



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه ارشد ریاضی

عنوان

مسئله مکان یابی در مقیاس بزرگ

نگارش

اعظم نادعلی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی

دیماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق اعم از چاپ و تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان نامه برای دانشگاه شهید بهشتی محفوظ است.
نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.

صفحة تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

سپاس، سزاوار بارگاه نورانی حضرت عالمتاب هستی، پروردگار عالمیان است که روشنی عقل را بر سیاهی نفس، پویایی فکر را بر خمودی نادانی و زیور آگاهی را بر زشتی جهل برتری داد. اینک که با یاری وی نگارش پایان نامه ام را به اتمام رسانده ام بر خود لازم می دانم از زحمات بزرگوارانی که با راهنمایی های خود سهم عظیمی در تدوین این پایان نامه داشته اند صمیمانه سپاسگذاری و قدردانی نمایم.

در ابتدا صمیمانه ترین تشکرها تقدیم به پدر و مادر و برادر عزیزم که همواره راهنما و مشوقم بوده اند و گذر از مشکلات زندگی ام به حول و قوه الهی و بدمن دعای خیر و برکت وجودشان، و بدون همکاری و یاریشان غیرممکن بود.

از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب دکتر احمد نزاکتی که با سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشته اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد مشاور گرامی ام، دکتر حعفر فتحعلی که در تمام مراحل این پایان نامه مرا از نظرات و راهنمایی های سازنده و راهگشا و ارزنده شان بهره مند ساختند کمال سپاسگزاری را دارم. از اساتید محترم، دکتر علیرضا ناظمی و دکتر مهدی زعفرانیه که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

برخود لازم می دانم تا از کلیه اساتید گرانقدر دانشکده ریاضی که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، تشکر نمایم.

در نهایت از تمامی دوستان و همکلاسی ها و هم دانشکده ای های گرامی ام که در طول این مدت افتخار مصاحبت و همفکری با آنها را داشتم، صمیمانه سپاس گذاری می کنم.

چکیده

در چند دهه اخیر، توجه به مسائل محیطی و کاربردی افزایش پیدا کرده است. یکی از این نوع مسائل، مسائل مکان یابی است که شاخص مهمی در پیشرفت و صنعتی شدن یک جامعه می باشد. در بررسی مشاغل زود بازده مشخص شده است که بیش از ۵۰ درصد آنها در سال اول و حدود ۳۰ درصد آنها پس از دو سال ورشکسته می شوند با اینکه در آغاز راه اندازی این مشاغل تمام جوانب ارائه خدمات بررسی می شود ولی بی توجهی به مسئله مهم مکان سبب می شود که واحد تولیدی به سود دهی مورد نظر نرسد و از رسیدن به هدف خود باز بماند.

مسائلی مانند استقرار یک یا چند سرویس دهنده برای نقاط تقاضا که با توجه به تعداد متقاضیان کمترین هزینه و بیشترین سود را داشته باشد از این دسته از مسائل می باشند. همچنین مسائل پیچیده ای نظیر انتخاب محل استقرار یک فرودگاه، مراکز اورژانس، بیمارستان ها، نیروگاهها، مکان دفن زباله، شهر بازی، پایانه های حمل و نقل، آزمایشگاههای هسته ای، فروشگاههای زنجیره ای و... از مسائل مکان یابی در مقیاس بزرگ هستند.

در این پایان نامه به بیان و بررسی خطا در روش دسته بندی، یکی از روش های حل مسائل مکان یابی در مقیاس بزرگ می پردازیم.

در ابتدا مفاهیم اولیه مکان یابی و دسته بندی را تعریف می کنیم. همچنین در فصل ۲ این پایان نامه مفهوم خطا را بیان و راهکارهایی برای محدود کردن آن پیشنهاد می دهیم و در پایان فصل دو الگوریتم دسته بندی *MRC* و روش تعیین مرکز تلفن در مراکز مخابرات را بیان می کنیم. در فصل ۳ روش ابتکاری دسته بندی شش ضلعی و کاشی کاری با سه الگو و کاشی کاری با چند الگو را بررسی کرده ایم و در انتها در فصل چهارم روش جدید تقسیم متوالی مربعات را بیان و الگوریتم آن را شرح می دهیم، همچنین این روش را با روش ابتکاری شش ضلعی از لحاظ عددی مقایسه می کنیم.

