای متصل به جسم‌اند.



شکل (۱-۱۴): تغییر شکل هسته با تغییر پارامتر γ. محورهای مختصات در شکل محورهای متصل به جسم‌اند، [۵۳].

شکل‌های بیضی‌گون با تقارن محوری به ازای هر 60° تکرار می‌شوند. در شکل (۱-۱۵) صفحه‌ی (β,γ)، متغیرهای β و γ مانند مختصات قطبی‌اند، به نمایش گذاشته شده است . بیضی‌گون‌های با تقارن محوری به ازای مقادیر γ که مضربی از $\frac{\pi}{6}$ اند نشان داده شده‌اند. با این حال زوایای اویلر که جهت‌گیری بیضی‌گون را در فضا نشان می‌دهند برای حالت‌های مختلف متفاوت‌اند.



شکل (۱-۱۵): صفحه ی (β,γ) به شش قسمت مساوی تقسیم شده است. حالت‌های با تقارن محوری در شکل آمده‌اند. زوایای اویلر در حالت‌های مختلف متفاوت‌اند، [۵۰].

هامیلتونی بور که بر حسب پارامترهای تغییر شکل β و γ و زوایای اویلر برای هسته‌های تغییر شکل یافته‌ی بیضی‌گون نوشته می‌شود می‌تواند بسیاری از ویژگی‌های هسته‌های به شکل بیضی‌گون را توصیف کند. موضوع فصل بعدی هامیلتونی بور است.

مدل بور

مقدمه

در مدل بور که بر اساس مدل جمعی بنا شده است، فرض بر این است که ذره در یک پوسته‌ی تغییر شکل‌یافته به شکل بیضی‌گون حرکت می‌کند. این مدل رفتارهای هسته‌های تغییر شکل‌یافته‌ی بیضی‌گون را بر اساس جفت‌شدگی حرکت نوکلئون‌ها و نوسانات پوسته‌ی تغییر شکل یافته توضیح می‌دهد. این مدل که در آن حرکت ذره و پوسته جفت شده‌اند، گشتاور چهار قطبی هسته‌ها را به درستی توجیه می‌کند. در واقع وجود گشتاور چهار قطبی در بعضی از هسته‌ها که با مدل‌های پیشین قابل توجیه نبود، انگیزه‌ای بود برای پایه‌گذاری این مدل. هامیلتومی بور که بر اساس فرض‌های بیان شده به دست می‌آید شامل جملات نوسانی و دورانی است. این هامیلتونی در تعیین طیف انرژی هسته‌ها و شدت گذار چهار قطبی الکتریکی بین حالت‌های هسته‌ای مختلف به کار می‌رود.

در این فصل، پس از تعیین مختصات برای تغییر شکل چهار قطبی هسته و معرفی مختصات داخلی، و با استفاده از مدل نوسانی – دورانی، هامیلتونی بور در فضای پنج بعدی بر حسب متغیرهای داخلی هسته‌ی تغییر شکل یافته و زوایای اویلر به دست می‌آید.

تغییر شکل چهارقطبی

در حالتی که هسته دارای تغییر شکل چهار قطبی یا بیضی‌گون باشد شعاع هسته طبق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$R(\theta,\varphi)=R_0(1+\sum_{\mu}\alpha^*_{2\mu}Y_{2\mu}(\theta,\varphi)), \qquad (1-2)$$

که در آن

$$\alpha_{2\mu}=(-1)^{\mu}\alpha^*_{2-\mu}, \qquad (2-2)$$

مولفه‌های بردار واحد در جهت (θ,φ) را در دستگاه مختصات کروی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\xi=\sin\theta\cos\varphi,\quad \eta=\sin\theta\sin\varphi,\quad \zeta=\cos\theta, \qquad (3-2)$$

که در آن شرط $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ برقرار است.

بنابر این

$$\begin{aligned}
Y_{20}(\theta,\varphi)&=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(2\zeta^2-\xi^2-\eta^2),\\
Y_{2\pm1}(\theta,\varphi)&=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(\xi\zeta\pm i\,\eta\zeta),\\
Y_{2\pm2}(\theta,\varphi)&=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}=\mp\sqrt{\frac{15}{32\pi}}(\xi^2-\eta^2\pm 2i\,\xi\eta), \qquad (4-2)
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$R(\xi,\eta,\zeta)=R_0(1+\alpha_{\xi\xi}\xi^2+\alpha_{\eta\eta}\eta^2+\alpha_{\zeta\zeta}\zeta^2+2\alpha_{\xi\eta}\xi\eta+2\alpha_{\xi\zeta}\xi\zeta+2\alpha_{\eta\zeta}\eta\zeta), \qquad (5-2)$$

که در آن

$$\alpha_{2\pm2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}(\alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} \pm 2i\,\alpha_{\xi\eta}),$$
$$\alpha_{2\pm1} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}}(\alpha_{\xi\zeta} \pm i\,\alpha_{\eta\zeta}),$$
$$\alpha_{20} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}}\frac{1}{\sqrt{6}}(2\alpha_{\zeta\zeta} - \alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta}), \qquad (6-2)$$

با رعایت شرط زیر [۵۱ و۵۳]

$$\int R(\Omega)d\Omega = 4\pi R_0, \qquad (7-2)$$

در می‌یابیم که

$$\alpha_{\xi\xi} + \alpha_{\eta\eta} + \alpha_{\zeta\zeta} = 0, \qquad (8-2)$$

در صورتی که دستگاه متصل به جسم (x', y', z') را در نظر بگیریم که نسبت به دستگاه (x, y, z) متصل به آزمایشگاه به اندازه‌ی زوایای اویلر $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ دوران کرده باشد و مقادیر متناظر را به صورت پریم دار نشان دهیم تانسور تغییر شکل در دستگاه مختصات دکارتی به صورت قطری خواهد بود و در نتیجه خواهیم داشت، [۵۱ و۵۳]

$$\alpha'_{\xi\eta} = \alpha'_{\xi\zeta} = \alpha'_{\eta\zeta} = 0$$
$$R(\xi', \eta', \zeta') = R_0(1 + \alpha'_{\xi\xi}\,\xi'^2 + \alpha'_{\eta\eta}\,\eta'^2 + \alpha'_{\zeta\zeta}\,\zeta'^2), \qquad (9-2)$$

بنابراین

$$\alpha'_{2\pm1} = 0,$$
$$\alpha'_{2\pm2} = \sqrt{\frac{2\pi}{15}}(\alpha'_{\xi\xi} - \alpha'_{\eta\eta}) \equiv a_2,$$
$$\alpha'_{20} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}}\frac{1}{\sqrt{6}}(2\alpha'_{\zeta\zeta} - \alpha'_{\xi\xi} - \alpha'_{\eta\eta}) \equiv a_0, \qquad (10-2)$$

بنابراین تعداد پنج پارامتر مستقل داریم که به صورت هندسی دارای تعابیر زیرند:

a_0 کشیدگی محور z' را نسبت به دو محور x' و y' نشان می‌دهد.

a_2 تفاوت طول بین محورهای x' و y' را نشان می‌دهد.

سه زاویه‌ی اویلر $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ میزان دوران دستگاه (x', y', z') را نسبت به دستگاه (x, y, z) نشان می‌دهند.

دو پارامتر (β,γ) که پارامترهای داخلی سیستم نامیده می‌شوند و توسط بور معرفی شدند و جایگزین دو پارامتر (a_0, a_2) می‌شوند به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند

$$a_0 = \beta\cos\gamma, \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\gamma, \qquad (11-2)$$

به طوری که

$$\sum_\mu |\alpha_{2\mu}|^2 = \sum_\mu |\alpha'_{2\mu}|^2 = a_0^2 + 2a_2^2 = \beta^2, \qquad (12-2)$$

و در نتیجه خواهیم داشت

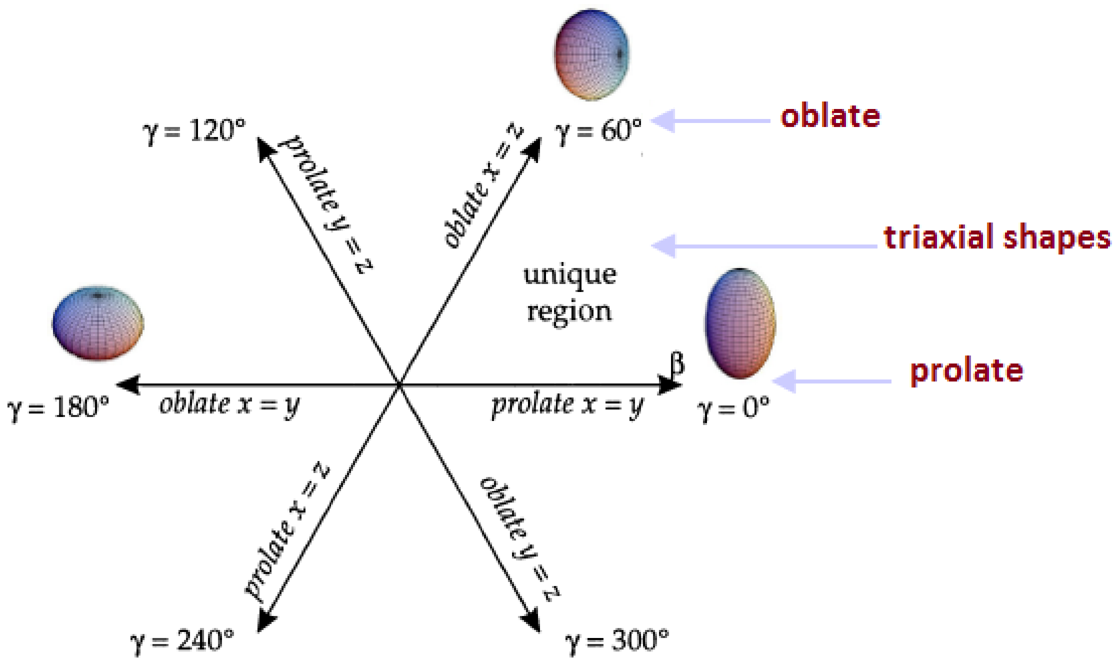
$$\begin{aligned} \alpha'_{\zeta\zeta} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\cos\gamma, \\ \alpha'_{\xi\xi} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\cos(\gamma - \frac{2\pi}{3}), \\ \alpha'_{\eta\eta} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\cos(\gamma - \frac{4\pi}{3}), \qquad (13-2) \end{aligned}$$

و همچنین

$$\delta R_k = R_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\cos(\gamma - \frac{2}{3}\pi k), \qquad (14-2)$$

دستگاه مختصات (β,γ) مطابق شکل (۲-۱) است. در ناحیه $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{3}$ شکل هسته به صورت بیضی‌گونی است که تقارن محوری ندارد. و در $\gamma = 0$ و $\gamma = \pi$ شکل هسته به صورت بیضی گونی است که محور z ها محور تقارن آن است و به ترتیب دارای فرم کشیده و پخت است.

شکل‌های کشیده و پخت در صفحه‌ی (β,γ) به ازای هر $60°$ تکرار می‌شوند و در نواحی میانی بیضی‌گون بدون تقارن محوری[26] است، شکل (۲-۱).



شکل (۲-۱): تغییر شکل هسته با تغییر پارامتر γ. محورهای مختصات x ، y و z در شکل، محورهای متصل به جسم‌اند، [۵۳].

مدل نوسانی-دورانی

در مدل نوسانی-دورانی[27] فرض بر این است که تغییر شکل حالت تعادلی هسته در پتانسیل جمعی دارای تقارن محوری است. انرژی پتانسیل جمعی حول نقطه‌ی زیر بسط داده می‌شود [۵۱ و ۵۳]

$$a_0 = \beta_0 + a'_0 \equiv \beta_0 + \xi,$$
$$a_2 = 0 + a'_2 \equiv 0 + \eta, \qquad (15-2)$$

فرض بر این است که می‌نیمم انرژی پتانسیل در نقطه ی $a_0 = \beta_0$ و $a_2 = 0$ قرار دارد. رابطه انرژی جنبشی کلاسیکی به صورت زیر است

[26] triaxial
[27] vibrational-rotational model

$$T = \frac{1}{2} B \sum_{\mu} \left|\dot{\alpha}_{2\mu}\right|^2, \qquad (16-2)$$

که در آن B پارامتر جرم است. چون انرژی جنبشی هسته به نحوه‌ی جهت‌گیری هسته بستگی ندارد آن را در حالتی در نظر می‌گیریم که محورهای متصل به جسم و محورهای متصل به آزمایشگاه بر هم منطبق‌اند. در این حالت

$$\alpha_{20} = \beta + \xi, \quad \alpha_{21} = \alpha_{2-1} = 0, \quad \alpha_{22} = \alpha_{2-2} = \eta, \qquad (17-2)$$

و بنابراین

$$\alpha_{2\mu} = \sum_k \frac{\partial \alpha_{2\mu}}{\partial \theta'_k} \omega'_k + \frac{\partial \alpha_{2\mu}}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial \alpha_{2\mu}}{\partial \eta} \dot{\eta}, \qquad (18-2)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
&\alpha_{20} = \dot{\xi}, \\
&\alpha_{2\pm1} = -\frac{i}{2}[\sqrt{6}(\beta_0 + \xi) + 2\eta]\omega'_1 \pm \frac{1}{2}[\sqrt{6}(\beta_0 + \xi) - 2\eta]\omega'_2, \\
&\alpha_{2\pm2} = \dot{\eta} \mp 2i\,\eta\omega'_3, \qquad (19-2)
\end{aligned}$$

که در نتیجه ی آن انرژی جنبشی به صورت زیر خواهد شد

$$T = \frac{1}{2} B (\dot{\xi}^2 + 2\dot{\eta}^2) + 4B\eta^2\omega'^2_3 + \frac{B}{4}[\sqrt{6}(\beta_0 + \xi) + 2\eta]^2 \omega'^2_1 + \frac{B}{4}[\sqrt{6}(\beta_0 + \xi) - 2\eta]^2 \omega'^2_2, \qquad (20-2)$$

اگر رابطه انرژی جنبشی را به صورت زیر بنویسیم

$$T = \frac{1}{2} B (\dot{\xi}^2 + 2\dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} I_k \omega'^2_k, \qquad (21-2)$$

گشتاورهای لختی به صورت زیر خواهند بود

$$I_1 = \frac{B}{2}[\sqrt{6}(\beta_0 + \xi) + 2\eta]^2 = 4B\,\beta^2 \sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi),$$
$$I_2 = \frac{B}{2}[\sqrt{6}(\beta_0 + \xi) - 2\eta]^2 = 4B\,\beta^2 \sin^2(\gamma - \frac{4}{3}\pi),$$
$$I_3 = 8B\eta^2 = 4B\,\beta^2 \sin^2\gamma, \qquad (22-2)$$

و یا به طور خلاصه

$$I_k = 4B\,\beta^2 \sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k), \qquad (23-2)$$

و با این ترتیب بخش‌های نوسانی و دورانی انرژی جنبشی به صورت زیر تعیین می‌شوند

$$T_{vib} = \frac{1}{2}B(\dot{\xi}^2 + 2\dot{\eta}^2),$$
$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} I_k \omega'^2_k, \qquad (24-2)$$

این روابط بخش‌های نوسانی و دورانی انرژی جنبشی را به صورت کلاسیک ارائه می‌دهند. برای تعیین هامیلتونی کوانتومی متناظر با انرژی جنبشی فوق لازم است که عملگر انرژی جنبشی تعیین شود، که مطلب بخش بعدی است.

هامیلتونی بور

برای نوشتن هامیلتونی کوانتومی و یا به عبارتی کوانتومی کردن انرژی از رابطه‌ی زبر شروع می‌کنیم

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\,dx_i\,dx_j, \qquad (25-2)$$

که رابطه‌ی مربوط به عنصر دیفرانسیلی طول در هر دستگاه مختصات است و در آن g_{ij} تانسور متریک فضاست. در این دستگاه عملگر لاپلاسین به صورت زیر است [۵۱ و ۵۳]

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sqrt{g}\, g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}), \qquad (26-2)$$

که در آن g معرف دترمینان تانسور متریک است و g^{-1} وارون تانسور متریک است. بنابر این عملگر انرژی جنبشی به صورت زیر است

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2B} \Delta, \qquad (27-2)$$

و رابطه‌ی انرژی جنبشی کلاسیکی با توجه به رابطه‌ی مربوط به عنصر طول به صورت زیر است

$$T = \frac{1}{2} B \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{1}{2} B \sum_{\mu=-2}^{2} \frac{\left| d\alpha_{2\mu} \right|^2}{dt^2}, \qquad (28-2)$$

طبق این رابطه مشخص می‌شود که

$$ds^2 = \sum_{\mu=-2}^{2} \left| d\alpha_{2\mu} \right|^2 d\xi^2 + 2d\eta^2 + \sum_k \frac{I_k d\theta'^2_k}{B}, \qquad (29-2)$$

از مقایسه نتیجه می‌گیریم که تانسور متریک قطری است و

$$g_{\xi\xi} = 1, \qquad g_{\eta\eta} = 2, \qquad g_{\theta'_k \theta'_k} = I_k / B, \qquad k = 1,2,3.$$
$$g_{\xi\xi}^{-1} = 1, \qquad g_{\eta\eta}^{-1} = \frac{1}{2}, \qquad g_{\theta'_k \theta'_k}^{-1} = B / I_k, \qquad (30-2)$$

و مقدار دترمینان تانسور متریک با در نظر گرفتن این که $I_1 = I_2 = I$، عبارت خواهد بود از

$$g = 2B^{-3} I_1 I_2 I_3, \qquad (31-2)$$

در نتیجه عملگر انرژی جنبشی به صورت زیر در می‌آید

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}+\sum_k\frac{B}{I_k}\frac{\partial^2}{\partial\theta'^2_k}\right)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\frac{\hat{J}'^2_1+\hat{J}'^2_2}{2I}+\frac{\hat{J}'^2_3}{16B\eta^2}, \qquad (32-2)$$

هامیلتونی بور را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$H_B = T_{vib} + T_{rot} + V, \qquad (33-2)$$

عبارات فوق بر حسب β و γ بیان می‌شوند. جمله ی اول در این هامیلتونی انرژی جنبشی وابسته به نوسانات سطح هسته‌ای با جهت‌گیری ثابت در فضاست. جمله‌ی دوم انرژی دورانی سطح هسته بدون هر گونه تغییر شکل است. و عبارت سوم انرژی پتانسیل بر حسب پارامترهای تغییر شکل است.

بخش نوسانی در هامیلتونی به صورت زیر بیان می‌شود

$$T_{vib} = -\frac{\hbar^2}{2B}\left[\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right], \qquad (34-2)$$

گشتاور لختی دورانی هسته‌ای به شکل بیضی‌گون به صورت زیر است

$$I_k = 4B\beta^2\sin^2(\gamma-\frac{2}{3}\pi k), \qquad (35-2)$$

بنابر این بخش دورانی به صورت زیر در می‌آید

$$T_{rot} = \frac{\hbar^2}{2B}\frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1,2,3}\frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma-\frac{2}{3}\pi k)}, \qquad (36-2)$$

که در آن Q_k ها مؤلفه‌های اندازه حرکت زاویه‌ای در دستگاه مختصات اصلی‌اند.

برای به دست آوردن تابع موج و طیف انرژی هسته‌های تغییر شکل یافته بیضی‌گون لازم است که معادله‌ی ویژه مقداری بور که به صورت زیر است، حل شود

$$H_B \Psi(\beta,\gamma,\theta_i) = E\,\Psi(\beta,\gamma,\theta_i), \qquad (37-2)$$

با حل این معادله‌ی ویژه مقداری و به دست آوردن ویژه مقادیر انرژی و توابع موج، با به کار بردن تابع پتانسیل مناسب، می‌توان طیف انرژی و مقادیر چشمداشتی مربوط به عملگر چهارقطبی الکتریکی را تعیین کرد و رفتار هسته‌ها را در نقاط بحرانی که در آن نقاط برای آن هسته‌ها گذار فاز شکلی پیش می‌آید، بررسی کرد. مشاهده‌پذیرهایی که مقادیر و رفتارشان تعیین کننده‌ی ساختار هسته است و یا وقوع تغییر در ساختار هسته را بیان می‌کنند موضوع فصل بعدی است.

ویژگی‌های هسته‌های تغییر شکل‌یافته

مقدمه

ویژگی‌های بسیاری در هسته‌های تغییر شکل‌یافته با بررسی مشاهده پذیرهای تجربی مربوط به هسته‌ها تعیین می‌شود. مشاهده‌پذیرها در مدل جمعی برای هسته‌های زوج-زوج به شیوه‌های مختلف تئوری و تجربی به دست می‌آیند. عملا بیشتر مواقع مقادیر تجربی مشاهده‌پذیرها انگیزه‌ی لازم را برای ارائه‌ی تئوری مناسب ایجاد نموده‌اند. این مشاهده‌پذیرها نه تنها در تعیین ساختار هسته بلکه در پیش‌بینی و تبیین تغییر ساختار هسته نیز به کار می‌آیند.

در این فصل مشاهده‌پذیرهای تجربی که تعیین‌کننده‌ی فاز شکلی هسته‌های تغییر شکل یافته‌اند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. این مشاهده‌پذیرها همچنین در توجیه تغییر فاز شکلی در هسته‌ها، که در فصل بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرند، نیز بسیار تعیین‌کننده‌اند. مشاهده‌پذیرهای مورد بررسی به ترتیب عبارتند از انرژی‌های حالت‌های برانگیخته‌ی پایین، شدت گذار چهارقطبی الکتریکی[۲۸] و انرژی جداسازی دو نوترون[۲۹].

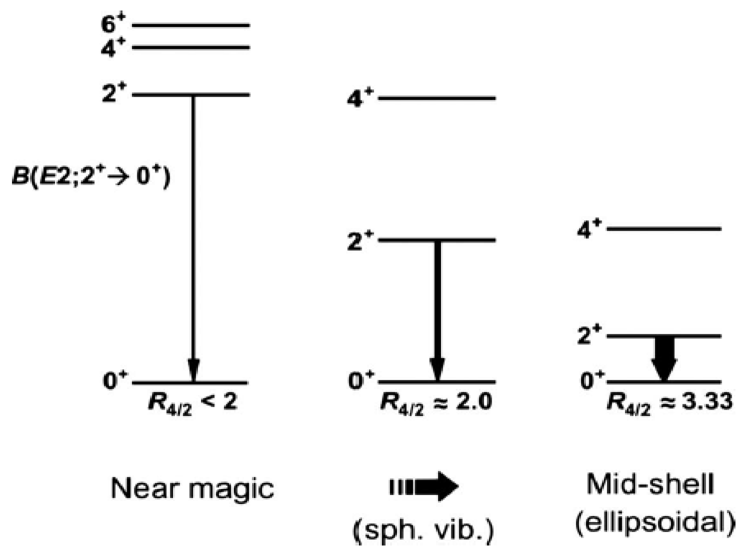
[28] quadrupole transition rate
[29] two-neutron separation energy

انرژی حالت‌های برانگیخته

در هسته‌های زوج-زوج، حالت پایه همیشه دارای اندازه حرکت زاویه‌ای کل صفر و پاریته‌ی مثبت، $L^{\pi}=0^{+}$، است. در حالت‌های بالاتر از حالت پایه، حالت‌های برانگیخته با اسپین‌های متفاوت وجود دارند که طیف انرژی آن‌ها می‌تواند کاملا پیچیده باشد. با این حال همیشه اولین حالت برانگیخته حالت 2_1^{+} ومعمولاً حالت بالاتر 4_1^{+} است. اندیس یک بیانگر پایین‌ترین حالت‌هاست.

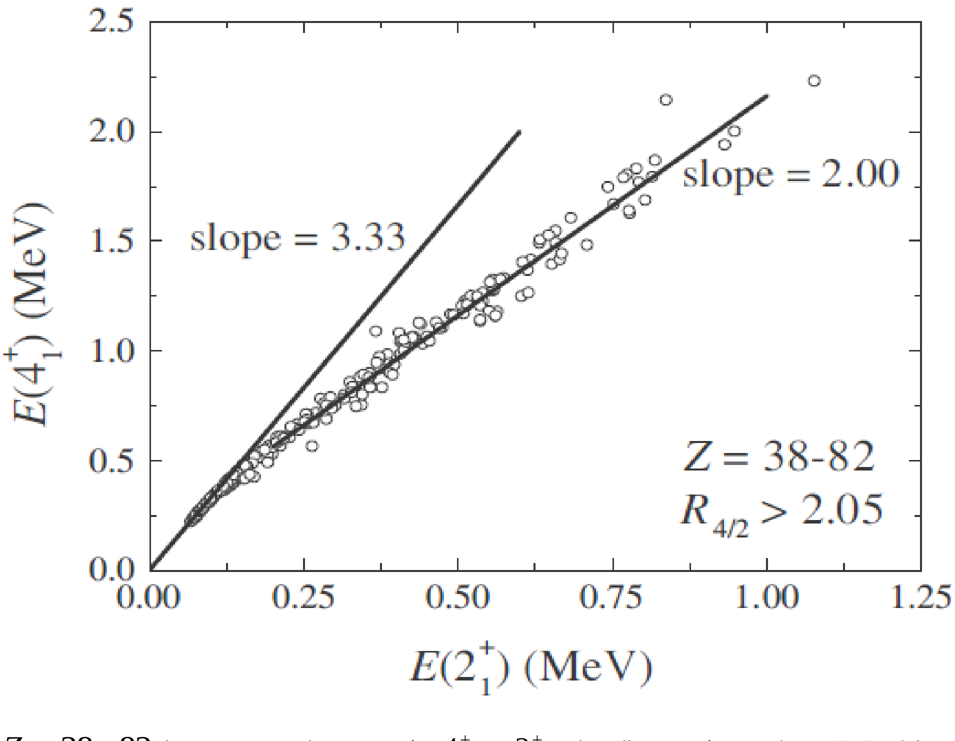
بنابراین می‌توان انتظار داشت که انرژی این ترازها و همچنین نسبت این انرژی‌ها $R_{4/2}=E(4_1^{+})/E(2_1^{+})$ تابعی از تعداد نوکلئون‌ها باشد، [۵۰].

هسته‌هایی را در نظر می‌گیریم که زوج نوکلئون‌های مشابه بیشتر از اعداد جادویی را داشته باشند. به عنوان مثال ^{134}Sn، که در آن $Z=50$ و $N=84$، و یا ^{210}Pb، که در آن $Z=82$ و $N=128$. در چنین مواردی تفاوت انرژی بین حالات 0^{+} و حالت‌های بالاتر $L=2,4,...$ زیاد است ولی $R_{4/2}<2$، شکل (۳-۱).



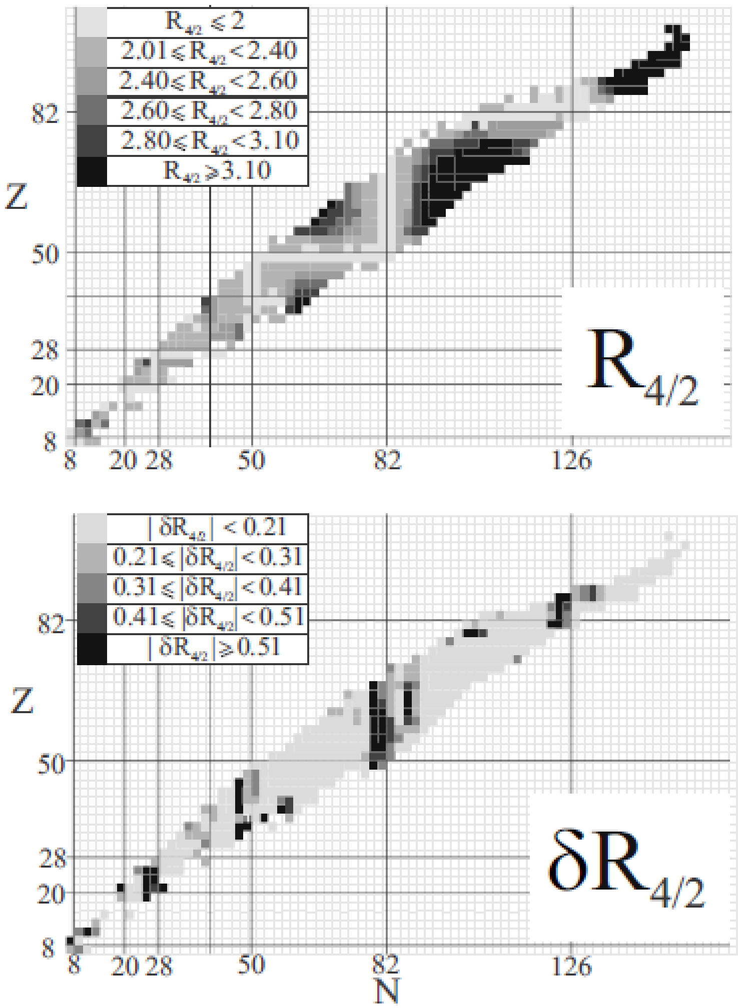
شکل (۳-۱). مراحل تحول ساختاری از حالت‌های نزدیک به پوسته‌های پر تا پوسته‌های نیمه پر، ضخامت پیکان‌ها معیاری است از شدت $B(E2)$، [۵۰].

