





دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده ریاضی

گزارش نهایی طرح پژوهشی

بررسی برآورد آزمون مقدماتی و نوع استاین در مدل های خطی همزمان

کد طرح ۲۳۰۵۶

مجری:

محمد آرشی

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شاهرود

این پژوهش با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام گردیده است
تاریخ تصویب و خاتمه در شورای پژوهشی دانشگاه به ترتیب ۸۹/۳/۱۶ و ۸۹/۸/۹ می باشد



شناسنامه طرح پژوهشی

این طرح با مشخصات ذیل با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است.

الف) عنوان طرح:

۱- فارسی: بررسی برآورد آزمون مقدماتی و نوع استاین در مدل های

خطی همزمان

۲- لاتین: Preliminary test and Stein-type estimation in simultaneous linear models

۳- کد طرح: ۲۳۰۵۶

ب) نام مجری: محمد آرشی عضو هیات علمی دانشکده: ریاضی

ج) همکاران: ندارد

— مصوب شورای پژوهشی در جلسه شماره ۱۹۸ مورخ ۱۳۸۹/۳/۱۶

— تایید اختتام در شورای پژوهشی در جلسه شماره ۲۰۳ مورخ ۱۳۸۹/۸/۹

— مدت زمان اجرا ۸ ماه

— کل مبلغ اعتبار طرح ۳۱۰۰۰۰۰۰ ریال

مقاله / مقالات مستخرج از طرح با عناوین: (که پیوست گزارش می باشد)

۱- Arashi, M., Tabatabaey, S.M.M. and Iranmanesh, A. (۲۰۱۰) Improved estimation in stochastic linear models under elliptical symmetry, J. Appl. Prob. Statist. Accepted.

امضاء
مدیر امور پژوهشی
معاونت پژوهشی و فناوری
دانشگاه صنعتی شاهرود

امضاء محمد آرشی
نام و نام خانوادگی
مجری طرح

فرم اطلاعات اجمالی

		ردیف
بررسی برآورد آزمون مقدماتی و نوع استاین در مدل های خطی همزمان		عنوان طرح
Preliminary test and Stein-type estimation in simultaneous linear models		عنوان لاتین
نام سازمان	دانشگاه صنعتی شاهرود	محل نگهداری گزارش (اصلی یا کپی) طرح (سازمان از کل به جزء)
آدرس پستی	شاهرود- میدان هفتم تیر- بلوار دانشگاه- صندوق پستی ۳۱۶- کد پستی ۳۶۱۹۹۵۱۶۱	
کشور	ایران	
تلفن		
فاکس		
E-mail		
آمار استنباطی		
رشته های اصلی	مدل های خطی	رشته های اصلی
بعدی....	محمد آرشی	بعدی....
مسئول		مسئول
مجری (سازمان)		مجری (سازمان)
همکاران		همکاران
تاریخ شروع	۱۳۸۹/۲/۲۸	تاریخ شروع
تاریخ خاتمه	۱۳۸۹/۸/۹	تاریخ خاتمه
اعتبار مصوب به عدد (ریال)	۳۱۰۰۰۰۰۰ ریال	اعتبار مصوب به عدد (ریال)
میزان پیشرفت کار (درصد)	صد در صد	میزان پیشرفت کار (درصد)
نوع طرح	بنیادی	نوع طرح
چکیده		چکیده
کلید واژه فارسی	برآوردگر نوع استاین، مدل های بیضی گون، تبدیل لاپلاس معکوس، مدل رگرسیون چندگانه	کلید واژه فارسی
کلید واژه لاتین	Stein-type estimator, Elliptically contoured models, Inverse Laplace transform, Multiple regression model	کلید واژه لاتین

چکیده

از آن جایی که در مدل سازی سیستم های اقتصادی و مالی، گاهی اوقات برخی رفتارهای تصادفی خطی پیش بینی نشده بر مدل مورد بررسی تاثیرگذار هستند، شناسایی و کنترل این گونه رفتارها که "محدودیت های تصادفی" نامیده می شوند، از اهمیت بسزایی برخوردار است. تاکنون تنها مدل سازی در حالت یک محدودیت تصادفی مورد بررسی قرار گرفته است و از آن جایی که در عمل ممکن است با چندین محدودیت تصادفی مواجه شویم، در این طرح برای اولین بار سعی می شود یک مدل رگرسیون خطی چندگانه را بیشتر از یک محدودیت تصادفی مورد بررسی قرار داده و مدلی یکپارچه به منظور شناخت موثر پارامترهای موجود ارائه دهیم. در این راستا با توجه به این مطلب که بعد فضای پارامتر بزرگتر از ۲ می باشد، به برآورد طبیعی پارامترها اکتفا نکرده و علاقه مندیم تا برآوردگرهای بهبودیافته از نوع آزمون مقدماتی^۲ و انقباضی استاین^۳ را یافته و خواص آن ها را مورد مطالعه قرار دهیم.

با توجه به مطالعات انجام شده، برآوردگرهای بهبودیافته، رفتارهای متفاوتی را نسبت به جهت گیری سیستم خطی پارامترها از خود نشان می دهند؛ لذا در ادامه کار به دنبال تعیین دقیق جهت سیستم خطی پارامترها برای تعیین رفتار بهینه برآوردگرها هستیم. برای بررسی صحت نتایج بدست آمده نیز از یک سری نمودارهای آماری استفاده می شود. در این خصوص، توجه خود را به عامل انقباض برآوردگر نوع استاین معطوف می کنیم و به دنبال مقدار بهینه آن می باشیم.

با توجه به این که خانواده توزیع های بیضی گون (که زمینه تخصصی محقق این طرح می باشد) شامل توزیع های چندمتغیره مهمی از جمله نرمال، استیودنت و اسلش است، چارچوب ارائه شده فوق را در حالت کلی تر توزیع های بیضی گون ارائه کرده، مورد بررسی قرار می دهیم. از آن جایی که ممکن است در عمل با توزیع های غیر گوسی (غیر نرمال) مواجه می شویم این مطالعه، این امکان را فراهم می کند که در

تحلیل‌ها از توزیع‌های با دم‌های پهن‌تر نسبت به نرمال چندمتغیره استفاده کنیم که توزیع‌های مناسبی به خصوص برای سیستم‌های اقتصادی و مالی، به دلیل وجود نقاط پرت^۴ و دورافتاده^۵، می‌باشند.

فهرست مندرجات

۱. مقدمه ۱
۲. مدل های بیضی گون ۳
۳. ساختار مدل رگرسیون خطی با محدودیت تصادفی ۸
۴. معرفی برآوردها ۱۰
۵. محاسبه آریبی و مخاطره ۱۳
۶. تحلیل مخاطره ۱۸
۷. مثال عددی ۲۱
۸. تعمیم به حالت بیش از دو محدودیت ۲۳
۹. مراجع ۲۵

۱. مقدمه

در این طرح ابتدا مدل های بیضی گون با یک محدودیت را مورد بررسی قرار داده و سپس آن را به بیش از یک محدودیت تعمیم می دهیم. از آن جا که تاکنون هیچ تحقیقی در زمینه مدل های خطی با خطای دارای توزیع بیضی گون، حتی در حالت یک محدودیت تصادفی، انجام نگرفته است لذا ابتدا این حالت را با تمامی جزئیات مورد بررسی قرار داده و سپس تعمیم آن را ارائه خواهیم نمود. در این راستا به ذکر تعاریف و مقدمات مورد نیاز می پردازیم.

تعریف ۱-۱: فرض کنید متغیر تصادفی X متعلق به خانواده توزیع های زیر بوده و D کلاس تمام برآوردگرهای پارامتر θ باشد

$$F = \{f | f_{\theta}(x) > 0, \forall x \in X, \theta \in \Theta\}$$

در برآورد پارامتر $\theta \in \Theta$ ، برآوردگر $\delta \in D$ ، را غیر مجاز^۱ گویند اگر برآوردگر دیگری مانند $d^* \in D$ موجود باشد طوری که نامساوی زیر برای توابع مخاطره R^{δ} برقرار باشد

$$R(\theta, \delta^*(X)) = E[L(\theta, \delta^*(X))] < E[L(\theta, \delta(X))] = R(\theta, \delta(X))$$

که در آن $L(\theta, \delta(X))$ تابع زیان^۲ ناشی از استفاده $\delta \in D$ در برآورد θ است.

اغلب در مسائل استنباط آماری، هنگام استفاده از برآوردگر δ برای تخمین پارامتر مجهول θ ، اغلب علاقه مندیم تا مجاز یا غیرمجاز بودن آن مورد بررسی واقع شود. در این خصوص برآوردگری قابل قبول است که غیر مجاز نباشد. چارلز استاین^۳ (۱۹۵۶) نشان داد زمانی که بعد فضای پارامتر Θ بزرگتر از ۲ باشد، میانگین توزیع نرمال چندمتغیره که بهترین برآوردگر خطی ناریب^۴ (BLUE)، هم پایا^۵ و مینیماکس^۶ است غیرمجاز می باشد. از آن زمان به بعد آماردانان زیادی در صدد بر آمدند تا ساختار برآوردگرهایی را بیابند که مقدار تابع مخاطره آن ها کمتر از مقدار مخاطره برآوردگر میانگین توزیع نرمال چندمتغیره باشد. از جمله این تحقیقات می توان به مطالعات جمیز و استاین^۷ (۱۹۶۱)، بارانچیک^۸ (۱۹۷۰)، استاین (۱۹۸۱)، کسلا^۹ (۱۹۹۰)، لهمن و کسلا^{۱۰} (۱۹۹۸)، و صالح^{۱۱} (۲۰۰۶) تحت توزیع نرمال

^۱ Inadmissible
^۲ Risk functions
^۳ Loss function
^۴ Stein
^۵ Best linear Unbiased Estimator
^۶ Equivariant
^۷ Minimax
^۸ James and Stein
^۹ Baranchik
^{۱۰} Casella
^{۱۱} Lehmann and Casella
^{۱۲} Saleh

چندمتغیره، برندوین و استرادرمان^{۱۳} (۱۹۹۱)، اوآسو و استرادرمان^{۱۴} (۲۰۰۲) و زو و ایزمیریان^{۱۵} (۲۰۰۶) در مدل های کروی و سریواستاوا و بیلودیو^{۱۶} (۱۹۸۹) و آرشی و همکاران (۲۰۱۰) در مدل های بیضی گون اشاره کرد. این نوع برآوردگرها، به افتخار پرفسور چارلز استاین، برآوردگرهای انقباضی نوع استاین نامیده شده است.

در این طرح علاقه مندیم تا تحت ساختار کلی برآوردگرهای انقباضی نوع استاین، شرایط برتری برآوردگر میانگین جامعه را در مدل های بیضی گون بدست آوریم. بدین منظور از تابع زیان "توان دوم خطا" استفاده می کنیم. فرض کنید $S(p)$ مجموعه تمام ماتریس های مربعی معین مثبت از بعد p است.

تعریف ۱-۲: تحت مفروضات تعریف ۱-۱، فرض کنید $\delta \in D$ و $W \in S(p)$ ماتریس وزن معلوم است. تابع زیان توان دوم خطا وزنی به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} L(\delta; \theta) &= \|\delta - \theta\|_W^2 \\ &= (\delta - \theta)'W(\delta - \theta) \end{aligned}$$

ساختار کلی این طرح پژوهشی به صورت زیر است که در بخش ۲ کلاس توزیع های بیضی گون را معرفی کرده و خواصی از این کلاس که در این مطالعه بکار رفته ارائه می شود. در بخش ۳ ساختار کلی مدل رگرسیون خطی با یک محدودیت تصادفی را معرفی می نماییم. نتایج اصلی این تحقیق که شامل معرفی برآوردگرها، محاسبه اریبی و مخاطره آن ها و تحلیل مخاطره است به ترتیب در بخش های ۴، ۵ و ۶ و مثال کاربردی جهت مشخص کردن اهمیت موضوع مورد تحقیق را در بخش ۷ ارائه می دهیم. در بخش ۸ تعمیمی از مدل ارائه شده در بخش ۳ را که منظور نظر این تحقیق می باشد ارائه می کنیم.

^{۱۳} Brandwein and Strawderman

^{۱۴} Ouassou and Strawderman

^{۱۵} Xu and Izmirlian

^{۱۶} Srivastava and Bilodeau

۲. مدل های بیضی گون

در این بخش توزیع های بیضی گون (ECD)^{۱۷} یا توزیع های با منحنی های تراز بیضی شکل را معرفی کرده و بعضی از خواص مهم آن ها را بیان می کنیم.

فرض کنید $\Psi_p = \{\psi(\cdot): \psi(t_1^2 + \dots + t_p^2)\}$ است

تعریف ۱-۲: متغیر تصادفی $X = (X_1, \dots, X_p)$ را دارای توزیع بیضی گون با پارامترهای مکان μ ، پراکندگی Σ و تابع مولد مشخصه ψ ^{۱۸} می گوییم و با نماد $X \sim E_p(\mu, \Sigma, \psi)$ نشان می دهیم اگر تابع مشخصه آن به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= E(e^{it'X}) \\ &= \exp(it'\mu) \psi(t'\Sigma t) \end{aligned}$$

که در آن $\mu \in R^p$ ، $\Sigma \in S(p)$ و $\psi \in \Psi_p$.

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی باشد، تابع آن به صورت زیر است

$$f_X(x) = k_p |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} h[(x - \mu)'\Sigma^{-1}(x - \mu)]$$

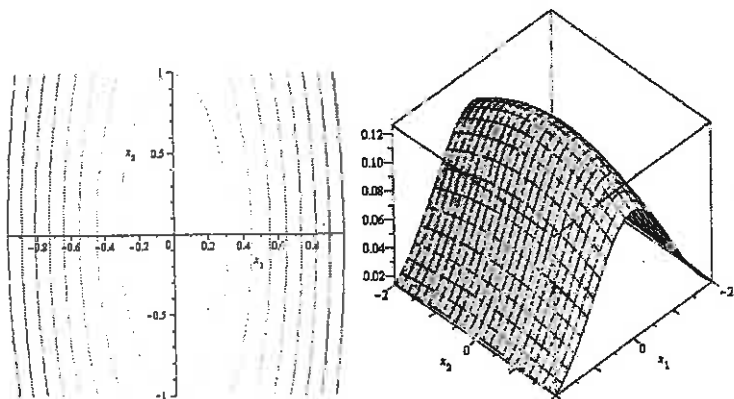
که در آن $h(\cdot)$ تابع مولد چگالی^{۱۹} و k_p ضریب نرمال سازی^{۲۰} نام دارد. در این حالت از نماد $X \sim E_p(\mu, \Sigma, h)$ استفاده می کنیم.