واژه های کلیدی: مکان یابی - دسته بندی - خطا - p - میانه - نماینده

فهرست مطالب

ذ	لیست جداول
ر	لیست تصاویر
۱	۱ مقدمه و مفاهیم اولیه
۲	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ مسئله وبر (۱- میانه)
۸	۱.۲.۱ فاصله
۹	۲.۲.۱ وزن
۹	۳.۲.۱ دوگان مسئله وبر
۱۱	۳.۱ دسته بندی
۱۶	۲ تکنیک دسته بندی و خطاهای حاصل از آن
۱۷	۱.۲ مقدمه
۱۷	۱.۱.۲ مسئله دسته بندی [۱۴]
۱۹	۲.۱.۲ خطای دسته بندی [۱۴]
۲۵	۲.۲ کران خطای دسته بندی در مسائل مکان یابی
۲۸	۳.۲ انواع خطاهای دسته بندی
۲۹	۴.۲ منابع خطای A, B, C [۵]
۳۲	۱.۴.۲ روش های حذف یا کم کردن خطاهای منبع A و B
۳۵	۲.۴.۲ الگوریتم دسته بندی MRC [۱۲]
۴۰	۵.۲ روش مجموع مربعات برای تعیین مرکز تلفن
۴۱	۱.۵.۲ طرز تعیین مرکز تلفن:
۴۷	۳ روش های ابتکاری چند ضلعی و کاشی کاری
۴۸	۱.۳ مقدمه
۴۸	۲.۳ روش های ابتکاری
۵۰	۳.۳ الگوریتم کاشی کاری (مش بندی) با سه الگو
۵۵	۴.۳ روش تولید نسل ها با تعمیم روش کاشی کاری

۵۵ تولید (ایجاد) نسل [۲۳]	۱.۴.۳
۵۷ الگوریتم کاشی کاری با چند الگو	۲.۴.۳
۶۸ الگوریتم کاشی کاری با شش الگو [۲۳]	۵.۳
۷۳	روش ابتکاری تقسیمات متوالی مربعات	۴
۷۴ مقدمه	۱.۴
۷۴ روش تقسیم متوالی مربعات	۲.۴
۷۴ الگوریتم روش تقسیم متوالی مربعات	۱.۲.۴
۸۲ نتیجه گیری و پیشنهادات	۳.۴
۸۴		پیوست
۸۵		مراجع

لیست جداول

۷۸	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۱۰۰$ نماینده	۱.۴
۷۸	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۱۰۰$ نماینده	۲.۴
۷۹	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۱۰۰$ نماینده	۳.۴
۷۹	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۱۰۰$ نماینده	۴.۴
۸۰	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۲۰۰$ نماینده	۵.۴
۸۰	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۲۰۰$ نماینده	۶.۴
۸۱	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده	۷.۴
۸۱	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده	۸.۴
۸۲	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده	۹.۴
۸۲	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده	۱۰.۴

لیست تصاویر

۱۳	داده های تقاضای اولیه (دسته بندی نشده)	۱.۱
۱۴	داده های تقاضای دسته بندی شده	۲.۱
۲۱	داده های تقاضای دسته بندی شده	۱.۲
۲۹	دسته بندی داده ها برای شرح خطای منبع A	۲.۲
۳۰	دسته بندی داده ها برای شرح خطای منبع B	۳.۲
۳۱	دسته بندی داده ها برای شرح خطای منبع C	۴.۲
۳۲	خطای منبع A	۵.۲
۳۳	خطای منبع B	۶.۲
۳۶	روش دسته بندی سطر و ستون	۷.۲
۳۷	روش دسته بندی سطر و ستون	۸.۲
۳۸	مثال عددی برای روش دسته بندی MRC	۹.۲
۳۹	مثال عددی برای روش دسته بندی MRC	۱۰.۲
۴۰	مثال عددی برای روش دسته بندی MRC	۱۱.۲
۴۲	نقشه دانستیه پلان سطحی	۱۲.۲
۴۵	یافتن مرکز تلفن	۱۳.۲
۵۱	قانون کرانداری در روش ابتکاری	۱.۳
۵۲	کاشی کاری با سه الگو	۲.۳
۵۳	قانون کرانداری در روش ابتکاری در مثلث	۳.۳
۵۵	رابطه بین نسل های متوالی	۴.۳
۵۹	تصویر S_p^k وقتی $k = 1$ است	۵.۳
۶۸	الگوریتم کاشی کاری با شش الگو	۶.۳
۶۹	حالت های ممکن از تقاطع چند ضلعی ها که نقطه p را می پوشاند.	۷.۳
۷۵	نقاط تقاضا در صفحه	۱.۴
۷۶	مرحله اول الگوریتم تقسیم متوالی مربعات	۲.۴
۷۷	تقسیم متوالی مربعات	۳.۴

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

مسائل مکانیابی^۱، مسائلی هستند که وقتی به دنبال یافتن محل و نحوه استقرار بهینه یک یا چند فعالیت معین (سرویس دهنده)^۲ بر اساس عوامل و متغیرهای موثر بر مکانیابی هستیم، با آن‌ها روبرو می‌شویم. در این نوع مسائل فرض بر این است که تعدادی مشتری (نقاط تقاضا، سرویس گیرنده) موجودند و می‌خواهیم بهترین مکان را برای استقرار سرویس دهنده‌ها به گونه‌ای بیابیم که هزینه مینیمم شود. هزینه ممکن است بر حسب زمان، پول، تعداد سفر، مسافت کل، تعداد نیروی انسانی مورد نیاز یا هر مقیاس دیگری بیان شود.