اما همچنان که نوکلئون‌های ظرفیت بیشتر می‌شوند رفتار جمعی به تدریج آشکار می‌شود. در شکل (۳-۲) انرژی $E\,(4_1^+)$ و $E\,(2_1^+)$ برای پایین‌ترین حالت‌ها در هسته‌هایی با $38 < Z < 82$ نشان داده شده‌اند. پدیده‌ای که روی می‌دهد این است که نقاط حول دو بخش خطی با شیب‌های 2.00 و 3.33 توزیع شده‌اند. بر انگیحتگی‌ها در دو حالت به برانگیختگی‌های نوسانی ودورانی مربوط می‌شوند. برای هسته‌هایی که تعداد نوکلئون‌های آن‌ها کمی با اعداد جادویی متفاوت است شکل حالت پایه کروی است و حالت‌های بر انگیخته در آن‌ها، به علت نوسان حول شکل تعادلی کروی است. همچنان که تعداد نوکلئون‌های ظرفیت افزایش می‌یابد تغییر شکل به تدریج در سیستم ایجاد می‌شود. در این حالت برانگیختگی‌های پایین سیستم برانگیختگی‌های دورانی خواهند بود. این پدیده منجر به طیف دورانی نوعی هسته‌های تغییر شکل یافته با تعداد نوترون‌ها و یا پروتون‌هایی که به اندازه‌ی کافی متفاوت از اعداد جادویی‌اند، می‌شود، [۵۰].



شکل (۳-۲). مقایسه‌ی انرژی حالت‌های 2_1^+ و 4_1^+ برای هسته‌های زوج- زوج با $Z = 38 - 82$ و $E\,(4_1^+) / E\,(2_1^+) > 2.05$، [۵۰].

شکل (۳-۳) مقادیر $R_{4/2}$ و $\delta R_{4/2}$ را در هسته‌ها نشان می‌دهد. نزدیک اعداد جادویی $R_{4/2}$ کوچکتر از 2.00 است، و در مرکز نواحی که مرز آن‌ها با اعداد جادویی مشخص می‌شود به مقدار 3.33 نزدیک می‌شود.

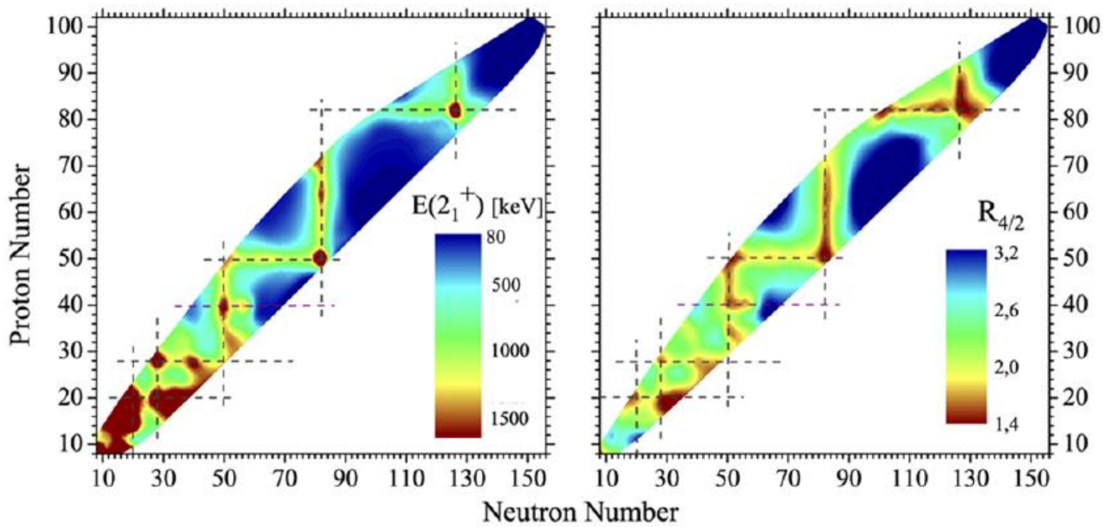


شکل (۳-۳). مقادیر $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$ (بالا) و
$\delta R_{4/2} = \left|R_{4/2}(Z,N) - R_{4/2}(Z,N+2)\right|$ (پایین)، [۵۰].

شکل (۳-۴) نیز مقدار $E(2_1^+)$ (اندیس 1 نشان دهنده ی پایین ترین حالت 2^+ است.) و نسبت $R_{4/2}$ را در هسته‌های زوج-زوج نشان می‌دهد. الگوهای تکراری موجود در این نمودارها، اهمیت

یگانه‌ی ساختار پوسته‌ای، حرکت نوکلئونی و همچنین ترکیب پیکربندی[۳۰]ها و گسترش رفتار جمعی با دور شدن از اعداد جادویی را نشان می‌دهند. هر کدام از این نمودارها رفتارهای ویژه‌ای را در هسته-ها نشان می‌دهند.

مقادیر $E(2_1^+)$ نزدیک پوسته‌های بسته بالاست و در نزدیکی پوسته‌های نیمه‌پر کاهش می‌یابد. مقادیر $R_{4/2}$ از مقدار کمتر از 2 شروع می‌شود و تا 3.33 افزایش می‌یابد.



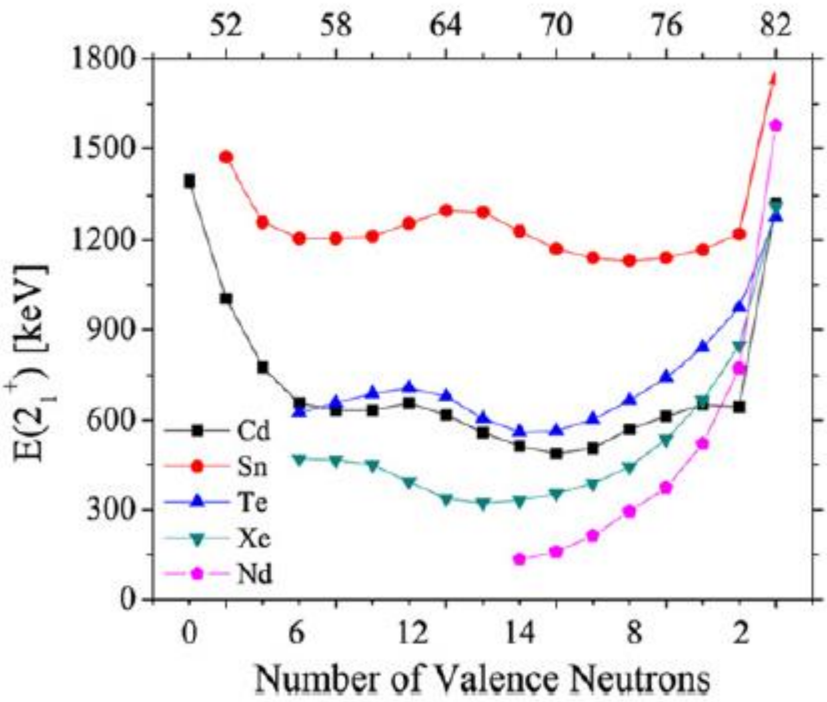
شکل (۳-۴). مقادیر $E(2_1^+)$ (چپ) و $R_{4/2}$ (راست) برای تمام هسته‌ها. رنگ قهوه‌ای برای پوسته‌های بسته است با $E(2_1^+)$ بزرگ و $R_{4/2}$ کوچک و رنگ آبی تیره برای هسته‌های کاملا تغییر شکل یافته است با $E(2_1^+)$ کوچک و $R_{4/2}$ بزرگ،[۱].

همچنان که نوکلئون‌های ظرفیت، بعد از اعداد جادویی، اضافه می‌شوند اصل پائولی پیکربندی‌های متعددی را مجاز می‌شمارد و تعداد حالات اسپینی بیشتر و بیشتری ممکن می‌شوند. با افزایش نوکلئون‌های ظرفیت پیکربندی‌های مدل ذره ی مستقل با اسپین و پاریته‌ی یکسان می‌توانند ترکیب شوند. هنگامی که دو حالت به این ترتیب ترکیب می‌شوند انرژی‌های آن‌ها همدیگر را تضعیف می-

[30] configuration

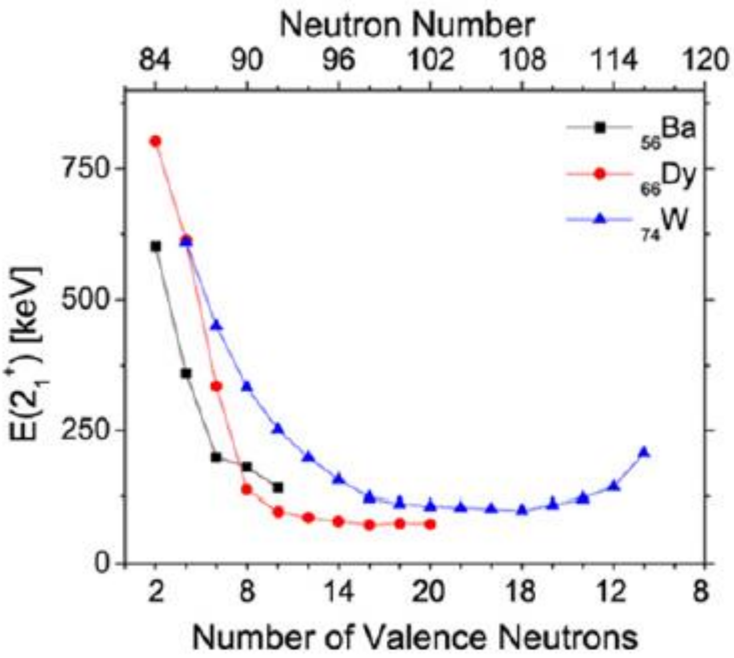
کنند، به این معنی که انرژی پایین‌ترین حالت کاهش می‌یابد. وقتی تعداد زیادی از حالت‌ها ترکیب می‌شوند این رفتار تشدید می‌یابد. برای برهم کنش‌های جاذبه‌ای انرژی یک حالت همیشه به پایین رانده می‌شود و تابع موج آن حالت بیشترین برهم نهی هم فاز مولفه ها را دارد. نتیجه‌ی مستقیم این است که پایین‌ترین حالت 2^+ ، با افزایش تعداد نوکلئون‌ها، به سمت پایین رانده می‌شود [۱].

همچنان که شکل (۳-۵) نشان می‌دهد، $E(2_1^+)$ در این زنجیره‌ی ایزوتوپی با افزایش تعداد نوترون-های ظرفیت کاهش می‌یابد.



شکل (۳-۵). مقادیر $E(2_1^+)$ برای هسته‌ها در ناحیه ی Sn با $N=50-82$.شکل نشان می‌دهد که کمترین مقدار (حالت جمعی بیشتر) برای تعداد نوترون‌های معلوم، مربوط به حالتی است که تعداد پروتون-های ظرفیت بالاتر باشد،[۱].

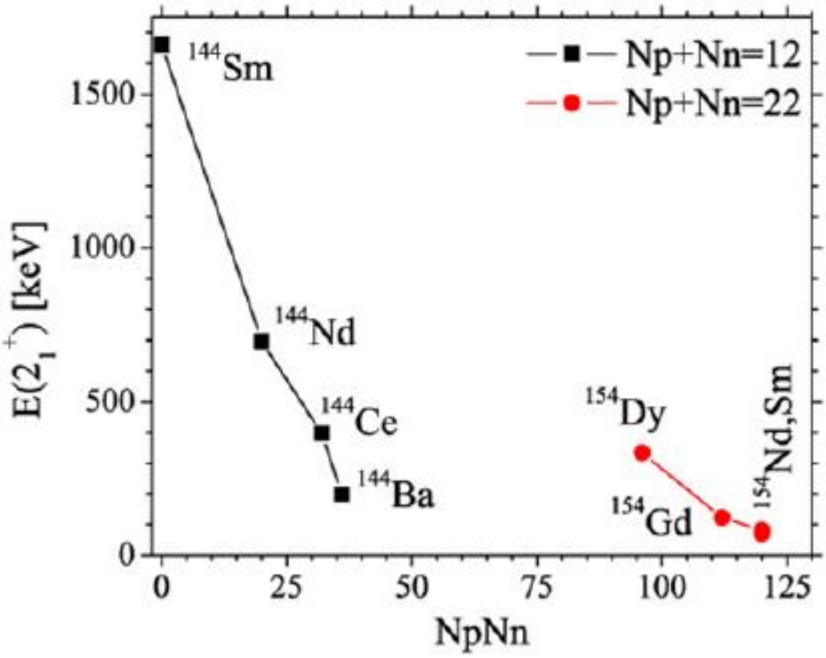
از آنجا که تعداد پیکربندی‌های مختلف مدل ذره‌ی مستقل بعد از پوسته‌های میانی کاهش می‌یابد، در حوالی هسته‌های با پوسته‌های نیمه پر به نظر می‌آید که منحنی متقارن باشد. در شکل (۳-۶) ایزوتوپ‌های هسته‌ی W این رفتار را نشان می‌دهند.



شکل (۳-۶). مقادیر $E\,(2_1^+)$ برای هسته‌ها. کاهش و افزایش انرژی با تغییر تعداد نوکلئون‌ها در ایزوتوپ-های W، [۱].

در شکل (۳-۵)، مقادیر $E\,(2_1^+)$ را برای Z های حوالی Sn آمده است. هسته‌های مختلف رفتار مشابهی دارند، اما آهنگ کاهش یا افزایش برای آن‌ها یکسان نیست. برای Sn که پروتون ظرفیت ندارد، مقدار $E\,(2_1^+)$ تقریبا ثابت است. اگر تعداد پروتون‌های ظرفیت کم باشد، مانند Te و Xe، شیب منحنی کم است، در حالی که برای هسته‌های با پروتون ظرفیت بیشتر، مانند Nd ، مقدار شیب افزایش می‌یابد.

این نکته ما را متوجه این حقیقت می‌کند که یکی از عوامل مهم در رفتارهای جمعی و تغییر شکل هسته بر هم کنش نوترون-پروتون است. رفتار جمعی برای تعداد نوکلئون‌های ظرفیت هنگامی بیشترین نمود را دارد که برهم کنش‌های نوترون-پروتون بیشتر باشد، یعنی هنگامی که تقریبا تعداد نوترون‌ها و پروتون‌های ظرفیت مساوی باشد، شکل (۳-۷). دراین شکل مقدار $E\,(2_1^+)$ بر حسب حاصلضرب تعداد نوترون‌های ظرفیت (N_n) و تعداد پروتون‌های ظرفیت (N_p) رسم شده است، [۱].



شکل (۳-۷). مقادیر $E\,(2_1^+)$ بر حسب $N_n N_p$ برای دو سری از هسته‌ها. در هر سری تعداد نوکلئون‌های ظرفیت ثابت است. دیده می‌شود که در هر سری بیشترین حالت جمعی مربوط به بیشترین مقدار $N_n N_p$ است ،[۱].

رفتار $R_{4/2}$، مطابق منحنی‌ها، نیز نشان می‌دهد که رفتار جمعی افزایش می‌یابد. هسته‌هایی که تعداد نوکلئون‌های ظرفیت آن‌ها کم است کروی‌اند و $R_{4/2} < 2$. وقتی تعداد پیکربندی‌های ترکیب‌شده کم است شکل هسته کروی است، برای حالت کروی حالت‌های برانگیخته نوسانی‌اند (برانگیختگی‌های فونونی)، انرژی حالت 4^+ افزایش می‌یابد. همچنان که تعداد نوکلئون‌های ظرفیت افزایش می‌یابد شکل هسته از حالت کروی به حالت بیضی‌گون تغییر می‌یابد. در این حالت برانگیختگی‌های دورانی نیز در هسته ظاهر می‌شوند و در نتیجه مقدار $R_{4/2}$ بیشتر افزایش می‌یابد، [۱].

شدت گذار چهارقطبی الکتریکی

گشتاور چهار قطبی الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شود

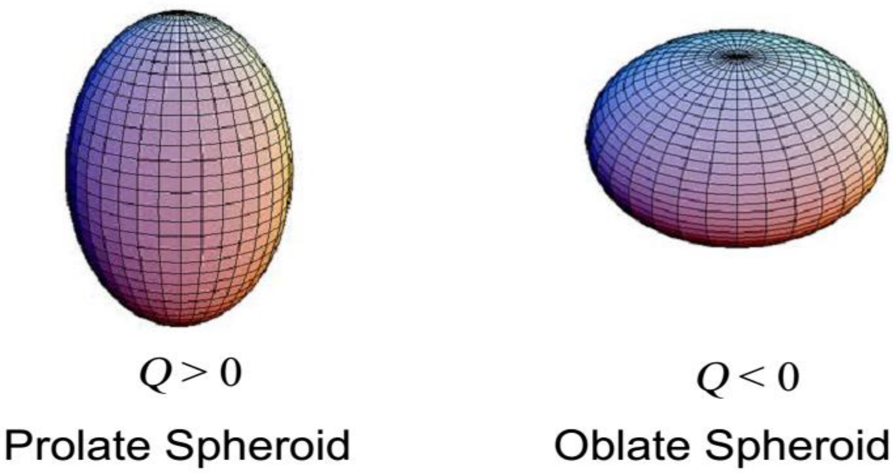
$$Q = \int_v \rho(\vec{r})(3z^2 - r^2)dv\,, \qquad (1-2)$$

در صورتی که هسته دارای تقارن کروی باشد، $Q = 0$.

اگر سطح هسته به صورت یک بیضی‌گون کشیده[31] فرض شود، $Q > 0$ و در این حالت $\beta > 0$ است.

و اگر شکل هسته به صورت بیضی‌گون پخت[32] باشد، $Q < 0$ و در این حالت $\beta < 0$ است.

بنابراین دیده می‌شود که گشتاور چهارقطبی الکتریکی معیاری از چگونگی توزیع بار هسته است، شکل(۳-۸).

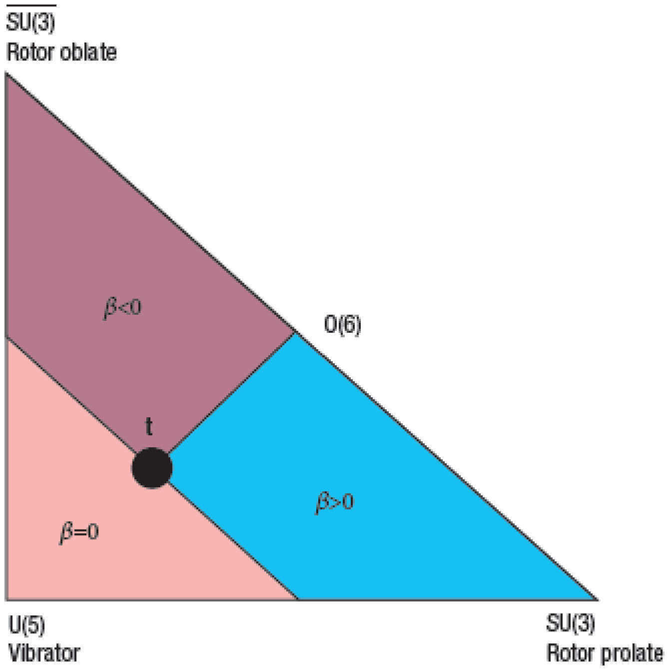


شکل (۳-۸). گشتاور چهارقطبی الکتریکی برای شکل‌های متقارن و متفاوت هسته‌ها.

در شکل (۳-۹) حالت متقارن کروی و حالت‌های مختلف تغییر شکل‌یافته در یک مثلث نشان داده شده‌اند. گروه‌های تقارنی مربوطه نیز در شکل آمده‌اند که در فصل‌های بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرند. این نوع مثلث‌ها به عنوان مثلث تقارنی ساختار هسته شناخته می‌شوند، [۵۵].

---

[31] prolate
[32] oblate



شکل (۳-۹). مقادیر متناظر β برای شکل‌های متفاوت هسته، [۵۵].

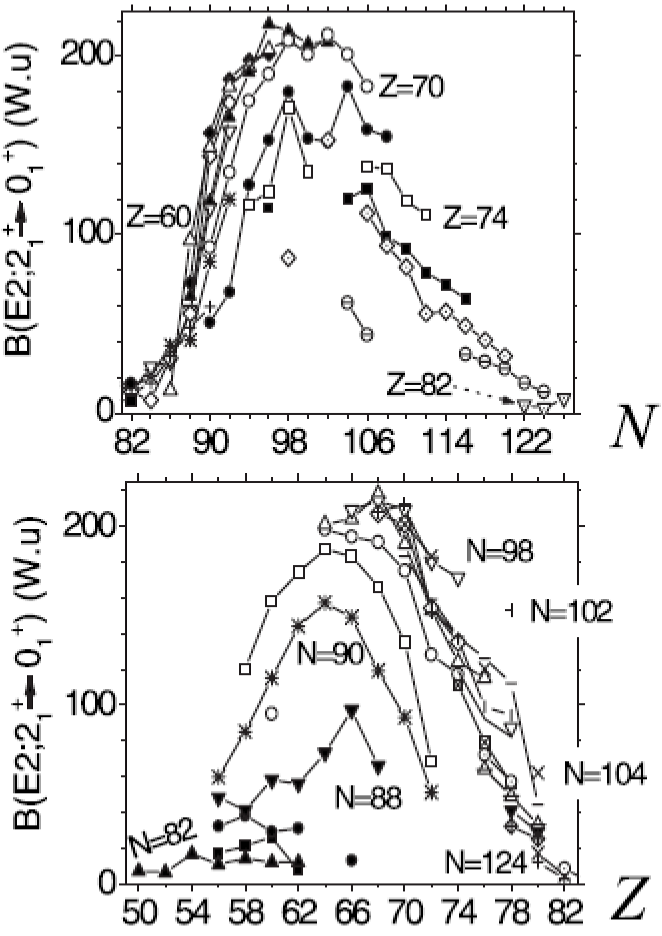
از آنجا که تغییر شکل و رفتارهای جمعی با هم همراه‌اند، مشاهده‌پذیر دیگری که ساختار را مشخص می‌کند و اطلاعات مشابه و یا کامل‌کننده در باره تحول ساختاری به ما می‌دهد، شدت گذار چهار-قطبی الکتریکی بین پایین ترین حالت‌های 2^+ و 0^+، یعنی $B(E2:2^+\rightarrow 0^+)$ است. این کمیت را می‌توان بر حسب $e^2fm^4=10^{-2}e^2b^2$ و یا واحد $W.u.$ [۳۳] بیان کرد. نزدیک پوسته‌های بسته مقدار $B(E2)$ کاهش می‌یابد و همچنان که تعداد نوکلئون‌های ظرفیت افزایش می‌یابد و در نزدیکی پوسته‌های نیمه‌پر مقدار $B(E2)$ افزایش می‌یابد. همچنان که رفتارهای جمعی چشمگیرتر می‌شود و شکل هسته تغییر می‌یابد، مقدار $B(E2)$ افزایش می‌یابد. شکل (۳-۱۰) مقدار این کمیت را برای $Z=50-82$ و $N=82-126$ لایه‌های اصلی نشان می‌دهد. افزایش $B(E2)$ از مقدار ناچیز در نزدیکی اعداد جادویی تا مقدار ماکزیمم آن در نزدیکی پوسته‌های میانی و کاهش مجدد آن هنگام

[33] Weiskopf unit

نزدیک شدن به عدد جادویی بعدی کاملا مشحص است. مقدار $B(E2)$ بر حسب e^2fm^4 از طریق رابطه‌ی $|Q|=\sqrt{16\pi B(E2:2^+\rightarrow 0^+)}$ به گشتاور چهار قطبی ذاتی Q مربوط می‌شود و [۵۰]

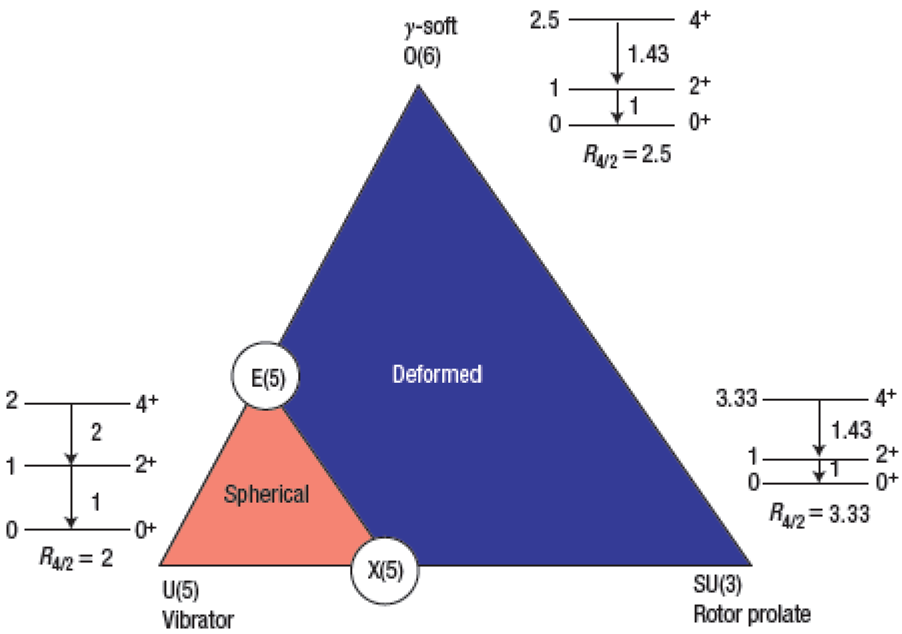
$$|Q|=\sqrt{16\pi B(E2:2^+\rightarrow 0^+)}=\frac{3Ze}{\sqrt{5\pi}}R_0^2(\beta+0.16\beta^2), \qquad (2-2)$$

در شکل (۳-۱۱) مثلث تقارنی ساختار هسته به همراه گروه‌های تقارنی مربوطه، و ویژگی‌های مربوط به مشاهده‌پذیرهای تجربی و همچنین تقارن‌های نقطه ای بحرانی مربوطه در ناحیه ی گذار که در



شکل (۳-۱۰). مقادیر $B(E2:2^+\rightarrow 0^+)$ برای $Z=50-82$ و $N=82-126$، [۵۰].

آن‌ها تغییر شکل ناگهانی رخ می‌دهد، آمده است، [۵۵]. این مطالب در فصول بعدی با تفصیل بیشتری آمده‌اند.



شکل (۳-۱۱). مثلث تقارنی ساختار هسته. گروه‌های تقارنی و ویژگی هندسی در رئوس و تقارن‌های نقطه‌ای بحرانی که مربوط به گذار فاز شکلی‌اند در دایره‌هایی نشان داده شده‌اند. مشاهده‌پذیرهای تجربی مربوطه نیز در هر قسمت آمده‌اند، [۵۵].