لازم به ذکر است که با داشتن ψ می توان h را تعیین کرد و برعکس.

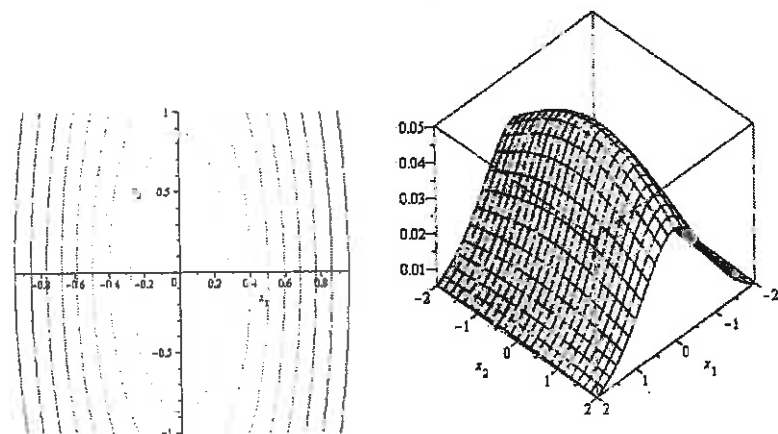
مدل های ECD به عنوان مدل هایی با دنباله های سنگین تر / سبک تر نسبت به مدل نرمال چندمتغیره، کاربرد فراوانی در مدل های اقتصادی، برق، صنعت و مسائل پایه ای آمار استنباطی پیشرفته با ماتریس ها دارند. چنان چه ماتریس پراکندگی، همانی باشد، توزیع بیضی گون را توزیع کروی می نامند. موضوعات مرتبط با نظریه توزیع و استنباط در مورد ECD ها را می توان در کتاب های مورهد^{۲۱}(۱۹۸۲)، فنگ^{۲۲} و همکاران (۱۹۹۰)، گوپتا و وارگا^{۲۳}(۱۹۹۳) و اندرسن^{۲۴}(۲۰۰۳) یافت. برخی از این توزیع ها عبارتند از توزیع های چندمتغیره نرمال، پیرسن نوع

^{۱۷} Elliptically contoured distributions
^{۱۸} Characteristic generator
^{۱۹} Density generator
^{۲۰} Normalizing constant
^{۲۱} Muirhead
^{۲۲} Fang
^{۲۳} Gupta and Varga
^{۲۴} Anderson

II/VII، t استیودنت (MT)، لجستیک، کاتز^{۲۵}، اسلش^{۲۶}، نمایی توانی^{۲۷} و بسل^{۲۸}. در شکل های ۱-۱ تا ۶-۱ نمودار تابع چگالی احتمال دو متغیره و منحنی های تراز را برای توزیع های مختلف نشان می دهد.

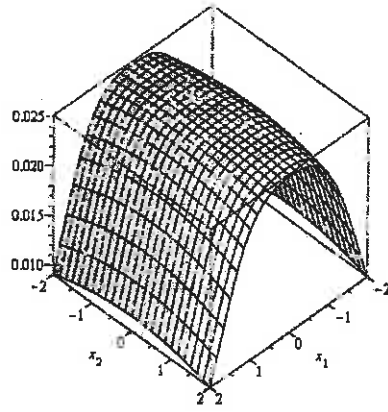
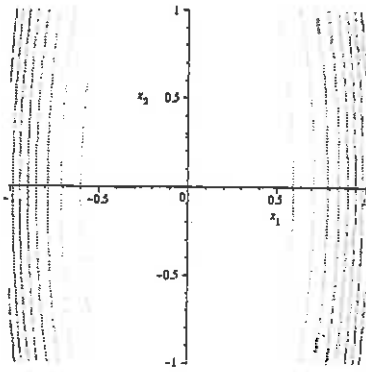


شکل ۱-۲: نمودار تابع چگالی احتمال و منحنی های تراز نرمال دو متغیره

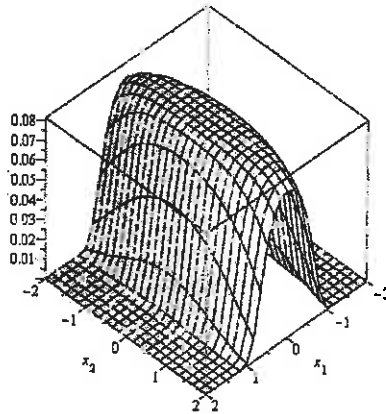
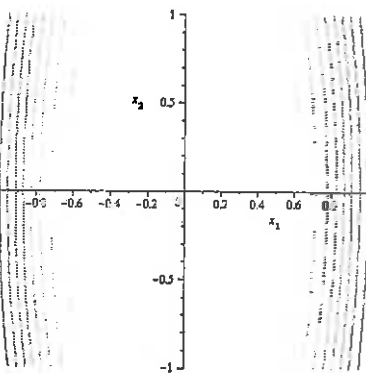


شکل ۲-۲: نمودار تابع چگالی احتمال و منحنی های تراز t-استیودنت دو متغیره

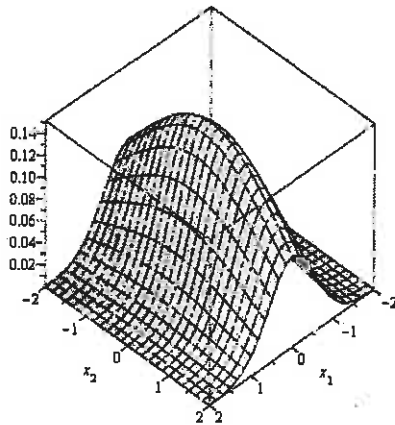
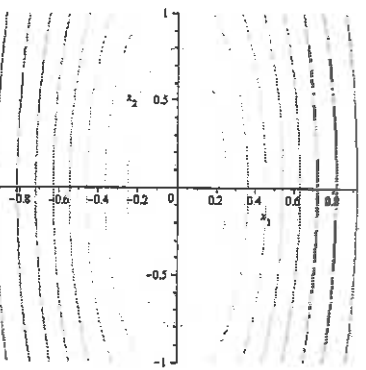
- Multivariate Kotz distribution ^{۲۵}
- Multivariate slash distribution ^{۲۶}
- Multivariate power exponential distribution ^{۲۷}
- Multivariate Bessel distribution ^{۲۸}



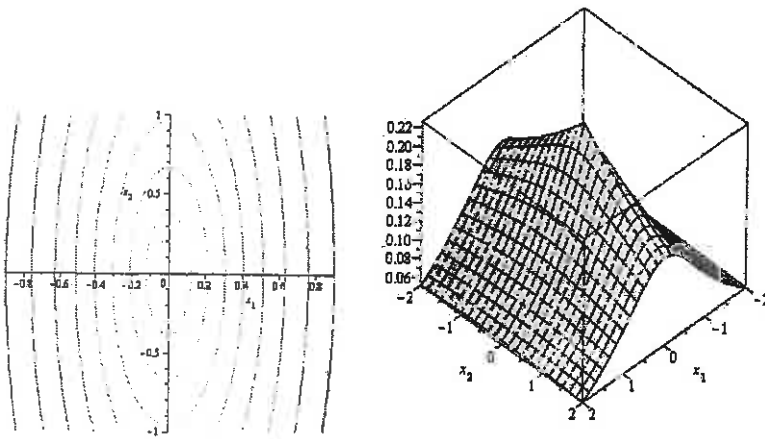
شکل ۲-۳: نمودار تابع چگالی احتمال و منحنی های تراز لجستیک دو متغیره



شکل ۲-۴: نمودار تابع چگالی احتمال و منحنی های تراز توانی نمایی دو متغیره



شکل ۲-۵: نمودار تابع چگالی احتمال و منحنی های تراز کاتز دو متغیره



شکل ۲-۶: نمودار تابع چگالی احتمال و منحنی های تراز لاپلاس دو متغیره

لم ۲-۱: اگر $X \sim E_p(\mu, \Sigma, \psi)$ آن گاه

$$E(X) = \mu$$

$$\text{Cov}(X) = -\psi'(\cdot)\Sigma$$

(برای اثبات به مورهد (۱۹۸۲) مراجعه کنید).

لم ۲-۲: اگر $X \sim E_p(\mu, \Sigma, h)$ و h دارای تبدیل لاپلاس معکوس^{۲۹} باشد آن گاه تابعی مثبت مانند W موجود است به طوری که تابع چگالی X را می توان به صورت زیر نشان داد

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} W(t)f_N(x)dt,$$

که در آن $f_N(x)$ نشان دهنده تابع چگالی احتمال $N_p(\mu, t^{-1}\Sigma)$ است و

$$W(t) = (\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{p}{2}} \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$$

در $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ نشان دهنده تبدیل لاپلاس معکوس $f(s)$ در $s = \frac{(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}{t}$ می باشد.

(برای اثبات به چو^{۳۰} (۱۹۷۳) مراجعه کنید).

برای آگاهی بیشتر در مورد تبدیل لاپلاس معکوس می توان به دنبات و باتا^{۳۱} (۲۰۰۷) مراجعه کرد.

همچنین از آن جایی که $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ می توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} W(t) f_N(x) dt \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) dx \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(t) dt \end{aligned}$$

بنابراین اگر $W(t)$ یک تابع نامنفی باشد می توان آن را به عنوان یک تابع چگالی در نظر گرفت که این مهم ترین خاصیت آن است. برای مشاهده نمونه های مختلفی از $W(t)$ می توان به آرشی و طباطبایی (۲۰۱۰) مراجعه کرد.

زیر کلاس دیگری از توزیع های بیضی گون که شامل لم ۱-۱ نیز می شود به صورت زیر تعریف می شوند.

- (i): $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) W(dt)$,
- (ii): $\int_{-\infty}^{\infty} t^{-1} W^+(dt) < \infty$,
- (iii): $\int_{-\infty}^{\infty} t^{-1} W^-(dt) < \infty$,

که در آن $W^+ - W^-$ تجزیه جردن^{۳۲} به قسمت مثبت و منفی اندازه علامت^{۳۳} W می باشد. برای آگاهی بیشتر در این مورد می توان به سریواستاوا و بیلودیو (۱۹۸۹) رجوع کرد. از طرفی

$$\begin{aligned} E(XX') &= \int_{-\infty}^{\infty} xx' f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} xx' f_N(x) dx \right\} W(dt) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{t^{-1} \Sigma\} W(dt) \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t^{-1} W(dt) \right\} \Sigma \end{aligned}$$

و با توجه به بند های (ii) و (iii) می توان نتیجه گرفت $\int_{-\infty}^{\infty} t^{-1} W(dt) < \infty$. این بدین معنی است که در این حالت کوواریانس در صورت وجود امید ریاضی موجود است.

^{۳۲} Jordan Decomposition
^{۳۳} Signed measure

۳. ساختار مدل رگرسیون خطی با محدودیت تصادفی

در این بخش ساختار کلی مدل رگرسیون خطی چندگانه^{۳۴} با اعمال یک محدودیت بر روی فضای پارامتر را ارائه می‌کنیم.

مدل رگرسیون خطی زیر را در نظر بگیرید

$$y = X\beta + \epsilon$$

که در آن y بردار پاسخ n بعدی، X ماتریس طرح در اندازه $n \times p$ با رتبه کامل p ، $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$ بردار ضرایب رگرسیونی و $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)'$ بردار خطا می‌باشند.

فرض کنید اطلاعاتی غیر نمونه‌ای نیز به صورت یک سری از قیود تصادفی به صورت زیر بر روی فضای پارامتر β اعمال شده است

$$r = R\beta + v$$

که در آن R یک ماتریس $q \times p$ از مقادیر معلوم غیر تصادفی با رتبه کامل سطری q ، r بردار $q \times 1$ و v بردار خطای تصادفی است. علاوه بر این فرض می‌کنیم ϵ مستقل از v است.

برای مشاهده کاربردهای مدل تصادفی فوق می‌توان به زلنر^{۳۵} (۱۹۶۲)، جاج و باک^{۳۶} (۱۹۷۸)، تیل و گلدبرگر^{۳۷} (۱۹۶۱) و طباطبایی و همکاران (۲۰۰۴) مراجعه کرد.

حال فرض می‌کنیم $\epsilon \sim E_n(0, \sigma^2 \Sigma_{11}, h)$ و $v \sim E_q(\mu, \sigma^2 \Sigma_{22}, h)$ که در آن μ بردار $q \times 1$ از مقادیر معلوم است.

مشابه تیل و گلدبرگر (۱۹۶۱) اطلاع نمونه‌ای و اطلاع تصادفی را به صورت زیر ترکیب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \epsilon \\ v \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ v \end{bmatrix} \sim E_{n+q} \left\{ \begin{bmatrix} n \times 1 \\ \mu \end{bmatrix}, \sigma^2 V, h \right\} \quad (۱-۳)$$

Multiple linear regression model^{۳۴}
Zellner^{۳۵}
Judge and Bock^{۳۶}
Theil and Goldberger^{۳۷}

خال مدل ترکیب شده فوق را به صورت کلی زیر باز نویسی می کنیم

$$Y^* = Z\phi + Y \quad (2-3)$$

که در آن

$$Y^* = \begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} X & \cdot n \times q \\ \cdot q \times p & I_q \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \beta \\ R\beta + \mu \end{bmatrix}$$

و

$$Y = \begin{bmatrix} \epsilon \\ v - \mu \end{bmatrix} \sim E_{n+q}(\cdot (n+q) \times 1, \sigma^2 V, h) \quad (3-3)$$

مدل (2-3) نقش کلیدی در تعمیم مطالب این تحقیق دارد زیرا به دلیل ساختار شبیه به رگرسیون چندگانه آن، در صورتی که بتوان استنباط در مورد پارامتر ϕ را تحت خطای بیضی گون در (3-3) انجام داد به راحتی می توان استنباط بدست آمده را حتی برای حالت با بیش از یک محدودیت تصادفی نیز به کار برد.