مطالعات مکان‌یابی هم در سطح ملی و هم در سطح بین‌الملل بسیار مورد توجه قرار گرفته است. انجام مطالعات مکان‌یابی نیازمند تخصص‌هایی از جمله تحقیق در عملیات، روش‌های تصمیم‌گیری، مهندسی برق، مهندسی صنایع، جغرافیا (زمین‌شناسی و آب و هوا)، اقتصاد مهندسی، ریاضی، شهرسازی، بازاریابی، علوم کامپیوتر و ... می‌باشد.

مسائل مکانیابی از جمله مسائلی است که توجه بسیاری را به خود جلب کرده است و امروزه کاربردهای فراوانی دارد. از کاربرد های آن می‌توان به مکان‌یابی بیمارستان‌ها، انبارها، آتش‌نشانی، اورژانس، شعب بانک، دفاتر مالیاتی، پایگاه پلیس، شبکه جریان ترافیک، ایستگاه بازرسی وسایل نقلیه، مراکز تلفن، مراکز توزیع کالا، شهر بازی و غیره اشاره کرد.

زمان پیدایش مسائل مکان‌یابی به اوایل قرن هفدهم و مسئله‌ای که توسط فرما^۳ مطرح شد، برمی‌گردد. مسئله‌ای که فرما مطرح کرد به صورت زیر است:

فرض کنید سه نقطه در صفحه داده شده است، نقطه چهارم را به گونه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن تا سه نقطه داده شده کمینه شود.

^۱Location problems

^۲Facility

^۳Fermat

در سال ۱۶۴۰ توریچلی^۴ مسئله فوق را حل کرد، به این دلیل نقطه بهینه را نقطه توریچلی و مسئله را مسئله فرما می نامند. روش های هندسی برای پیدا کردن این نقطه در سال (۱۷۶۸-۱۷۱۰) (بوسیله توماس سیمپسون^۵ بیان شد. همچنین او یک بیان تعمیم یافته از مسئله فرما که در آن نقاط دارای وزن های متفاوت بودند را پیشنهاد داد.[۹]

نظریه مکان یابی به شکلی که امروزه مورد استفاده قرار می گیرد، با انتشار کتاب معروف آلفرد وبر^۶ در سال ۱۹۰۹ مطرح شد. [۲۷] بیست سال قبل از ارائه تئوری مکان یابی توسط وبر، لانهارت^۷ به طور جزئی تر به حل این مسئله پرداخته بود.

مسائل مکان یابی دارای تنوع بسیار زیادی هستند. به طور کلی مسائل مکان یابی از نظر تحلیلی در یکی از دسته های زیر قرار می گیرند .

۱- مسئله p - میانه:

۲.۱ مسئله وبر (۱- میانه)

فرض کنید n نقطه A_i ، $i = 1, \dots, n$ در صفحه موجود باشند و w_i وزن متناظر با نقطه A_i باشد. هدف یافتن نقطه ای مانند X به گونه ای است که مجموع وزنی فاصله نقطه X تا نقاط موجود در صفحه کمینه شود. یعنی اگر فاصله X تا A_i را با $d(X : A_i)$ نشان دهیم آن گاه مسئله به صورت زیر خواهد بود .

$$\min_X \sum_{i=1}^n w_i d(X, A_i)$$

مسئله وبر تعمیمی از مسئله فرما می باشد بنابراین به آن مسئله فرما - وبر نیز گفته می شود. چون در این مسئله هدف حداقل کردن هزینه کل (مجموع هزینه ها) است، به مسئله کمترین مجموع^۸

^۴Torricelli

^۵Thomas Simpson

^۶Alfred Weber

^۷Lanhart

^۸Minisum

و چون اولین بار توسط وبر مطرح شد به مسئله وبر معروف است. وایزفلد^۹ در سال ۱۹۳۷ یک روش تکراری برای حل مسئله وبر پیشنهاد کرد. [۲۸]

روش تکراری وایزفلد به صورت زیر است.

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i a_i}{d_i(x^{(k)}, y^{(k)})} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i}{d_i(x^{(k)}, y^{(k)})} \right)}, \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i b_i}{d_i(x^{(k)}, y^{(k)})} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i}{d_i(x^{(k)}, y^{(k)})} \right)} \right)$$

که در آن $d_i(x, y) = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$ می باشد.

یک مثال ساده برای این مسئله یافتن مکان مناسب برای ایجاد انبار در یک شهر است. در این مثال وزن نقاط، نشان دهنده میزان نیاز آن نقاط است. همچنین هزینه حمل نیازهای مشتریان از انبار به نقاط مختلف شهر $A_i = (a_i, b_i)$ متناسباً با فاصله مشتریان تا محل انبار می باشد. (x, y) مختصات محلی است که انبار در آن قرار گرفته است. هدف مینیمم کردن هزینه حمل و نقل کالاها از انبار به مشتریان می باشد.