انرژی جداسازی دونوترون

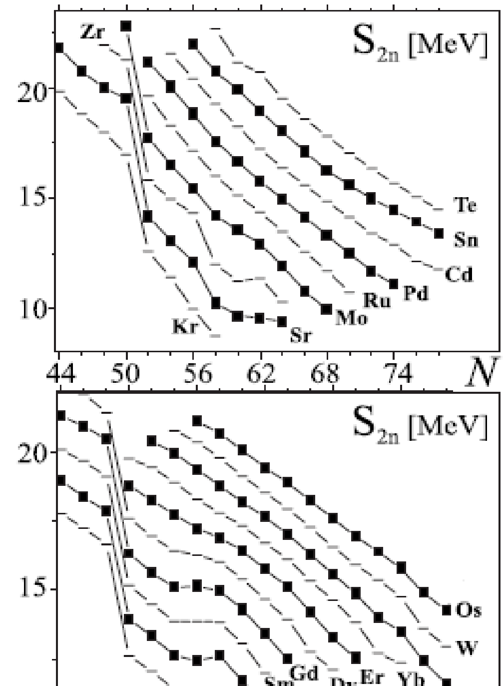
ساختار هسته‌ها را می‌توان از روی مقدار جرم و انرژی‌های بستگی نیز تشخیص داد. از آنجا که انرژی‌های بستگی از حدود $8MeV$ بر نوکلئون تا حتی بالاتر از $1GeV$ هم در هسته‌های سنگین می‌رسد، مناسب است که انرژی‌های بستگی مختلف را مورد بررسی قرار دهیم، [۵۰]. در اینجا انرژی جداسازی دو نوترون ، S_{2n}، را در نظر می‌گیریم. انرژی جدا سازی دو نوترون انرژی لازم برای جدا کردن آخرین دو نوترون از هسته است و طبق رابطه زیر تعریف می‌شود

$$S_{2n}(Z,N) = B(Z,N) - B(Z,N-2), \qquad (3-2)$$

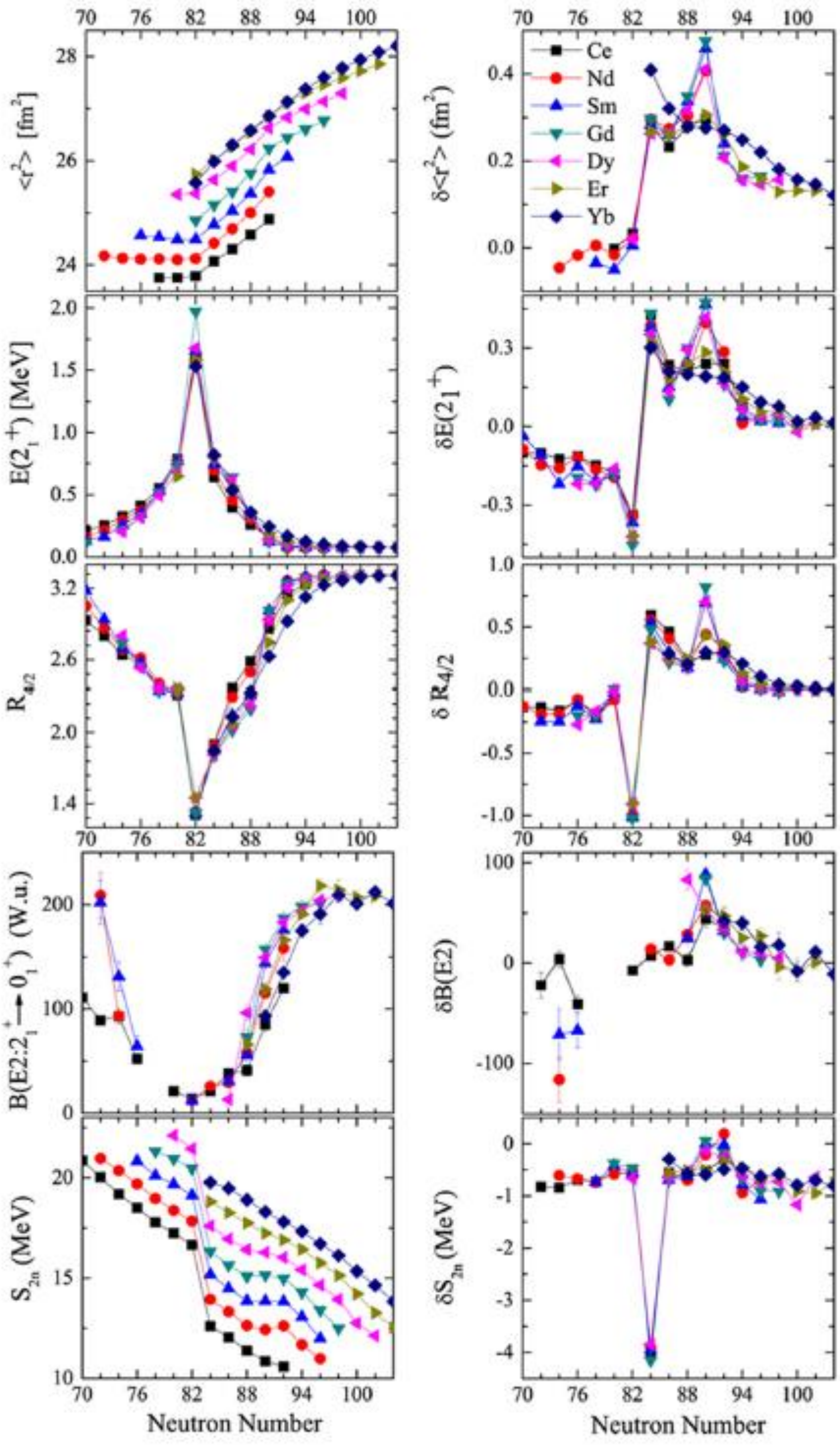
که در آن B انرژی بستگی است. انرژی جداسازی دو نوترون به دو دلیل دارای اهمیت زیادی است . اول این که جرم‌های هسته‌ها کلیه‌ی برهم کنش‌های درون هسته و نقش آن‌ها را به تصویر می‌کشند

و دوم این که اندازه گیری جرم هسته‌ها ممکن است و جرم آن‌ها قابل دسترسی است. جرم هسته‌ها بسیار پیش‌تر از اطلاعات اسپکتروسکوپی مربوط به هسته‌ها در دسترس بوده است، [۱].

در شکل (۳-۱۲) برای دو ناحیه‌ی جرمی متفاوت، انرژی جداسازی دونوترون بر حسب تعداد نوکلئون-ها آورده شده است. کاهش چشمگیر S_{2n} بلافاصله پس از بسته شدن پوسته‌ها (اعداد جادویی) دیده می‌شود. در این حالت بستگی نوکلئون‌ها، بعد از اعداد جادویی، کاهش می‌یابد. چنین رفتارهای خطی و غیر خطی در منحنی‌ها به علت پدید آمدن اثرات جمعی ظاهر می‌شود. این موضوع در بخش گذار فازهای کوانتومی تحلیل خواهد شد.



شکل (۳-۱۲). مقادیر انرژی جداسازی دو نوترون بر حسب تعداد نوکلئون‌ها، برای دو ناحیه‌ی جرمی که در آن‌ها تغییر شکل رخ می‌دهد، [۵۰].



شکل (۳-۱۳). مشاهده‌پذیرهای فیزیکی در هسته‌های تغییر شکل یافته که بر حسب تعداد نوترون‌ها رسم شده‌اند، و رفتار منحنی‌ها در نواحی‌ای که در آن‌ها تغییر شکل ناگهانی رخ می‌دهد نمایان است، [۱].

شکل (۳-۱۳) نیز بر این ویژگی‌ها تاکید دارد. همان طور که دیدیم مشاهده‌پذیرهای مختلف رفتارهای متفاوتی با افزایش تعداد نوکلئون‌های ظرفیت دارند. $E(2_1^+)$ با افزایش تعداد نوترون‌های ظرفیت کاهش می‌یابد، $R_{4/2}$ ازایش می‌یابد، S_{2n} کاهش می‌یابد و در نواحی‌ای که گذار شکلی اتفاق می‌افتد تخت است، مقادیر $B(E2)$ به سرعت افزایش می‌یابند و نزدیک پوسته‌ی نیمه پر دارای قله-اند. از آن جا که مطلب ما راجع به تغییر ساختار است، موجه است که تفاوت مشاهده‌پذیرها را برای هسته‌های مجاور هم بررسی کنیم. دیده می‌شود که مقادیر دیفرانسیل این مشاهده‌پذیرها که تفاوت مقادیر آن‌ها برای تعداد نوترون‌های N و $N-2$ است، رفتار مشابهی دارند. این موضوع در شکل (۳-۱۳) نشان داده شده است که منحنی شعاع بار را نیز شامل می‌شود. برای هر دیفرانسیل یک نقطه‌ی تکینگی[۳۴] نزدیک پوسته‌ی بسته و یک بی‌نظمی[۳۵] شدید در ناحیه‌ی گذار وجود دارد و در نواحی دیگر منحنی هموار[۳۶] است.

پس از مطالعه و بررسی مشاهده‌پذیرها و ویژگی‌های هسته‌های تغییر شکل یافته در این فصل، آماده-ایم که بر نقاطی که در آن‌ها شکل هسته‌ها به طور ناگهانی تغییر می‌کند تمرکز کنیم. این مطلب موضوع فصل بعدی است.

[34] singularity
[35] irregularity
[36] smooth

گذار فاز شکلی در هسته‌ها

مقدمه

گذار فاز کوانتومی[۳۷] که گذار فاز دمای صفر یا گذار فاز حالت پایه نیز نامیده می‌شود به تغییر ساختار حالت پایه یا حالت تعادل که با تغییر متغیرهایی در سیستم اتفاق می‌افتد، مربوط می‌شود. در مورد هسته‌های اتمی این گذار فازها به معنی تغییر سریع ساختار هسته با تغییر تعداد نوکلئون‌هاست.

گذار فازهای کوانتومی بین فازهای حالت پایه‌ی قابل مقایسه، با تغییر پارامترهای کنترلی غیر از دما، در دمای صفر حاصل می‌شوند. در حالت هسته‌های اتمی گذار فازهای مرتبه‌ی یک و دو بین سیستم-هایی که با شکل‌های حالت پایه مشخص می‌شوند روی می‌دهند. گذار فازهای کوانتومی در هسته‌های اتمی هم به صورت تئوری و هم به صورت تجربی مورد بررسی قرار می‌گیرند [۵۰ و ۵۶].

شواهد تجربی بسیاری نشان می‌دهند که شکل هسته نقش مهمی در تعیین ویژگی‌ها و حالت‌های برانگیخته آنان دارد. با این حال معلوم نیست که چگونه می‌توان ویژگی‌های شکلی را در تئوری میکروسکوپی دخالت داد. این موضوع منجر به ایجاد تعداد زیادی مدل ماکروسکوپی بر پایه توصیف هندسی شکل‌ها یا تقارن‌ها در هسته شده است. پارامترهای آزاد در این مدل‌ها در عمل با هسته‌هایی

[37] quantum phase transition

از نوع خاص تطبیق داده می‌شوند که در توصیف تحولات شکلی هسته با تغییر ویژگی‌های حالت پایه و حالت‌های برانگیخته‌ی پایین با پارامترهای مدل راهگشاست. به این ترتیب است که ایده‌ی گذار فاز کوانتومی وارد موضوع می‌شود [۵۰].

گذارفاز شکلی[۳۸] در چارچوب هندسی، با هامیلتونی بور با متغیرهای شکلی مختلف قابل توصیف است. در این چارچوب طیف انرژی حالت‌های برانگیخته و آهنگ گذار چهارقطبی الکتریکی برای هسته‌ها در نقطه‌ی گذار فاز قابل پیش بینی است. در رهیافت جبری شکل‌های مختلف با تقارن‌های دینامیکی ساختارهای جبری متفاوت متناظرند و گذار فازها هنگامی روی می‌دهند که این تقارن‌ها شکسته می‌شوند. در هر دو رویکرد هندسی و جبری توصیف گذار فازهای کوانتومی بر پایه‌ی هامیلتونی ویژه‌ی مدل که تغییر شکل را وصف می‌کند، قابل ارائه است.

در هسته‌های اتمی دیده می‌شود ترازهای انرژی و آهنگ گذارهای الکترومغناطیسی آن‌ها با تغییر تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن‌ها تغییر می‌کند. نتیجه این تغییرات گذار فاز شکلی از یک رفتار جمعی به رفتار جمعی دیگر است. این گذار فازهای کوانتومی که گذار فاز حالت پایه نیز نامیده می‌شوند، در هامیلتونی‌هایی از نوع $H = H_1 + gH_2$ روی می‌دهند. که در آن g پارامتر کنترل و H_1 و H_2 دو فاز متفاوت سیستم را توصیف می‌کنند. مقدار چشمداشتی عملگری که مناسب انتخاب می‌شود و ویژگی‌های حالت سیستم را نشان می‌دهد، به عنوان پارامتر نظم انتخاب می‌شود [۵۷].

---
[38] shape phase transition

رویکرد هندسی- هامیلتونی بور

گذار فازهای کوانتومی شکلی در هسته‌ها به صورت گذار از شکل کروی به شکل بیضی‌گون، با تقارن محوری و بدون تقارن محوری، و یا گذار بین بیضی‌گون‌های با تقارن محوری و بدون تقارن محوری است. شکل‌های هندسی مختلف هسته با مقادیر متفاوت پارامترهای داخلی مربوط به هسته، یعنی (β,γ) متناظرند. پارامتر β انحراف از تقارن کروی و پارامتر γ انحراف از تقارن محوری را نشان می‌دهد. در حالتی که $\beta = 0$ هسته شکل متقارن کروی دارد و با افزایش این پارامتر تغییر شکل در هسته بیشتر می‌شود. پارامتر γ نوع تغییر شکل یافتگی و جهت‌گیری شکل تغییر یافته را نشان می-دهد. در صورتی که این پارامتر مضربی از $\frac{\pi}{3}$ باشد شکل هسته با تقارن محوری به صورت بیضی‌گون کشیده یا بیضی‌گون پخت خواهد بود. برای مقادیر دیگر این پارامتر شکل هسته بدون تقارن محوری است. به همین دلیل در بررسی‌های فازهای شکلی و گذار فازهای شکلی مقدار پارامتر γ در بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{3}]$ در نظر گرفته می‌شود.

حل‌های تحلیلی معادله‌ی ویژه مقداری هامیلتونی بور در نقاط بحرانی که با تابع پتانسیل مناسب به دست می‌آیند تقارن‌های ویژه‌ای از هامیلتونی را به نمایش می‌گذارند که با تقارن‌های دینامیکی سیستم متناظراند. بنابراین با به دست آوردن جواب‌های تحلیلی معادله ویژه مقداری هامیلتونی بور و محاسبه‌ی مشاهده‌پذیرها، در یک نقطه‌ی بحرانی، و مقایسه آن‌ها با نتایج تئوری و تجربی موجود می-توان گذار فازهای شکلی در سیستم را بررسی کرد.

حل‌های هامیلتونی بور که متناظر با تقارن‌های نقطه‌ای بحرانی در نقطه‌ی گذار فازهای شکلی‌اند و تاکنون مورد بررسی قرار گرفته‌اند عبارتند از:

۱) گذار از حالت کروی نوسانی به حالت γ -unstable و یا γ -soft، بیضی‌گون بدون تقارن محوری، که با E(5) نمایش داده می‌شود.

در این حالت تابع پتانسیل مستقل از γ در نظر گرفته می‌شود. این گذار از نوع گذار مرتبه دوم است.

۲) گذار از حالت کروی نوسانی به حالت بیضی‌گون کشیده دورانی، که با $X(5)$ نمایش داده می-شود.

در این حالت بخش مربوط به γ در تابع پتانسیل به صورت نوسانگر هماهنگ حول نقطه‌ی صفر در نظر گرفته می‌شود، که دارای یک کمینه‌ی عمیق در نقطه‌ی $\gamma = 0$ است. این گذار فاز از نوع گذار فازهای مرتبه اول است. بخش مربوط به β در این حالت به صورت چاه پتانسیل نامتناهی در نظر گرفته می‌شود.

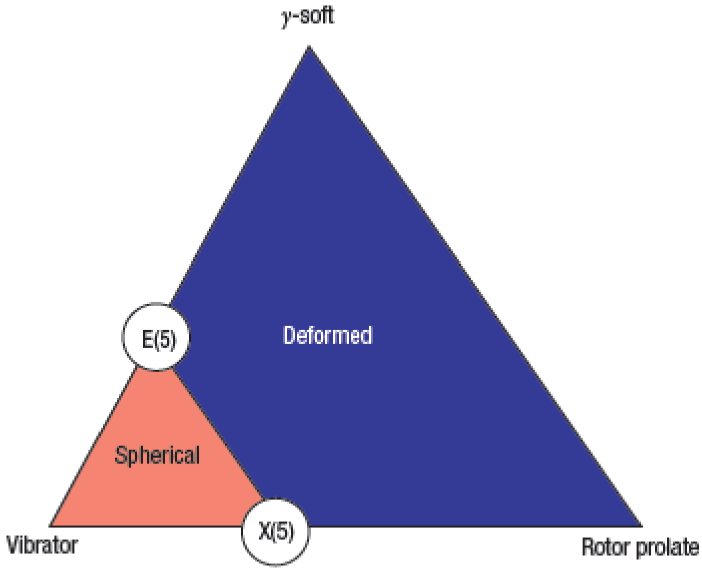
۳) گذار از حالت بیضی‌گون کشیده به حالت بیضی‌گون پخت، که با $Z(5)$ نمایش داده می‌شود.

در این حالت بخش مربوط به γ در تابع پتانسیل به صورت نوسانگر هماهنگ حول نقطه‌ی $\gamma = \frac{\pi}{6}$ در نظر گرفته می‌شود. و فرض بر این است که پتانسیل در این نقطه دارای یک مینیمم عمیق است.

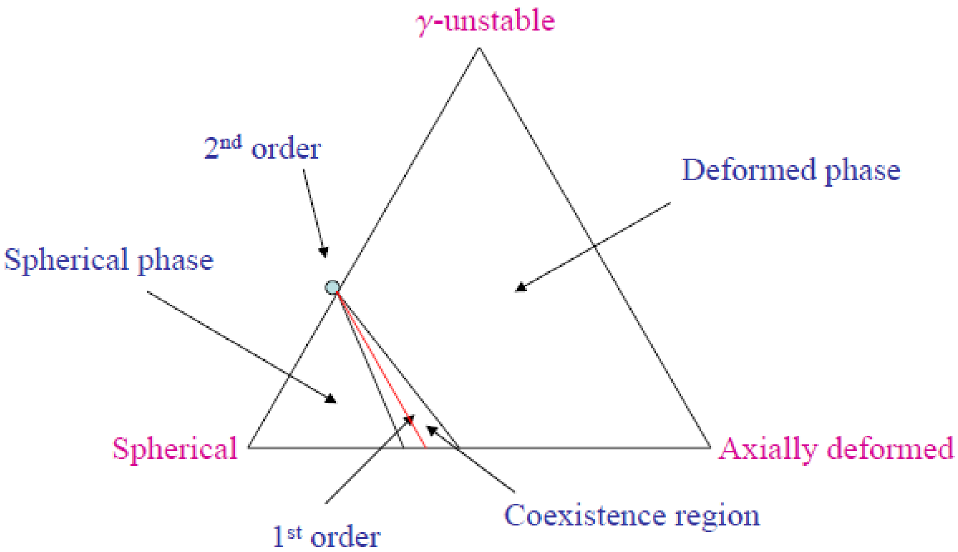
در تقارن‌های فوق عدد ۵ نمایانگر فضای ۵ بعدی است. این تقارن‌ها گروه‌های تقارنی جبری را تعریف نمی‌کنند.

در شکل (۴-۱)، که مثلث تقارنی نامیده می‌شود، شکل‌های کروی و بیضی‌گون در دو ناحیه با دو رنگ متفاوت نشان داده شده‌اند. تقارن‌های نقطه‌ای متناظر با حل‌های ویژه‌ی هامیلتونی بور در دایره‌هایی روی اضلاع مثلث آمده‌اند. تغییر فاز شکلی مربوط به هر تقارن نقطه‌ای، بین حالت کروی و رأس مجاور دیگر رخ می‌دهد.

در شکل (۴-۲)، فازهای شکلی در رئوس و در دو ناحیه‌ی مثلث تقارنی آمده‌اند. نوع و مرتبه‌ی گذار فاز شکلی نیز در هر قسمت مشخص شده است. ناحیه‌ای که در آن فاز شکلی کروی و بیضی‌گون با تقارن محوری به طور همزمان وجود دارند در شکل آمده است.



شکل (۴-۱). مثلث تقارنی ساختار هسته. ویژگی هندسی شکلی در رئوس و تقارن‌های نقطه‌ای بحرانی که مربوط به گذار فاز شکلی‌اند در دایره‌هایی نشان داده شده‌اند ، [۵۵].

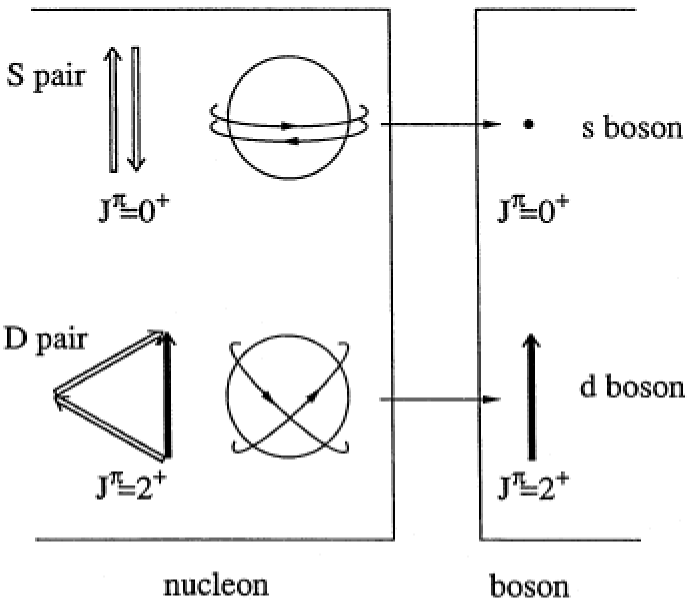


شکل (۴-۲). مثلث تقارنی ساختار هسته. ویژگی هندسی شکلی و نوع گذار فازهای شکلی مشخص شده‌اند ، [۵۸].

مدل بوزونی برهم کنشی

در مدل بوزونی بر هم کنشی[39] زوج نوکلئون‌های یکسان که خارج از پوسته‌های بسته‌ی کروی، متناظر با اعداد جادویی، هسته قرار می‌گیرند، نوکلئون‌های ظرفیت، به صورت بوزون‌هایی با اسپین صحیح در نظر گرفته می‌شوند. بوزون‌های متناظر با زوج نوکلئون‌های یکسان، زوج پروتون یا زوج نوترون، بوزون‌های s با $J^{\pi}=0^{+}$ یا d با $J^{\pi}=2^{+}$ نامیده می‌شوند، [۵۲ و۵۹].

در شکل (۴-۳)، تناظر بین زوج‌های نوکلئونی S و D، و بوزون‌های s و d نشان داده شده‌اند.



شکل (۴-۳). تناظر بین جفت‌های نوکلئونی، S و D، و بوزون‌ها، s و d، [۵۲].

از آنجایی که برای بوزون‌های فوق شرایط زیر وجود دارد

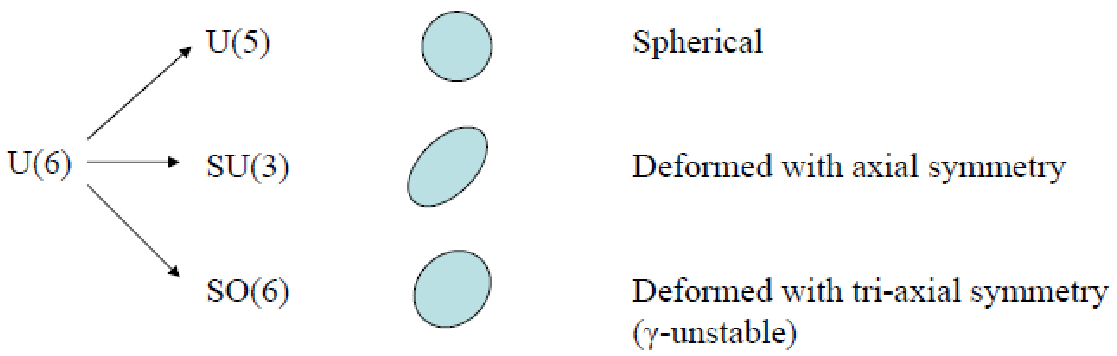
$$J=0 \Rightarrow M=0$$
$$J=2 \Rightarrow M=-2,-1,0,1,2$$

---
39 Interacting Boson Model

متوجه می‌شویم که تعداد شش حالت بوزونی مختلف وجود دارد. بنابراین برای توصیف ویژگی‌های این سیستم، یک فضای شش بعدی مورد نیاز است. گروه جبری مورد نیاز برای توصیف این سیستم گروه $U(6)$ است. عملگرهای خلق در این گروه عملگرهای $s^{\dagger}$ و $d^{\dagger}$ در نظر گرفته می‌شوند. ترکیب عملگرهای خلق در این گروه تعداد ۳۶ مولد این گروه را به صورت زیر ایجاد می‌کند

$$s^{\dagger}s\,,s^{\dagger}d_{\mu}\,,d_{\mu}^{\dagger}s\,,d_{\mu}^{\dagger}d_{\nu}\,; \qquad \mu,\nu=\pm2,\pm1,0.$$

گروه $U(6)$ دارای زیر گروه‌های $U(5)$ ، $SU(3)$ و $SO(6)$ است که هر کدام از آن‌ها متناظر با تقارن‌هایی ویژه‌اند که برای توصیف فازهای مختلف شکلی هسته‌ها به کار می‌روند، شکل (۴-۴).

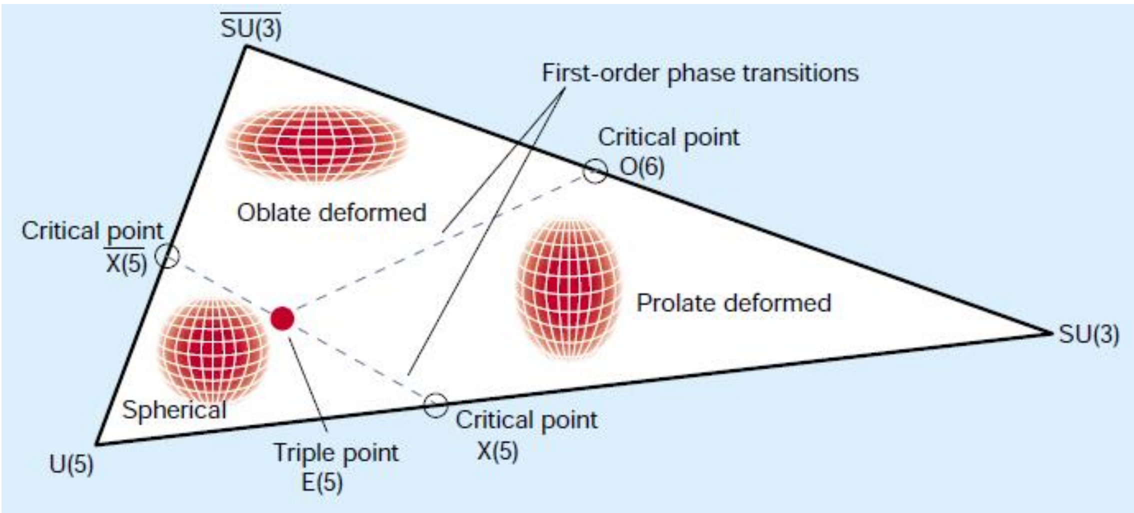


شکل (۴-۴). تناظر بین گروه‌های تقارنی جبری و فازهای شکلی هسته‌ها.

در چارچوب مدل بوزونی برهم کنشی که ساختار هسته‌های زوج-زوج را با تقارن های U(6) توضیح می‌دهد، گذار فازهای کوانتومی با استفاده از حد کلاسیکی مدل مورد مطالعه قرار گرفته است. گروه تقارنی U(6) دارای تقارن‌های دینامیکی U(5) ، SU(3) ، و O(6) است که به ترتیب برای هسته‌های نوسانی، تغییر شکل یافته با تقارن محوری و $\gamma-$ unstable متناسب‌اند. معلوم شده است که بین U(5) و O(6) یک گذار فاز شکلی مرتبه دو، بین U(5) و SU(3) یک گذار فاز شکلی مرتبه یک وجود دارد و هیچ گذار فاز شکلی بین O(6) و SU(3) وجود ندارد. این گذار فازهای شکلی در مثلث تقارن مدل بوزونی برهم کنشی جای داده می‌شوند. در سه راس این مثلث سه زیرگروه تقارنی این مدل قرار

داده می‌شوند. مشخص شده است که ویژگی‌های هسته‌ای که در نقطه‌ی بحرانی گذار فاز شکلی قرار دارد با حل‌های ویژه‌ی هامیلتونی بور توصیف می‌شود. تقارن نقطه‌ای بحرانی E(5) متناظر است با نقطه‌ی بحرانی مرتبه دو بین U(5) و O(6)، و تقارن نقطه‌ای بحرانی X(5) با نقطه‌ی بحرانی مرتبه یک بین U(5) و SU(3) متناظر است، [۵۲].

در شکل (۴-۵)، در هر رأس مثلث تقارن‌های جبری متناظر با هر سه شکل کروی، بیضی‌گون کشیده و بیضی‌گون پخت آمده‌اند. نقاط گذار و تقارن‌های بحرانی وابسته به آن‌ها و همچنین نوع گذار فاز مربوط به آن‌ها نیز در شکل آمده‌اند. پیشنهاد شده است که نقطه‌ی سه گانه‌ای در هسته‌ها وجود دارد که در آن گذار فاز مرتبه‌ی دو، گذار بین شکل هسته‌ای کروی و شکل هسته‌ای تغییر یافته‌ی بیضی-گون کشیده یا پخت اتفاق می‌افتد [۶۰].