اکنون فرض کنید علاقه مند به بررسی درستی فرضیه صفر زیر باشیم.

$$H_0: \mu = H\phi = \cdot$$

بدین منظور برآوردهای محدود نشده و محدود شده^{۳۸} را در ادامه ارائه کرده با استفاده از آن ها آماره آزمون نسبت درستنمایی^{۳۹} را برای آزمون فرضیه فوق بدست می آوریم. سپس با استفاده از آن برآوردهای آزمون مقدماتی^{۴۰} انقباضی نوع استاین^{۴۱} و قسمت مثبت آن را ارائه می کنیم.

Restricted^{۳۸}
Likelihood ratio test^{۳۹}
Preliminary test^{۴۰}
Stein-type shrinkage^{۴۱}

۴. معرفی برآوردگرها

در این بخش برآوردگرهای ذکر شده در بخش قبل را برای پارامتر مجهول ϕ ارائه می کنیم.

بر اساس اصل کمترین توان های دوم، برآوردگر محدود نشده (UE) پارامتر ϕ با می نیم کردن عبارت $Y'V^{-1}Y$ نسبت به ϕ به صورت زیر می باشد

$$\hat{\phi} = (Z'V^{-1}Z)^{-1}Z'V^{-1}Y^* \quad (1-4)$$

که برآوردگر UE برای پارامتر ϕ ناریب می باشد.

همچنین برآوردگر محدود نشده پارامتر σ^2 عبارتست از

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (Y^* - Z\hat{\phi})'V^{-1}(Y^* - Z\hat{\phi}) \quad (2-4)$$

به راحتی می توان نشان داد که برآوردگر

$$S^2 = \frac{n\hat{\sigma}^2}{n-p} \quad (3-4)$$

برای پارامتر زیر ناریب است

$$\sigma_e^2 = -2\psi'(\cdot)\sigma^2 \quad (4-4)$$

قبل از ارائه آماره آزمون برای $H\phi = 0$ ، برآوردگر محدود شده (RE) پارامتر ϕ را به صورت زیر ارائه می دهیم

$$\tilde{\phi} = \hat{\phi} + (Z'V^{-1}Z)^{-1}H'[H(Z'V^{-1}Z)^{-1}H']^{-1}H\hat{\phi} \quad (5-4)$$

همچنین برآوردگر محدود شده ناریب پارامتر σ_e^2 عبارتست از

$$S_R^2 = \frac{1}{n-p+q} (Y^* - Z\tilde{\phi})'V^{-1}(Y^* - Z\tilde{\phi}) \quad (6-4)$$

در این مرحله برای سادگی در علائم و خلاصه نویسی، فرض کنید

$$G_1 = (Z'V^{-1}Z)^{-1} \quad G_2 = (HG_1H')^{-1}$$

حال قضیه اساسی زیر را در خصوص آماره آزمون و توزیع آن ارائه می دهیم.

قضیه ۱.۴: فرض کنید در مدل خطی (۲-۳)، $Y \sim E_{n+q}(\cdot, (n+q) \times 1, \sigma^2 V, h)$ که در آن $h(\cdot)$ معلوم است. همچنین

$$\Omega = \{(\phi, \sigma, V): \phi \in \mathbb{R}^{p+q}, \sigma \in \mathbb{R}^+, V > \cdot\}$$

$$\omega = \{(\phi, \sigma, V): \phi \in \mathbb{R}^{p+q}, H\phi = \cdot, \sigma \in \mathbb{R}^+, V > \cdot\}$$

علاوه بر این فرض کنید $h(y) = \frac{n+q}{\gamma} h(y)$ دارای یک ماکزیمم متناهی مثبت مانند h_γ است. در این صورت آماره LRT برای فرضیه $H_0: H\phi = \cdot$ عبارتست از

$$\zeta = \frac{\hat{\phi}' H' G_\gamma H \hat{\phi}}{q S^2}$$

و دارای توزیع زیر می باشد.

$$J_{q, n-p}(\Delta, \zeta) = \sum_{r \geq \cdot} \frac{\left(\frac{q}{n-p}\right)^{\frac{1}{r}(q+rr)} \zeta^{\frac{1}{r}(q+rr-r)} K_{(r)}^{(\Delta)}}{r! B\left(\frac{q+rr}{r}, \frac{n-p}{r}\right) \left(1 + \frac{q}{n-p} \zeta\right)^{\frac{1}{r}(q+n-p+rr)}}$$

که در آن $\Delta = \frac{\theta}{\sigma_\theta^2}$ ، $\theta = \phi' H' G_\gamma H \phi$ ، $B(\cdot, \cdot)$ تابع بتا و

$$K_{(r)}^{(\Delta)} = \int_0^\infty W(t) (-\psi'(\cdot) t \Delta)^r e^{\psi'(\cdot) t \Delta} dt$$

(برای مشاهده اثبات به آرشی و همکاران (۲۰۱۰) مراجعه کنید).

برآوردگر آزمون مقدماتی (PTE) پارامتر ϕ مشابه بنکرافت^{۴۲} (۱۹۴۴)، عبارتست از

$$\hat{\phi}^{PT} = \tilde{\phi} + [1 - I(\zeta \leq F_\alpha)] (\hat{\phi} - \tilde{\phi}) \quad (۷-۴)$$

که در آن $I(A)$ تابع نشانگر مجموعه A ، F_α چندک بالای 100α درصد توزیع F مرکزی با q و $n-p$ درجات آزادی است.

یکی از معایب PTE، وابستگی شدید آن به مقدار α ، سطح معنی داری است. همچنین PTE خاصیت گسسته سازی دارید، که مطلوب نمی باشد. برای رفع این معایب، برآوردگرهای انقباضی نوع استاین (SSE) را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\hat{\phi}^S = \tilde{\phi} + (1 - \rho \zeta^{-1}) (\hat{\phi} - \tilde{\phi}) \quad (۸-۴)$$

که در آن

$$\rho = \frac{(q-2)(n-p)}{q(n-p+2)}; \quad q \geq 3 \quad (9-4)$$

توجه کنید که برآوردگر اخیر، ترکیب محدبی نمی باشند و لذا ممکن است مقادیر آن از $\hat{\Phi}$ و $\tilde{\Phi}$ تجاوز کند. بنابراین برای منقبض کردن این برآوردگر به $\hat{\Phi}$ و $\tilde{\Phi}$ ، برآوردگری به صورت ترکیب محدب $\hat{\Phi}$ و $\tilde{\Phi}$ را با استفاده از روش آزمون اولیه معرفی می کنیم. به این برآوردگر، برآوردگر انقباضی نوع مثبت (PRSE) می گویند و عبارتست از

$$\hat{\Phi}^{S+} = \tilde{\Phi} + (1 - \rho\zeta^{-1})I(\zeta > \rho)(\hat{\Phi} - \tilde{\Phi}) \quad (10-4)$$

۵. محاسبه اریبی و مخاطره

در این بخش توابع اریبی و مخاطره برآوردگرهای ارائه شده در فصل قبل را تحت تابع تعریف شده در ۱-۲ و با فرض زیان توان دوم وزنی^{۴۳} محاسبه می کنیم

با توج به این که $Y^* \sim EC_{n+q}(Z\phi, \sigma^2 V, h)$ داریم

$$b_1 = E(\hat{\phi} - \phi) = 0.$$

همچنین

$$b_2 = E(\hat{\phi} - \phi)^2 = b_2 - G_1 H' G_2 H \phi = -G_1 H' G_2 H \phi.$$

حال ماتریس خودتوان $G_1^{-1} H' G_2 H G_1^{-1}$ را در نظر بگیرید. ماتریس متعامد Q موجود است به طوری که (به سیرل^{۴۴}، ۱۹۸۲ مراجعه کنید)

$$Q G_1^{1/2} H' G_2 H G_1^{1/2} Q' = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال متغیر تصادفی W را به صورت زیر تعریف کنید

$$w = Q G_1^{-1/2} \hat{\phi}$$

به راحتی می توان نتیجه گرفت $w \sim EC_{p+q}(\delta, \sigma^2 I_{p+q}, h)$ که در آن

$$\delta = Q G_1^{-1/2} \phi$$

با افراز بردارهای w و δ به زیر بردارهای با ابعاد q و $p - q$ به صورت زیر

$$w = (w_1, w_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2)$$

می توان نتیجه گرفت (آرشی و طباطبایی، ۲۰۰۸)

$$\zeta = \frac{w_1' w_1}{q \sigma^2}, \quad \theta = \delta_1' \delta_1 \quad (1-5)$$

Weighted quadratic loss function^{۴۳}
Searl^{۴۴}

برای محاسبه توابع مخاطره قضیه اساسی زیر را ارائه می دهیم

قضیه ۱.۵: فرض کنید $g(\cdot)$ یک تابع اندازه پذیر بورل^{۴۵} است. برای آماره آزمون ارائه شده در قضیه ۱.۴ با استفاده از رابطه (۱-۵) داریم

$$\begin{aligned} E[g(\zeta)w_1] &= \delta_1 \int_0^\infty W(t) E \left[\phi(F_{q+2, n-p, t\Delta}) \middle| t \right] dt, \\ E[g(\zeta)w'_1 w_1] &= q\sigma^2 \int_0^\infty W(t) E \left[\phi(F_{q+2, n-p, t\Delta}) \middle| t \right] dt \\ &\quad + \delta_1' \delta_1 \int_0^\infty W(t) E \left[\phi(F_{q+4, n-p, t\Delta}) \middle| t \right] dt, \end{aligned}$$

اثبات با استفاده از لم ۱ پیوست B.۱ و قضیه ۲ پیوست B.۲ جاج و باک^{۴۶} (۱۹۷۸) به راحتی نتیجه می شود.

حال دقت کنید که

$$b_3 = E(\hat{\phi}^{PT} - \phi) = b_1 - E[I(\zeta \leq F_\alpha)(\phi - \tilde{\phi})]$$

بنابراین با استفاده از قضیه ۱.۵ برای تابع اندازه پذیر $g(\zeta) = I(\zeta \leq F_\alpha)$ داریم

$$b_3 = -G_1 H' G_2 H \phi G_{q+2, n-p}^{(2)}(\Delta, x').$$

که در آن

$$G_{q+2i, n-p}^{(j)}(\Delta, x') = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} K_{(r+j-2)}^{(j)} I_{x'} \left[\frac{1}{2} (q+2i+2r), \frac{n-p}{2} \right]$$

و $I_{x'} \left[\frac{q+2i}{2} + r, \frac{n-p}{2} \right]$ تابع بتای ناقص^{۴۷} و $x' = \frac{qF_\alpha}{n-p+qF_\alpha}$ می باشند.

به طریقی با استفاده از قضیه ۱.۵ برای تابع اندازه پذیر $g(\zeta) = \zeta^{-1}$ داریم

$$\begin{aligned} b_4 &\equiv E(\hat{\phi}^S - \phi) = -\rho E[\zeta^{-1}(\phi - \tilde{\phi})] \\ &= -\rho G_1 H' G_2^{\frac{1}{2}} E[\zeta^{-1} w_1] = -\rho G_1 H' G_2 H \phi E^{(2)}[\chi_{q+2}^{-1}(\Delta)] \end{aligned}$$

که در آن

^{۴۵} Borel measurable function
^{۴۶} Judge and Bock
^{۴۷} Incomplete beta function

$$E^{(1)}[\chi_{q+2i}^{-2}(\Delta)] = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} K_{(r+j-2)}^{(-\Delta)} (q+2i-2+2r)^{-1}$$

همچنین با استفاده از قضیه ۱.۵ برای تابع اندازه پذیر $g(\zeta) = \zeta^{-1} I(\zeta \leq \rho)$ می توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} b_2 &= b_4 - E[I(\zeta \leq \rho)(\hat{\phi} - \tilde{\phi})] + \rho E[\zeta^{-1} I(\zeta \leq \rho)(\hat{\phi} - \tilde{\phi})] \\ &= b_4 - G_1 H' G_2 H \phi G_{q+2, n-p}^{(2)}(\Delta, x) \\ &\quad + \rho G_1 H' G_2 H \phi E^{(2)}[F_{q+2, n-p}^{-1}(\Delta) I(F_{q+2, n-p}(\Delta) < \frac{q\rho}{q+2})]. \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} &E^{(1)}[F_{q+2i, n-p}^{-1}(\Delta) I(F_{q+2i, n-p}(\Delta) < \frac{q\rho}{q+2i})] \\ &= \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} K_{(r+j-2)}^{(-\Delta)} (q+2i)(q+2i-2+2r)^{-1} I_x \left[\frac{q+2i-2+2r}{2}, \frac{n-p+2}{2} \right] \\ & \qquad \qquad \qquad x = \frac{q\rho}{n-p+q\rho} \end{aligned}$$

با توجه با محاسبات به عمل آمده در خصوص آریبی برآوردگرهای استفاده شده، می توان به طور مشابه با استفاده از قضیه ۱.۵ نتایج زیر را برای توابع مخاطره بدست آورد.