اگر $d_i(x, y) = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$ فاصله اقلیدسی بین نقاط (x, y) و (a_i, b_i) باشد، مسئله به صورت زیر بیان می شود.

$$\min_x \sum_{i=1}^n w_i d_i(x, y)$$

۲- مسئله p - مرکز: ۱۰

مسئله ۱ - مرکز:

فرض کنید n نقطه A_i ، $i = 1, \dots, n$ در صفحه موجود باشند و w_i وزن متناظر با نقطه A_i باشد، اگر هدف یافتن نقطه X به قسمی باشد که فاصله وزنی X تا دورترین نقطه Y موجود در صفحه مینیمم شود آن گاه مسئله به صورت زیر بیان می شود.

^۹ Weiszfeld

^{۱۰} p - center

$$\min_{x \in X} \max_{A_i} \{w_i d(X, A_i)\}$$

این مسائل برای تعیین مکان یک مرکز به منظور حداقل کردن حداکثر فاصله این مرکز، تا نقطه ای که برای سرویس دادن به آن نقطه تقاضا تعیین شده است، استفاده می‌شوند. در واقع این گونه مسائل برای استقرار خدمات اورژانسی مانند آتش‌نشانی، خدمات آمبولانس و مراکز پلیس در جامعه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مسائل تعداد مراکز از قبل مشخص شده است. این مسائل به دو دسته تقسیم می‌شوند.

الف - مسئله p - مرکز محدب^{۱۱} که مساله را به مجموعه‌ای از مکان‌های کاندید برای استقرار مراکز محدود می‌کنند.

ب) - مسئله p - مرکز مطلق^{۱۲} که در آن مراکز می‌توانند در هر جایی از مکان مستقر شوند.

۳. مساله مکان یابی مراکز با ظرفیت نامحدود: $(UFLP)$ ^{۱۳}

این مسائل در دسته مسائل حداقل مجموع قرار می‌گیرند اما در این مسائل تابع هدف، هزینه ثابت را نیز شامل می‌شود. هزینه ثابت به مکانی بستگی دارد که مرکز در آن قرار می‌گیرد. در مسائل مکان یابی مراکز با ظرفیت نامحدود تعداد مراکزی که باید استقرار یابند از پیش مشخص شده نیست، اما به گونه‌ای معین می‌شوند که هزینه کل را مینیمم کنند. چون در این گونه از مسائل ظرفیت هر مرکز نامحدود در نظر گرفته می‌شود، تخصیص یک تقاضا به بیش از یک سرویس دهنده، هرگز مفید نخواهد بود.

۴. مساله مکان یابی مراکز با ظرفیت محدود $(CFLP)$ ^{۱۴}:

این مسائل شبیه به مسائل مکان یابی با ظرفیت نامحدود هستند با این تفاوت که در این گونه از مسائل ظرفیت هر کدام از مراکز محدود است. ممکن است در این مورد جواب بهینه به گونه‌ای پیدا

^{۱۱} P - center - convex

^{۱۲} P - center - absolute

^{۱۳} Location problems with unlimited capacity

^{۱۴} Location problems with limited capacity

شود که یک مشتری به بیش از یک سرویس دهنده، اختصاص داده شود. در واقع ممکن است بعد از تخصیص مشتری به یک مرکز و پس از برآوردن بخشی از تقاضای مشتری، ظرفیت مرکز به پایان برسد و برای برآوردن باقی مانده تقاضای مشتری مجبور به اختصاص آن به دیگر مراکز که هزینه بیشتری نیز دربر دارند، شویم. البته گاهی ممکن است با وجود اینکه اختصاص یک مشتری به یک مرکز ویژه کمترین هزینه را در بردارد، به دلیل اینکه ظرفیت آن مرکز توسط مشتریان دیگر پر شده است، مجبور به اختصاص کل تقاضای آن مشتری به مراکز دیگر شویم.

۵. مسائل تخصیص نمایی :

مساله‌ای را بیان می‌کند که n مرکز مانند n ماشین که بین آنها جریان برقرار است به گونه‌ای در n مکان قرار داده شوند که هزینه کل مینیمم شود. اگر ۴ ماشین داشته باشیم که بخواهیم مستقر کنیم، ۴ ترکیب ممکن وجود خواهد داشت. برای مسئله ۲۰ ماشین، ۲۰ جواب ممکن وجود دارد که در حدود 2×10^{18} ارزیابی نیاز خواهد داشت که این کار حتی برای کامپیوترهای پرسرعت امروزی دشوار است. از این رو این مسایل در دسته مسایل بسیار پیچیده قرار دارند و حل دقیق آنها بسیار مشکل و یا غیر ممکن است.