شکل (۴-۵). مثلث تقارنی ساختار هسته. گروه‌های تقارنی مربوط به هر فاز شکلی در رئوس و تقارن‌های نقطه‌ای بحرانی که مربوط به گذار فاز شکلی‌اند در دایره‌هایی نشان داده شده‌اند ، [۶۱].

دو تقارن نقطه‌ای بحرانی عبارتند از: E(5) و X(5) که به ترتیب متناظرند با یک گذار فاز کوانتومی مرتبه دو بین شکل‌های کروی و مستقل از گاما، و گذار فاز کوانتومی مرتبه یک بین شکل‌های کروی و حالت با تقارن محوری. حد تقارنی O(6) مدل بوزون برهم کنشی به عنوان تقارن نقطه‌ای بحرانی

برای گذار بین شکل‌های کشیده وپخت $SU(3)$ تشخیص داده می‌شود. نقطه‌ی ایزوله‌ی گذار فاز مرتبه دو، که $E(5)$ نامیده می‌شود، نقطه‌ی سه‌گانه‌ای را نشان می‌دهد که در آن خطوط گذار فاز مرتبه یک با هم تلاقی می‌کنند، شکل (۴-۵). گذار فاز کوانتومی به عنوان تابعی از تعداد نوکلئون‌ها موضوع جاری مهمی در بررسی ساختار هسته شده است، و شامل گستره‌ی بزرگی از موضوعات از تقارن‌های دینامیکی تا مفهوم نظم و بی‌نظمی در طیف هسته‌ها می‌شود.

برای آن‌که ویژگی‌های و فازهای شکلی هسته‌ها در قالب هر مدل بررسی شود لازم است که هامیلتونی مربوط بر حسب عملگرهای متناظر بیان شود. با بررسی این هامیلتونی و تقارن‌های آن و یا شکسته شدن تقارن‌های موجود در آن ویژگی‌های هسته‌های اتمی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تناظر بین حل‌های هامیلتونی بور و پیش بینی‌های مدل بوزونی بر هم‌کنشی در شکل (۴-۵) آمده است.

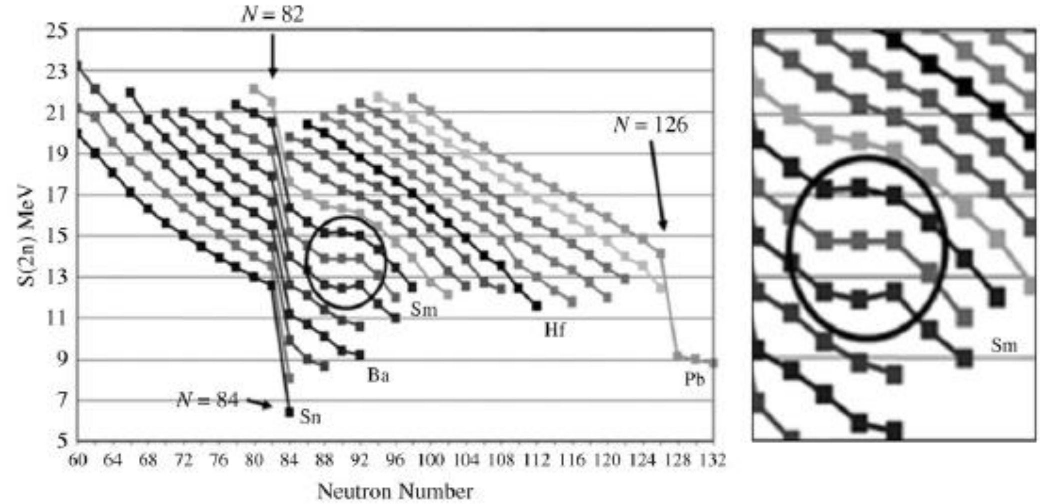
شواهد تجربی گذار فازها

برای گذار فازهای شکلی هسته‌ها شواهد تجربی وجود دارد. در واقع وجود گذار فازهای شکلی و مرتبه این گذارها را می‌توان با تعیین انرژی جداسازی دو نوترون در هسته‌ها تشخیص داد.

در شکل‌های (۴-۶) و (۴-۷)، که به ترتیب انرژی جداسازی دو نوترون را بر حسب تعداد نوترون‌ها و عدد جرمی نشان می‌دهند، رفتار متفاوت منحنی‌ها در نقاطی برای تعدادی از هسته‌ها کاملا نمایان است. شکستگی موجود در منحنی‌ها با افزایش تعداد نوترون‌ها در بعضی از هسته‌ها اتفاق می‌افتد که به نظر می‌آید در ساختار آن‌ها تغییرات متفاوتی ایجاد می‌شود.

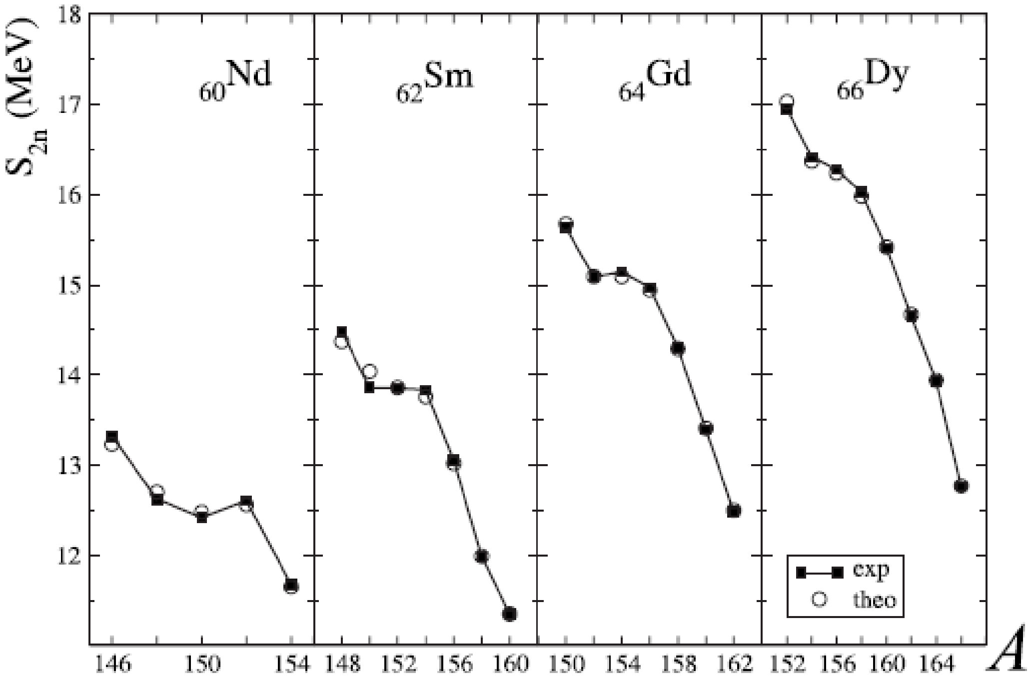
وجود شکستگی در منحنی انرژی جداسازی دو نوترون ناشی از گذار فازی است که در شکل هسته اتفاق می‌افتد. با بررسی منحنی‌ها می‌توان نوع و و مرتبه‌ی این گذارهای فازی را تعیین کرد.

برای نمونه منحنی انرژی جداسازی دو نوترون را برای ایزوتوپ‌های هسته‌ی ساماریوم، Sm، مورد بررسی قرار می‌دهیم. هسته‌های ساماریوم با تعداد ۶۲ پروتون و با تعداد نوترون‌هایی که از کمتر از ۸۲ شروع می‌شود و تا مقادیر بالاتر از ۸۲ دارای انرژی‌های جدا سازی دو نوترون متفاوت‌اند، که این مطلب در شکل (۴-۶) نمایان است. افت انرژی جداسازی دو نوترون بعد از بسته شدن مدارها با تعداد ۸۲ نوترون برای همه‌ی هسته‌ها در شکل (۴-۶) وجود دارد. در مورد هسته‌های ساماریوم این ویژگی نیز وجود دارد که رفتار این منحنی در ناحیه‌ی اطراف حالت با ۹۰ نوترون متفاوت است. در این ناحیه منحنی تقریبا هموار است که ویژگی متمایزی به شمار می‌آید.

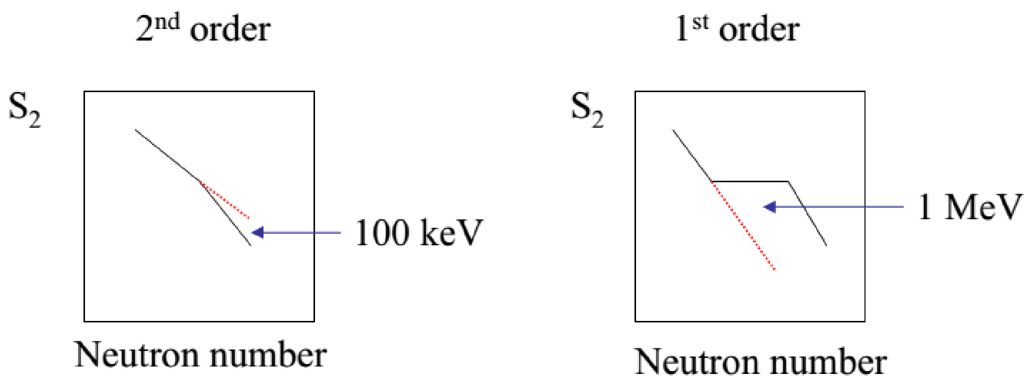


شکل (۴-۶). انرژی جداسازی دو نوترون بر حسب تعداد نوترون‌ها. رفتار متفاوت این منحنی برای بعضی از هسته‌ها در شکل نشان داده شده است ، [۵۸].

مطابق منحنی‌های موجود در شکل (۴-۸)، در صورتی که شکستگی در منحنی انرژی جداسازی دو نوترون به یکی از این دو صورت باشد، می‌توان تشخیص داد که گذار فاز از نوع مرتبه‌ی اول یا مرتبه‌ی دوم است. در گذار فاز مرتبه‌ی یک تغییرات در سیستم به صورت ناگهانی روی می‌دهند، در حالی که در گذار فاز مرتبه‌ی دو این تغییرات به طور پیوسته در سیستم ایجاد می‌شوند.



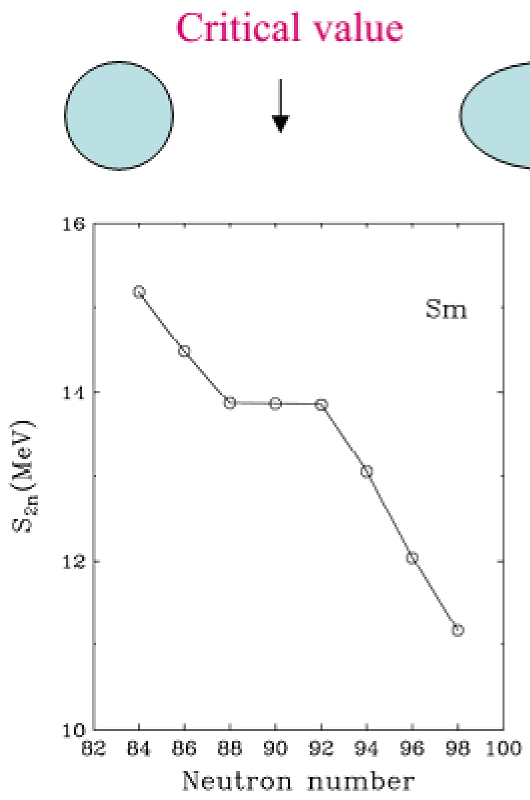
شکل (۴-۷). انرژی جداسازی دو نوترون بر حسب عدد جرمی. این منحنی برای بعضی از هسته‌ها در شکل نشان داده شده است ، [۶۲].



شکل (۴-۸). انرژی جداسازی دو نوترون بر حسب تعداد نوترون‌ها. رفتار منحنی مرتبه‌ی گذار را تعیین می‌کند.

در مورد انرژی جداسازی دو نوترون در ساماریوم، شکل (۴-۹) را در نظر می‌گیریم. از مقایسه‌ی این منحنی با منحنی‌های موجود در شکل (۴-۸)، به این نتیجه می‌رسیم که گذار فاز در مورد این هسته،

مرتبه‌ی اول است. پیش بینی مدل بوزونی برهم کنشی این است گذار بین فاز کروی و شکل کشیده‌ی با تقارن محوری رخ می‌دهد.

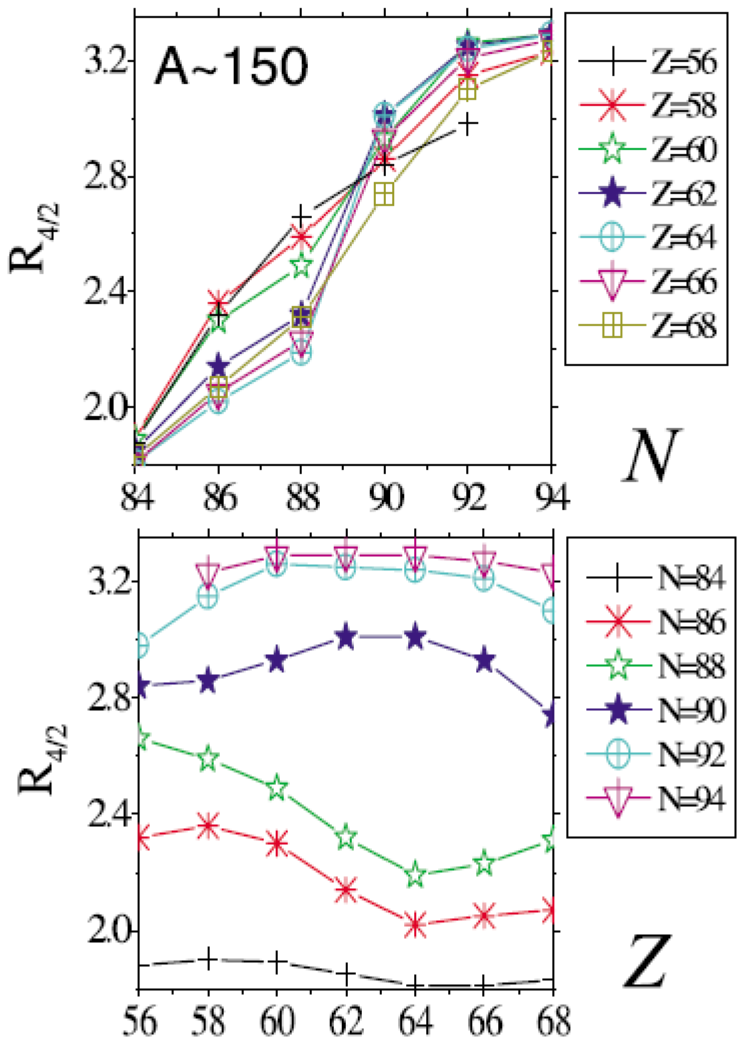


شکل (۴-۹). انرژی جداسازی دو نوترون بر حسب تعداد نوترون‌ها برای ایزوتوپ‌های ساماریوم. مدل بوزونی بر هم کنشی پیش بینی می‌کند که این گذار بین حالت‌های کروی متقارن و بیضی‌گون متقارن رخ می‌دهد، [۵۰].

اکنون با استفاده از داده‌های تجربی، منحنی $R_{4/2}$ بر حسب تعداد نوکلئون‌ها را بررسی می‌کنیم. در شکل (۴-۱۰) این منحنی برای ایزوتوپ‌های هسته‌های مختلف ارائه شده است. در قسمت بالای شکل که در آن منحنی $R_{4/2}$ بر حسب تعداد نوترون‌ها رسم شده است، علامت ستاره‌ی توپر آبی تیره مربوط به هسته‌ی ساماریوم، ${}_{62}Sm$، با $Z=62$ است. تغییر ناگهانی این منحنی در $N=90$ و افزایش ناگهانی مقدار $R_{4/2}$ در این نقطه، با توجه به مطالبی که در فصل قبل ارائه شد، نشان می‌دهد که تغییر شکل ناگهانی در ساختار هسته روی می‌دهد.

در شکل (۴-۱۰)، در منحنی $R_{4/2}$ بر حسب تعداد پروتون‌ها، به بیشینه رسیدن منحنی مشخص شده با علامت ستاره‌ی توپر آبی تیره را برای $Z = 62$ شاهدیم. این منحنی‌ها با توجه به مطالب بیان شده در فصل قبل بر این نکته اشاره دارند که در ساختار هسته‌های ساماریوم با افزایش تعداد نوکلئون‌ها، تغییرات اساسی به وجود می‌آید.

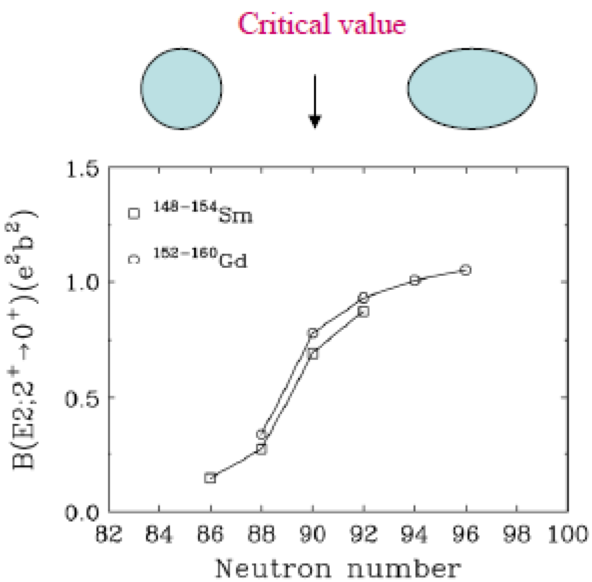
شکل (۳-۱)، در فصل پیش، نیز بر این نکته اشاره داشت که هنگام تغییر شکل هسته از حالت کروی به حالت بیضی‌گون، با افزایش مقدار $R_{4/2}$ مواجهیم.



شکل (۴-۱۰). مقادیر $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$ بر حسب تعداد نوترون‌ها (بالا) و بر حسب تعداد پروتون‌ها (پایین)،[۵۰].

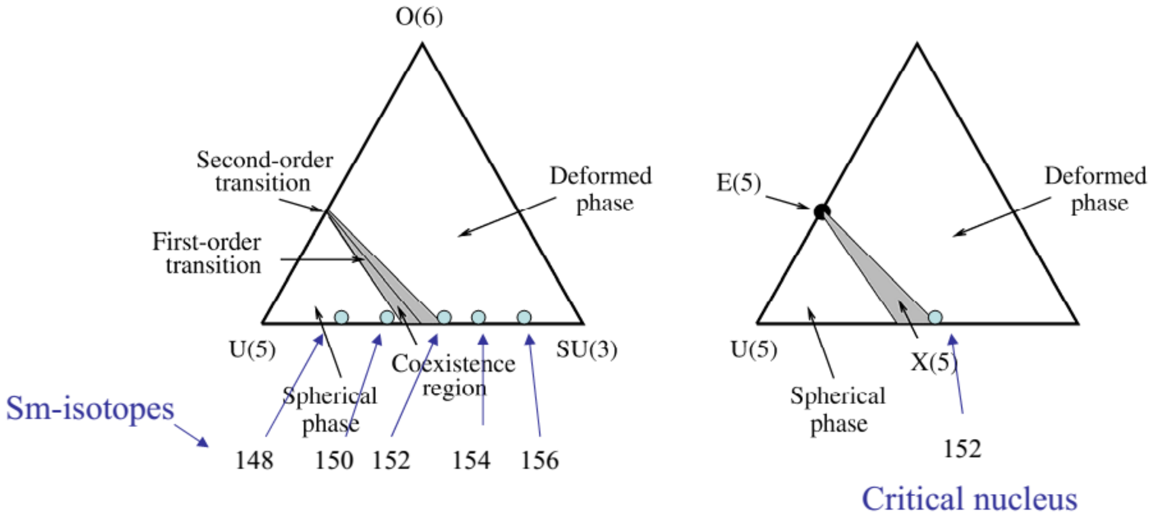
کمیت دیگری که باید در مورد هسته‌های ساماریوم مورد ارزیابی قرار گیرد مقدار شدت گذار چهار-قطبی الکتریکی است. هنگامی که توزیع بار هسته به طور متوسط تغییر شکل می‌یابد به این معنی است که گشتاور چهارقطبی الکتریکی هسته نیز تغییر می‌یابد. بنابراین، همچنان که در فصل قبل هم بیان شد، تغییر مقدار گشتاور چهار قطبی الکتریکی، Q، می‌تواند معیاری برای تغییر شکل یا گذار فاز شکلی هسته باشد. بنابراین با بررسی شدت گذار چهارقطبی الکتریکی می‌توان گذار فازهای شکلی هسته‌ها را توصیف کرد.

در شکل (۴-۱۱)، مقادیر $B(E2:2^+ \to 0^+)$ برای پایین‌ترین حالت‌ها برای ایزوتوپ‌های ساماریوم بر حسب تعداد نوترون‌ها رسم شده است. همانگونه که از منحنی پیداست مقدار $B(E2)$ با افزایش تعداد نوترون‌ها افزایش می‌یابد و در نقطه‌ای که $N=90$، افزایش ناگهانی شدت گذار چهارقطبی الکتریکی را می‌بینیم. این افزایش نشان می‌دهد که هسته از حالت کروی به حالت بیضی‌گون کشیده تغییر شکل داده است.



شکل (۴-۱۱). مقادیر $B(E2:2^+ \to 0^+)$ برای ایزوتوپ‌های هسته‌های Sm و Gd، [۶۲].

در شکل (۴-۱۲) گذار فاز شکلی که در هسته‌ی ساماریوم با تغییر تعداد نوکلئون‌ها پیش می‌آید هماهنگ با مثلث تقارنی ساختار هسته نشان داده شده است. در مثلث سمت راست، تقارن نقطه‌ای متناظر با این گذار فاز مرتبه‌ی اول در ناحیه‌ی گذار نشان داده شده است.

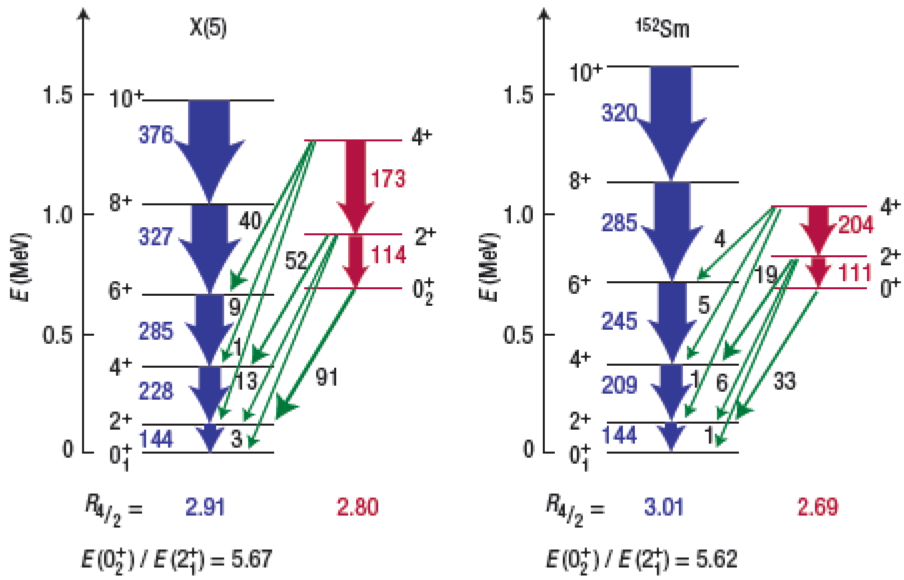


شکل (۴-۱۲). وجود گذار فاز شکلی از نوع اول، و گذار از فاز کروی به حالت تغییر شکل یافته با تقارن محوری در هسته‌ی ساماریوم، [۵۸].

در شکل (۴-۱۳)، مشاهده‌پذیرهای تجربی ایزوتوپ هسته‌ی ساماریوم با $Z = 62$ و $N = 90$ در سمت راست آمده است [۶]. این ایزوتوپی است که نشان داده شد هسته بحرانی است. در سمت چپ شکل نتایج حاصل از محاسبات در نقطه‌ی بحرانی، X(5) ، طبق مرجع [۱۰] برای مقایسه آورده شده است.

در مرجع [۱۰]، نشان داده شده است که حل‌های تحلیلی هامیلتونی بور در نقطه‌ی گذار فاز، که با انتخاب شکل مناسب برای پتانسیل میسر است، تقارن‌های دینامیکی سیستم را در آن نقطه توصیف می‌کنند. در مرجع فوق، هامیلتونی بور برای حالتی مورد بررسی قرار گرفته است که در آن بخش وابسته به β ی پتانسیل یک چاه پتانسیل به عمق بی‌نهایت و بخش γی پتانسیل نوسانگر هماهنگ حول نقطه ی $\gamma = 0$ است. با محدود کردن پارامتر γ در این نقطه هسته مجاز است شکل متقارن

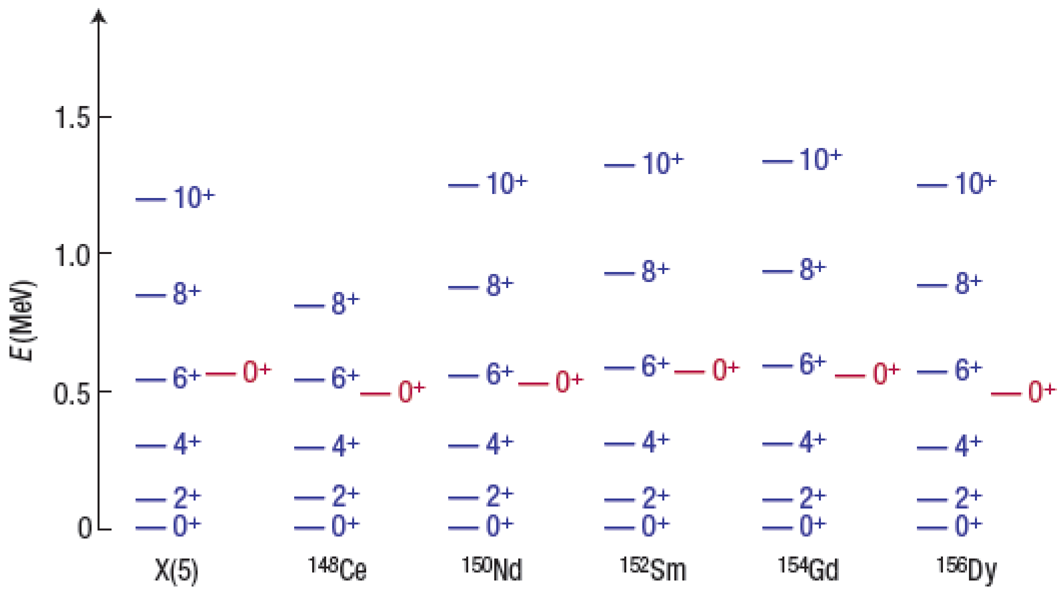
کروی و یا شکل بیضی‌گون کشیده و با تقارن محوری را داشته باشد، و گذار بین این دو حالت ممکن است. نتایج حاصل از مدل هامیلتونی بور، مدل برهم کنشی بوزونی و نتایج تجربی با هم در توافق‌اند.



شکل (۴-۱۳). گذار فاز شکلی در هسته‌ی ساماریوم. طیف انرژی و شدت B(E2) حاصل از نتایج تجربی (راست) و نتایج حاصل از مدل X(5) (چپ)، با هم مقایسه شده‌اند، [۶].

در شکل (۴-۱۴)، طیف انرژی حاصل از مدل X(5) با طیف انرژی حاصل از نتایج تجربی تعدادی از هسته‌هایی که گذار فاز شکلی در آن‌ها می‌تواند از حالت متقارن کروی به بیضی‌گون کشیده باشد، مقایسه شده‌اند. برای آسان‌تر کردن مقایسه انرژی ترازها نسبت به انرژی تراز 2_1^+ سنجیده شده‌اند. هسته‌های موجود در این شکل کاندیداهای مناسبی برای ساختار X(5) اند.