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} R(\hat{\phi}; \phi) &= E[(\hat{\phi} - \phi) G_1^{-1} (\hat{\phi} - \phi)] \\ &= tr \{ \sigma_\varepsilon^2 G_1^{-1} G_1 \} \\ &= (p+q) \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} R(\tilde{\phi}; \phi) &= tr \{ G_1^{-1} [G_1 (I_{p+q} - H' G_2 H G_1) \sigma_\varepsilon^2 + b_2 b_2'] \} \\ &= (p+q) \sigma_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2 tr \{ G_1^{-\frac{1}{2}} H' G_2 H G_1^{-\frac{1}{2}} \} + b_2' G_1^{-1} b_2 \\ &= p \sigma_\varepsilon^2 + \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(\hat{\phi}^{PT}; \phi) &= E\{[(\hat{\phi} - \phi) - I(\zeta \leq F_\alpha)(\hat{\phi} - \tilde{\phi})]' G_1^{-1} [(\hat{\phi} - \phi) \\
&\quad - I(\zeta \leq F_\alpha)(\hat{\phi} - \tilde{\phi})]\} \\
&= E[(\hat{\phi} - \phi) G_1^{-1} (\hat{\phi} - \phi)] + E[I(\zeta \leq F_\alpha)(\hat{\phi} - \tilde{\phi}) G_1^{-1} (\hat{\phi} - \tilde{\phi})] \\
&\quad - 2E[I(\zeta \leq F_\alpha)(\hat{\phi} - \phi) G_1^{-1} (\hat{\phi} - \tilde{\phi})] \\
&= (p+q)\sigma_\varepsilon^2 - E[I(\zeta \leq F_\alpha) w_1' w_1] + 2\delta_1' E[I(\zeta \leq F_\alpha) w_1]
\end{aligned}$$

که با استفاده از قضیه ۱.۵ عبارت فوق برابر است با

$$\begin{aligned}
&= (p+q)\sigma_\varepsilon^2 - q\sigma_\varepsilon^2 G_{q+2, n-p}^{(1)}(\Delta, x') \\
&\quad + \theta \{2G_{q+2, n-p}^{(2)}(\Delta, x') - G_{q+1, n-p}^{(2)}(\Delta, x')\}
\end{aligned}$$

به علاوه

$$\begin{aligned}
R(\hat{\phi}^S; \phi) &= (p+q)\sigma_\varepsilon^2 - 2\rho E[\zeta^{-1}(w_1' w_1 - \delta_1' w_1)] + \rho^2 E[\zeta^{-2} w_1' w_1] \\
&= (p+q)\sigma_\varepsilon^2 - \rho q^2 \sigma_\varepsilon^2 \left\{ 2E^{(1)}[\chi_{q+2}^{*-2}(\Delta)] - (q-2)E^{(1)}[\chi_{q+2}^{*-4}(\Delta)] \right\} \\
&\quad + \theta \rho q(q+2)E^{(2)}[\chi_{q+1}^{*-4}(\Delta)].
\end{aligned}$$

که در آن

$$E^{(j)}[\chi_{q+2i}^{*-4}(\Delta)] = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} K_{(r+j-2)}^{(\Delta)} (q+2i-2+2r)^{-1} (q+2i-4+2r)^{-1}.$$

و در نهایت تابع مخاطره PRSE عبارتست از

$$\begin{aligned}
R(\hat{\phi}^{S+}; \phi) &= R(\hat{\phi}^S; \phi) - E[(1 - \rho \zeta^{-1})^2 I(\zeta \leq \rho) w_1' w_1] \\
&\quad - 2E[(1 - \rho \zeta^{-1}) I(\zeta \leq \rho) (w_1' w_1 - \delta_1' w_1)] \\
&= R(\hat{\phi}^S; \phi) - q\sigma_\varepsilon^2 E^{(1)} \left[(1 - c_1 F_{q+2, n-p}^{-1}(\Delta))^2 I(F_{q+2, n-p}(\Delta) < c_1) \right] \\
&\quad + 2\theta E^{(2)} \left[(1 - c_1 F_{q+2, n-p}^{-1}(\Delta)) I(F_{q+2, n-p}(\Delta) < c_1) \right] \\
&\quad - E^{(2)} \left[(1 - c_2 F_{q+1, n-p}^{-2}(\Delta))^2 I(F_{q+1, n-p}(\Delta) < c_2) \right]
\end{aligned}$$

که در آن $c_1 = \frac{q\rho}{q+r}$ و $c_2 = \frac{q\rho}{q+r}$

$$\begin{aligned}
& E^{(j)}[F_{q+2i, n-p}^{-2}(\Delta) I(F_{q+2i, n-p}(\Delta) < \frac{q\rho}{q+2i})], \\
& = \sum_{r \geq 0} \frac{(q+2i)^2}{r!(n-p)} K_{(r+j-2)}^{(\Delta)} [(q+2i-2+2r)(q+2i-4+2r)]^{-1} \\
& \quad \times I_{x'} \left[\frac{q+2i-4+2r}{2}, \frac{n-p+4}{2} \right]
\end{aligned}$$

۶. تحلیل مخاطره

در این بخش با استفاده از توابع مخاطره بدست آمده در بخش قبل، برآوردهای ارائه شده در این مجموعه را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

با استفاده از توابع مخاطره برآوردهای محدود نشده و محدود شده داریم

$$\frac{R(\tilde{\phi}; \phi)}{R(\phi; \phi)} \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 1 \leftrightarrow \Delta \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} q.$$

در مقایسه دو برآوردهای محدود نشده و آزمونی مقدماتی داریم

$$\frac{R(\tilde{\phi}^{PT}; \phi)}{R(\phi; \phi)} \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 1 \leftrightarrow \Delta G'(\Delta, x') \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} q G_{q+2, n-p}^{(1)}(\Delta, x').$$

که در آن

$$G'(\Delta, x') = 2G_{q+2, n-p}^{(2)}(\Delta, x') - G_{q+4, n-p}^{(2)}(\Delta, x').$$

همچنین در مقایسه توابع مخاطره دو برآوردهای محدود شده و آزمونی مقدماتی داریم

$$\frac{R(\tilde{\phi}^{PT}; \phi)}{R(\tilde{\phi}; \phi)} \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 1 \leftrightarrow q[1 - G_{q+2, n-p}^{(2)}(\Delta, x')] \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} \Delta[1 - G'(\Delta, x')].$$

در مقایسه دو برآوردهای محدود نشده و انقباضی نوع استاین قضیه اساسی زیر را ارائه می‌دهیم

قضیه ۱۶: فرض کنید در مدل خطی (۲-۳)، $Y \sim E_{n+q}(\cdot, (n+q) \times 1, \sigma^2 V, h)$ که در آن $h(\cdot)$ معلوم است. در

این صورت برآوردهای نوع استاین پارامتر ϕ به صورت

$$\phi^S = \tilde{\phi} - d^* \zeta^{-1} (\tilde{\phi} - \tilde{\phi})$$

به طور یکنواخت دارای مخاطره کمتری نسبت به برآوردهای محدود نشده تحت تابع زیان

$$L(\phi^*; \phi) = (\phi^* - \phi)' G_1^{-1} (\phi^* - \phi)$$

$$R(\tilde{\phi}; \phi) = R(\phi; \phi) - q\sigma_e^2 \\ \leq R(\phi; \phi).$$

لذا می توان نتیجه گرفت تحت درستی فرضیه H_0 برآوردگر محدودشده بر برآوردگر نوع استاین پارامتر ϕ برتری دارد. اگرچه زمانی که δ_1 از مبدا فاصله می گیرد θ افزایش می یابد و باعث می شود تابع مخاطره برآوردگر محدودشده نامتناهی شود در حالی که تابع مخاطره برآوردگر نوع استاین همواره کمتر از تابع مخاطره برآوردگر محدودشده است.

این خاصیت در مقایسه دو برآوردگر آزمون مقدماتی و نوع استاین نیز برقرار می باشد؛ زیرا تحت درستی فرضیه H_0 داریم

$$R(\phi^S; \phi) = R(\phi^{PT}; \phi) + q\sigma_e^2[1 - \alpha - \rho] \\ \geq R(\phi^{PT}; \phi),$$

به ازای تمام مقادیر α که در شرط $F_{q+\nu, m}^{-1}(\rho, \cdot) \leq \frac{qF_\alpha}{q+\nu}$ صدق می کنند.

در نهایت با توجه به توابع مخاطره برآوردگر های انقباضی نوع استاین و قسمت مثبت آن، داریم

$$R(\phi^{S+}; \phi) - R(\phi^S; \phi) = -E[(1 - \rho\zeta^{-1})^2 I(\zeta \leq \rho) w_1' w_1] \\ - 2E[(1 - \rho\zeta^{-1}) I(\zeta \leq \rho) (w_1' w_1 - \delta_1' w_1)].$$

از آن جایی که به ازای $\rho \leq \zeta$ داریم $E[(1 - \rho\zeta^{-1}) I(\zeta \leq \rho)] \leq 0$ می توان نتیجه گرفت سمت راست عبارت فوق منفی است و برآوردگر قسمت مثبت انقباضی نوع استاین به طور یکنواخت بر برآوردگر انقباضی نوع استاین برتری دارد.

۷. مثال عددی

در این بخش مثالی از کاربرد مباحث و قضایای مطرح شده در بخش های قبلی را ارائه می دهیم. برای این منظور نتایج بدست آمده را برای توزیع MT در مدل رگرسیون خطی $y = X\beta + \epsilon$ مورد بررسی قرار می دهیم.

فرض می کنیم بردار خطا دارای توزیع MT به صورت $\epsilon \sim MT_n(0, \sigma^2 V, \nu)$ با تابع چگالی زیر است

$$f(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\nu}{\nu}\right)}{(\pi\nu)^{\frac{n}{\nu}} \Gamma\left(\frac{\nu}{\nu}\right)} \left(1 + \frac{(y-X\beta)' V^{-1} (y-X\beta)}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{n+\nu}{\nu}}, \quad \nu > 0.$$

که در آن ν درجه آزادی توزیع MT می باشد.

با توجه به تابع چگالی توزیع MT و با استفاده از لم ۲-۲ می توان نتیجه گرفت

$$W(t) = \frac{\nu^{\frac{\nu}{\nu}} t^{\frac{\nu}{\nu}-1} e^{-\frac{\nu}{\nu}}}{\nu^{\frac{\nu}{\nu}} \Gamma\left(\frac{\nu}{\nu}\right)}$$

توزیع MT نقش بسیار مهمی در استنباط آماری استوار ایفا می کند، به خصوص در مدل هایی با دم های پهن، این توزیع برای همپوشانی نقاط پرت و نقاط دور افتاده کاربرد فراوانی دارد. زلنر (۱۹۷۶) برای اولین بار از توزیع MT در مسائل برآورد و استنباط آماری استفاده کرد. پس از او کاربردهای جالبی از این توزیع در کارهای فراسر و ان جی^{۴۸} (۱۹۸۰)، اولوا و والش^{۴۹} (۱۹۸۴)، لانگ^{۵۰} و همکاران (۱۹۸۹)، لوچی^{۵۱} و همکاران (۲۰۰۳)، خان (۲۰۰۵) و آرشی و طباطبایی (۲۰۰۸) می توان یافت.

لازم به ذکر است که در این حالت با توجه به قضیه ۱.۴ تابع $K_{(r)}^{(\Delta)}$ به صورت زیر می باشد.

$$K_r^{(\Delta)} = \frac{\Gamma\left(r + \frac{\Delta}{2}\right)}{\Gamma(r+1)\Gamma\left(\frac{\Delta}{2}\right)} \frac{\left(\frac{\Delta}{\sigma^2-2}\right)^r}{\left(1 + \frac{\Delta}{\sigma^2-2}\right)^{r+\frac{\Delta}{2}}}$$

مجموعه داده ها شامل نتایج شبیه سازی از توزیع MT به ازای $n = 30$ ، $p = 4$ متغیر و $\nu = 5$ درجه آزادی است. همچنین ماتریس های H و R عبارتند از

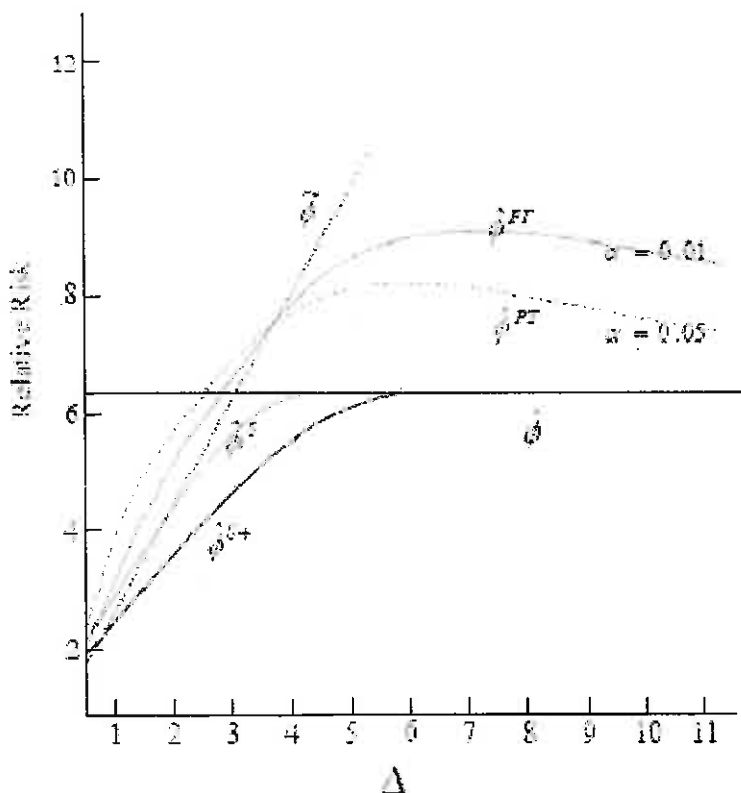
Fraser and Ng^{۴۸}
Ullah and Walsh^{۴۹}
Lange^{۵۰}
Loschi^{۵۱}

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برآوردگرهای ارائه شده در بخش ۵ با استفاده از مشاهدات تولید شده محاسبه شده اند و در جدول زیر آمده است.