مسائل مکان یابی، هدفهای مختلفی را دربردارند. [۸] هدفها در شناسایی و اولویت‌بندی معیارهای تصمیم‌گیری در یک مساله مکان‌یابی و زیر معیارهای (محدودیت) آنها، اهمیت و نقش مهمی دارند [۷]. در یک تقسیم‌بندی درنزر (۱۹۹۵) ^{۱۵}، هدفهای مسائل مکان‌یابی با رویکرد برنامه ریزی ریاضی و برحسب انواع تابع هدف، به سه دسته تقسیم شده‌اند: [۹].

۱. اهداف کششی ^{۱۶} :

این هدف ها اشاره به نزدیکی هر چه بیشتر محل استقرار سرویس دهنده ها به مشتریان و کم کردن مسافت دارند که شامل قدیمی ترین مسائل مکان‌یابی می شوند. در واقع مسائلی که تابع

^{۱۵}Drenzer

^{۱۶}pull

هدف آنها به صورت مینیمم سازی است، هدفهای کششی دارند. مثال ملموس برای این مورد یافتن مکان مناسب برای ساخت کارگاه ها و فروشگاه ها است که در آن هدف مینیمم کردن فاصله این محل ها از نقاط تقاضا (سرویس گیرنده ها، مشتریان) است.

۲. اهداف فشاری^{۱۷}:

این هدفها مسائل مکان یابی مراکز نامطلوب را در بر می گیرند و از اوایل دهه ۱۹۷۰ بوجود آمدند. هدف در این مسائل، حداکثر کردن فاصله مراکز جدید از مراکز موجود است. مدل هایی که برای این نوع هدف ها ارائه شدند بعدها به مدل های مکان یابی مضر^{۱۸} معروف شدند. مثال ملموس برای این نوع از مسائل، یافتن مکان مناسب برای دفن زباله است که در آن، یکی از هدف ها بیشینه کردن فاصله این مکان از مناطق مسکونی است.

۳. اهداف متعادل^{۱۹}:

هدف هایی هستند که تلاش در متعادل ساختن مسافت بین مراکز و مشتریان دارند و هدف اصلی آنها دستیابی به برابری است. این هدفها بیشتر در تصمیم گیری های عمومی و جایی که هدف برقراری عدالت بین افراد است، کاربرد دارند. مثال ملموس برای این دسته از مسائل متعادل کردن حجم کاری مراکز پلیس و یا مراکز اورژانس است که سبب متعادل شدن ارائه خدمات به متقاضیان می شود.

تعریف ۱.۲.۱. هر تابع حقیقی مقدار که روی یک فضای برداری مانند R^n تعریف شود و در شرایط زیر صدق کند نرم نامیده می شود.

$$۱) \quad \|X\| \geq 0, \quad \forall X \in R^n$$

$$۲) \quad \|X\| = 0 \implies X = 0$$

^{۱۷}Push

^{۱۸}Noxious Location Models

^{۱۹}Balancing

$$۳) \quad \|X\| = \|-X\| \quad \forall X \in R^n$$

$$۴) \quad \|tX\| = |t| \|X\| \quad \forall X \in R^n, \forall t \in R^n$$

$$۵) \quad \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad \forall X, Y \in R^n$$

نرم L_p بردار X به ازای $p \geq 1$ در فضای برداری R^n به صورت زیر تعریف می گردد.

$$L_p(X) = \|X\|_{t_p} = [\sum_{i=1}^n |x_i^p|]^{1/p}$$

نرم های منهن ^{۲۰}، اقلیدسی ^{۲۱} و چبیشف ^{۲۲} حالات خاصی از نرم های L_p هستند که ترتیب با قرار دادن $p = 1$ ، $p = 2$ و $p \rightarrow \infty$ بدست می آیند.

۱.۲.۱ فاصله

در مسائل مکان یابی نماد فاصله بسیار مهم و اساسی است. فرض کنید دو موقعیت که آنها را با u و v نشان می دهیم وجود داشته باشند. فاصله بین این دو نقطه را با $d(u, v)$ نشان می دهیم. ویژگی های زیر را در مورد فاصله در فضای متریک داریم.

$$۱ - d(u, v) = d(v, u)$$

$$۲ - d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$$۳ - d(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v$$

$$۴ - d(u, v) = 0 \quad \implies \quad u = v$$

در این پایان نامه همه مسائل به جز الگوریتم MRC و روش مجموع مربعات که برای تعیین مرکز تلفن در مراکز مخابرات استفاده می شود، با نرم اقلیدسی در نظر گرفته شده است.

^{۲۰} Manhattan norm

^{۲۱} Euclidean norm

^{۲۲} Tehebycheff norm

۲.۲.۱ وزن

فاصله ها در تابع هدف می توانند دارای وزن های ^{۲۳} ثابت یا متغیر، یکسان یا مختلف باشند. وزن نقاط تقاضا (مشتریان) مشخص کننده میزان تقاضای آن نقاط می باشد. وزن نقاط می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد. در این پایان نامه وزن نقاط مثبت در نظر گرفته شده است. در مسائل شبکه ای، وزن یال می تواند نشان دهنده طول مسیر، زمان پیمودن یال و ارائه خدمات و مواردی از این قبیل باشد. همچنین وزن ها اهمیت جملات مختلف را در تابع هدف مسائل مکان یابی نشان می دهند.