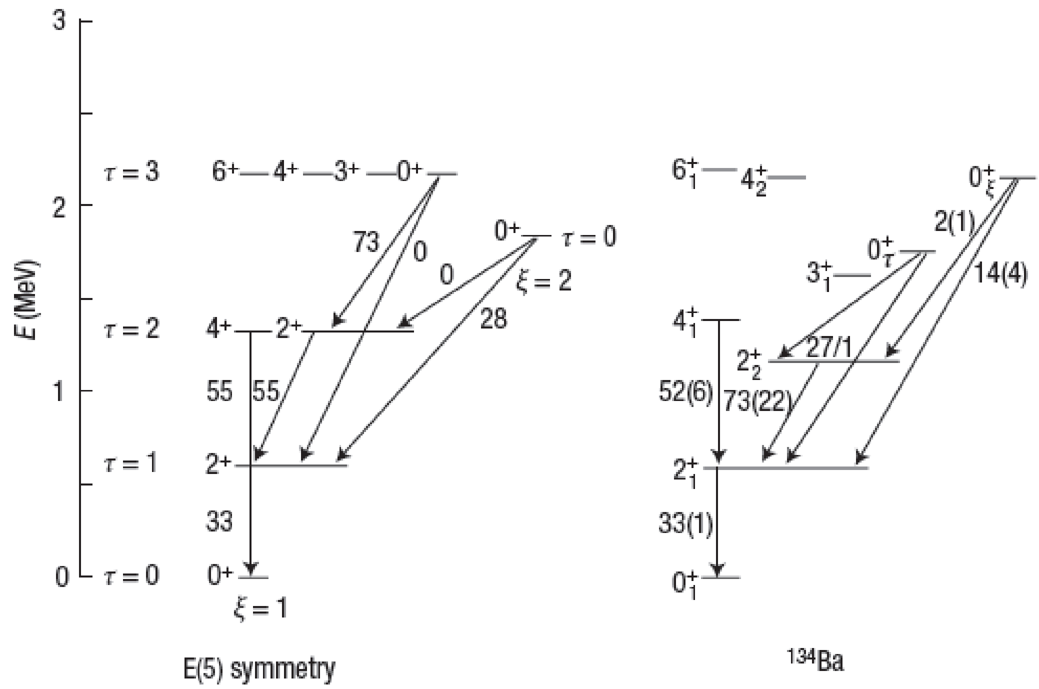
هسته‌های کاملا تغییر شکل‌یافته به حالت بیضی‌گون کشیده با تقارن محوری در مرجع [۶۳] به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این مرجع، نتایج تئوری با داده‌های موجود تجربی برای تعدادی از هسته‌ها مورد مقایسه قرار گرفته‌اند.



شکل (۴-۱۴). طیف انرژی حاصل از نتایج تجربی برای تعدادی از هسته ها که با طیف حاصل از مدل X(5) مقایسه شده اند، [۵۵].

در شکل (۴-۱۵)، نتایج حاصل از بررسی‌های مدل E(5) [۵]، با داده‌های تجربی موجود برای هسته ^{134}Ba مقایسه شده‌اند. ^{134}Ba هسته ای بحرانی است که پیش بینی می‌شود گذار فاز شکلی در آن برای هسته‌های Ba از حالت کروی متقارن به حالت بیضی‌گون بدون تقارن محوری، γ -soft، روی دهد. این گذار فاز همچنان که پیشتر بیان شد گذار فاز مرتبه دو است. در شکل (۴-۱۵)، پارامترهای τ و ξ معرف اعداد کوانتومی‌اند که در حل‌های هامیلتونی بور در مرجع [۵] ظاهر می‌شوند.

در گذار فازهای مرتبه‌ی یک ویژگی‌های سیستم به طور ناگهانی تغییر می‌کنند، در حالی که در گذار فاز مرتبه‌ی دو ویژگی‌های سیستم به تدریج و به طور پیوسته تغییر می‌کنند. در گذار فاز مرتبه‌ی یک در ناحیه‌ی بحرانی هم زمان هر دو فاز سیستم وجود دارند، ولی در گذار فاز مرتبه‌ی دو چنین ویژگی-ای در نقطه‌ی بحرانی دیده نمی‌شود [۵۸].



شکل (۴-۱۵). طیف انرژی حاصل از مدل E(5) با طیف تجربی برای هسته ^{134}Ba مقایسه شده است، [۵].

در این فصل، گذار فازهای شکلی هسته‌ها را در دو قالب مدل X(5) و E(5) مورد بررسی قرار دادیم و دیدیم که شواهد تجربی نیز برای این گذار فازها موجود است. در فصل بعدی به مطالعه و بررسی حالت‌هایی خواهیم پرداخت که در آن‌ها هسته‌ها از ابتدا تغییر شکل یافته و به صورت بیضی‌گون‌اند و گذار فازهای شکلی بین بیضی‌گون‌های مختلف روی می‌دهند.

مطالعه و بررسی هسته‌های بدون تقارن محوری I

مقدمه

ویژگی‌ها و رفتارهای هسته‌های تغییر شکل یافته‌ی بدون تقارن محوری را در قالب مدل بور که یک رویکرد هندسی است بررسی می‌کنیم. هامیلتونی بور که هسته‌هایی که تغییر شکل یافتگی آن‌ها از مرتبه‌ی چهارقطبی است را توصیف می‌کند، به صورت زیر است

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B}\left[\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1,2,3}\frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)}\right] + V(\beta,\gamma), \qquad (1-5)$$

که در آن β و γ مختصات داخلی در مدل جمعی‌اند که میزان تغییر شکل یافتگی سطح هسته را نشان می‌دهند. پارامتر β میزان انحراف نسبت به تقارن کروی و پارامتر γ میزان انحراف نسبت به تقارن محوری را نشان می‌دهد. Q_k ها مولفه‌های اندازه حرکت زاویه‌ای در دستگاه مختصات ذاتی (متصل به جسم) اند، و B پارامتر جرم است.

معادله ویژه مقداری متناظر عبارت است از

$$H_B \Psi(\beta,\gamma,\theta_i) = E\,\Psi(\beta,\gamma,\theta_i), \qquad i=1,2,3. \qquad (2-5)$$

تابع موج با فرض جدایی پذیر بودن متغیرها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\Psi(\beta,\gamma,\theta_i) = \xi_{L,\alpha}(\beta)\eta(\gamma)D^L_{M,\alpha}(\theta_i), \qquad i=1,2,3. \qquad (3-5)$$

که در آن $\theta_i\ (i=1,2,3)$ زوایای اویلرند، $D(\theta_i)$ ها توابع ویگنر، L ویژه مقدار اندازه حرکت زاویه-ای، و M و α به ترتیب ویژه مقادیر تصویر اندازه حرکت زاویه‌ای روی محور z ثابت در آزمایشگاه و محور x' متصل به جسم‌اند.

تابع پتانسیل موجود در هامیلتونی بور معمولا به دو صورت در نظر گرفته می‌شود، یا بستگی به متغیر γ وجود نداشته باشد (حالت $\gamma-soft$) و یا اینکه پتانسیل به این متغیر بستگی دارد. در حالتی که پتانسیل به γ بستگی داشته باشد معمولا پتانسیل به یکی از دو صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\begin{aligned} V(\beta,\gamma) &= V_1(\beta)+V_2(\gamma), \\ V(\beta,\gamma) &= V_1(\beta)+V_2(\gamma)/\beta^2, \end{aligned} \qquad (4-5)$$

در حالت اول جدایی متغیرها ی β و γ در هامیلتونی بور به صورت تقریبی ممکن می‌شود، و در حالت دوم این جدایی کاملا امکان‌پذیر است.

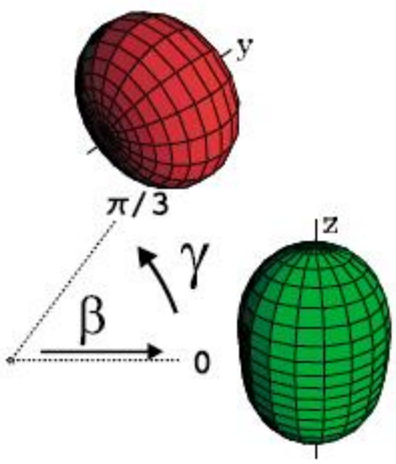
ما معادله‌ی ویژه مقداری را برای حالت‌های بدون تقارن محوری حل می‌کنیم و فرض می‌کنیم که آن بخش از پتانسیل که به پارامتر γ وابسته است، $V_2(\gamma)$، به صورت نوسانگر هماهنگی است که دارای یک کمینه‌ی عمیق در نقطه ی $\gamma=\frac{\pi}{6}$ است. در این حالت حل‌های متناظر هامیلتونی بور برای اطراف این نقطه به دست می‌آیند، که نقطه‌ای است که در آن انتظار می‌رود که گذار از فاز شکلی بیضی‌گون کشیده به فاز شکلی بیضی‌گون پخت اتفاق افتد، [۳۰].

برای حل هامیلتونی بور، به جز در حالت وابسته به زمان، فرض می‌کنیم که پتانسیل به صورت $V(\beta,\gamma)=V_1(\beta)+V_2(\gamma)$ است. به این معنی که حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که متغیرها در معادله‌ی بور به صورت تقریبی قابل جداسازی‌اند.

در این فصل، ابتدا چگونگی تعیین طیف انرژی و شدت گذار چهارقطبی ااکتریکی را بررسی می‌کنیم. سپس مروری خواهیم داشت بر حل‌های هامیلتونی بور در مراجعی که در آن‌ها ویژگی‌های هسته‌های بدون تقارن محوری مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

طیف انرژی

در هسته‌های بدون تقارن محوری $0<\gamma<\frac{\pi}{3}$. در این بازه شکل هسته از حالت بیضی‌گون کشیده در $\gamma=0$ به بیضی گون پخت در $\gamma=\frac{\pi}{3}$ تغییر پیدا می‌کند، شکل (۵-۱).



شکل (۵-۱). تقارن‌های محوری برای مقادیر $\gamma=0$ و $\gamma=\frac{\pi}{3}$. ناحیه‌ی $0<\gamma<\frac{\pi}{3}$ بدون تقارن محوری‌اند.

در حالتی‌که پتانسیل یک می‌نیمم عمیق در نقطه‌ی $\gamma=\frac{\pi}{6}$ داشته باشد، جمله‌ی شامل مولفه‌های اندازه حرکت به صورت $4(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2)-3Q_1^2$ در می‌آید. با استفاده از این نتیجه در معادله‌ی شرودینگر متناظر با هامیلتونی بور و معرفی انرژی کاهش یافته‌ی[۴۰] $\varepsilon=2BE/\hbar^2$ و پتانسیل کاهش یافته‌ی $u=2BV/\hbar^2$ ، و با فرض اینکه پتانسیل کاهش یافته را بتوان به صورت $u(\beta,\gamma)=u(\beta)+v(\gamma)$ نوشت، معادله‌ی شرودینگر متناظر به صورت تقریبی به دو معادله‌ی زیر قابل جداسازی است

$$\left[-\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{4\beta^2}[4L(L+1)-3\alpha^2]+u(\beta)\right]\xi_{L,\alpha}(\beta)=\varepsilon_\beta\xi_{L,\alpha}(\beta), \qquad (5-5)$$

$$\left[-\frac{1}{\langle\beta^2\rangle\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+v(\gamma)\right]\eta(\gamma)=\varepsilon_\gamma\eta(\gamma), \qquad (6-5)$$

که در آن L عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه‌ای، α تصویر اندازه حرکت زاویه‌ای روی محور x' متصل به جسم است، α باید عدد صحیح زوج باشد [۲۸]، $\langle\beta^2\rangle$ متوسط β^2 روی $\xi(\beta)$ و $\varepsilon=\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma$ است.

به جای استفاده از α عدد کوانتومی $n_\omega=L-\alpha$ را به کار می‌بریم [۲۸ و ۵۳]، که در این صورت می‌توان حالت‌های نزدیک به حالت پایه $(n_\omega=0)$ را به صورت زیر تعیین کرد

$$L=n_\omega,n_\omega+2,n_\omega+4,\ldots \qquad n_\omega>0, \qquad (7-5)$$

در این حالت معادله‌ی اول به صورت زیر در می‌آید

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{4}{\beta}\frac{d}{d\beta}-\frac{1}{4\beta^2}[L(L+4)+3n_\omega(2L-n_\omega)]-u(\beta)+\varepsilon_\beta\right]\xi_{L,n_\omega}(\beta)=0, \qquad (8-5)$$

[40] reduced energy

با حل دو معادله‌ی وابسته به دو متغیر β و γ و با توجه به رابطه‌ی $\varepsilon=\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma$ ، طیف انرژی تعیین می‌گردد.

عملگر گشتاور چهارقطبی الکتریکی به صورت زیر است [۵۴]

$$T_\mu^{(E2)}=t\beta\left[D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i)\cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i)+D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i))\sin\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)\right], \qquad (9-5)$$

که در آن $D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i)$، $D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i)$ و $D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i)$ توابع ویگنرند.

در حالتی که $\gamma=\frac{\pi}{6}$، این عملگر به صورت زیر در می‌آید

$$T_\mu^{(E2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}t\beta(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i)+D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i)), \qquad (10-5)$$

شدت گذار چهارقطبی الکتریکی از حالت اولیه‌ی مشخص شده با L_i و α_i به حالت نهایی مشخص شده با L_f و α_f به صورت زیر است [۳۰]

$$B(E2;L_i\alpha_i\to L_f\alpha_f)=\frac{5}{16\pi}\frac{\left|\langle L_f\alpha_f\|T^{(E2)}\|L_i\alpha_i\rangle\right|^2}{(2L_i+1)}, \qquad (11-5)$$

که در آن عناصر ماتریس کاهش یافته با استفاده از تئوری ویگنر- اکارت تعیین می‌شوند [۳۰]

$$\langle L_f\mu_f\alpha_f|T_\mu^{(E2)}|L_i\mu_i\alpha_i\rangle=\frac{(L_i\,2L_f\mid\mu_i\,\mu\mu_f)}{\sqrt{2L_f+1}}\langle L_f\alpha_f\|T^{(E2)}\|L_i\alpha_i\rangle, \qquad (12-5)$$

تابع موج کلی پس از حل بخش‌های مختلف بر حسب متغیرهای داخلی β و γ و زوایای اویلر به صورت زیر در می‌آید [۶۴ و ۶۵]

$$\psi(\beta,\gamma,\theta_i)=\xi_{n,L,n_\omega}(\beta)\eta_{n_{\tilde\gamma}}(\tilde\gamma)\sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}}\times(D^{(L)}_{\mu,\alpha}(\theta_i)+(-1)^L D^{(L)}_{\mu,-\alpha}(\theta_i)),\qquad(13-5)$$

برای تعیین شدت گذارهای چهار قطبی، لازم است که بخش‌های مربوط به هر یک از متغیرها در تابع موج نرمالیزه شوند.

نتیجه‌ی نهایی برای محاسبه‌ی احتمال گذار، با فرض نرمالیزه بودن بخش‌های مربوط به β و γ ، به صورت زیر در می‌آید [۳۰]

$$B(E2;L_i\alpha_i\to L_f\alpha_f)=\frac{5}{16\pi}\frac{t^2}{2}\frac{1}{(1+\delta_{\alpha_i,0})(1+\delta_{\alpha_f,0})}\times[(L_i 2L_f\mid\alpha_i 2\alpha_f)+(L_i 2L_f\mid\alpha_i-2\alpha_f)$$
$$+(-1)^L(L_i 2L_f\mid-\alpha_i 2\alpha_f)]^2\times I^2_\beta(n_i,L_i,\alpha_i,n_f,L_f,\alpha_f),\qquad(14-5)$$

مقادیر ضرائب کلبش-گوردون در رابطه ی فوق در صورتی غیرصفرند که $\Delta\alpha=\pm2$. جمله‌ی اول در این رابطه هنگامی غیر صفر است که $\alpha_i+2=\alpha_f$، در حالی که در جمله‌ی دوم اگر $\alpha_i-2=\alpha_f$، مقدار غیر صفر به دست می‌آید، و برای جمله‌ی سوم $\alpha_i+\alpha_f=2$ مقدار غیر صفر می‌دهد.

انتگرال‌گیری روی مقادیر مختلف β، به صورت زیر در می‌آید

$$I_\beta(n_i,L_i,\alpha_i,n_f,L_f,\alpha_f)=\int_0^\infty\beta\xi^*_{n_f,L_f,\alpha_f}(\beta)\xi_{n_i,L_i,\alpha_i}(\beta)\beta^4 d\beta,\qquad(15-5)$$

β و β^4 در رابطه ی فوق به ترتیب از عملگر چهار قطبی الکتریکی و عنصر حجم در فضای پنج بعدی ظاهر می‌شوند. عنصردیفرانسیلی حجم در این فضای پنج بعدی به صورت زیر است

$$d\tau=\beta^4\sin3\gamma\sin\theta_1 d\beta d\gamma d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3,\qquad(16-5)$$

در نتیجه برای محاسبه‌ی احتمال گذارهای مختلف در حالت پایه لازم می‌شود که I_β را محاسبه کنیم. این محاسبه با حل معادله ویژه مقداری هامیلتونی بور پس از جداسازی متغیرها و به دست

آوردن ویژه توابع مربوط به بخش β امکانپذیر است. بخش وابسته به γ نیز در تابع موج لازم است که نرمالیزه باشد.

مقادیر شدت چهار قطبی الکتریکی با نرمالیزه کردن نسبت به شدت چهار قطبی الکتریکی برای پایین‌ترین حالت گذار ، $B(E2;2_g \rightarrow 0_g)$ ، به دست می‌آیند. این مقدار شدت گذار از حالت 2^+ پایه به حالت 0^+ پایه است. کمیتی که محاسبه می‌شود و مورد مقایسه قرار می‌گیرد آهنگ گذار چهار قطبی الکتریکی نامیده می‌شود.

هسته‌های بدون تقارن محوری

در این بخش مروری خواهیم داشت بر مطالعات و بررسی‌هایی که در سایر مراجع در مورد هسته‌های تغییر شکل یافته‌ی بدون تقارن محوری انجام شده است.

بررسی مدل Y(5)

حل معادله‌ی ویژه مقداری بور برای توصیف نقطه‌ی بحرانی‌ای که در آن فرض می‌شود گذار از حالت بیضی‌گون با تقارن محوری به بیضی‌گون بدون تقارن محوری رخ می‌دهد، Y(5) نامیده می‌شود[۱۱]. در این مدل تابع پتانسیل در هامیلتونی بور به صورت $u(\beta,\gamma)=u(\beta)+v(\gamma)$ انتخاب شده است، که جدایی تقریبی متغیرها را امکان‌پذیر می‌سازد.

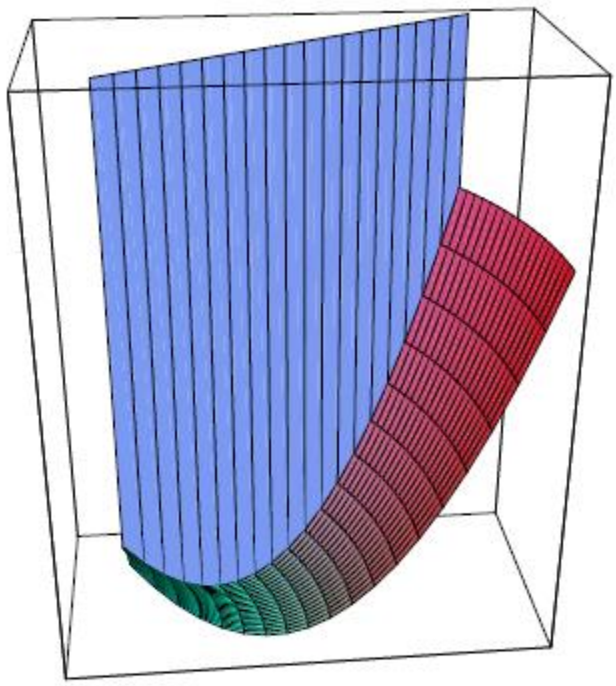
در این مدل، برای متغیر β در پتانسیل تابع نوسانگر هماهنگ جابجا شده به صورت زیر در نظر گرفته شده است

$$u=\frac{u_0}{2}(\beta-\beta_0)^2, \qquad (17-5)$$

و برای متغیر γ چاه پتانسیل نامتناهی به صورت زیر در نظر گرفته شده است

$$v(\gamma)=\begin{cases}0, & \gamma<\gamma_w\,,\\ \infty, & \gamma>\gamma_w\,,\end{cases}\qquad (18-5)$$

در شکل (۵-۲)، شکل پتانسیل مربوط به این مدل که در مرجع [۴۸] رسم شده است، را آورده‌ایم.

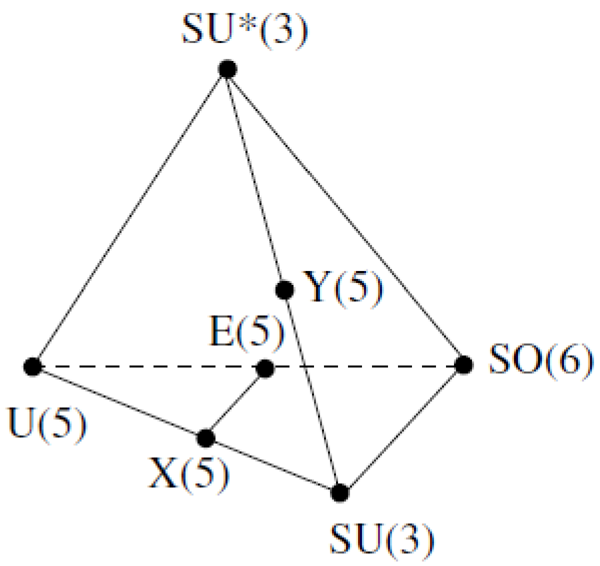


شکل (۵-۲). رسم $u(\beta,\gamma)$ برای مدل $\mathrm{Y}(5)$ ، β و γ مختصات قطبی‌اند، [۴۸].

در مرجع [۱۱]، ابتدا شرایط گذار از حالت بیضی‌گون با تقارن محوری به بیضی‌گون بدون تقارن محوری در قالب مدل بوزونی بر هم کنشی [۵۹] بررسی شده است، و سپس با توجه به این شرایط تابع پتانسیل مناسب در نظر گرفته شده است. از آنجا که یک سیستم هنگام عبور از یک نقطه‌ی بحرانی هیچ انرژی ای صرف نمی‌کند، بنابراین پتانسیل متناظر در این نقطه باید به صورت تخت باشد [۶۶].

بخش وابسته به γ ی هامیلتونی بور برای $\gamma_w \ll 60^\circ$ در مرجع [۱۱] حل شده است و طیف انرژی مربوط به این پارامتر محاسبه شده است. ویژگی‌های طیف به دست آمده با طیف تجربی موجود برای هسته‌های ^{166}Er و ^{168}Er مقایسه شده است. به نطر می‌آید که این دو هسته شرایط لازم را برای نشان دادن این گذار فاز شکلی دارند.

در شکل (۵-۳)، موقعیت مدل Y(5)، مدلی که در چهارچوب هامیلتونی بور گذار فاز شکلی از حالت بیضی‌گون کشیده‌ی با تقارن محوری به بیضی‌گون بدون تقارن محوری بررسی می‌کند، در یک هرم نشان داده شده است [۱۱]. این هرم به عنوان دیاگرام فازی معرفی شده است که مربوط به درجه ی آزادی γ است. در این دیاگرام نقطه بحرانی Y(5) نقطه ای است که در آن هسته می‌تواند در گذار از گروه تقارنی $SU(3)$ به گروه تقارنی $SU^*(3)$ با آن مواجه شود. در مدل بوزونی بر هم کنشی، گروه تقارنی $SU(3)$ مترادف است با شکل هندسی بیضی‌گون با تقارن محوری و گروه تقارنی $SU^*(3)$ مترادف است با بیضی‌گون بدون تقارن محوری صلب[۴۱].



شکل (۵-۳). دیاگرام فازی مربوط به درجه ی آزادی γ و موقعیت مدل Y(5) ، [۱۱].

[41] rigid triaxial deformation

بررسی حالت γ-صلب برای $\gamma \approx \frac{\pi}{6}$

در مدلی که در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد [۲۹]، فرض شده است که پتانسیل به صورت $V(\beta,\gamma)=V_1(\beta)+V_2(\gamma)/\beta^2$ باشد. پس از جداسازی متغیرها، در بخش وابسته به γی هامیلتونی فرض شده است که $\gamma=\frac{\pi}{6}+x$ و برای $x\to 0$ ، این بخش از معادله حل شده است. حالت‌هایی که در آن‌ها مقدار پارامتر γ ثابت فرض می‌شود حالت‌های γ- صلب[42] نامیده می‌شوند. ویژه مقادیر انرژی برای این بخش، به صورت زیر به دست آمده‌اند

$$\omega_{L,R,n_\gamma}=\sqrt{C}\,(2n_\gamma+1)+L(L+1)-\frac{3}{4}R^2, \qquad (19-5)$$

که در آن پارامترهای ظاهر شده به صورت اندیس بیانگر اعداد کوانتومی سیستم‌اند.

در بخش وابسته به β ی هامیلتونی فرض شده است که تابع پتانسیل شبیه پتانسیل کراتزر و به صورت زیر باشد

$$u(\beta)=-\frac{A}{\beta}+\frac{B}{\beta^2}, \qquad (20-5)$$

در شکل (۵-۴)، $V(\beta,\gamma)$ که بخش γی آن به صورت یک نوسانگر هماهنگ برای $0<\gamma<\frac{\pi}{3}$ و بخش βی آن که تابع پتانسیل کراتزر است و از مرجع [۴۸] آورده‌ایم، رسم شده است.

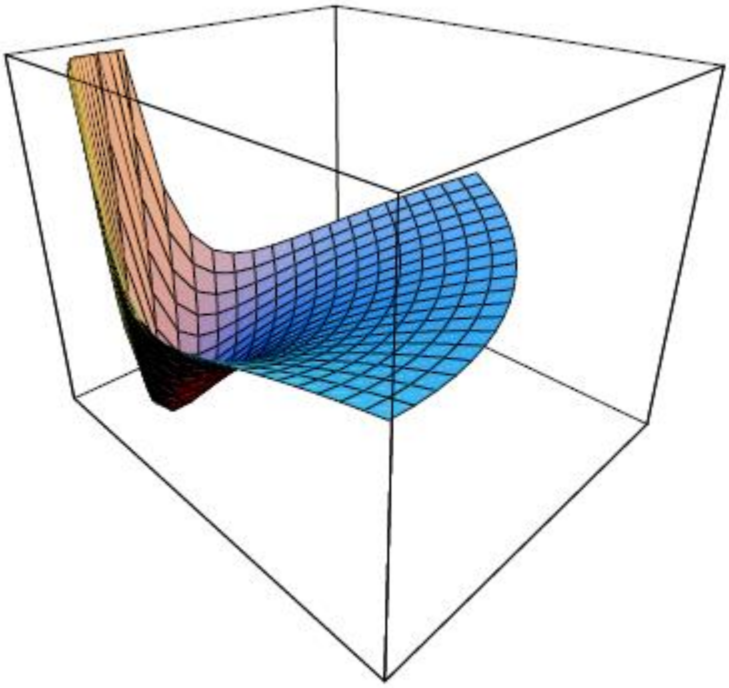
پس از تعیین طیف انرژی مربوط به این بخش، رابطه‌ی انرژی کل به صورت زیر به دست آمده است

$$\varepsilon(n_\gamma,n_\beta,L,R)=\frac{A^2/4}{\left(\sqrt{9/4+B+\omega_{L,R,n_\gamma}}+1/2+n_\beta\right)^2}, \qquad (21-5)$$

---

[42] γ - rigid

که در آن متغیرهای انرژی، اعداد کوانتومی سیستم اند. طبق نتیجه‌گیری این مرجع، مقادیر انرژی حاصل از این طیف با طیف تجربی هسته‌های بدون تقارن محوری مطابقت دارد.



شکل (۵-۴). رسم $V(\beta,\gamma)$ که شامل جمله ی نوسانگر هماهنگ برای $0<\gamma<\frac{\pi}{3}$ و پتانسیل کراتزر است، β و γ مختصات قطبی‌اند، [۴۸].

بررسی مدل Z(5)

حل معادله‌ی ویژه مقداری بور برای توصیف نقطه‌ی بحرانی‌ای که در آن نقطه فرض می‌شود شکل هسته از حالت بیضی‌گون کشیده‌ی با تقارن محوری به بیضی‌گون پخت با تقارن محوری گذار می‌کند، Z(5) نامیده می‌شود[۳۰]. در این مدل تابع پتانسیل در هامیلتونی بور به صورت $u(\beta,\gamma)=u(\beta)+v(\gamma)$ انتخاب شده است، که جدایی تقریبی متغیرها را امکان‌پذیر می‌سازد.