$\hat{\phi}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\phi}^{PT}$	$\hat{\phi}^S$	$\hat{\phi}^{S+}$
-0.13372	0.01179	0.01179	1.70277	0.01179
-0.23419	-0.13368	-0.13368	1.03420	-0.13368
0.11188	-0.08726	-0.08726	-2.40142	-0.08726
-0.04180	-0.08847	-0.08847	-0.63084	-0.08847
-0.21004	-0.20478	-0.20478	-0.14366	-0.20478
-0.31767	-0.31925	-0.31925	-0.33765	-0.31925
-0.12971	-0.12782	-0.1278	-0.10594	-0.12782

با توجه به نتایج بدست آمده نمودار توابع مخاطره برآوردگرهای ارائه شده به صورت زیر می باشد.



۸. تعمیم به حالت بیش از دو محدودیت

در ادامه این تحقیق نتایج بدست آمده در بخش های قبل را به مدل با بیش از یک محدودیت تصادفی تعمیم می دهیم.

فرض کنید مدل رگرسیون خطی چندگانه در بخش ۳ به صورت زیر است

$$y_1 = X_1 B + \epsilon_1 \quad (1-8)$$

که در آن بردار پاسخ n_1 بعدی، X_1 ماتریس طرح در اندازه $n_1 \times p$ با رتبه کامل p ، $B = (B_1, \dots, B_p)'$ بردار ضرایب رگرسیونی و $\epsilon_1 = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n_1})'$ بردار خطا می باشند.

علاوه بر این فرض کنید اطلاعاتی غیر نمونه ای به صورت یک سری از $M-1$ قید تصادفی به صورت زیر بر روی فضای پارامتر B اعمال شده است

$$y_i = X_i B + \epsilon_i \quad (2-8)$$

که در آن y_i بردار معلوم n_i بعدی، X_i ماتریس معلوم در اندازه $n_i \times p$ با رتبه کامل سطری، $B = (B_1, \dots, B_p)'$ بردار ضرایب رگرسیونی و $\epsilon_i = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n_i})'$ بردار خطا می باشند. با ترکیب اطلاعات (۱-۸) و (۲-۸) مدل کلی به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_M \end{bmatrix} B + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_M \end{bmatrix}$$

در این صورت مشابه مدل (۲-۳) بخش ۳، مدل کلی فوق را می توان به صورت زیر نیز نشان داد

$$y = X\beta + \epsilon \quad (3-8)$$

که در آن با فرض

$$E(\epsilon_1) = 0, \quad E(\epsilon_j) = \mu_j, \quad \text{for } j = 2, \dots, M.$$

داریم

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{n_2 \times n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_M \times n_M} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} B \\ X_2 B + \mu_2 \\ X_3 B + \mu_3 \\ \vdots \\ X_M B + \mu_M \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 - \mu_2 \\ \epsilon_3 - \mu_3 \\ \vdots \\ \epsilon_M - \mu_M \end{bmatrix}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت

$$H_0 : H\beta = \mu = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_M \end{bmatrix} = 0.$$

که در آن

$$H = \begin{bmatrix} -X_2 & I_{n_2 \times n_2} & 0_{n_3 \times n_3} & 0_{n_4 \times n_4} & \dots & 0_{n_M \times n_M} \\ -X_3 & 0_{n_2 \times n_2} & I_{n_3 \times n_3} & 0_{n_4 \times n_4} & \dots & 0_{n_M \times n_M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -X_M & 0_{n_2 \times n_2} & 0_{n_3 \times n_3} & \dots & 0_{n_{M-1} \times n_{M-1}} & I_{n_M \times n_M} \end{bmatrix}$$

مدل (۳-۸) مشابه مدل (۲-۳) است و لذا تمام نتایج بدست آمده در بخش های ۴، ۵ و ۶ قابل استفاده برای مدل (۸-۱) نیز می باشد. این مدل در حقیقت مشابه مدل رگرسیون به ظاهر نامرتب^{۵۲} می باشد که اولین بار توسط زلنر (۱۹۶۲) ارائه شد.

١. Anderson, T. W., (٢٠٠٣). An introduction to multivariate statistical analysis, ٣rd ed., John Wiley and Sons, New York.
٢. Arashi, M. and Tabatabaey, S. M. M., (٢٠١٠). A note on classical Stein-type estimators in elliptically contoured models, *J. Statist. Plann. Inf.*, ١٤٠, ١٢٠٦-١٢١٣.
٣. Arashi, M., Saleh, A. K. Md. Ehsanes, and Tabatabaey, S. M. M. (٢٠١٠). Estimation of parameters of parallelism model with elliptically distributed errors, *Metrika*, ٧١, ٧٩-١٠٠.
٤. Arashi, M. and Tabatabaey, S. M. M., (٢٠٠٨). Stein-type improvement under stochastic constraints: Use of multivariate Student-t model in regression, *Statist. Prob. Lett.*, ٧٨, ٢١٤٢-٢١٥٣.
٥. Bancroft, T. A., (١٩٤٤) On biases in estimation due to the use of preliminary tests of significance, *Ann. Math. Statist.*, ١٥, ١٩٥-٢٠٤.
٦. Baranchik, A. J. (١٩٧٠). A family of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution, *Ann. Math. Statist.*, ٤١, ٦٤٢-٦٤٥.
٧. Brandwein, A. C. and Strawderman, W. E. (١٩٩١). Generalization of James-Stein estimator under spherical symmetry, *Ann. Statist.*, ١٩, ١٦٣٩-١٦٥٠.
٨. Casella, G. (١٩٩٠). Estimators with nondecreasing risk: Application of a chi-square identity, *Statist. Prob. Lett.*, ١٠, ١٠٧-١٠٩.
٩. Chu, K. C. (١٩٧٣). Estimation and decision for linear systems with elliptically random process. *IEEE Trans. Autom. Cont.*, ١٨, ٤٩٩-٥٠٥.
١٠. Debnath, L. and Bhatta, D., (٢٠٠٧). *Integral Transforms and Their Applications*, Chapman and Hall, London, New York.
١١. Fang, K. T. and Zhang, Y. T. (١٩٩٠). *Generalized Multivariate Analysis*, Springer, Berlin and Science, Beijing.
١٢. Fang, K. T., Kotz, S. and Ng, K. W. (١٩٩٠). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, London, New York.
١٣. Fraser, D. A. S. and Ng, Kai. W., (١٩٨٠). Multivariate regression analysis with spherical error, in *Multivariate Analysis-V*, ٣٦١-٣٨٦, Ed. P. R. Krishnaiah, North-Holland Publishing Company.
١٤. Gupta, A. K. and Varga, T. (١٩٩٣). *Elliptically Contoured Models in Statistics*, Kluwer Academic Press.
١٥. James, W. and Stein, C. (١٩٦١). Estimation of quadratic loss, *Proc. of the Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. Prob.*, ١, ٣٦١-٣٧٩.

۱۶. Judge, G. G. and Bock, M. E., (۱۹۷۸) The statistical implication of pre-test and Stein-rule estimators in Econometrics, North-Holland, New York.
۱۷. Khan, S., (۲۰۰۵). Estimation of parameters of the simple multivariate linear model with Student-t error, J. Statist. Res., ۳۹, ۷۹-۹۴.
۱۸. Lange, K. L., Little, R. J. A. and Taylor, J. M. G., (۱۹۸۹). Robust statistical modeling using the t-distribution, J. Amer. Statist. Assoc., ۸۴, ۸۸۱-۸۹۶.
۱۹. Lehmann, E. L. and Casella, G. (۱۹۹۸). Theory of Point Estimation, ۲nd ed., Springer, New York.
۲۰. Loschi, R. H., Iglesias, P. L. and Arellano-Valle, R. B., (۲۰۰۳). Predictive characterization of multivariate student-t model, J. Multivariate Anal., ۸۵, ۱۰-۲۳.
۲۱. Muirhead, R. J. (۱۹۸۲). Aspect of multivariate statistical theory, John Wiley, New York.
۲۲. Ouassou, I. and Strawderman, W. E. (۲۰۰۲). Estimation of a parameter vector restricted to a cone, Statist. Prob. Lett., ۵۶, ۱۲۱-۱۲۹.
۲۳. Xu, J.-L., Izmirlian, G. (۲۰۰۶). Estimation of location parameters for spherically symmetric distributions, J. Multivariate Anal., ۹۷, ۵۱۴-۵۲۵.
۲۴. Saleh, A. K. Md. E. (۲۰۰۶). Theory of Preliminary Test and Stein-Type Estimation with Applications, Wiley, New York.
۲۵. Searle, S. R., (۱۹۸۲) Matrix Algebra Useful for Statistics, John Wiley, New York.
۲۶. Srivastava, M. and Bilodeau, M., (۱۹۸۹). Stein estimation under elliptical distribution, J. Mult. Annal., ۲۸, ۲۴۷-۲۵۹.
۲۷. Stein, C. (۱۹۵۶). Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate distribution, Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., ۱, ۱۹۷-۲۰۶.
۲۸. Tabatabaey, S. M. M., Saleh, A. K. Md. Ehsanes and Kibria, B. M. G., (۲۰۰۴) Simultaneous estimation of regression parameters with spherically symmetric errors under possible stochastic constraints, Int. J. Statist. Sci., ۳, ۱-۲۰.
۲۹. Theil, H. and Goldberger, A. S., (۱۹۶۱) On pure and mixed statistical estimation in economics, Int. Econ. Rev., ۲, ۶۵-۷۸.
۳۰. Ullah, A. and Walsh, V. Z., (۱۹۸۴). On the robustness of LM, LR and W tests in regression models. Econometrica, ۵۲, ۱۰۵۵-۱۰۶۶.
۳۱. Zellner, A., (۱۹۶۲) An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias, J. Amer. Statist. Assoc., ۵۷, ۳۴۸-۳۶۸.



Journal of Applied Probability and Statistics

P. O. Box 241901, Montgomery, AL 36124, U.S.A.

Editor-in-Chief
Dr Shahjahan Khan
Department of Mathematics & Computing
University of Southern Queensland
Toowoomba, Qld. 4350,
Australia
Email: khans@usq.edu.au

Publisher:
Dixie W Publishing Corporation
Attn: Phil Zhang, Account Manager
P. O. Box 241901
Montgomery, AL 36124
U: S. A.
Email: phil@dixiewpublishing.com

Professor Mohammad Arashi
Faculty of Mathematics
Shahrood University of Technology
Shahrood
Iran

13 September 2010

Re: MS # 0333: Improved estimation in stochastic linear models under elliptical symmetry

Dear Professor Arashi:

I am very pleased to let you know that the above manuscript has been accepted for publication in the Journal of Applied Probability and Statistics (JAPS). The paper is co-authored by Professors S. M. M. Tabatabaey and A. Iranmanesh. **Congratulations on behalf of the Editorial Board of JAPS.**

The Editorial Office of JAPS will contact you regarding the copyright, formatting and publication process of the article. The paper is expected to appear in the 1st issue of volume 5 of JAPS.

If you don't hear from the Editorial Office of JAPS within two weeks, please feel free to contact Phil Zhang on phil@dixiewpublishing.com

I am pleased to note that on the recommendation of the Editorial Board the publisher of JAPS has removed previously levied page charges effective from 2010.

Obviously associate editors and referees spend significant amount of their valuable time in processing manuscripts for JAPS. If you have not already done so, you may wish to acknowledge their contributions.

Thank you very much for considering JAPS to publish your high quality valuable research results.

We look forward to receiving good quality articles from you in the future.

With very best wishes.

Sincerely,

Shahjahan Khan

(Shahjahan Khan)
Editor-in-Chief
Journal of Applied Probability and Statistics

Improved estimation in stochastic linear models under elliptical symmetry

M. Arashi^{1*}, S. M. M. Tabatabaey² and A. Iranmanesh³

¹*Faculty of Mathematics, Shahrood University of Technology
Shahrood, Iran*

²*Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences
Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran*

³*Department of Statistics, Faculty of Sciences
Islamic Azad University, Mashhad Branch, Iran*

Abstract

In linear programming and modeling of an economic system, there may occur some linear stochastic artificial or unnatural components, which need serious attention. These unusual stochastic uncertainties, say stochastic constraints, definitely alter the estimators under work and their behaviors. In this approach we consider a general setup of a linear model combined with some linear stochastic constraints in elliptically contoured models. We propose the unrestricted and restricted estimators when some stochastic constraints may hold on the regression coefficients. Also the compatibility of the stochastic prior and sample information is measured by the preliminary test estimator. Moreover, the Stein-type shrinkage and positive-rule shrinkage estimators are given when the variable term in the restriction is distributed under elliptical symmetry. Subsequently, the superiority conditions of the proposed estimators are derived under the weighted quadratic loss function. Further, it is shown that the shrinkage factor of the Stein estimator is robust with respect to the regression parameters and unknown mixing distributions.

Keywords: Elliptically contoured distribution, Positive-rule shrinkage estimator, Preliminary test estimator, Stein-type shrinkage estimator, Stochastic constraints, Weighted quadratic loss.

*Corresponding author (m.arashi.stat@yahoo.com)

1 Introduction

Consider the multiple regression model

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.1)$$

where \mathbf{y} is an n -vector of random responses. \mathbf{X} is a known $(n \times p)$ -matrix of non-stochastic constants of full column rank p , $\boldsymbol{\beta}$ is a p -vector of unknown regression coefficients, and $\boldsymbol{\epsilon}$ is a random vector of disturbances.

In addition to the model given in (1.1), assume that non-sample information also exist in the form of the possible stochastic constraints, (see Theil, 1963 and Judge and Bock, 1978)

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

where \mathbf{R} is a known $(q \times p)$ -matrix of non-stochastic constants of full row rank q ($q \leq p$), \mathbf{r} is a $q \times 1$ vector of pre-specified values, and \mathbf{v} is the random error term.

In general settings assume that we do not have exact orthogonal prior information such that $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$, involving estimation of economic relations, industrial structures, production planning, etc. Therefore stochastic uncertainty occurs in specifying linear programming due to economic and financial studies. Using stochastic linear constraints, we can accomplish an examination and analysis of one's own thoughts and feelings (prior information via introspection). Also one may have prior information from a previous sample, which usually makes some relations through stochastic subspace restrictions. Furthermore, combining stochastic restrictions with Zellner's (1962) "Seemingly Unrelated" estimators, we can demonstrate good performance of estimators using MSE criterion comparatively. Eventually, considering stochastic subspace restrictions, we can apply the statistical models to the broad range of microeconomic models. For more details on why we deal with stochastic constraints and the applications see Judge and Bock (1978).