۳.۲.۱ دوگان مسئله وبر

یک روش متفاوت برای پیدا کردن کمترین مجموع یا محل میانه ها حل دوگان ^{۲۴} مسئله است که اسکات ^{۲۵} در سال (۱۹۹۵) روی آن بحث کرده است و به صورت زیر می باشد.

$$\max_{u,v} D(u,v) = - \sum_i^n (a_i u_i + b_i v_i)$$

$$\sum_i^n u_i = 0$$

$$\sum_i^n v_i = 0$$

$$\sqrt{u_i^2 + v_i^2} \leq w_i$$

اولین بار حکیمی ^{۲۶} تابع هدف مسئله P میانه را به دو صورت کمترین مجموع و کمینه بیشینه مطرح کرد. [۱۸] او همچنین مطالعاتی بر روی مسائل مکان یابی روی شبکه انجام داد. همچنین

^{۲۳} Demand

^{۲۴} Dual

^{۲۵} Scott

^{۲۶} Hakimi

ارکات^{۲۷} و بوزکایا^{۲۸} مسئله برنامه ریزی صحیح را که ریول^{۲۹} و سوین^{۳۰} در سال ۱۹۷۰ بیان کردند را بسط دادند. این فرمول بندی اجازه می داد که مجموعه مکان هایی که برای سرویس دادن، کاندید می شوند از مجموعه ی نقاط تقاضا متمایز نباشند. به عبارت دیگر یک سرویس دهنده می تواند یکی از نقاط تقاضا نیز باشد یعنی هم به خود و هم به نقاط تقاضای دیگر سرویس دهد. در بسیاری از تحقیقات نیز این دو مجموعه یکسان فرض شده است.

اگر w_i وزن i امین نقطه تقاضا و p تعداد سرویس دهنده ها، همچنین d_{ij} فاصله بین نقطه تقاضای i ام و نقطه تقاضای j ام باشد. مسئله برنامه ریزی صحیح به صورت زیر بیان می شود:

$$\min Z = \sum_i \sum_j w_i d_{ij} x_{ij}$$

s.t

$$\sum_j x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}$$

$$\sum_j x_{jj} = p$$

$$x_{ij} = \{0, 1\}$$

$$x_{jj} = \{0, 1\}$$

در این مسئله اگر نقطه i به سرویس دهنده j ام اختصاص پیدا کند x_{ij} مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار ۰ می گیرد، همچنین اگر یک نقطه تقاضا سرویس دهنده نیز باشد به x_{jj} مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار ۰ اختصاص می یابد.

محدودیت $\sum_j x_{ij} = 1$ به این معنی است که یک مشتری فقط توسط یک سرویس دهنده،

سرویس دهی می شود.

^{۲۷}Erkut

^{۲۸}Bozkaya

^{۲۹}Revelle

^{۳۰}Swain

چون در این دسته از مسائل فرض کردیم که هر سرویس دهنده به خودش نیز سرویس دهی داشته باشد محدودیت $\sum_j x_{jj} = p$ را خواهیم داشت.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه X را در فضای E^n محدب^{۳۱} می نامیم هرگاه اگر $x_1, x_2 \in X$ آنگاه به ازای هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$.

$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ ترکیب محدب x_1 و x_2 نامیده می شود. اگر $0 < \lambda < 1$ آنگاه این ترکیب را ترکیب محدب اکید x_1 و x_2 نامند.

۳.۱ دسته بندی

روش های بسیاری برای حل مسائل مکان یابی وجود دارد اما این روش ها وقتی تعداد داده ها زیاد است یعنی مکان یابی در مقیاس بزرگ انجام می شود دیگر پاسخگو نیست. در ساختار طراحی مدل های شهری، هر خانه (اقامتگاه خصوصی) می تواند یک نقطه تقاضا برای مسئله مکان یابی باشد. بنابراین میلیون ها نقطه تقاضا می تواند وجود داشته باشد.

اساس و پایه مدل های مکان یابی LA ^{۳۲}، p - میانه^{۳۳} است. [۱۰] در سی سال اخیر مدل p - میانه بیشتر روی طراحی مدل و روش های حل مسائل p - میانه و تکنیک های حل آن از منظر کاربردی متمرکز شده است. در بیشتر صنایع اطلاعات مشتریان معمولاً خیلی جزئی است و اغلب تعداد مشتری ها نیز زیاد است بنابراین مسئله p میانه متناظر با آن، بزرگتر و سخت تر می شود. روش های جدیدی برای حل این گونه مسائل ابداع شده که به روش های ابتکاری^{۳۴} معروف و حل مسئله را آسانتر نموده است.