در این مدل، برای متغیر β در هامیلتونی بور چاه پتانسیل نامتناهی به صورت زیر در نظر گرفته شده است

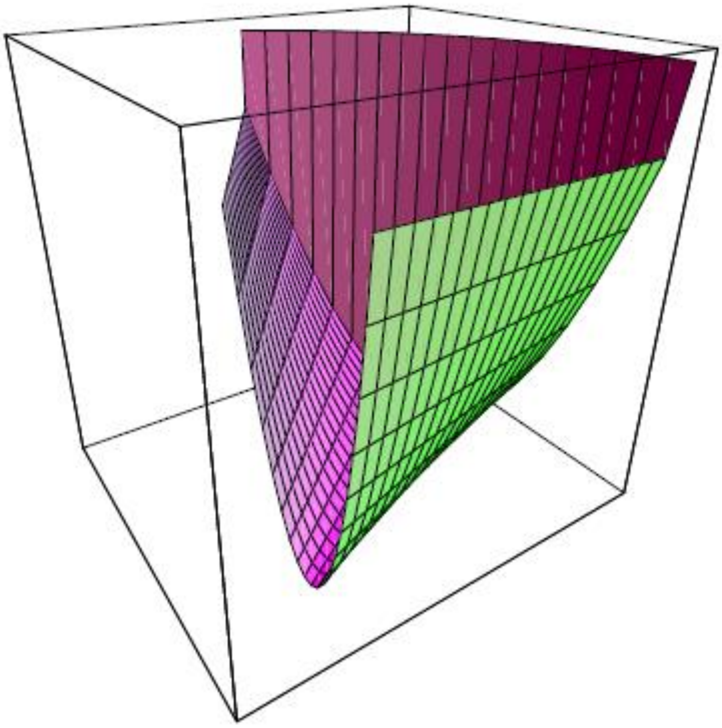
$$u(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \le \beta_w , \\ \infty, & \beta > \beta_w , \end{cases} \qquad (22-5)$$

و برای متغیر γ تابع نوسانگر هماهنگ جابجا شده، که دارای می‌نیمم عمیق در نقطه‌ی $\gamma = \frac{\pi}{6}$ است، به صورت زیر در نظر گرفته شده است

$$v(\gamma) = \frac{c}{2}(\gamma - \frac{\pi}{6})^2, \qquad (23-5)$$

در شکل (۵-۵)، شکل پتانسیل $u(\beta,\gamma)$ مربوط به این مدل که در مرجع [۴۸] رسم شده است، را آورده‌ایم.

بخش‌های وابسته به پارامترهای β و γ ی هامیلتونی بور پس از جداسازی تقریبی متغیرها حل شده‌اند. برای بخش وابسته به β جواب‌ها به صورت توابع بسل و برای بخش وابسته به γ جواب‌ها به صورت چند جمله‌ای‌های هرمیت‌اند. طیف انرژی و آهنگ‌های گذار چهار قطبی الکتریکی متناظر محاسبه شده اند. این مقادیر تئوری با مقادیر متناظر تجربی برای هسته‌های ^{192}Pt، ^{194}Pt و ^{196}Pt مقایسه شده اند. جداول (۵-۱) و (۵-۲) جداولی‌اند که این مقایسه‌ها در آن‌ها انجام شده‌اند و عینا از مرجع [۳۰] آورده شده‌اند. ایزوتوپ ^{194}Pt گفته می‌شود که نزدیک به شرایطی است که در آن گذار از حالت بیضی‌گون کشیده به بیضی‌گون تخت می‌تواند روی دهد [۳۰]. همسایه‌های این ایزوتوپ، یعنی ^{192}Pt و ^{196}Pt نیز در این جدول آمده‌اند.



شکل (۵-۵). رسم $u(\beta,\gamma)$ برای مدل $Z(5)$، β و γ مختصات قطبی‌اند، [۴۸].

جدول (۵-۱). مقایسه ی طیف انرژی مدل $Z(5)$ و طیف تجربی هسته‌های ^{192}Pt، ^{194}Pt و ^{196}Pt، [۳۰]. این مقادیر نسبت به انرژی حالت $0_{1,0}$ سنجیده و به انرژی حالت $2_{1,0}$ نرمالیزه شده‌اند.

L_{s,n_w}	Z(5)	^{192}Pt	^{194}Pt	^{196}Pt
$4_{1,0}$	2.350	2.479	2.470	2.465
$6_{1,0}$	3.984	4.314	4.299	4.290
$8_{1,0}$	5.877	6.377	6.392	6.333
$10_{1,0}$	8.019	8.624		8.558
$2_{1,2}$	1.837	1.935	1.894	1.936
$4_{1,2}$	4.420	3.795	3.743	3.636
$6_{1,2}$	7.063	5.905	5.863	5.644
$3_{1,1}$	2.597	2.910	2.809	2.854
$5_{1,1}$	4.634	4.682	4.563	4.526
$7_{1,1}$	6.869	6.677		
$0_{2,0}$	3.913	3.776	3.858	3.944

جدول (۵-۲). مقایسه‌ی آهنگ گذار چهارقطبی الکتریکی در مدل Z(5) و مقادیر تجربی برای هسته‌های ^{192}Pt، ^{194}Pt و ^{196}Pt، [۳۰]. این مقادیر نسبت به $B(E2;2_{1,0} \rightarrow 0_{1,0})$ نرمالیزه شده‌اند.

$L^{(i)}_{s,n_w}$	$L^{(f)}_{s,n_w}$	Z(5)	^{192}Pt	^{194}Pt	^{196}Pt
$4_{1,0}$	$2_{1,0}$	1.590	1.559	1.724	1.476
$4_{1,2}$	$2_{1,2}$	0.736		0.446	0.715
$6_{1,2}$	$4_{1,2}$	1.031			1.208
$3_{1,1}$	$2_{1,2}$	2.171	1.786		
$2_{1,2}$	$0_{1,0}$	0.000	0.009	0.006	0.0004
$2_{1,2}$	$2_{1,0}$	1.620	1.909	1.805	
$4_{1,2}$	$2_{1,0}$	0.000		0.004	0.014
$4_{1,2}$	$4_{1,0}$	0.348		0.406	
$6_{1,2}$	$4_{1,0}$	0.000			0.012

بررسی مدل Z(5)-D

در مدل Z(5)-D [۳۱]، تابع پتانسیل در هامیلتونی بور به صورت $u(\beta,\gamma)=u(\beta)+v(\gamma)$ در نظر گرفته شده است. تابع $u(\beta)$ پتانسیل دیویدسون و به صورت زیر است

$$u(\beta)=\beta^2+\frac{\beta_0^4}{\beta^2}, \qquad (24-5)$$

که در آن β_0 پارامتر آزاد است. تابع $v(\gamma)$ نوسانگر هماهنگ حول $\gamma=\frac{\pi}{6}$ است که به صورت رابطه‌ی (۵-۲۴) در مدل Z(5) است.

جواب‌های معادله‌ی ویژه مقداری متناظر برای بخش‌های β و γ به ترتیب به صورت چند جمله‌ای-های لاگر و هرمیت‌اند. ویژه مقادیر انرژی نیز به صورت زیر تعیین شده‌اند

$$E(n,n_{\omega},n_{\tilde{\gamma}},\beta_0)=E_0+A\left[2n+1+\sqrt{\frac{L(L+4)+3n_{\omega}(2L-n_{\omega})+9}{4}+\beta_0^4}\right]+Bn_{\tilde{\gamma}}, \qquad (25-5)$$

طیف انرژی حاصل از این مدل با طیف تجربی هسته‌های ^{128}Xe، ^{130}Xe و ^{132}Xe در جدول (۵-۳)، مقایسه شده‌اند.

جدول (۵-۳). مقایسه‌ی طیف حاصل از مدل Z(5)-D با طیف تجربی هسته‌های ^{128}Xe، ^{130}Xe و ^{132}Xe، [۳۱]. این مقادیر نسبت به انرژی حالت $0_{1,0}$ سنجیده و به انرژی حالت $2_{1,0}$ نرمالیزه شده‌اند.

L_{s,n_w}	^{128}Xe exp	^{128}Xe $\beta_0 = 1.32$	^{130}Xe exp	^{130}Xe $\beta_0 = 1.11$	^{132}Xe exp	^{132}Xe $\beta_0 = 0$
$4_{1,0}$	2.333	2.323	2.247	2.255	2.157	2.150
$6_{1,0}$	3.922	3.805	3.627	3.621	3.163	3.353
$8_{1,0}$	5.674	5.372	5.031	5.040		
$10_{1,0}$	7.597	6.986	6.457	6.489		
$12_{1,0}$			7.867	7.956		
$14_{1,0}$			9.458	9.434		
$2_{1,2}$	2.189	1.830	2.093	1.793	1.944	1.734
$4_{1,2}$	3.620	4.180	3.373	3.961	2.940	3.649
$6_{1,2}$	5.150	6.284				
$3_{1,1}$	3.228	2.555	3.045	2.471	2.701	2.343
$5_{1,1}$	4.508	4.360	4.051	4.125	3.246	3.791
$7_{1,1}$	6.165	6.138				
$0_{2,0}$	3.574	3.452	3.346	3.028	2.771	2.528
$2_{2,0}$	4.515	4.452				
σ		0.495		0.297		0.422

جدول (۵-۳) را عینا از مرجع [۳۱] آورده‌ایم. در این جدول مقادیر پارامتر β_0 در مقایسه‌ی طیف انرژی با مقادیر تجربی ذکر شده به دست آمده‌اند.

جدول (۵-۴) شامل آهنگ گذار چهارقطبی برای ایزوتوپ های هسته ی Xe، که مقادیر تجربی برای آن موجود است، و مقادیر به دست آمده طبق مدل Z(5)-D است، [۳۱].

جدول (۵-۴). مقایسه‌ی آهنگ گذار چهار قطبی الکتریکی حاصل از مدل Z(5)-D با مقادیر موجود تجربی برای هسته‌های ^{128}Xe، ^{130}Xe و ^{132}Xe، [۳۱]. این مقادیر نسبت به $B(E2;2_{1,0}\rightarrow 0_{1,0})$ نرمالیزه شده‌اند.

$L^{(i)}_{s,n_w}$	$L^{(f)}_{s,n_w}$	^{128}Xe exp	^{128}Xe $\beta_0=1.32$	^{132}Xe exp	^{132}Xe $\beta_0=0$
$4_{1,0}$	$2_{1,0}$	1.468 ± 0.201	1.648	1.238 ± 0.180	1.834
$6_{1,0}$	$4_{1,0}$	1.940 ± 0.275	2.464		
$8_{1,0}$	$6_{1,0}$	2.388 ± 0.398	3.228		
$2_{1,2}$	$2_{1,0}$	1.194 ± 0.187	1.673	1.775 ± 0.288	1.865
$2_{1,2}$	$0_{1,0}$	0.016 ± 0.002	0.000	0.003 ± 0.001	0.000

در این فصل به بررسی مدل‌هایی پرداختیم که در آن‌ها هسته‌های بدون تقارن محوری مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته بودند. این بررسی‌ها در قالب مدل بور ارائه شده‌اند. در فصل بعد، با ارائه‌ی مدل‌های جدید، در قالب مدل بور، ویژگی‌های هسته‌های بدون تقارن محوری را بیشتر مورد مطالعه قرار می-دهیم.

مطالعه و بررسی هسته‌های بدون تقارن محوری II

مقدمه

در این فصل، با ارائه‌ی مدل‌های جدید، ویژگی‌های هسته‌های بدون تقارن محوری را بیشتر مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم. با ارائه‌ی تابع پتانسیل مناسب، به حل معادله‌ی ویژه مقداری بور می‌پردازیم. مشاهده‌پذیرهای فیزیکی مناسب را تعیین می‌کنیم و نتایج حاصل از بررسی‌های خودمان را با داده‌های تجربی موجود مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

بررسی طیف انرژی هسته‌های بدون تقارن محوری

برای حل معادله‌ی ویژه مقداری بور، توابع زیر را به ترتیب برای بخش‌های وابسته به متغیرهای β و γ در تابع پتانسیل کاهش یافته، $u(\beta,\gamma)=u(\beta)+v(\gamma)$، در نظر می‌گیریم

$$u(\beta)=a\beta^2+b\beta+\frac{c}{\beta}+\frac{d}{\beta^2}, \qquad (1-6)$$

$$v(\gamma)=\frac{1}{2}\tilde{c}(\gamma-\frac{\pi}{6})^2=\frac{1}{2}\tilde{c}\tilde{\gamma}^2,\qquad \tilde{\gamma}=\gamma-\frac{\pi}{6}, \qquad (2-6)$$

پس از جداسازی تقریبی متغیرها بخش مربوط به متغیر β به صورت زیر در می‌آید

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{4}{\beta}\frac{d}{d\beta}-\frac{1}{4\beta^2}[L(L+4)+3n_\omega(2L-n_\omega)]-u(\beta)+\varepsilon_\beta\right]\xi_{L,n_\omega}(\beta)=0, \qquad (3-6)$$

با به کار بردن تبدیل $\xi(\beta)=\beta^{-2}\chi(\beta)$ به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+[-\frac{1}{\beta^2}[2+d+\frac{1}{4}[L(L+4)+3n_\omega(2L-n_\omega)]]-\frac{c}{\beta}+\varepsilon_\beta-b\beta-a\beta^2\right]\chi(\beta)=0, \qquad (4-6)$$

اهمیت تابع پتانسیل (۶-۱) در این است که این پتانسیل به صورت یک پتانسیل مؤثر در معادله‌ی (۶-۴) ظاهر می‌شود و با انتخاب مقادیر مناسب برای پارامترهای a، b، c، و d می‌تواند به پتانسیل‌های مختلف تبدیل شود. اگر $b=c=0$ و $a=1$ ، این پتانسیل به پتانسیل دیویدسون تبدیل می‌شود، $u_{eff}=\frac{1}{2\beta^2}[L(L+4)+3n_\omega(2L-n_\omega)]+a\beta^2$. در صورتی که $a=b=0$ پتانسیل مؤثر به پتانسیل کراتزر $u_{eff}=\frac{1}{2\beta^2}[L(L+4)+3n_\omega(2L-n_\omega)]+\frac{c}{\beta}$، و در حالتی که $c=0$، به $u_{eff}=\frac{1}{2\beta^2}[L(L+4)+3n_\omega(2L-n_\omega)]+a\beta^2+b\beta$ که پتانسیل دیویدسون شامل نوسانگر جابجا شده است، تبدیل می‌شود.

با در نظر گرفتن آنساتز[۴۳] زیر

$$\chi(\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\beta^{n+\mu}e^{p\beta+\frac{q}{2}\beta^2}, \qquad (5-6)$$

که در آن $\chi(\beta)=\beta^{-2}\xi(\beta)$ و جایگذاری در معادله‌ی (۶-۴) خواهیم داشت

[43] ansatz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(n+\mu)(n+\mu-1) - [2+d+\frac{1}{4}[L(L+4)+3n_{\omega}(2L-n_{\omega})]] \right] \beta^{n+\mu-2}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \left[2p(n+\mu-1)-c \right] \beta^{n+\mu-2}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \left[2q(n+\mu-2)+p^2+q+\varepsilon_{\beta} \right] \beta^{n+\mu-2}$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} \left[2pq-b \right] \beta^{n+\mu-2}$$
$$+\sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} \left[q^2-a \right] \beta^{n+\mu-2} = 0, \qquad (6-6)$$

برای این که جواب سری‌ای که در نظر گرفته‌ایم همگرا باشد شرط زیر را اعمال می‌کنیم

$$a_n = -\frac{a_{n-1}\left[2p(n+\mu-1)-c\right]+a_{n-2}\left[2q(n+\mu-2)+p^2+q+\varepsilon_{\beta}\right]+a_{n-3}\left[2pq-b\right]+a_{n-4}\left[q^2-a\right]}{(n+\mu)(n+\mu-1)-[2+d+\frac{1}{4}[L(L+4)+3n_{\omega}(2L-n_{\omega})]]}$$
$$a_0\left[\mu(\mu-1)-\left[2+d+\frac{1}{4}[L(L+4)+3n_{\omega}(2L-n_{\omega})]\right]\right]=0, \qquad (7-6)$$

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که

$$\mu(\mu-1)-\left[2+d+\frac{1}{4}[L(L+4)+3n_{\omega}(2L-n_{\omega})]\right]=0, \qquad (8-6a)$$
$$q^2-a=0, \qquad (8-6b)$$
$$2pq-b=0, \qquad (8-6c)$$
$$2q(n+\mu-2)+p^2+q+\varepsilon_{\beta}=0, \qquad (8-6d)$$
$$2p(n+\mu-1)-c=0, \qquad (8-6e)$$

و با حل این معادلات به نتایج زیر می‌رسیم

$$\mu=\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{9+4d+L(L+4)+3n_{\omega}(2L-n_{\omega})}\right], \qquad (9-6a)$$
$$q=-\sqrt{a}, \qquad (9-6b)$$

$$p = \frac{c}{2n - 1 + \sqrt{9 + 4d + L(L+4) + 3n_{\omega}(2L - n_{\omega})}}, \qquad (9-6c)$$

$$\varepsilon_{\beta} = -[2q(n + \mu - 2) + p^{2} + q], \qquad (9-6d)$$

و در نتیجه می‌توانیم بخش مربوط به پارامتر β را در انرژی کاهش یافته به صورت زیر تعیین کنیم

$$\varepsilon_{\beta} = \sqrt{a}\left[2n - 2 + \sqrt{9 + 4d + L(L+4) + 3n_{\omega}(2L - n_{\omega})}\right] - \frac{c^{2}}{\left[2n - 1 + \sqrt{9 + 4d + L(L+4) + 3n_{\omega}(2L - n_{\omega})}\right]^{2}}, \qquad (10-6)$$

معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به متغیر γ به صورت زیر است

$$\left[-\frac{1}{\langle\beta^{2}\rangle}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial\gamma^{2}} + 3\frac{\cos 3\gamma}{\sin 3\gamma} + v(\gamma)\right)\right]\eta(\gamma) = \varepsilon_{\gamma}\eta(\gamma), \qquad (11-6)$$

جواب این معادله به صورت زیر است [۳۱]

$$\eta_{n_{\tilde{\gamma}}}(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{\tilde{b}}{\sqrt{\pi}\, 2^{n_{\tilde{\gamma}}}\, n_{\tilde{\gamma}}!}}\; H_{n_{\tilde{\gamma}}}(\tilde{b}\tilde{\gamma}) e^{-\tilde{b}^{2}\tilde{\gamma}^{2}/2}, \qquad (12-6)$$

که در آن

$$\tilde{b} = \left(\frac{\tilde{c}\langle\beta^{2}\rangle}{2}\right)^{1/4}, \qquad (13-6)$$

و توابع $H_{n_{\tilde{\gamma}}}(\tilde{b}\tilde{\gamma})$ ، چند جمله‌ای‌های هرمیت[۴۴] اند.

و در نتیجه بخش مربوط به پارامتر γ در انرژی کاهش یافته به صورت زیر است

$$\varepsilon_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{\frac{2\tilde{c}}{\langle\beta^{2}\rangle}}\left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}\right), \qquad (14-6)$$

[44] Hermite polynomial

که در آن $n_{\tilde{\gamma}}$ تعداد کوانتای نوسان[45] برای درجه آزادی γ است.

و چون $\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$، بنابراین انرژی کل از رابطه‌ی نهایی زیر به دست می‌آید

$$E(n,n_\omega,L,n_{\tilde{\gamma}}) = E_0 + A[\sqrt{a}\left[2n-2+\sqrt{9+4d+L(L+4)+3n_\omega(2L-n_\omega)}\right] - \frac{c^2}{\left[2n-1+\sqrt{9+4d+L(L+4)+3n_\omega(2L-n_\omega)}\right]^2}] + Bn_{\tilde{\gamma}}, \qquad (15-6)$$

در این رابطه E_0، A و B پارامترهای اختیاری‌اند.

باندهای انرژی[46] برای حالت‌های مختلف به صورت زیر تعیین می‌شوند [۳۲]:

۱) باند حالت پایه: با $n=0$ و $n_\omega = 0$ مشخص می شود. چون $n_\omega = L-\alpha$ و α باید یک عدد صحیح زوج باشد، بنابراین همه مقادیر L برای باند حالت پایه مقادیر زوج خواهند بود.

۲) باند quasi-γ_1 : برای مقادیر فرد L با $n=0$ و $n_\omega=1$ مشخص می‌شود و برای مقادیر زوج L با $n=0$ و $n_\omega=2$ مشخص می‌شود.

۳) باند quasi-γ_2 : برای مقادیر فرد L با $n=0$ و $n_\omega=3$ مشخص می‌شود و برای مقادیر زوج L با $n=0$ و $n_\omega=4$ مشخص می‌شود.

۴) باند quasi-β_1 : با $n=1$ و $n_\omega=0$ مشخص می‌شود.

۵) باند quasi-β_2 : با $n=2$ و $n_\omega=0$ مشخص می‌شود.

پارامترهای زیر از تطبیق تابع پتانسیل در رابطه (۶-۱۵) با پتانسیل دیویدسون، $V_D(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2}$، و برای مقادیر $\beta_0 = 1.11$ و $\beta_0 = 1.32$ به دست آمده‌اند، شکل (۶-۱).

$$\{a = 1.00581,\ b = 0.93391\times10^{-3},\ c = -4.17656\times10^{-6},\ d = 1.51807\}$$

$$\{a = 1.01226,\ b = -0.68969\times10^{-3},\ c = 3.59281\times10^{-5},\ d = 3.03596\}$$

45 the number of oscillator quanta
46 energy bands

در جدول (۶-۱) طیف انرژی برای حالت‌های مختلف به دست آمده‌اند. این مقادیر برای پارامترهای متناظر با پارامتر موجود در پتانسیل دیویدسون [۳۱] به دست آمده‌اند.

مقادیر ظاهر شده در جدول (۶-۱) با استفاده از رابطه‌ی زیر تعیین شده‌اند

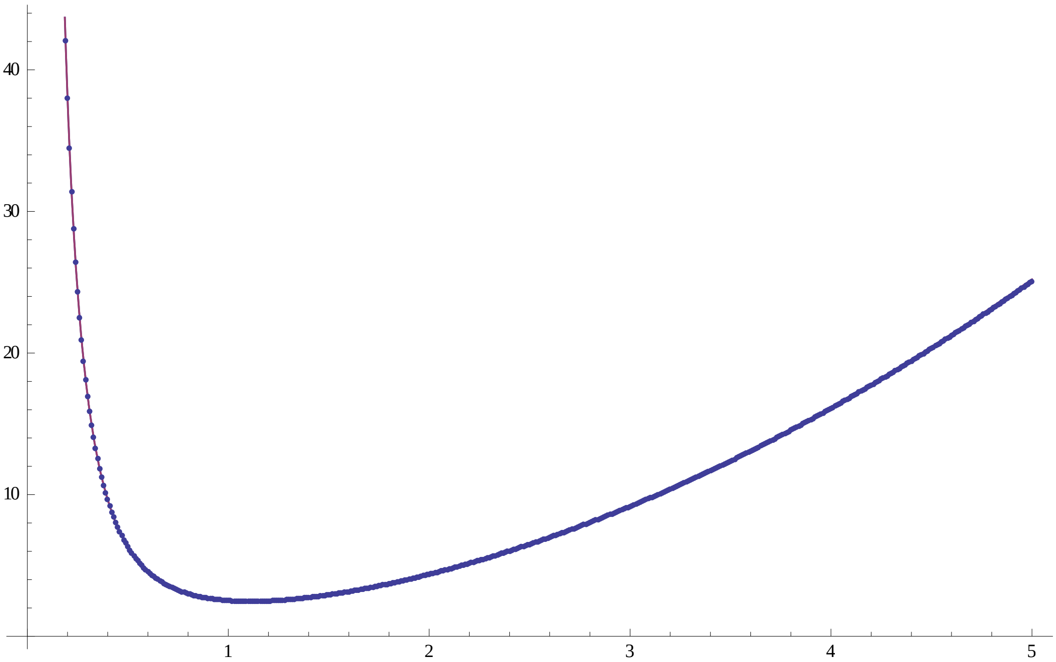
$$\frac{E(n,n_\omega,L)-E(0,0,0)}{E(0,0,2)-E(0,0,0)}=$$

$$\{\sqrt{a}\left[2n-2+\sqrt{9+4d+L(L+4)+3n_\omega(2L-n_\omega)}\right]-\frac{c^2}{\left[2n-1+\sqrt{9+4d+L(L+4)+3n_\omega(2L-n_\omega)}\right]^2}-$$

$$\sqrt{a}\left[-2+\sqrt{9+4d}\right]+\frac{c^2}{\left[-1+\sqrt{9+4d}\right]^2}\}$$

$$\times\{\frac{1}{\sqrt{a}\left[-2+\sqrt{21+4d}\right]-\frac{c^2}{\left[-1+\sqrt{21+4d}\right]^2}-\sqrt{a}\left[-2+\sqrt{9+4d}\right]+\frac{c^2}{\left[-1+\sqrt{9+4d}\right]^2}}\},\qquad(16-6)$$

به این معنی که مقادیر انرژی نسبت به انرژی حالت $2_{0,0}$ سنجیده شده‌اند.



شکل(۶-۱). رسم هر دو تابع پتانسیل (۶-۱) و دیویدسون برای تعیین پارامترهای موجود در تابع پتانسیل (۶-۱).

جدول (۶-۱). طیف انرژی محاسبه شده از رابطه‌ی (۶-۱۶) و مقایسه‌ی آن با طیف تجربی ایزوتوپهای Xe . این مقادیر نسبت به انرژی حالت $0_{0,0}$ سنجیده و به انرژی حالت $2_{0,0}$ نرمالیزه شده‌اند. خطای بین مقادیر تئوری و تجربی نیز آمده است.

L_{n,n_ω}	^{128}Xe exp.	^{128}Xe Our result	error rate	^{130}Xe exp.	^{130}Xe Our result	error rate
$0_{0,0}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$2_{0,0}$	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	0.000
$4_{0,0}$	2.333	2.323	0.004	2.247	2.255	0.003
$6_{0,0}$	3.922	3.805	0.029	3.627	3.621	0.001
$8_{0,0}$	5.674	5.372	0.053	5.031	5.040	0.001
$10_{0,0}$	7.597	6.986	0.080	6.457	6.489	0.004
$2_{0,2}$	2.189	1.830	0.164	2.093	1.793	0.143
$4_{0,2}$	3.620	4.179	0.154	3.373	3.961	0.174
$3_{0,1}$	3.228	2.555	0.208	3.045	2.471	0.188
$5_{0,1}$	4.508	4.360	0.032	4.051	4.125	0.018

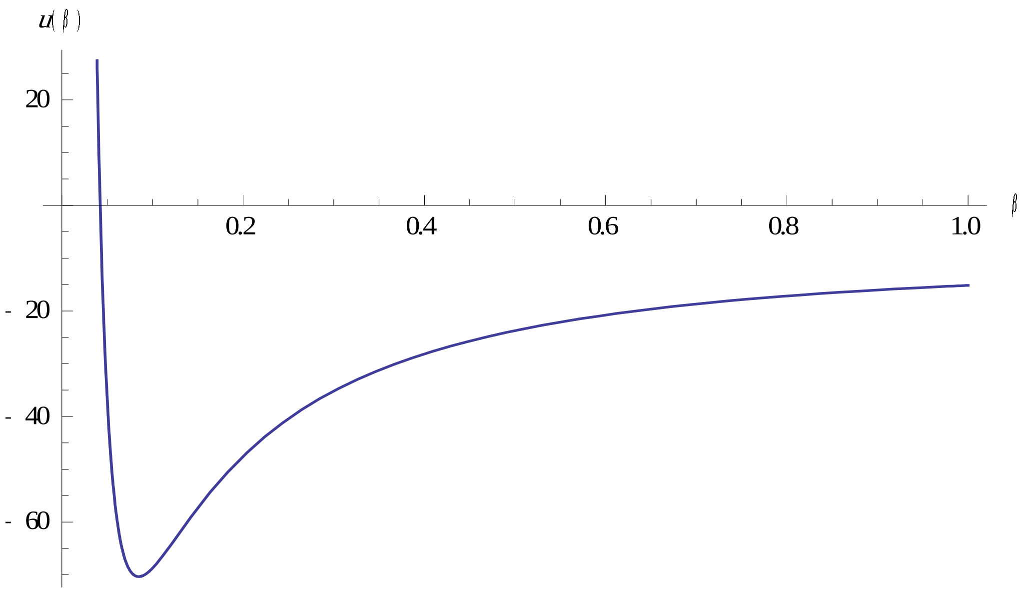
طیف انرژی به دست آمده در این بخش به خوبی با طیف انرژی به دست آمده در جدول (۶-۱)، که از مرجع [۳۱] آورده‌ایم، مطابقت دارد. در جدول (۶-۱)، طیف انرژی حاصل از مدل ما با طیف انرژی تجربی هسته‌های ^{128}Xe و ^{130}Xe مقایسه شده‌اند و مطابقت خوبی بین تئوری و تجربه وجود دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مدل ما که در این بخش ارائه شد قابلیت توصیف ویژگی‌های ایزوتوپ‌های ذکر شده‌ی هسته‌ی Xe، را داراست. خطای نسبی بین مقادیر تئوری و تجربی نیز در جدول آمده است.