Tabatabaey et al. (2004) and Arashi and Tabatabaey (2008) considered the model specified in (1.1) with the additional stochastic assumption (1.2) under the setup in which the random error terms were distributed according to the multivariate Student's t model. In this paper, we extend the model cited above under the situation in which the error terms are generally distributed as elliptically contoured models. We analyze the performance of some shrinkage estimators in addition to the traditional estimator of the vector parameter of regression coefficients. As a prelude to elliptically contoured distribution (ECD) initially let

$$\Psi_p = \{ \psi(\cdot) : \psi(t_1^2 + \cdots + t_p^2) \text{ is a } p\text{-dimensional characteristic function} \}$$

Define $\Psi_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Psi_i$. Then $\Psi_1 \supset \Psi_2 \supset \cdots$.

Definition 1.1. (Fang et al., 1990) A $p \times 1$ random vector \mathbf{z} is said to have an ECD with parameters $\boldsymbol{\mu}$ and $\boldsymbol{\Sigma}$ and function ψ (the latter called the characteristic generator) denoted by $\mathbf{z} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi)$ if its characteristic function has the following form

$$\phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \exp(it'\boldsymbol{\mu})\psi(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}),$$

where $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{\Sigma} \in S(p)$ and $\psi \in \Psi_p$.

It is not necessary for \mathbf{z} to possess a density. If the density exists, then it is of the form

$$f(\mathbf{z}) = k_n |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} h \left[\frac{(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})}{2} \right],$$

for some function h , say density generator, where k_n is the normalizing constant. Note that h and ψ determine each other for each specified member of the family of distributions. In this case we may use the notation $\mathbf{z} \sim EC_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, h)$.

It follows $E(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\mu}$ and $Cov(\mathbf{z}) = -\psi'(0)\boldsymbol{\Sigma}$ provided $|\psi'(0)| < \infty$. ECDs provide highly impressive class as heavier/lighter tail alternatives to the multivariate normal models. The elliptical distributions are the parametric forms of the spherical symmetric distributions, which are invariant under orthogonal transformations and have equal density on sphere if densities exist. The elliptic family of multivariate distributions has received considerable attention in the statistical literature. The works of Fang and Zhang (1990) and Fang et al. (1990) are the main references on the theory of the vector-variate elliptic family of multivariate distributions. Among others, the book of Gupta and Varga (1993) remarkably presents important results dealing with matrix-variate ECDs. Some of the well known members of the class of ECDs are the multivariate Gaussian, Pearson Type II/VII, multivariate Student's t , multivariate logistics and multivariate Kotz type, multivariate Laplace, multivariate Bessel and multivariate power exponential distributions.

Now, assume $\boldsymbol{\epsilon} \sim EC_n(0, \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_{11}, h)$ and $\mathbf{v} \sim EC_q(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_{22}, h)$, where $\boldsymbol{\mu}$ is a q -vector of known values. Moreover, $\boldsymbol{\epsilon}$ is independent of \mathbf{v} . Following Theil and Goldberger (1961) we combine the stochastic prior and sample information, to get the following linear relation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

where

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \sim EC_{n+q} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n \times 1)} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}, \sigma^2 \mathbf{V}, h \right\}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

subject to the following restriction

$$H_0 : H\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

where $H = [-R, I_q]$ and $\phi = \begin{bmatrix} \beta \\ R\beta + \mu \end{bmatrix}$.

Rewrite the model as

$$y^* = Z\phi + \Upsilon, \quad (1.6)$$

where

$$y^* = \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} X & 0_{(n \times q)} \\ 0_{(q \times p)} & I_q \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \epsilon \\ v - \mu \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Also, subject to the exact restriction we have

$$\Upsilon \sim EC_{n+q}(0_{(n+q) \times 1}, \sigma^2 V, h). \quad (1.8)$$

2 The Proposed Estimators

In this section, we propose unrestricted estimator (UE), restricted estimator (RE) under the exact restriction (1.5), preliminary test estimator (PTE), Stein-type shrinkage estimator (SSE) and positive-rule shrinkage estimator (PRSE).

It is well-known that minimizing $\Upsilon'V^{-1}\Upsilon$ w.r.t. ϕ results on the conventional estimator that uses only sample information say, UE given by

$$\hat{\phi} = (Z'V^{-1}Z)^{-1}Z'V^{-1}y^*. \quad (2.1)$$

Also UE of σ^2 is

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (y^* - Z\hat{\phi})'V^{-1}(y^* - Z\hat{\phi}). \quad (2.2)$$

It is easy to show that

$$S^2 \equiv \frac{n\hat{\sigma}^2}{n-p},$$

is an unbiased UE of $\sigma_e^2 = -2\psi'(0)\sigma^2$.

For test of $H\phi = 0$, first we consider the RE given by

$$\tilde{\phi} = \hat{\phi} - (Z'V^{-1}Z)^{-1}H'[H(Z'V^{-1}Z)^{-1}H']^{-1}H\hat{\phi}. \quad (2.3)$$

Similarly

$$S_R^2 \equiv \frac{(y^* - Z\tilde{\phi})'V^{-1}(y^* - Z\tilde{\phi})}{n-p+q}$$

is an unbiased RE of σ_e^2 .

Along this paper, for the sake of reduction, we suppose

$$G_1 = (Z'V^{-1}Z)^{-1}, \quad G_2 = (HG_1H')^{-1}.$$

The test statistic and its distribution are given in the following Theorem.

Theorem 2.1. Suppose in the regression model (1.6), $\Upsilon \sim EC_{n+q}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{V}, h)$. Moreover, let $\Omega = \{(\phi, \sigma, \mathbf{V}) : \phi \in \mathbb{R}^{p+q}, \sigma \in \mathbb{R}^+, \mathbf{V} > \mathbf{0}\}$ and $\omega = \{(\phi, \sigma, \mathbf{V}) : \phi \in \mathbb{R}^{p+q}, \mathbf{H}\phi = \mathbf{0}, \sigma \in \mathbb{R}^+, \mathbf{V} > \mathbf{0}\}$. Suppose $y^{\frac{n+q}{2}} h(y)$ has a finite positive maximum y_h . Then the likelihood ratio test statistic for testing $H_0 : \mathbf{H}\phi = \mathbf{0}$ is given by

$$\zeta = \frac{\hat{\phi}' \mathbf{H}' \mathbf{G}_2 \mathbf{H} \hat{\phi}}{qS^2}$$

and it has the following modified generalized non-central F distribution

$$J_{q, n-p}(\Delta, \zeta) = \sum_{r \geq 0} \frac{\left(\frac{q}{n-p}\right)^{\frac{1}{2}(q+2r)} \zeta^{\frac{1}{2}(q+2r-2)} K_{(r)}^{(\Delta)}}{r! B\left(\frac{q+2r}{2}, \frac{n-p}{2}\right) \left(1 + \frac{q}{n-p} \zeta\right)^{\frac{1}{2}(q+n-p+2r)}} \quad (2.4)$$

where $\Delta = \theta/\sigma_e^2$ for $\theta = \phi' \mathbf{H}' \mathbf{G}_2 \mathbf{H} \phi$, and the mixing distribution is given by

$$K_{(r)}^{(\Delta)} = \int_0^\infty \mathcal{W}(t) (-\psi'(0)t\Delta)^r e^{\psi'(0)t\Delta} dt, \quad (2.5)$$

$B(\cdot, \cdot)$ is the complete beta function and the weight function $\mathcal{W}(\cdot)$ is defined in Lemma 6.1 in the Appendix.

For the proof see the proof of Theorem 2.3 of Arashi et al. (2010).

Corollary 2.1. Under H_0 , ζ has central F distribution with q and $n-p$ degrees of freedom.

Following Bancroft (1944), the usual preliminary test estimator (PTE) of ϕ is defined by

$$\hat{\phi}^{PT} = \tilde{\phi} + [1 - I(\zeta \leq F_\alpha)](\hat{\phi} - \tilde{\phi}), \quad (2.6)$$

where $I(A)$ is the indicator function of the set A , F_α is the upper 100α percentile of the central F distribution with q and $n-p$ degrees of freedom. The PTE has the disadvantage that it is dependent on the level of significance α ($0 < \alpha < 1$), and also it yields the extreme results, $\hat{\phi}$ and $\tilde{\phi}$ depending on the outcome of the test. An alternative choice to PTE is the following Stein-type shrinkage estimator (SSE) of ϕ

$$\hat{\phi}^S = \tilde{\phi} + (1 - \rho\zeta^{-1})(\hat{\phi} - \tilde{\phi}), \quad (2.7)$$

where

$$\rho = \frac{(q-2)(n-p)}{q(n-p+2)}, \quad q \geq 3. \quad (2.8)$$

Behavior of SSE depends on the shrinkage factor $(1 - \rho\zeta^{-1})$. The SSE has the disadvantage that it has strange comparability for small values ζ . Also the

shrinkage factor becomes negative for $\zeta < \rho$. A classical positive-rule James-Stein based estimator of ϕ , namely PRS estimator is given by

$$\hat{\phi}^{S+} = \tilde{\phi} + (1 - \rho\zeta^{-1})I(\zeta > \rho)(\hat{\phi} - \tilde{\phi}). \quad (2.9)$$

This estimator is a convex combination of two extremes $\hat{\phi}$ and $\tilde{\phi}$. The PRSE dominates SSE uniformly, which will be shown later.

3 Evaluating Bias and Risk Functions

In this section, first we obtain the bias of five estimators under study and under the weighted quadratic loss function

$$L(\phi^*; \phi) = (\phi^* - \phi)'G_1^{-1}(\phi^* - \phi)$$

for any estimator natural ϕ^* of ϕ . We evaluate risks of the proposed estimators by the following measure of accuracy

$$R(\phi^*; \phi) = E_\phi[L(\phi^*; \phi)]. \quad (3.1)$$

By the fact that $Y^* \sim EC_{n+q}(Z\phi, \sigma^2V, h)$, we get

$$b_1 = E(\hat{\phi} - \phi) = 0. \quad (3.2)$$

Using the equation (2.3) and (3.2) we have

$$b_2 = E(\tilde{\phi} - \phi) = b_1 - G_1H'G_2H\phi = -G_1H'G_2H\phi. \quad (3.3)$$

Using the symmetric idempotent matrix $G_1^{\frac{1}{2}}H'G_2HG_1^{\frac{1}{2}}$, there exists an orthogonal matrix Q (Searle, 1982) such that

$$QG_1^{1/2}H'G_2HG_1^{1/2}Q' = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Now define random variable w by

$$w = QG_1^{-1/2}\hat{\phi}. \quad (3.5)$$

Then $w \sim EC_{p+q}(\delta, \sigma^2I_{p+q}, h)$ where $\delta = QG_1^{-1/2}\phi$.

Partitioning the vectors $w = (w_1', w_2')'$ and $\delta = (\delta_1', \delta_2')'$ where w_1 and w_2 are sub-vectors of order q and $p - q$ respectively, we obtain

$$\begin{aligned} \hat{\phi}'H'G_2H\hat{\phi} &= \hat{\phi}'G_1^{-1/2}Q'QG_1^{1/2}H'G_2HG_1^{1/2}Q'QG_1^{-1/2}\hat{\phi} \\ &= w'G_1^{1/2}H'G_2HG_1^{1/2}Q'w \\ &= w' \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w = w_1'w_1 \\ \zeta &= \frac{w_1'w_1}{qS^2}, \quad \theta = \delta_1'\delta_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

In the rest, we apply the following fundamental result.

Theorem 3.1. For the test statistic ζ given in Theorem 2.1, assume $g(\cdot)$ is a Borel measurable function, then we have

$$\begin{aligned} E[g(\zeta)w_1] &= \delta_1 \int_0^\infty \mathcal{W}(t) E \left[\phi(F_{q+2, n-p, t\Delta}) \middle| t \right] dt, \\ E[g(\zeta)w_1'w_1] &= q\sigma^2 \int_0^\infty \mathcal{W}(t) E \left[\phi(F_{q+2, n-p, t\Delta}) \middle| t \right] dt \\ &\quad + \delta_1' \delta_1 \int_0^\infty \mathcal{W}(t) E \left[\phi(F_{q+4, n-p, t\Delta}) \middle| t \right] dt, \end{aligned}$$

where $F_{q, n-p, \Delta}$ is the non-central F variable with q and $n-p$ degrees of freedom and non-centrality parameter Δ .

The proof follows directly by Lemma 6.1 and the proof of Lemma 6.2 in the Appendix of this paper.

Now, by making use of (2.6) and (3.2) we readily obtain

$$b_3 = E(\hat{\phi}^{PT} - \phi) = b_1 - E[I(\zeta \leq F_\alpha)(\hat{\phi} - \bar{\phi})]$$

Also

$$\begin{aligned} \hat{\phi} - \bar{\phi} &= G_1 H' G_2 H \hat{\phi} \\ &= G_1 H' G_2^{1/2} G_1^{1/2} H G_1^{1/2} Q' Q G_1^{-1/2} \hat{\phi} \\ &= G_1 H' G_2^{1/2} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w = G_1 H' G_2^{1/2} w_1. \end{aligned}$$

Therefore, implementing Theorem 3.1 for $g(\zeta) = I(\zeta \leq F_\alpha)$ one can obtain

$$b_3 = -G_1 H' G_2 H \phi G_{q+2, n-p}^{(2)}(\Delta, x'), \quad (3.7)$$

where

$$G_{q+2i, n-p}^{(j)}(\Delta, x') = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} K_{(r+j-2)}^{(\Delta)} I_{x'} \left[\frac{1}{2} (q+2i+2r), \frac{n-p}{2} \right]$$

$I_{x'} \left[\frac{q+2i}{2} + r, \frac{n-p}{2} \right]$ is an incomplete beta function, $x' = \frac{qF_\alpha}{n-p+qF_\alpha}$, and $G_{q+2i, n-p}^{(j)}(0, x') = I_{x'} \left[\frac{q+2i}{2}, \frac{n-p}{2} \right] = P \left(F_{q+2i, n-p} \leq \frac{qF_\alpha}{q+2i} \right)$.