^{۳۱}Convex set

^{۳۲}Location Allocation

^{۳۳}P-median problem

^{۳۴}Heuristic

یک شیوه معمول در طراحی مدل و مدل کردن مسائل مکان یابی و مسائل مربوط به آن دسته بندی (جمع بندی)^{۳۵} نقاط تقاضا و حل مسئله، با استفاده از مجموعه داده های دسته بندی شده است. دسته بندی (جمع بندی) نقاط تقاضا یک روش جالب برای حل مسائل در مقیاس بزرگ است. با دسته بندی نقاط تقاضا اندازه مسئله کوچکتر شده و بنابر این حل مسئله آسانتر می شود، همچنین دسترسی به نقاط تقاضای دسته بندی شده راحت تر است. برای نمایش یک گروه دسته بندی شده از مرکز ثقل این گروه یا نماینده این دسته استفاده می کنیم .

هنوز پاسخ کلی برای این سوال که چه تعداد دسته (گروه) برای جمع بندی (دسته بندی) نقاط تقاضا در یک مسئله مکان یابی کافی است وجود ندارد.

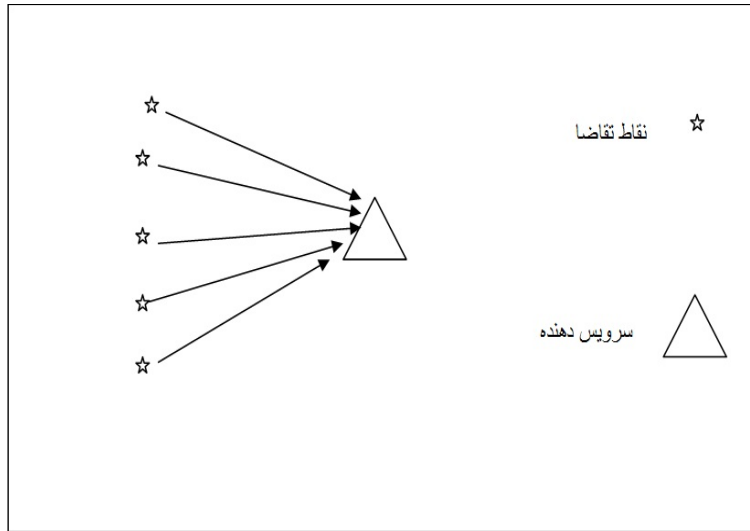
دسته بندی نقاط تقاضا باعث کاهش عوامل زیر میشود: [۳]

- ۱- هزینه جمع آوری اطلاعات
 - ۲- هزینه مدل کردن (طراحی مدل)
 - ۳- هزینه محاسبات
 - ۴- نگرانی از روابط پنهانی که بین داده ها وجود دارد و تاثیراتی که داده ها بر روی هم می گذارند.
 - ۵- عدم قطعیت آماری اطلاعات
- چهار مورد اول بدیهی است ، مورد ۵ به این دلیل اتفاق می افتد که با دسته بندی اطلاعات ، داده ها با هم مخلوط شده و باعث بزرگتر شدن میانگین و کوچکتر شدن انحراف استاندارد می شوند و بنابراین پراکندگی داده ها کمتر و اطلاعات آماری قطعی تر می شوند.

در این قسمت روش دسته بندی نقاط تقاضا و روند کاهش اطلاعات را به کمک شکل بیان می

کنیم [۵].

شکل (۱.۱) را در نظر بگیرید. در این شکل ۵ نقطه تقاضا توسط یک سرویس دهنده، سرویس دهی می شوند. در این حالت حاصلضرب وزن هر نقطه تقاضا در فاصله این نقطه تا سرویس دهنده (فاصله وزنی) نشان دهنده هزینه ای است که هر نقطه تقاضا برای سرویس گرفتن می پردازد.

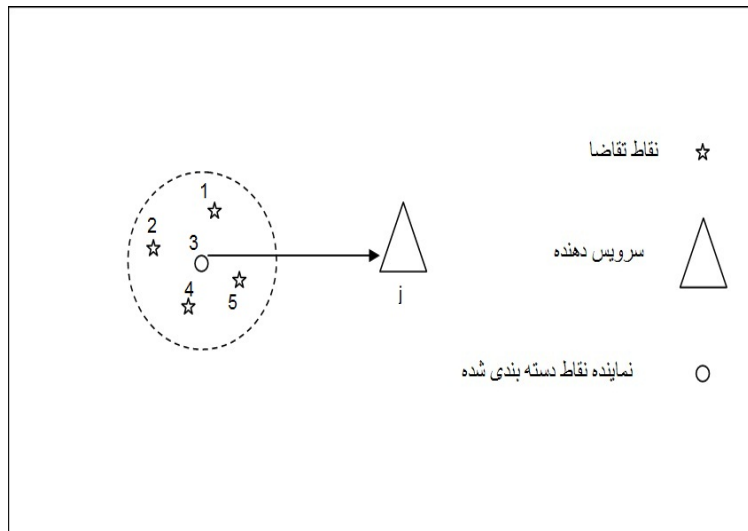


شکل ۱.۱: داده های تقاضای اولیه (دسته بندی نشده)