بررسی مدل Z(5)-Eckart

در این بخش معادله ویژه مقداری بور را برای حالتی حل می‌کنیم که جمله‌ی وابسته به متغیر β در تابع پتانسیل کاهش یافته پتانسیل اکارت[۴۷] و به صورت زیر است [۶۷]

$$u(\beta) = -2b\coth\beta + a(a-1)\operatorname{csch}^2\beta, \qquad (17-6)$$

این پتانسیل برای مقادیر $a = 1.366$ و $b = 5.91$ در شکل (۶-۲) رسم شده است.



شکل(۶-۲). رسم پتانسیل اکارت برای $a = 1.366$ و $b = 5.91$.

با به کارگیری این پتانسیل و پس از جداسازی تقریبی متغیرها در معادله‌ی ویژه مقداری، بخش مربوط به متغیر β به صورت زیر در می‌آید

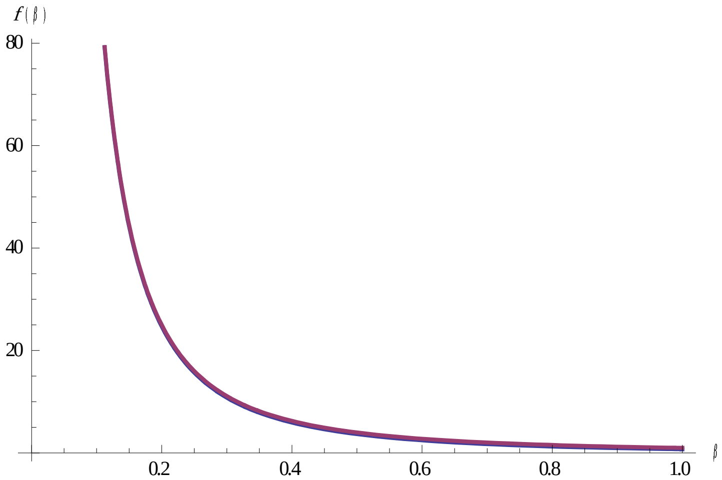
$$\Big[\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{4}{\beta}\frac{d}{d\beta} - \frac{1}{4\beta^2}[L(L+4) + 3n_\omega(2L - n_\omega)]$$
$$+2b\coth\beta - a(a-1)\operatorname{csch}^2\beta + \varepsilon_\beta\Big]\xi_{L,n_\omega}(\beta) = 0, \qquad (18-6)$$

---
[47] Eckart

از آنجا که در بیشتر موارد تجربی مقدار پارامتر β کمتر از یک است [۶۸] می‌توان از تقریب زیر استفاده کرد

$$\frac{1}{\sinh^2\beta} \approx \frac{1}{\beta^2}, \qquad (19-6)$$

شکل (۶-۳) نشان می‌دهد که برای مقادیر کوچک β منحنی‌های دو تابع $\frac{1}{\beta^2}$ و $\frac{1}{\sinh^2\beta}$ بر هم منطبق‌اند.



شکل(۶-۳). رسم هر دو تابع $\frac{1}{\beta^2}$ و $\frac{1}{\sinh^2\beta}$.

با به کار بردن تقریب فوق و تبدیل $\xi(\beta)=\beta^{-2}\chi(\beta)$ و تغییر متغیر $\coth\beta = z$ به معادله‌ی دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\frac{d^2\chi}{dz^2} - \frac{2z}{(1-z^2)}\frac{d\chi}{dz} + \frac{(1-z^2)A + 2bz + \varepsilon_\beta}{(1-z^2)^2}\chi = 0, \qquad (20-6)$$

که در آن

$$A = 2 + \frac{1}{4}[L(L+4) + 3n_\omega(2L - n_\omega)] + a(a-1), \qquad (21-6)$$

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل (۶-۲۰) از روش NU [۶۹] استفاده می‌کنیم. به این منظور، معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{d^2\chi}{dz^2}+\frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}\frac{d\chi}{dz}+\frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma(z)^2}\chi=0, \qquad (22-6)$$

که در آن

$$\tilde{\tau}(z)=-2z,\ \sigma(z)=1-z^2,\ \tilde{\sigma}(z)=A(1-z^2)+2bz+\varepsilon_\beta, \qquad (23-6)$$

در این روش

$$\pi(z)=\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}+k\sigma}, \qquad (24-6)$$

بنابراین

$$\pi(z)=\pm\sqrt{(A-k)z^2-2bz+(k-A-\varepsilon_\beta)}, \qquad (25-6)$$

طبق این روش حل معادله‌ی دیفرانسیل، تابع زیر رادیکال باید به صورت مربع یک چند جمله‌ای باشد، بنابر این

$$\pi(z)=\pm\begin{cases} z\sqrt{\dfrac{-\varepsilon_\beta+u}{2}}+\sqrt{\dfrac{-\varepsilon_\beta-u}{2}}, & k=\dfrac{2A+\varepsilon_\beta}{2}-\dfrac{u}{2}, \\ z\sqrt{\dfrac{-\varepsilon_\beta-u}{2}}+\sqrt{\dfrac{-\varepsilon_\beta+u}{2}}, & k=\dfrac{2A+\varepsilon_\beta}{2}+\dfrac{u}{2}, \end{cases} \qquad (27-6)$$

که در آن $u=\sqrt{\varepsilon_\beta^2+4b^2}$.

چند جمله‌ای $\tau=\tilde{\tau}+2\pi$ که دارای مقادیر مشتق منفی است را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tau=-2\sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta-u}{2}}-2z\left(1+\sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta+u}{2}}\right), \qquad (28-6)$$

و توابع $\bar{\lambda} = k + \pi'$ و $\bar{\lambda}_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$ به صورت زیر در می‌آیند

$$\bar{\lambda} = \frac{2A + \varepsilon_\beta}{2} - \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta + u}{2}}, \qquad (29-6)$$

$$\bar{\lambda}_n = 2n\left(1 + \sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta + u}{2}}\right) + n(n-1), \qquad (30-6)$$

با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی فوق، ترازهای انرژی به صورت زیر تعیین می‌شوند

$$\varepsilon_\beta = \frac{4b^2 + \left[-\frac{2n+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{2n+1}{\sqrt{2}} - 2n(n+1) + 2 + \frac{1}{2}[L(L+4) + 3n_\omega(2L - n_\omega)] + 2a(a-1)}\right]^4}{2\left[-\frac{2n+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{2n+1}{\sqrt{2}} - 2n(n+1) + 2 + \frac{1}{2}[L(L+4) + 3n_\omega(2L - n_\omega)] + 2a(a-1)}\right]^2}, \qquad (31-6)$$

توابع موج نیز طبق این روش به صورت زیر در می‌آیند

$$\chi_n(z) = N_n (1-z)^{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta + \sqrt{\varepsilon_\beta^2 + 4b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta - \sqrt{\varepsilon_\beta^2 + 4b^2}}{2}}\right]} (1+z)^{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta + \sqrt{\varepsilon_\beta^2 + 4b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta - \sqrt{\varepsilon_\beta^2 + 4b^2}}{2}}\right]}$$

$$\times P_n^{\left(\sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta + \sqrt{\varepsilon_\beta^2 + 4b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta - \sqrt{\varepsilon_\beta^2 + 4b^2}}{2}},\ \sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta + \sqrt{\varepsilon_\beta^2 + 4b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-\varepsilon_\beta - \sqrt{\varepsilon_\beta^2 + 4b^2}}{2}}\right)}(z), \qquad (32-6)$$

که در آن $P_n(z)$ ها چندجمله‌ای‌های ژاکوبی[۴۸] اند، و N_n ثابت نرمالیزاسیون است که می‌توان آن را با استفاده از رابطه‌ی زیر به دست آورد

$$\int_0^\infty \beta^4 \xi_{L,n_\omega}(\beta)\, \xi^*_{L,n_\omega}(\beta)\, d\beta = 1, \qquad (33-6)$$

عنصر حجم در فضای پنج بعدی متناظر به صورت زیر است

$$d\tau = \beta^4 \left|\sin 3\gamma\right| \sin\theta_2 d\beta d\gamma d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \qquad (34-6)$$

بخش مربوط به متغیر γ در معادله‌ی ویژه مقداری مانند بخش قبلی در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه جواب‌های متناظر نیز مانند بخش قبل است.

[48] Jacobi polynomial

در نتیجه طیف انرژی کل عبارت خواهد بود از

$$\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma = \varepsilon_0 + Nn_{\tilde{\gamma}} + \frac{4b^2 + \left[-\frac{2n+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{2n+1}{\sqrt{2}} - 2n(n+1) + 2 + \frac{1}{2}[L(L+4) + 3n_\omega(2L - n_\omega)] + 2a(a-1)}\right]^4}{2\left[-\frac{2n+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{2n+1}{\sqrt{2}} - 2n(n+1) + 2 + \frac{1}{2}[L(L+4) + 3n_\omega(2L - n_\omega)] + 2a(a-1)}\right]^2}, \qquad (35-6)$$

که در آن مقادیر ε_0 و N اختیاری‌اند.

جدول (۶-۲) مقادیر انرژی را برای $a = 1.366$ و $b = 5.91$ نشان می‌دهد. این مقادیر در ستون دوم جدول آمده‌اند. ستون سوم نتایج مرجع [۳۰] است. مقادیر انرژی نسبت به انرژی حالت $2_{0,0}$ سنجیده شده‌اند، به این معنی که مقادیر ظاهر شده در جدول با استفاده از رابطه‌ی $\frac{E(n, n_\omega, L) - E(0,0,0)}{E(0,0,2) - E(0,0,0)}$ تعیین شده‌اند. باندهای انرژی همانند بخش قبل با توجه به مقادیر متناظر L ، n و n_ω تعیین می‌شوند.

جدول (۶-۲). طیف انرژی محاسبه شده از رابطه ی (۶-۳۵) که با مقادیر محاسبه شده در مرجع [۳۰] مقایسه شده است. این مقادیر نسبت به انرژی حالت $0_{0,0}$ سنجیده و به انرژی حالت $2_{0,0}$ نرمالیزه شده‌اند.

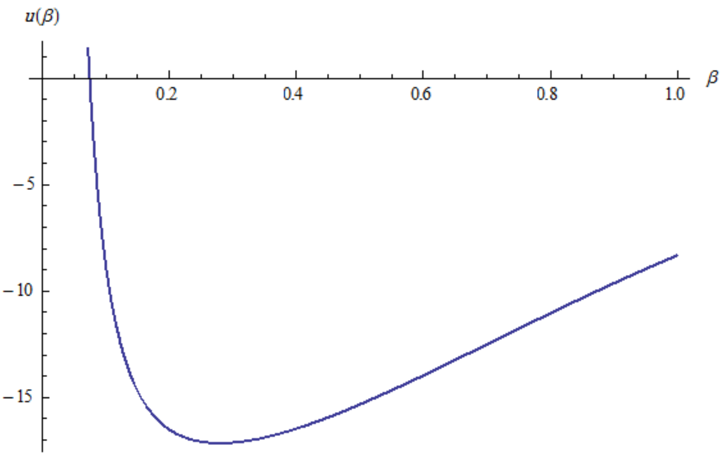
L_{n,n_ω}	$Z(5) - Eckart$	$Z(5)$
$0_{0,0}$	0.000	0.000
$2_{0,0}$	1.000	1.000
$4_{0,0}$	2.030	2.350
$6_{0,0}$	3.699	3.984
$8_{0,0}$	5.044	5.877
$10_{0,0}$	7.119	8.019

بررسی مدل Z(5)-PT

در این بخش معادله‌ی ویژه مقداری بور را برای حالتی که $u(\beta,\gamma)=u(\beta)+v(\gamma)$ حل می‌کنیم. بخش وابسته به متغیر γ، $0<\gamma<\frac{\pi}{3}$، را به صورت حالت‌های پیشین نوسانگر هماهنگ حول نقطه‌ی $\gamma=\frac{\pi}{6}$ در نظر می‌گیریم. جمله‌ی وابسته به متغیر β در تابع پتانسیل کاهش یافته پتانسیل پوشل-تلر[۴۹] و به صورت زیر است [۶۷]

$$u(\beta)=-a(a+1)\operatorname{sec}h^2\beta+b(b-1)\operatorname{cos}ech^2\beta, \qquad (36-6)$$

تابع (۶-۳۶) بر حسب β و برای مقادیر $a=4$ و $b=1.1$ در شکل (۶-۴) رسم شده است.



شکل(۶-۲). رسم پتانسیل (۶-۳۶)، برای $a=4$ و $b=1.1$.

با جایگذاری این رابطه در رابطه‌ی (۶-۳)، معادله‌ی ویژه مقداری مربوط به متغیر β به صورت زیر در می‌آید

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{4}{\beta}\frac{d}{d\beta}-\frac{1}{4\beta^2}[L(L+1)-3\alpha^2]+a(a+1)\operatorname{sech}^2\beta-b(b-1)\operatorname{csch}^2\beta+\varepsilon\right]\xi(\beta)=0, \qquad (37-6)$$

---
[49] Pöschl-Teller

با در نظر گرفتن این که $n_\omega = L-\alpha$ خواهیم داشت

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{4}{\beta}\frac{d}{d\beta}-\frac{\frac{1}{4}[L(L+1)+3n_\omega(2L-n_\omega)]+b(b-1)}{\sinh^2\beta}+a(a+1)(1-\tanh^2\beta)+\varepsilon_\beta\right]\xi_{L,n_\omega}(\beta)=0, \qquad (38-6)$$

با جایگزین کردن $\xi(\beta)=\beta^{-2}\chi(\beta)$ در رابطه‌ی فوق به معادله‌ی زیر می‌رسیم

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}-\frac{\Omega}{\sinh^2\beta}+a(a+1)(1-\tanh^2\beta)+\varepsilon_\beta\right]\chi(\beta)=0, \qquad (39-6)$$

که در آن $\Omega=\frac{1}{4}[L(L+1)+3n_\omega(2L-n_\omega)]+2+b(b-1)$. با در نظر گرفتن تغییر متغیر $z=\tanh^2\beta$ معادله ی زیر می‌رسیم

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1-3z}{2z(1-z)}\frac{d}{dz}+\frac{-a(a+1)z^2+[\Omega+a(a+1)+\varepsilon_\beta]z-A}{4z^2(1-z)^2}\right]\chi(z)=0, \qquad (40-6)$$

با حل این معادله به روش NU [۶۹]، ویژه توابع وابسته به پارامتر β به صورت زیر در می‌آیند

$$\begin{aligned}\xi_{n,L,n_\omega}(\beta)&=\beta^{-2}(\tanh^2\beta)^{\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\Omega}\right]}\times(1-\tanh^2\beta)^{-\frac{1}{2}\left[(2n+1)\pm\sqrt{2n+\frac{1}{4}+a(a+1)}+3\sqrt{\frac{1}{4}+\Omega}\right]}\\&\times P_n^{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\Omega},\,-(2n+1)\pm\sqrt{2n+\frac{1}{4}+a(a+1)}-\sqrt{\frac{1}{4}+\Omega}\right)}(1-2\tanh^2\beta), \qquad (41-6)\end{aligned}$$

مقادیر انرژی مربوط به طیف نیز طبق رابطه‌ی زیر تعیین می‌گردد

$$\varepsilon(n,L,n_\omega,n_{\tilde{\gamma}})=\varepsilon_0+An_{\tilde{\gamma}}+\left[2n+1+\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}[L(L+1)+3n_\omega(2L-n_\omega)+b(b-1))}\pm\sqrt{2n+\frac{1}{4}+a(a+1)}\right]^2, \qquad (42-6)$$

که در آن ε_0 و A ثابت‌های اختیاری‌اند. ما ترازهای انرژی را نسبت به پایین‌ترین حالت باند حالت پایه، یعنی 0_g^+، می‌سنجیم و نسبت به انرژی اولین حالت برانگیخته‌ی باند حالت پایه نرمالیزه می‌کنیم، یعنی انرژی حالت 2_g^+ را واحد انتخاب می‌کنیم. برا ی به دست آوردن سایر ثابت‌ها در رابطه‌ی انرژی که همان ثابت‌های پتانسیل‌اند مقدار کمیت زیر را کمینه می‌کنیم [۴۰]

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(E_i(Exp)-E_i(Th))^2}{(m-1)E(2_g^+)^2}}, \qquad (43-6)$$

برای هر یک از ایزوتوپ‌ها مقادیر تئوری انرژی با مقادیر تجربی آن ایزوتوپ مقایسه می‌شود. پس از تعیین ثابت‌های پتانسیل، مقادیر شدت گذار چهارقطبی الکتریکی مورد محاسبه قرار می‌گیرد. مقادیر شدت گذار به مقدار $B(E2;2_g\rightarrow 0_g)$، که شدت گذار از اولین حالت برانگیخته‌ی باند حالت‌پایه به پایین‌ترین حالت باند حالت پایه است ، نرمالیزه می‌شود و به این ترتیب آهنگ‌های گذار چهار قطبی الکتریکی طبق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شوند.

$$\frac{B(E2;L_i\alpha_i\rightarrow L_f\alpha_f)}{B(E2;2_g\rightarrow 0_g)} \qquad (44-6)$$

در جدول (۶-۳)، طیف انرژی تجربی هسته های ^{98}Ru، ^{98}Ru و ^{98}Ru با مقادیر تئوری حاصل از مدل ما محاسبه شده‌اند.

در جدول (۶-۴)، مقادیر تجربی آهنگ گذار چهارقطبی الکتریکی هسته‌های ^{98}Ru، ^{98}Ru و ^{98}Ru با مقادیر تئوری حاصل از مدل ما مقایسه شده‌اند.

مقادیر تجربی موجود در جداول از مرجع [۷۰]، گرفته شده‌اند. خطای نسبی بین مقادیر تئوری و تجربی نیز در جداول آمده‌اند.

مقایسه مقادیر تجربی و تئوری نشان می‌دهد که این هسته‌ها تغییر شکل یافته‌ی بدون تقارن محوری‌اند.

جدول (۶-۳). طیف انرژی محاسبه شده به روش تئوری که با داده‌های تجربی موجود در مرجع [۷۰] برای ایزوتوپ‌های $^{98-102}Ru$ مقایسه شده است. این مقادیر نسبت به انرژی حالت $0_{0,0}$ سنجیده و به انرژی حالت $2_{0,0}$ نرمالیزه شده‌اند. خطای بین مقادیر تئوری و تجربی نیز آمده است.

L_{n,n_ω}	^{98}Ru exp.	^{98}Ru Our result	error rate	^{100}Ru exp.	^{100}Ru Our result	error rate	^{102}Ru exp.	^{102}Ru Our result	error rate
$0_{0,0}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$2_{0,0}$	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	0.000
$4_{0,0}$	2.142	2.070	0.033	2.273	2.211	0.027	2.329	2.239	0.038
$6_{0,0}$	3.406	3.303	0.030	3.847	3.680	0.043	3.943	3.677	0.067
$8_{0,0}$	4.792	4.722	0.014	5.672	5.433	0.042	5.696	5.307	0.068
$10_{0,0}$	6.113	6.339	0.036	7.851	7.491	0.045	7.228	7.130	0.013
$2_{0,2}$	2.168	1.674	0.233	2.525	1.754	0.305	2.322	1.777	0.234
$4_{0,2}$	3.474	3.630	0.044	3.823	4.079	0.066	3.787	4.055	0.070
$6_{0,2}$				5.015	6.563	0.308	5.444	6.318	0.160
$3_{0,1}$	2.754	2.258	0.180	3.487	2.431	0.302	3.203	2.459	0.232
$5_{0,1}$				4.776	4.276	0.104	4.671	4.240	0.092
$a(a+1)$		-7.38			-8			-13.91	
$b(b-1)$		11.5			13.41			17.9	
σ		0.271			0.681			0.460	

جدول (۶-۴). مقادیر آهنگ گذار B(E2) محاسبه شده به روش تئوری که با داده‌های تجربی موجود در مرجع [۷۰] برای ایزوتوپ‌های $^{98-102}Ru$ مقایسه شده است. این مقادیر نسبت به $B(E2;2_{1,0}\rightarrow 0_{1,0})$ نرمالیزه شده‌اند. خطای بین مقادیر تئوری و تجربی نیز آمده است.

	^{98}Ru exp.	^{98}Ru Our result	error rate	^{100}Ru exp.	^{100}Ru Our result	error rate	^{102}Ru exp.	^{102}Ru Our result	error rate
$4_g \rightarrow 2_g$	1.86(14)	1.24	0.33	1.43(11)	1.23	0.14	1.48(25)	1.28	0.13
$6_g \rightarrow 4_g$	0.42(5)	1.39	2.30	< 4.83	1.37		1.52(56)	1.47	0.03
$8_g \rightarrow 6_g$	0.08	1.41	16.62		1.37		1.26(43)	1.51	0.19
$10_g \rightarrow 8_g$	0.06	1.37	21.83		1.33		1.28(47)	1.49	0.16
$2_\gamma \rightarrow 2_g$	1.52(17)	1.33	0.12	0.87(1)	0.32	0.63	0.72(1)	1.35	0.87
$4_\gamma \rightarrow 4_g$		0.22			0.22			1.22	
$6_\gamma \rightarrow 6_g$		0.10			0.10			1.10	
$3_\gamma \rightarrow 4_g$		0.86			0.85			0.89	
$5_\gamma \rightarrow 6_g$		0.56			0.55			0.59	
$4_\gamma \rightarrow 2_\gamma$		0.47			0.48			0.49	
$6_\gamma \rightarrow 4_\gamma$		0.53			0.54			0.56	
$5_\gamma \rightarrow 3_\gamma$		0.75			0.75			0.79	
$3_\gamma \rightarrow 2_\gamma$		1.57			1.56			1.62	
$5_\gamma \rightarrow 4_\gamma$		0.74			0.74			0.78	

پتانسیل وابسته به زمان

در این بخش، برای هسته‌های بدون تقارن محوری، بخش مربوط به متغیر β در تابع پتانسیل به صورت وابسته به زمان در نظر گرفته می‌شود. در مواردی که شکل هسته با زمان تغییر می‌کند مانند موارد هسته‌های رادیواکتیو و هسته هایی که در آن‌ها فرآیند شکافت هسته‌ای رخ می‌دهد، زمان نقش مهمی در دینامیک سیستم خواهد داشت.

تابع پتانسیل وابسته به زمان را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$V(\beta,\gamma)=\frac{1}{2}B\omega^2(t)\beta^2+\frac{W(\gamma)}{B\beta^2}, \qquad (45-6)$$

که در آن، $\omega(t)$ فرکانس زاویه‌ای وابسته به زمان است. $W(\gamma)$ بخش وابسته به متغیر γ در پتانسیل است و B پارامتر جرم است. از آنجا که تابع پتانسیل به صورت $V(\beta,\gamma)=V_1(\beta)+V_2(\gamma)/\beta^2$ انتخاب شده است، متغیرها در معادله‌ی ویژه مقداری کاملا قابل جداسازی‌اند.

در این صورت هامیلتونی بور عبارت می‌شود از

$$H_B(\beta,\gamma,t)=\frac{-\hbar^2}{2B}\left[\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2}{3}\pi k\right)}\right]$$
$$+\frac{1}{2}B\omega^2(t)\beta^2+\frac{W(\gamma)}{B\beta^2}, \qquad (46-6)$$

برای حل این معادله از روش ناوردای دینامیکی لوئیس-رزنفیلد[۵۰] [۷۱] بهره می‌گیریم.

برای یک سیستم وابسته به زمان که در آن هامیلتونی نیز وابسته به زمان است، تحول زمانی تابع موج طبق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

---

[50] Lewis-Riesenfield Dynamical Invariant Method

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H(t)\Psi(t), \qquad (47-6)$$

در روش لوئیس-رزنفیلد، فرض می‌شود که یک عملگر هرمیتی وجود دارد که شرط زیر را برآورده می‌کند

$$\frac{d\hat{I}(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{I}(t), H(t)] = 0, \qquad (48-6)$$

که این عملگر ناوردای دینامیکی خوانده می‌شود. با استفاده از این رابطه خواهیم داشت

$$i\hbar \frac{\partial (\hat{I}\,|\Psi\rangle)}{\partial t} = H(\hat{I}\,|\Psi\rangle), \qquad (49-6)$$

به این ترتیب می‌بینیم که $(\hat{I}\,|\Psi\rangle)$ می‌تواند حل دیگری برای معادله‌ی مستقل از زمان شرودینگر باشد. علاوه بر آن، به علت این که ناوردای دینامیکی عملگری هرمیتی است می‌توانیم تابع موج $|\Psi\rangle$ را بر حسب ویژه بردارهای این عملگر بنویسیم. بنابراین معادله‌ی ویژه مقداری عملگر ناوردا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$I(t)|\lambda,\kappa\rangle = \lambda|\lambda,\kappa\rangle, \qquad (50-6)$$

که در آن λ ویژه مقدار و κ شامل اعداد کوانتومی مربوطه است.

در مرجع [۷۲] نشان داده شده است که ویژه مقدار λ مستقل از زمان است. بنابر این می‌توان بسط تابع موج را به صورت زیر در نظر گرفت

$$|\Psi\rangle = \sum_{\lambda,\kappa} c_{\lambda,\kappa} e^{i\alpha_{\lambda,\kappa}(t)} |\lambda,\kappa;t\rangle, \qquad (51-6)$$

که در آن ضرایب $c_{\lambda,\kappa}$ مستقل از زمان‌اند و عامل فاز وابسته به زمان $\alpha_{\lambda,\kappa}(t)$ از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda,\kappa}(t)}{dt} = \langle \lambda, \kappa | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \lambda, \kappa \rangle, \qquad (52-6)$$

در این نقطه در صددیم که ناوردای دینامیکی متناظر را برای هامیلتونی بور بنا کنیم. با در نظر گرفتن عملگر زیر

$$P_{col}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^{3} \frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} \right), \qquad (53-6)$$

هامیلتونی بور در رابطه‌ی (۶-۴۸) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$H_B(\beta,\gamma,t) = \frac{P_{col}^2}{2B} + \frac{1}{2} B\omega^2(t)\beta^2 + \frac{W(\gamma)}{B\beta^2}, \qquad (54-6)$$

با استفاده از روشی که در مراجع [۷۱] و [۷۳-۷۴] مورد بررسی قرار گرفته است، ناوردای دینامیکی به شکل زیر در می‌آید

$$I(t) = \frac{1}{2}[\xi(t)(P_{col}^2 + \frac{2W(\gamma)}{\beta^2}) + \delta(t)\beta^2 + \eta(t)\{\beta, P_\beta\}], \qquad (55-6)$$

که در آن $P_\beta = -i\hbar(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{2}{\beta})$.

با استفاده از رابطه‌ی (۶-۵۰)، برای ضرایب موجود در رابطه‌ی فوق به مجموعه معادلات زیر می‌رسیم

$$\dot{\delta}(t) - 2\frac{\eta(t)}{B}\Omega^2(t) = 0, \qquad (56-6a)$$
$$\dot{\xi}(t) + 2\frac{\eta(t)}{B} = 0, \qquad (56-6b)$$
$$\dot{\eta}(t) = \frac{\xi(t)\Omega^2(t)}{B} - \frac{\delta(t)}{B}, \qquad (56-6c)$$
$$\Omega^2(t) = B^2\omega^2(t), \qquad (56-6d)$$

با در نظر گرفتن رابطه زیر

$$\xi(t) = \rho^2, \qquad (57-6)$$

و با استفاده از دومین رابطه از روابط (۶-۵۹) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\eta(t) = -B(t)\rho\dot{\rho}, \qquad (58-6)$$

و با در نظر گرفتن روابط (۶-۶۰)، (۶-۶۱) و سومین رابطه از روابط (۶-۵۹)، نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت

$$\delta(t) = B^2(\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho}) + \Omega^2(t)\rho, \qquad (59-6)$$

و با جایگذاری این رابطه در اولین رابطه از روابط (۶-۵۹)، به نتایج زیر می‌رسیم

$$\rho\frac{d}{dt}(B\ddot{\rho} + \Omega^2(t)\rho) + 3\rho(B\ddot{\rho} + \Omega^2(t)\rho) = 0, \qquad (60-6)$$

$$B^2\ddot{\rho} + \Omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3}, \qquad (61-6)$$

که رابطه‌ی اخیر به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود

$$\delta(t) = \frac{1}{\rho^2} + (B(t)\dot{\rho})^2, \qquad (62-6)$$

متغیر وابسته به زمان ρ، باید در معادله‌ی زیر که معادله‌ی ارماکوو-پیینی[۵۱] است، صدق کند.