In a similar way, using (2.7) and applying Theorem 3.1 for $g(\zeta) = \zeta^{-1}$ we get

$$\begin{aligned} b_4 &= E(\hat{\phi}^S - \phi) = -\rho E[\zeta^{-1}(\hat{\phi} - \bar{\phi})] \\ &= -\rho G_1 H' G_2^{1/2} E[\zeta^{-1}w_1] = -\rho G_1 H' G_2 H \phi E^{(2)}[\chi_{q+2}^{*-2}(\Delta)] \quad (3.8) \end{aligned}$$

where

$$E^{(j)}[\chi_{q+2i}^{*-2}(\Delta)] = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} K_{(r+j-2)}^{(\Delta)} (q+2i-2+2r)^{-1}$$

Also $E^{(2)}[\chi_{q+2i}^{*-2}(0)] = (q+2i-2)^{-1}$.

Finally, using equations (2.9) and (3.8), and exploring Theorem 3.1 when $g(\zeta) = \zeta^{-1}I(\zeta \leq \rho)$ we can obtain

$$\begin{aligned} b_5 &= b_4 - E[I(\zeta \leq \rho)(\hat{\phi} - \tilde{\phi})] + \rho E[\zeta^{-1}I(\zeta \leq \rho)(\hat{\phi} - \tilde{\phi})] \\ &= b_4 - G_1 H' G_2 H \phi G_{q+2, n-p}^{(2)}(\Delta, x) \\ &\quad + \rho G_1 H' G_2 H \phi E^{(2)}[F_{q+2, n-p}^{-1}(\Delta) I(F_{q+2, n-p}(\Delta) < \frac{q\rho}{q+2})], \end{aligned} \quad (3.9)$$

where

$$\begin{aligned} &E^{(j)}[F_{q+2i, n-p}^{-1}(\Delta) I(F_{q+2i, n-p}(\Delta) < \frac{q\rho}{q+2i})] \\ &= \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} K_{(r+j-2)}^{(\Delta)} (q+2i)(q+2i-2+2r)^{-1} I_x \left[\frac{q+2i-2+2r}{2}, \frac{n-p+2}{2} \right] \end{aligned}$$

and $x = \frac{q\rho}{n-p+q\rho}$.

Also

$$E^{(j)}[F_{q+2i, n-p}^{-1}(0) I(F_{q+2i, n-p}(0) < \frac{q\rho}{q+2i})] = \frac{q+2i}{q+2i-2} P \left(F_{q+2i-2, n-p+2} \leq \frac{q\rho}{q+2i} \right).$$

It is easy to verify that under the restriction (1.8), all the estimators are unbiased for ϕ .

For the risk of the estimators, respectively we can obtain

$$\begin{aligned} R(\hat{\phi}; \phi) &= E[(\hat{\phi} - \phi)' G_1^{-1} (\hat{\phi} - \phi)] \\ &= \text{tr}\{\sigma_e^2 G_1^{-1} G_1\} \\ &= (p+q)\sigma_e^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Subsequently, by making use of the following equations

$$\begin{aligned} \text{tr}(G_1^{1/2} H' G_2 H G_1^{1/2}) &= \text{tr}(Q G_1^{1/2} H' G_2 H G_1^{1/2} Q') = q, \\ b_2' G_1^{-1} b_2 &= \phi' H' G_2 H G_1^{-1} G_1 H' G_2 H \phi = \theta, \end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned} R(\tilde{\phi}; \phi) &= \text{tr}\{G_1^{-1} [G_1(I_{p+q} - H' G_2 H G_1) \sigma_e^2 + b_2 b_2']\} \\ &= (p+q)\sigma_e^2 - \sigma_e^2 \text{tr}(G_1^{-1/2} H' G_2 H G_1^{1/2}) + b_2' G_1^{-1} b_2 \\ &= p\sigma_e^2 + \theta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Afterward, we have

$$\begin{aligned}
R(\hat{\phi}^{PT}; \phi) &= E\{[(\hat{\phi} - \phi) - I(\zeta \leq F_\alpha)(\hat{\phi} - \tilde{\phi})]' G_1^{-1} [(\hat{\phi} - \phi) \\
&\quad - I(\zeta \leq F_\alpha)(\hat{\phi} - \tilde{\phi})]\} \\
&= E[(\hat{\phi} - \phi)' G_1^{-1} (\hat{\phi} - \phi)] + E[I(\zeta \leq F_\alpha)(\hat{\phi} - \tilde{\phi})' G_1^{-1} (\hat{\phi} - \tilde{\phi})] \\
&\quad - 2E[I(\zeta \leq F_\alpha)(\hat{\phi} - \phi)' G_1^{-1} (\hat{\phi} - \tilde{\phi})] \\
&= (p+q)\sigma_e^2 - E[I(\zeta \leq F_\alpha)w_1'w_1] + 2\delta_1' E[I(\zeta \leq F_\alpha)w_1] \\
&= (p+q)\sigma_e^2 - q\sigma_e^2 G_{q+2, n-p}^{(1)}(\Delta, x') \\
&\quad + \theta\{2G_{q+2, n-p}^{(2)}(\Delta, x') - G_{q+4, n-p}^{(2)}(\Delta, x')\} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Similar to the latter computations, using Theorem 3.1 we find

$$\begin{aligned}
R(\hat{\phi}^S; \phi) &= (p+q)\sigma_e^2 - 2\rho E[\zeta^{-1}(w_1'w_1 - \delta_1'w_1)] + \rho^2 E[\zeta^{-2}w_1'w_1] \\
&= (p+q)\sigma_e^2 - \rho q^2 \sigma_e^2 \{2E^{(1)}[\chi_{q+2}^{*-2}(\Delta)] - (q-2)E^{(1)}[\chi_{q+2}^{*-4}(\Delta)]\} \\
&\quad + \theta \rho q(q+2)E^{(2)}[\chi_{q+4}^{*-4}(\Delta)], \tag{3.13}
\end{aligned}$$

where

$$E^{(j)}[\chi_{q+2i}^{*-4}(\Delta)] = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} K_{(r+j-2)}^{(\Delta)} (q+2i-2+2r)^{-1} (q+2i-4+2r)^{-1}$$

Also $E^{(j)}[\chi_{q+2i}^{*-4}(0)] = (q+2i-2)^{-1} (q+2i-4)^{-1}$.

Finally, for the risk of PRSE it can be found

$$\begin{aligned}
R(\hat{\phi}^{S+}; \phi) &= R(\hat{\phi}^S; \phi) - E[(1 - \rho\zeta^{-1})^2 I(\zeta \leq \rho) w_1'w_1] \\
&\quad - 2E[(1 - \rho\zeta^{-1}) I(\zeta \leq \rho) (w_1'w_1 - \delta_1'w_1)] \\
&= R(\hat{\phi}^S; \phi) - q\sigma_e^2 E^{(1)} \left[(1 - c_1 F_{q+2, n-p}^{-1}(\Delta))^2 I(F_{q+2, n-p}(\Delta) < c_1) \right] \\
&\quad + 2\theta E^{(2)} \left[(1 - c_1 F_{q+2, n-p}^{-1}(\Delta)) I(F_{q+2, n-p}(\Delta) < c_1) \right] \\
&\quad - E^{(2)} \left[(1 - c_2 F_{q+4, n-p}^{-2}(\Delta))^2 I(F_{q+4, n-p}(\Delta) < c_2) \right] \tag{3.14}
\end{aligned}$$

where $c_1 = \frac{q\rho}{q+2}$ and $c_2 = \frac{q\rho}{q+4}$

$$\begin{aligned}
&E^{(j)} \left[F_{q+2i, n-p}^{-2}(\Delta) I(F_{q+2i, n-p}(\Delta) < \frac{q\rho}{q+2i}) \right] \\
&= \sum_{r \geq 0} \frac{(q+2i)^2}{r!(n-p)} K_{(r+j-2)}^{(\Delta)} [(q+2i-2+2r)(q+2i-4+2r)]^{-1} \\
&\quad \times I_{x'} \left[\frac{q+2i-4+2r}{2}, \frac{n-p+4}{2} \right]
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} & E^{(j)}[F_{q+2i, n-p}^{-2}(0)I(F_{q+2i, n-p}(0) < \frac{q\rho}{q+2i})] \\ &= \frac{(q+2i)^2}{(n-p)(q+2i-2)(q+2i-4)} P\left(F_{q+2i-4, n-p+4} \leq \frac{q\rho}{q+2i}\right). \end{aligned}$$

4 Risk Analysis

In this section, we set the risk analysis of the underlying estimators and propose the dominance order of the estimators under study utilizing the risk functions.

By making use of (3.10) and (3.11) we have

$$\frac{R(\tilde{\phi}; \phi)}{R(\hat{\phi}; \phi)} \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 1 \leftrightarrow \Delta \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} q,$$

From (3.10) and (3.12) we can obtain

$$\frac{R(\hat{\phi}^{PT}; \phi)}{R(\hat{\phi}; \phi)} \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 1 \leftrightarrow \Delta G^*(\Delta, x') \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} q G_{q+2, n-p}^{(1)}(\Delta, x'),$$

where

$$G^*(\Delta, x') = 2G_{q+2, n-p}^{(2)}(\Delta, x') - G_{q+4, n-p}^{(2)}(\Delta, x'). \quad (4.1)$$

Using (3.11) and (3.12) we can obtain

$$\frac{R(\hat{\phi}^{PT}; \phi)}{R(\tilde{\phi}; \phi)} \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 1 \leftrightarrow q[1 - G_{q+2, n-p}^{(2)}(\Delta, x')] \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} \Delta[1 - G^*(\Delta, x')].$$

In order to determine the superiority of Stein-type shrinkage $\hat{\phi}^S$ over $\hat{\phi}$ we give the following important result. In other words, the following theorem shows that the shrinkage factor ρ of the Stein-type estimator is robust with respect to the slope parameters and the unknown mixing distributions.

Theorem 4.1. *Consider the model (1.6) where the error-vector belongs to the ECD, $EC_{n+q}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{V}, h)$. Then the Stein-type shrinkage estimator, $\hat{\phi}^S$ of ϕ given by*

$$\hat{\phi}^S = \hat{\phi} - d^* \zeta^{-1}(\hat{\phi} - \tilde{\phi})$$

uniformly dominates the unrestricted estimator $\hat{\phi}$ with respect to the weighted quadratic loss function $L(\hat{\phi}; \phi)$ and is minimax if and only if $0 < d^ \leq \frac{2(n-p)}{n-p+2}$. The largest reduction of the risk is attained when $d^* = \frac{n-p}{n-p+2}$.*

For the proof see the Appendix.

Remark 4.1. Consider the coefficient ρ given by (2.8). From $q \geq 3$, we get $0 < \rho = \frac{(q-2)(n-p)}{q(n-p+2)} < \frac{2(n-p)}{n-p+2}$ and thus using Theorem 4.1, $\hat{\phi}^S$ in equation (2.7) uniformly dominates $\hat{\phi}$ on the whole parameter space under the weighted quadratic loss function.

To compare $\tilde{\phi}$ and $\hat{\phi}^S$, it is easy to show that

$$R(\hat{\phi}^S; \phi) = R(\tilde{\phi}; \phi) + q\sigma_e^2 - \theta - \rho q^2 \sigma_e^2 \left\{ (q-2)E^{(2)}[\chi_{q+2}^{*-4}(\Delta)] \right. \\ \left. + \left[1 - \frac{(q+2)\theta}{2q\sigma_e^2 \Delta_*^2} \right] (2\Delta_*^2)E^{(2)}[\chi_{q+4}^{*-4}(\Delta)] \right\}.$$

Under H_0 , this becomes

$$R(\hat{\phi}^S; \phi) = R(\tilde{\phi}; \phi) + q\sigma_e^2(1 - \rho) \\ \geq R(\tilde{\phi}; \phi),$$

while

$$R(\tilde{\phi}; \phi) = R(\hat{\phi}; \phi) - q\sigma_e^2 \\ \leq R(\hat{\phi}; \phi).$$

Therefore, under H_0 , $\tilde{\phi}$ is superior to $\hat{\phi}^S$. However, as δ_1 moves away from origin, θ increases and the risk of $\tilde{\phi}$ becomes unbounded while the risk of $\hat{\phi}^S$ remains below the risk of $\hat{\phi}$.

This scenario repeats when we compare $\hat{\phi}^S$ and $\hat{\phi}^{PT}$. Consider under H_0

$$R(\hat{\phi}^S; \phi) = R(\hat{\phi}^{PT}; \phi) + q\sigma_e^2[1 - \alpha - \rho] \\ \geq R(\hat{\phi}^{PT}; \phi),$$

for all α such that $F_{q+2, m}^{-1}(\rho, 0) \leq \frac{qF_\alpha}{q+2}$. This means the estimator $\hat{\phi}^S$ does not always dominates $\hat{\phi}^{PT}$ under H_0 .

Theorem 4.2. Consider the model (1.6) where the error-vector belongs to the ECD, $EC_{n+q}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{V}, h)$. Then the PRSE of ϕ uniformly performs better than SSE.

For the proof see the Appendix.

Remark 4.2. Using Remark 4.1 and Theorem 4.2, $\hat{\phi}^{S+}$ uniformly dominates $\hat{\phi}$.