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3 B^2}, \qquad (63-6)$$

همچنان که در مرجع [۷۵] ذکر شده است، شکل کلی بخش شعاعی عملگر اندازه حرکت در فضای n- بعدی به صورت زیر است

$$P_r = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n-1}{2r}\right), \qquad (64-6)$$

$$P_r^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\right), \qquad (65-6)$$

[51] Ermakov-Pinney

برای به دست آوردن ویژه توابع و ویژه مقادیر تبدیل یکانی زیر را در نظر می‌گیریم

$$U = \exp\left(\frac{iB\dot{\rho}}{2\hbar\rho}\beta^2\right), \qquad (66-6)$$

با استفاده از این تبدیل یکانی، ناوردای دینامیکی جدیدی به صورت $I' = UIU^{\dagger}$ تعریف می‌کنیم. و ویژه توابع جدید را به صورت $\Phi(\beta,\gamma,\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}U\Lambda(\beta,\gamma,\theta_i)$ در نظر می‌گیریم. عامل $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ برای شرایط نرمالیزه کردن افزوده شده است.

به این ترتیب معادله‌ی ویژه مقداری عملگر دینامیکی به صورت زیر در می‌آید

$$I'\Lambda(\beta,\gamma,\theta_i) = \lambda\Lambda(\beta,\gamma,\theta_i), \qquad (67-6)$$

که در آن

$$I'(t) = \frac{1}{2}\left[\rho^2\left(P_{col}^2 + \frac{2W(\gamma)}{\beta^2}\right) + (\frac{\beta}{\rho})^2\right], \qquad (68-6)$$

با استفاده از تبدیل $\frac{\beta}{\rho} = \zeta$، رابطه ی فوق به صورت زیر در می‌آید

$$I'(t) = \frac{1}{2}\left[P_{col}'^2 + \zeta^2 + \frac{2W(\gamma)}{\zeta^2}\right], \qquad (69-6)$$

که در آن $P_{col}'^2 = \rho^2(P_\beta^2 + \frac{L_\gamma^2}{\beta^2})$.

روابط زیر را در نظر می‌گیریم

$$\rho^2 P_\beta^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{4}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{2}{\zeta^2} \right), \qquad (70-6)$$

$$L_\gamma^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{3} \frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} \right), \qquad (71-6)$$

و اگر جداسازی متغیرها را به صورت $\Lambda(\beta,\gamma,\theta_i) = R(\zeta)\chi(\gamma,\theta_i)$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{d^2 R(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{4}{\zeta} \frac{dR(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{\hbar^2} \left(2\lambda - \zeta^2 - \frac{\hbar^2 \nu}{\zeta^2} \right) R(\zeta) = 0, \qquad (72-6)$$

$$\left(\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{3} \frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} - \frac{2W(\gamma)+2}{\hbar^2} + \nu \right) \chi(\gamma,\theta_i) = 0, \qquad (73-6)$$

در این روابط ν ثابت جداسازی است.

جواب‌های معادله‌ی (۶-۷۵) به صورت زیر خواهد بود

$$R\left(\frac{\beta}{\rho}\right) = \left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{2\left(\sqrt{\frac{9}{16}+\nu}-\frac{3}{4}\right)} \exp\left(\frac{-(\frac{\beta}{\rho})^2}{\hbar} \right) L_n^{2\sqrt{\frac{9}{16}+\nu}} \left(\frac{2}{\hbar} \left(\frac{\beta}{\rho}\right)^2 \right), \qquad (74-6)$$

که در آن L_n ها چند جمله‌ای‌های لاگر[۵۲]اند. ویژه مقادیر به صورت زیر در می‌آیند

$$\lambda = \frac{\hbar}{2} \left((2n+1) + 2\sqrt{\frac{9}{16}+\nu} \right), \qquad (75-6)$$

بخش γ ی تابع پتانسیل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\frac{2W(\gamma)}{\hbar^2} = \frac{\tilde{c}}{2} \left(\gamma - (\frac{\pi}{6}) \right)^2 = \frac{\tilde{c}}{2} \tilde{\gamma}^2, \qquad (76-6)$$

که در آن $\tilde{c}$ یک پارامتر ثابت است و $\tilde{\gamma} = \gamma - \dfrac{\pi}{6}$.

---

[52] Laguerre functions

انتخاب این شکل برای این بخش از تابع پتانسیل به این معنی است که فرض می‌شود یک کمینه‌ی عمیق در نقطه‌ی $\gamma=\frac{\pi}{6}$ در این بخش از تابع پتانسیل وجود دارد. به یاد بیاوریم که پارامتر γ میزان انحراف از تقارن محوری را نشان می‌دهد. هنگامی که مقدار این پارامتر از $\gamma=0$ تا $\gamma=\frac{\pi}{3}$ تغییر می‌کند، شکل هسته از حالت کشیده به حالت پخت تبدیل می‌شود. و بین این دو حالت شکل هسته بیضی‌گون بدون تقارن محوری است. این گذار از شکل کشیده به پخت فرض می‌شود که در نقطه‌ی $\gamma=\frac{\pi}{6}$ پیش می‌آید. بنابراین، ما جواب‌ها را برای اطراف این نقطه تعیین می‌کنیم. در این حالت مطابق بخش‌های قبل در همین فصل خواهیم داشت

$$\sum_{k=1,2,3}\frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma-\frac{2}{3}\pi k)}=4(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2)-3Q_1^2=4L(L+1)-3\alpha^2, \qquad (77-6)$$

و با انتخاب $n_\omega=L-\alpha$، خواهیم داشت

$$\left(\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{1}{4}[L(L+4)-3n_\omega(2L-n_\omega)]-\frac{2W(\gamma)+2}{\hbar^2}+\nu\right)\chi(\gamma,\theta_i)=0, \qquad (78-6)$$

به دلیل آن که $\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}=\left[\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}+3\cot 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right]$ و در نقطه ی $\gamma=\frac{\pi}{6}$ ، $3\cot 3\gamma\approx 0$، بنابر این معادله ی فوق به صورت زیر در می‌آید

$$\left(-\frac{d^2}{d\tilde{\gamma}^2}+\frac{1}{2}\tilde{c}\tilde{\gamma}^2+\nu-\frac{1}{4}[L(L+4)-3n_\omega(2L-n_\omega)]+\frac{2}{\hbar^2}\right)\chi(\tilde{\gamma},\theta_i)=0, \qquad (79-6)$$

و اگر تابع $\chi(\tilde{\gamma},\theta_i)$ را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\chi(\tilde{\gamma},\theta_i)=\phi_{n_{\tilde{\gamma}},L,\alpha}(\tilde{\gamma})\sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}}\times(D_{\mu,\alpha}^{(L)}(\theta_i)+(-1)^L D_{\mu,-\alpha}^{(L)}(\theta_i)) \qquad (80-6)$$

که در آن $D(\theta_i)$ ها توابع ویگنر بر حسب زوایای اویلرند، توابع $\phi_{n_{\tilde{\gamma}},L,\alpha}(\tilde{\gamma})$ به صورت زیر تعیین می-شوند

$$\phi(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{b}{\sqrt{\pi}\,2^{n_{\tilde{\gamma}}}\,n_{\tilde{\gamma}}!}}\, H_{n_{\tilde{\gamma}}}(b\tilde{\gamma}) \exp\left(\frac{-(b\tilde{\gamma})^2}{2}\right), \qquad (81-6)$$

که در این رابطه $b = \left(\frac{\tilde{c}}{2}\right)^{1/4}$ و $H_{n_{\tilde{\gamma}}}(b\tilde{\gamma})$ ها چند جمله‌ای‌های هرمیت‌اند.

ودر نتیجه

$$v_{L,n_\omega,n_{\tilde{\gamma}}} = \sqrt{2\tilde{c}}\left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{\hbar^2} + \frac{1}{4}[L(L+4) + 3n_\omega(2L - n_\omega)], \qquad (82-6)$$

که در آن $n_{\tilde{\gamma}}$ تعداد کوانتای نوسان مربوط به درجه آزادی γ است.

در نتیجه از ترکیب روابط (۶-۷۸) و (۶-۸۵) طیف انرژی به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\lambda = \varepsilon(n, L, n_\omega, n_{\tilde{\gamma}}) = \frac{\hbar}{2}\left((2n+1) + 2\sqrt{\frac{9}{16} - \frac{2}{\hbar^2} + \frac{1}{4}[L(L+4) + 3n_\omega(2L - n_\omega)] + \sqrt{2\tilde{c}}\left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}\right)}\right), \qquad (83-6)$$

و با توجه به تعریف باندهای مختلف انرژی، طیف انرژی را برای هر باند می‌توان تعیین کرد.

عامل فاز تعریف شده در رابطه‌ی (۶-۵۴) طبق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود [۷۳]

$$\alpha(t) = \frac{-\lambda}{\hbar}\int_0^t \frac{dt'}{B(t')\rho^3}, \qquad (84-6)$$

و در نتیجه تابع موج به صورت زیر است

$$\Psi(\beta,\gamma,t) = \sum_{\lambda,\kappa} c_{\lambda,\kappa}\, e^{i\alpha_{\lambda,\kappa}(t)}\, \Phi_{\lambda,\kappa}(\beta,\gamma,t), \qquad (85-6)$$

که در آن κ شامل همه‌ی اعداد کوانتومی است که سیستم را توصیف می‌کنند.

این مساله حالتی را نشان می‌دهد که در آن هسته‌ی تغییر شکل یافته تحول زمانی‌اش نیز مورد توجه است.

یکی از پدیده‌های فیزیک هسته ای انرژی پایین[۵۳] که بیشترین توجه و مطالعه را به خود اختصاص داده است، هم تحربی و هم تئوری، این است که چگونه ماده ی هسته‌ای[۵۴] به خود نظم می‌بخشد تا چنین شکل‌های متفاوتی را در هسته‌های متناهی[۵۵] به وجود آورد. وجود شکل‌های گوناگون، وجود همزمان شکل‌ها[۵۶]، و گذارهای شکلی ریشه در تحول ساختار پوسته‌ای تک-نوکلئونی با تغییر شکل هسته، اندازه حرکت زاویه‌ای، دما و تعداد نوکلئون‌های ظرفیت دارند، [۷۶].

همان طور که در این فصل دیدیم هسته‌ها تغییر شکل می‌یابند و گذار فاز شکلی در آن‌ها رخ می‌دهد. گذار فاز شکلی به عنوان تابعی از تعداد نوکلئون‌ها، پدیده ای عمومی[۵۷] است که در هسته‌های سبک، هسته‌های نیمه‌سنگین، هسته‌های سنگین و هسته‌های خیلی سنگین رخ می‌دهد، [۷۶].

[53] low-energy nuclear physics
[54] nucleonic matter
[55] finite nuclei
[56] shape coexistence
[57] universal phenomena

نتیجه گیری

هدف این رساله مطالعه و بررسی هسته‌های تغییر شکل یافته‌ی بدون تقارن محوری است. این مطالعات و بررسی‌ها در قالب مدل بور انجام شده‌اند. مروری بر بررسی‌های پیشین انجام شده است که نشان می‌دهند در قالب مدل بور و با حل معادله ی ویژه مقداری مدل بور با پتانسیل مناسب می‌توان گذار فاز شکلی در هسته‌ها را بررسی کرد. در این رساله، این بررسی برای هسته‌های تغییر شکل یافته‌ی بیضی‌گون انجام شده است. فرض شده است که بیضی‌گون بدون تقارن محوری است ولی در نقطه‌ای بحرانی گذار از حالت بیضی‌گون با تقارن محوری کشیده به بیضی‌گون با تقارن محوری پخت اتفاق می‌افتد.

با معرفی توبع پتانسیل مناسب، مشاهده‌پذیرهای فیزیکی این هسته‌ها محاسبه شده‌اند. پارامترهایی که در توابع پتانسیل وجود دارند این امکان را فراهم می‌کنند که بتوان به خوبی بین تئوری و تجربه سازگاری ایجاد نمود. با به کار بردن پتانسیل $u(\beta)=a\beta^2+b\beta+\frac{c}{\beta}+\frac{d}{\beta^2}$، طیف انرژی هسته‌های بدون تقارن محوری به دست آمده است. این مقادیر با طیف انرژی تجربی ایزوتوپ‌های هسته‌ی Xe مقایسه شده است و مشاهده می‌شود که تطابق خوبی بین و نتایج تئوری و داده‌های تجربی وجود دارد. هم‌چنین این تابع پتانسیل قابلیت تطبیق با تعدادی از پتانسیل‌هایی که برای توصیف ویژگی این گونه هسته‌ها به کار می‌روند، را داراست.

با استفاده از پتانسیل اکارت نیز طیف انرژی هسته‌های بیضی‌گون بدون تقارن محوری محاسبه شده است و نتایج حاصل با طیف انرژی تئوری مربوط به مدل Z(5) که نقطه‌ی بحرانی هسته‌هایی را

توصیف می‌کند که در آن‌ها گذار از حالت بیضی‌گون کشیده به بیضی‌گون پخت اتفاق می‌افتد. مقایسه این مقادیر تئوری نیز انطباق خوب این دو مدل را نشان می‌دهد.

با استفاده از پتانسیل پوشل-تلر طیف انرژی هسته‌های بدون تقارن محوری محاسبه شده است. مقادیر انرژی با طیف انرژی ایزوتوپ‌های هسته Ru مقایسه شده‌اند. مقادیر شدت گذار چهارقطبی الکتریکی این هسته‌ها نیز محاسبه شده‌اند و با مقادیر متناظر برای ایزوتوپ‌های هسته Ru مقایسه شده‌اند و مشاهده می‌شود که انطباق خوبی بین تئوری و تجربه وجود دارد.

به طور کلی، مقایسه مقادیر تجربی و تئوری نشان می‌دهد که این هسته‌ها تغییر شکل یافته‌ی بدون تقارن محوری‌اند و نقطه‌ای بحرانی وجود دارد که در آن نقطه گذار از حالت بیضی‌گون کشیده به بیضی‌گون پخت می‌تواند رخ دهد. حل‌های معادله‌ی ویژه‌مقداری بور ویژگی این هسته‌ها را در نقطه‌ی بحرانی توصیف می‌کنند.

برای پتانسیل وابسته به زمان نیز معادله‌ی ویژه‌مقداری بور در نقطه‌ی بحرانی برای این هسته‌ها انجام شده است. این بررسی حالاتی را می‌تواند توصیف کند که در آن‌ها ویژگی این هسته‌ها با زمان تغییر می‌کند. در این بررسی ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع وابسته به زمان هامیلتونی بور به دست آمده‌اند.

مراجع

[1] R. F. Casten and R. B. Cakirli (2016) "The evololution of collectivity in nuclei and the proton-neutron interaction" **Phys. Scr.** 91, p. 033004.

[2] A. Bohr (1952) "The coupling of nuclear surface oscillations to the motion of individual nucleons" **Matt. –Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.** 26, (14).

[3] A. Bohr and B. R. Mottelson (1953) "Collective and individual-particle aspects of nuclear structure" **Matt. –Fys. Medd. Danske Vid. Selsk**. 27, (16).

[4] J. Rainwater (1950) "Nuclear energy level argument for a spheroidal nuclear model" **Phys. Rev.** 79, p. 432.

[5] R. F. Casten and N. V. Zamfir (2000) "Evidence for a possible E(5) symmetry in ^{134}Ba " **Phys. Rev. Lett.** 85, p. 3584.

[6] R. F. Casten and N. V. Zamfir (2001) "Empirical realization of a critical point description in atomic nuclei" **Phys. Rev. Lett.** 87, 052503.

[7] E. A. McCutchan, D. Bonatsos, N. V. Zamfir and R. F. Casten (2007) "Staggering in γ -band energies and the transition between different structural symmetries in nuclei" **Phys. Rev. C** 76, p. 024306.

[8] R. F. Casten and E. A. McCutchan (2007) "Quantum phase transitions and structural evolution in nuclei" **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.** 34 R285.

[9] F. Iachello (2000) "Dynamic symmetries at the critical point" **Phys. Rev. Lett.** 85, p. 3580.

[10] F. Iachello (2001) "Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition" **Phys. Rev. Lett.** 87, p. 052502.

[11] F. Iachello (2003) "Phase transitions in angle variables" **Phys. Rev. Lett.** 91, p. 132502.

[12] L. Wilets and M. Jean (1956) "Surface oscillation in even-even nuclei" **Phys. Rev.** 102, p. 788.

[13] J. P. Elliot et al. (1986) "A soluble γ-unstable Hamiltonian" **Phys. Lett. B** 169, p. 309.

[14] J. P. Elliot, P. Park and J. A. Evans (1986) "The group [R^5] O(5) as a link between the O(6) limit of the IBM and the γ-unstable geometrical model" **Phys. Lett. B** 171, p. 145.

[15] P. M. Davidson (1932) "Eigenfunctions for calculating electronic vibrational intensities" **Proc. R. Soc.** 135, p. 459.

[16] M. A. Caprio (2003) "Finite well solution for the E(5) Hamiltonian" **Phys. Rev. C** 65, p. 031304.

[17] L. Fortunato and A. Vitturi (2003) "Analitically solvable potentials for γ-unstable nuclei" **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.** 29, p. 1341.

[18] A. Kratzer (1920) "Die ultraroten rotationsspektren der halogenwasserstoffe" **Z. Phys.** 3, p. 289.

[19] G. Lévai, J. M. Arias (2004) "The sextic oscillator as a γ-independent potential" **Phys. Rev. C** 69, p. 014304.

[20] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, P. P. Raychev and P. A. Terziev (2004) "Sequence of potentials interpolating between the U(5) and E(5) symmetries" **Phys. Rev. C** 69, p. 044316.

[21] L. Fortunato and A. Vitturi (2004) "New analytic solution of the collective Bohr Hamiltonian for a β-soft, γ-soft axial rotor" **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.** 30, p. 627.

[22] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, P. P. Raychev and P. A. Terziev (2004) "Sequence of potentials lying between U(5) and X(5) symmetries" **Phys. Rev. C** 69, p. 014302.

[23] N. Pietralla and O. M. Girbachenko (2004) "Evolution of the "β excitation" in axially symmetric transitional nuclei" **Phys. Rev. C** 70, p. 011304.

[24] A. S. Davydov, G. F. Fillipov (1958) "Rotational states in even atomic nuclei" **Nucl. Phys.** 8, p. 237.

[25] A. S. Davydov, V. S. Rostovsky (1959) "Relative transition pprobabilities between rotational levels of non-axial nuclei" **Nucl. Phys.** 12, p. 58.

[26] A. S. Davydov and A. A. Chaban (1960) "Rotation-vibration interaction in non-axial even nuclei" **Nucl. Phys.** 20, p. 499.

[27] A. S. Davydov (1961) "Collective excitations corresponding to quadrupole nuclear surface vibrations" **Nucl. Phys.** 24, p. 682.

[28] J. Meyer-ter-Vehn (1975) "Collective model description of transitional odd-A nuclei" **Nucl. Phys. A** 249, p.111.

[29] L. Fortunato (2004) "Soft triaxial rotovibrational motion in the vicinity of $\gamma = \frac{\pi}{6}$ " **Phys. Rev. C** 70, p. 011302.

[30] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, and P. A. Terziev (2004) "Z(5): critical point symmetry for the prolate to oblate nuclear shape phase transition" **Phys. Lett. B** 588, p. 172.

[31] I. Yigitoglu and D. Bonatsos (2011) "Bohr Hamiltonian with Davidson potential for triaxial nuclei" **Phys. Rev. C** 83, p. 014303.

[32] T. M. Corrigan, F. J. Margetan and S. A. Williams (1976) "Exact solution of the qadrupole surface vibration Hamiltonian in body-fixed coordinates" **Phys. Rev. C** 14, p. 2279.

[33] P. O. Hess, J. Maruhn and W Greiner (1981) "The general collective model applied to the chains of Pt, os and W isotopes" **J. Phys. G: Nucl. Phys.** 7, p. 737.

[34] L. Wilets and M. Jean (1956) "Surface oscillations in even-even nuclei" **Phys. Rev.** 102, p. 788.

[35] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev and P. A. Terziev (2004) "Ground state bands of the E(5) and X(5) critical symmetries obtained from Davidson potentials through a variational procedure" **Phys. Lett. B** 584, p. 40.

[36] I. Boztosum, D. Bonatsos, and I. Inci (2008) "Analytical solutions of the Bohr Hamiltonian with the Morse potential" **Phys. Rev. C** 77, p. 044302.

[37] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev and P. A. Terziev (2004) "E(5) and X(5) critical point symmetries obtained from Davidson potentials through a variational procedure" **Phys. Rev. C** 70, p. 024305.

[38] A. A. Raduta and P. Buganu (2011) "Toward a new description of traxial nuclei" **Phys. Rev. C** 83, p. 034313.

[39] I. Inci (2014) "Exactly seperable Bohr Hamiltonian with the Morse potential for triaxial nuclei" **Int. J. Mod. Phys. E** 23, p. 1450053.

[40] M. Chabab, A. Lahbas, and M. Oulne (2015) "nuclear shape phase transition within a conjunction of γ-rigid and γ-stable collective behaviors in deformation-dependent mass formalisim" **Eur. Phys. J. A** 51, p. 131.

[41] M.Chabab, A. Lahbas and M. Oulne (2015) "closed analytical solutions of Bohr Hamiltonian with Manning-Rosen potential model" **Int. J. Mod. Phys. E** 24. P. 1550089.

[42] M. Capak, D. Petrellis, B. Gönül and D. Bonatsos (2015) "Analytical solutions for the Bohr Hamiltonian with the Woods-Saxon potential" **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.** 42, p. 095102.

[43] A. A. Raduta and P. Buganu (2013) "Description of the isotope chain $^{180-196}Pt$ whitin several solvable approaches" **Phys. Rev. C** 88, p. 064328.

[44] A. C. Gheorghe, A. A. Raduta and A. Faessler (2007) "Solvable models for the gamma deformation having X(5) as limiting symmetry. Removing some drawbacks of the existing descriptions" **Phys. Lett. B** 648, p. 171.

[45] K. Kumar and M. Baranger (1967) "Complete numerical solution of Bohr's collective Hamiltonian" **Nucl. Phys. A** 92, p. 608.

[46] A. A. Raduta, A. C. Gheorghe, P. Buganu and A. Faessler, "A solvable model which has X(5) as a limiting symmetry and removes some inherent drawbacks" **Nucl. Phys. A** 819 (2009) 46.

[47] P. Buganu and R. Budaca (2015) "Analytical solution for the Davidov-Chaban Hamiltonian with a sextic potential for $\gamma = 30^{\circ}$ " **Phys. Rev. C** 91, p. 014306.

[48] L. Fortunato (2005) "Solution of the Bohr Hamiltonian, a compendium" **Eur. Phys. J. A** 26, p. 1.

[49] P. Buganu and L. Fortunato (2016) "Recent approaches to quadrupole collectivity: models, solutions and applications based on the Bohr Hamiltonian" **J. phys. G: Nucl. Phys.** 43, p. 093003.

[50] P. Cejnar, J. Jolie and R. F. Casten (2010) "Quantum phase transitions in the shapes of atomic nuclei" **Rev. Mod. Phys.** 82, p. 2155.

[51] J. M. Eisenberg and W. Greiner, (1975) " **Nuclear Theory 1, Nuclear Models**", North-Holland P. C. Amsterdam.

[52] R. F. Casten, et al. ,(1993), " **Algebraic Approaches to Nuclear Structure**", Harwood Academic Publishers, Switzerland.

[53] W. Greiner, J. A. Maruhn, (1996)," **Nuclear Models**", Springer, Berlin.

[54] A. Bohr and B. R. Mottelson, (1999), "**Nuclear structure: Nuclear Deformations**", Vol. II, World Scientific, Singapore.

[55] R. F. Casten (2006) "Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei" **Nat. Phys.** 2, p. 811.

[56] T. Nikšić, D. Vretenar, G. A. Lalazissis and P. Ring (2007) "Microscopic description of nuclear quantum phase transition" **Phys. Rev. Lett.** 99, p. 092502.

[57] S. Sachdev, (1999), "**Quantum Phase Transitions**", Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.

[58] R. F. Casten (2009) "Quantum phase transitions and structural evolution in nuclei" **Prog. Part. Nucl. Phys.** 62, p. 183.

[59] F. Iachello and A. Arima, (1987), "**The Interacting Boson Model**", Cambridge Univ. Press.

[60] J. Jolie, P. Cejnar, R. F. Casten, S. Heinze, A. Linnemann and V. Werner (2002) "Triple point of nuclear deformations" **Phys. Rev. Lett.** 89, p. 182502.

[61] D. D. Warner (2002) "A triple point in nuclei" **Nature** 420, p. 614.

[62] J. E. García, J. M. Arias, J. Barea and A. Frank (2003) "Phase transitions and critical points in the rare-earth region" **Phys. Rev. C** 68, p. 024307.

[63] R. V. Jolos and P. von Brentano (2008) "Bohr Hamiltonian, mass coefficients, and the structure of well deformed axially symmetric nuclei" **Phys. Rev. C** 78, p. 064309.

[64] A. R. Edmonds, (1975), "**Angular Momentum in Quantum Mechanics**", Princeton University Press, Princeton, NJ.

[65] R. F. Casten, (1999), "**Nuclear Structure from a Simple Perspective**", Oxford University Press, Oxford.

[66] I. Inci, I. Boztosun and Y. E. Gonen (2012) "Bohr Hamiltonian with a finite well for triaxial nuclei" **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.** 39, p. 085112.

[67] R. De, R. Dutt and U. Sukhatme (1992) "Mapping of shape invariant potentials under point canonical transformations" **J. Phys. A: Math. Gen.** 25, p. L843.

[68] S. Raman, C. W. Nestor, Jr., and P. Tikkanen (2001) "Transition probability from the ground to the first-excited 2^+ state of even-even nuclids" **At. Data Nuclear Data Tables** 78, p. 1.

[69] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, (1988), " **Special Functions of Mathematical Physics**", Birkhäuser, Basel.

[70] R. Budaca, P. Buganu, M. Chabab, A. Lahbas, and M. Oulne (2016) "Extended study on a quasi-exact solution of the Bohr Hamiltonian" **Ann. Phys. (NY)** 375, p. 65.

[71] H. R. Lewisand and W.B. Riesenfeld (1969) "An exact quantum theory of time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field" **J. Math. Phys.** 10, p. 1458.

[72] S. Dey and A. Fring (2014) "Noncommutative quantum mechanics in atime-dependent background" **Phys. Rev. D** 90, p. 084005.

[73] M. Maamache (1996) "unitary transformation appeoach to the exact solution for the singular oscillator" **J. Phys. A: Math. Gen.** 29, p. 2833.

[74] H. Sobhani and H. Hassanabadi (2015) "Two-dimensional linear dependencies on the coordinate time-dependent interaction in relativistic non-commutative phase space" **Commun. Theor. Phys.** 64, p. 263.

[75] G. Paz (2001) "On the connection between thr radial momentum operator and the Hamiltonian in n dimensions" **Eur. J. Phys.** 22, p. 337.

[76] Z. P. Li, T. Nikšić, and D. Vretenar (2016) "Coexistence of nuclear: self-consistent mean-field and beyond" **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.** 43, p. 02400.

Abstract

We have studied the deformed triaxial atomic nuclei using Bohr model which describes the even-even quadrupole deformed nuclei. The solutions of the eigenvalue equation of the Bohr Hamiltonian with suitable potentials provide a consistent framework to describe the structure of the quadrupole deformed nuclei. The suitable potential functions describing the triaxial nuclei have been introduced. The Bohr Hamiltonian has been solved with suitable potentials to investigate the structure of the triaxial nuclei in the critical points in which shape phase transitions occur. The physical observables, energy spectra and electric quadrupole transition rates, have been obtained and are compared to the theoretical and empirical results of the other works. Shape phase transitions in triaxial nuclei have been investigated.

Keywords: collective nuclear model; Bohr model; Bohr Hamiltonian; triaxial nuclei; electric quadrupole transition strength; critical point; shape phase transition.

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

Ph.D. Thesis in nuclear Physics

Energy Spectra and Shape Phase Transition in Triaxial Nuclei

By: Leyla Naderi

Supervisor:
Dr. Hassan Hassanabadi

May 2017