By some similar algebraic computations, we can obtain $\tilde{\phi}$ dominates $\hat{\phi}^{S+}$ under H_0 . However, as δ moves away from origin, θ increases and the risk of $\tilde{\phi}$ becomes unbounded while the risk of $\hat{\phi}^{S+}$ remains below the risk of $\hat{\phi}$.

x	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1.00	0.10	0.25	0.41
x_2	0.10	1.00	0.33	0.55
x_3	0.25	0.33	1.00	0.20
x_4	0.41	0.55	0.20	1.00

Table 1: Correlation Matrix for generated data

4.1 Numerical Study

In this section we proceed with a numerical computation as a proof of our assertions. In this regard, we generate a set of correlated data from a multivariate Student t-distribution (MT). The distribution is the mixture of multivariate normal distribution with the inverse gamma distribution as the weight function given by

$$\mathcal{W}(t) = \frac{\nu^{\frac{\nu}{2}} t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}t}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}.$$

In this case the error term in the model (1.1) has the $MT_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{V}, \nu)$ distribution with the location $\mathbf{0}$, scale matrix $\sigma^2 \mathbf{V}$ and ν degrees of freedom with the following pdf

$$f(\epsilon) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}\right) |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}}}{(\pi\nu)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sigma^n} \left(1 + \frac{\epsilon' \mathbf{V}^{-1} \epsilon}{\nu \sigma^2}\right)^{-\frac{n+\nu}{2}}, \quad 0 < \nu, \quad \sigma < \infty.$$

Therefore, we have $Cov(\epsilon) = \sigma^2 \mathbf{V}$ for $\sigma_e^2 = \frac{\nu}{\nu-2} \sigma^2$. In this case $G_{q+2i, n-p}^{(j)}(\Delta, x')$, $E^{(j)}[\chi_{q+2i}^{*-2}(\Delta)]$ and $E^{(j)}[F_{q+2i, n-p}^{-1}(\Delta) I(F_{q+s, n-p}(\Delta) < \frac{q\rho}{q+2i})]$ can be simply computed by using the fact that

$$K_r^{(\Delta)} = \frac{\Gamma(r + \frac{\nu}{2})}{\Gamma(r+1)\Gamma(\frac{\nu}{2})} \frac{(\frac{\Delta}{\nu-2})^r}{(1 + \frac{\Delta}{\nu-2})^{r+\frac{\nu}{2}}}$$

MT plays an important role in robust statistical inference, particularly for heavy tailed distributions involving outliers and extreme values.

The data set consists of four variables with $n = 30$ generated from a MT with five degrees of freedom and the correlation matrix given in Table 1. Underlying \mathbf{R} and the corresponding \mathbf{H} matrices are as

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The estimators are computed and given in Table 2. The graphs of risks based on non-centrality parameter Δ is displayed in Figure 1.

$\hat{\phi}$	$\tilde{\phi}$	$\hat{\phi}^{PT}$	$\hat{\phi}^S$	$\hat{\phi}^{S+}$
-0.13372	0.01179	0.01179	1.70277	0.01179
-0.23419	-0.13368	-0.13368	1.03420	-0.13368
0.11188	-0.08726	-0.08726	-2.40142	-0.08726
-0.04180	-0.08847	-0.08847	-0.63084	-0.08847
-0.21004	-0.20478	-0.20478	-0.14366	-0.20478
-0.31767	-0.31925	-0.31925	-0.33765	-0.31925
-0.12971	-0.12782	-0.1278	-0.10594	-0.12782

Table 2: Estimated values

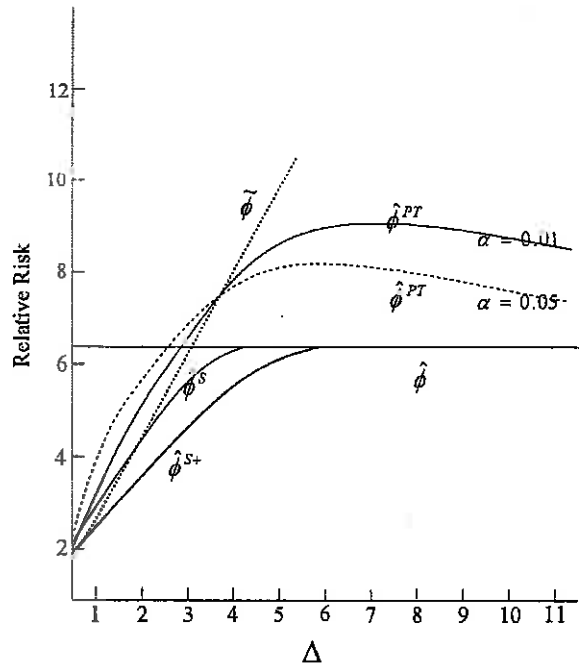


Figure 1: Risk performance based on the non-centrality parameter Δ

5 Conclusion

In this study, we proposed five different estimators for the regression vector-parameter of a linear regression model. In this approach, the linear stochastic prior information $r = R\beta + v$ is suspected. Based on the given results the dominance order of five estimators under H_0 with the weighted quadratic loss function can be determined under the following two categories (the notation \succeq shows superiority in the sense of having smaller risk)

$$1. \quad \tilde{\phi} \succeq \hat{\phi}^{PT} \succeq \hat{\phi}^{S+} \succeq \hat{\phi}^S \succeq \hat{\phi}, \quad 2. \quad \tilde{\phi} \succeq \hat{\phi}^{S+} \succeq \hat{\phi}^S \succeq \hat{\phi}^{PT} \succeq \hat{\phi}.$$

Based on the above two orderings superiority categories of the estimators, under the stochastic constraints, two non-linear estimators $\hat{\phi}^S$ and $\hat{\phi}^{S+}$ perform better than the unbiased UE $\hat{\phi}$.

Behaviors of PRSE and SSE are constrained by the requirement $q \geq 3$. However, the PTE needs determination of adequate size of the test and the extent of departure of Δ from origin.

Further, by Theorem 4.1, it is shown that the shrinkage factor ρ of the Stein-type estimator is robust with respect to the slope parameters and the unknown mixing distributions.

For $\mathcal{W}(t)$ as dirac delta function (results the multivariate Gaussian distribution), the maximal savings in risk for the shrinkage estimator is $\frac{(n-p)(q-2)}{p(n-p+2)}$, while for $\mathcal{W}(t)$ as inverse-gamma function (results the multivariate Student's t (MT) distribution), it is equal to $\frac{(n-p)(q-2)}{p(n-p+2)} \frac{\nu-2}{\nu}$, where ν is d.f. of MT distribution. See Table 1 of Arashi et al. (2010) of some scale mixture of normal distribution.

Remarkably, the behavior of all estimators when compared with one another under elliptical symmetry are exactly the same as under normal theory as well as MT assumption as exhibited respectively in Saleh (2006) and Arashi and Tabatabaey (2008). This phenomenon shows the domination order of estimators and regarding substantial conditions under normal theory are significantly robust.

6 Appendix

Lemma 6.1. (Chu, 1973) Let z be a n -dimensional elliptically contoured random vector with mean equal to θ and scale matrix Σ and density function $g(\cdot)$ with density generator $h(\cdot)$. If $h(t)$, $t \in [0, \infty)$ has the inverse Laplace transform then there exists a scalar function $\mathcal{W}(t)$ defined on $(0, \infty)$ such that

$$g(z) = \int_0^\infty \mathcal{W}(t) f_{\mathcal{N}}(z) dt,$$

where $f_{\mathcal{N}}(\cdot)$ denotes the density function of $\mathcal{N}_n(\theta, t^{-1}\Sigma)$, and

$$\mathcal{W}(t) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{2}} \mathcal{L}^{-1}\{h(s)\},$$

$\mathcal{L}^{-1}\{h(s)\}$ denotes the inverse Laplace transform of $h(s)$.

For details on the properties of Laplace transform and its inverse see Debnath and Bhatta (2007).

Lemma 6.2. (Judge and Bock, 1978) If x is a $(J \times 1)$ normally distributed random vector with mean η and covariance I_J and A is any positive definite symmetric matrix, then for any Borel measurable function $\phi(\cdot)$ we have

$$E[\phi(x'x)x'Ax] = \text{tr}(A)E[\phi(\chi_{J+2, \eta'\eta}^2)] + \eta'AE\eta E[\phi(\chi_{J+4, \eta'\eta}^2)]$$

Proof of Theorem 4.1

Let $\hat{w} = H'G_2H\hat{\phi}$. Then by the definition we have

$$\begin{aligned}\hat{\phi}^S &= \hat{\phi} - d^*qS^2 \frac{G_1H'G_2H\hat{\phi}}{\hat{\phi}'H'G_2H\hat{\phi}} \\ &= \hat{\phi} - d^*qS^2 (\hat{w}'G_1\hat{w})^{-1} G_1\hat{w}.\end{aligned}$$

Therefore the risk difference of $\hat{\phi}^S$ and $\hat{\phi}$ can be written as

$$\begin{aligned}D &= R(\hat{\phi}^S; \phi) - R(\hat{\phi}; \phi) \\ &= (d^*)^2 E \left[q^2 S^4 (\hat{w}'G_1\hat{w})^{-1} \right] - 2d^* E \left[qS^2 (\hat{w}'G_1\hat{w})^{-1} (\hat{\phi} - \phi)' \hat{w} \right] \\ &= (d^*)^2 E_t \left\{ E_N \left[q^2 S^4 (\hat{w}'G_1\hat{w})^{-1} \middle| t \right] \right\} \\ &\quad - 2d^* E_t \left\{ E_N \left[qS^2 (\hat{w}'G_1\hat{w})^{-1} (\hat{\phi} - \phi)' H'G_2H\hat{\phi} \middle| t \right] \right\} \\ &= \frac{q^2(n-p+2)}{n-p} (d^*)^2 E_t \left(\frac{t^{-2}}{\hat{w}'G_1\hat{w}} \right) - 2q^2 d^* E_t \left(\frac{t^{-2}}{\hat{w}'G_1\hat{w}} \right).\end{aligned}$$

Therefore, $D \leq 0$ if and only if $0 < d^* \leq \frac{2(n-p)}{n-p+2}$ since $\int_0^\infty \frac{t^{-2}}{\hat{w}'G_1\hat{w}} dW(t) > 0$. (See Srivastava and Bilodeau, 1989).

Proof of Theorem 4.2

Consider the risk difference given by

$$\begin{aligned}R(\hat{\phi}^{S+}; \phi) - R(\hat{\phi}^S; \phi) &= -q\sigma_e^2 E^{(1)} \left[(1 - c_1 F_{q+2, n-p}^{-1}(\Delta))^2 I(F_{q+2, n-p}(\Delta) < c_1) \right] \\ &\quad + 2\theta E^{(2)} \left[(1 - c_1 F_{q+2, n-p}^{-1}(\Delta)) I(F_{q+2, n-p}(\Delta) < c_1) \right] \\ &\quad - E^{(2)} \left[(1 - c_2 F_{q+4, n-p}^{-2}(\Delta))^2 I(F_{q+4, n-p}(\Delta) < c_2) \right]\end{aligned}\tag{6.1}$$

The RHS of (6.1) is negative since for every $F_{q+2, n-p}(\Delta) < c_1$, we have

$$E^{(2)} \left[(1 - c_1 F_{q+2, n-p}^{-1}(\Delta)) I(F_{q+2, n-p}(\Delta) < c_1) \right] < 0$$

Also the expectation of a positive random variable is positive, so

$$E^{(2)} \left[(1 - c_2 F_{q+4, n-p}^{-2}(\Delta))^2 I(F_{q+4, n-p}(\Delta) < c_2) \right] > 0$$

and

$$E^{(1)} \left[(1 - c_1 F_{q+2, n-p}^{-1}(\Delta))^2 I(F_{q+2, n-p}(\Delta) < c_1) \right] > 0.$$

Thus PRSE uniformly dominates SSE in the sense that $R(\hat{\phi}^{S+}; \phi) \leq R(\hat{\phi}^S; \phi)$.

Acknowledgements

We would like to thank an anonymous referee for his/her helpful comments that led to numerous substantial improvements in this paper. This research is supported by Shahrood University of Technology.

References

- Arashi, M. and Tabatabaey, S. M. M., (2008) Stein-type improvement under stochastic constraints: Use of multivariate Student-t model in regression, *Statist. Prob. Lett.*, **78**, 2142-2153.
- Arashi, M., Saleh, A. K. Md. Ehsanes and Tabatabaey, S. M. M., (2010) Estimation of parameters of parallelism model with elliptically distributed errors, *Metrika*, **71**, 79-100.
- Bancroft, T. A., (1944) On biases in estimation due to the use of preliminary tests of significance, *Ann. Math. Statist.*, **15**, 195-204.
- Chu, K. C., (1973) Estimation and decision for linear systems with elliptically random process, *IEEE Trans. Auto. Cont.* **18**, 499-505.
- Debnath, L. and Bhatta, D., (2007) *Integral Transforms and Their Applications*, Chapman and Hall, London, New York.
- Fang, K. T., Kotz, S. and Ng, K. W., (1990) *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, London, New York.
- Fang, K. T. and Zhang, Y., (1990) *Generalized Multivariate Analysis*, Springer, Beijing.
- Gupta, A. K. and Varga, T., (1993) *Elliptically Contoured Models in Statistics*, Kluwer Academic Press.
- Judge, G. G. and bock, M. E., (1978) *The statistical implication of pre-test and Stein-rule estimators in Econometrics*, North-Holland, New York.
- Saleh, A. K. Md. Ehsanes, (2006) *Theory of Preliminary Test and Stein-type Estimation with Applications*, John Wiley, New York.

- Searle, S. R., (1982) *Matrix Algebra Useful for Statistics*, John Wiley, New York.
- Srivastava, M. and Bilodeau, M., (1989) Stein estimation under elliptical distribution, *J. Mult. Ann.*, **28**, 247-259.
- Tabatabaey, S. M. M., Saleh, A. K. Md. Ehsanes and Kibria, B. M. G., (2004) Simultaneous estimation of regression parameters with spherically symmetric errors under possible stochastic constrains, *Int. J. Statist. Sci.*, **3**, 1-20.
- Theil, H., (1963) On the use of incomplete prior information in regression analysis, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **58**, 401-414.
- Theil, H. and Goldberger, A. S., (1961) On pure and mixed statistical estimation in economics, *Int. Econ. Rev.*, **2**, 65-78.
- Zellner, A., (1962) An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **57**, 348-368.