فاصله های وزنی، نقاط اولیه x_k ، $k = 1, 2, \dots, 5$ تا محل سرویس دهنده j ام مساوی با $\sum_{k=1}^5 w_k d_{kj}$ می باشد که در آن w_k میزان تقاضای نقطه k ام و d_{kj} کمترین فاصله اقلیدسی نقطه تقاضای k ام از سرویس دهنده j ام می باشد.

در شکل (۲.۱) نقاط تقاضا دسته بندی شده اند و در این میان یک گره (گره ۳) از بین ۵ گره به عنوان نماینده انتخاب شده است. در این حالت فاصله وزنی هر یک از این ۵ گره تا سرویس دهنده j ام برابر $a_j d_{3j}$ در نظر گرفته می شود، که در آن $a_j = \sum_{k=1}^5 w_k$ می باشد.

در نتیجه با دسته بندی اطلاعات مقدار خطا برابر با $\sum_k w_k d_{kj} - d_{3j} \sum_k w_k$ بدست می آید که این مقدار به دسته خاصی که مورد بررسی قرار گرفته و نماینده آن دسته بستگی دارد.



شکل ۲.۱: داده های تقاضای دسته بندی شده

مسئله تعیین دفتر مالیاتی که بوسیله دومیچ^{۳۶} (۱۹۹۱) مطرح شد، یک مثال خوب از چگونگی روش دسته بندی است که می تواند برای مدل کردن و حل مسائل مکان یابی در مقیاس بزرگ به کار برده شود. مسئله شامل تعیین دفاتر محلی مالیاتی برای سرویس مرکزی است. دفاتر مالیاتی باید در محلی تعیین شوند که هزینه جابجایی کارکنان و مشتریان کمتر شود. هر مکان (محل) را به عنوان نقطه تقاضا مشخص کردند. وزن هر محل متناسب با سطح فعالیت پیش بینی شده آن تعیین می شود. این وزن به تعداد نقاط تقاضا در منطقه و سایر عوامل دیگر نیز وابسته است. این شرط که هر مشتری به دفتر مالیاتی که نزدیکتر است مراجعه می کند نیز در مسئله وجود دارد. هدف تعیین دفاتری است که مجموع هزینه های سرویس دهنده ها، بعلاوه هزینه جابجایی مینیمم شود. این مسئله با حل یک دنباله از مسائل p میانه حل شد.

مسئله دیگری که در این زمینه مطرح شد، مسئله تعیین محل سرویس دهنده برای سرویس دهی به بچه های بین ۱۴ - ۰ در شهر ادمونتون^{۳۷} و آلبرتا^{۳۸} و کانادا^{۳۹} است. [۲۰] این مثال توسط

^{۳۶}Domich^{۳۷}Edmonton^{۳۸}Alberta^{۳۹}Canada

هودجسن و هی کو^{۴۰} در سال ۲۰۰۳ بیان و حل شد. در این مسئله آنها ۱۸۲۹۳ منطقه پستی برای داده های موجود که از سر شماری آماری در سال ۱۹۹۷ بدست آمده بود، در نظر گرفتند. در این مثال بچه ها به طور نرمال و یکنواخت در منطقه توزیع نشده اند، اما به طور متوسط در هر بلوک شهری در حدود ۷ بچه وجود داشت. این مثال با ۷۲۲ دسته از بچه های بین ۱۴ - ۰ سال حل شد.

^{۴۰}Hewko

فصل ۲

تکنیک دسته بندی و خطاهای حاصل از آن

۱.۲ مقدمه

وقتی هدف مینیمم کردن متوسط فاصله ای است که متقاضیان باید طی کنند تا به نزدیکترین سرویس دهنده برسند، مسئله p میانه یک ابزار قوی در بر آورده کردن این هدف است. حتی با روش های تخصصی ممکن است حل مسئله p میانه در مقیاس بزرگ و در زمان مشخص، مخصوصاً در کامپیوتر های شخصی مشکل باشد. در نتیجه اغلب محققان برای کاهش اندازه مسئله و محاسبات آن، نقاط تقاضا را دسته بندی می کنند. اما دسته بندی نقاط تقاضا سبب از بین رفتن اطلاعات و آن نیز به نوبه خود باعث ایجاد خطا در تعیین موقعیت سرویس دهنده ها می شود که همین امر موجب بروز خطا در حل مسئله می شود. هیلسمن و رودا (۱۹۷۸) سه نوع خطای منبع A و B و C که از جمع بندی و دسته بندی نقاط تقاضا نتیجه می شود، شناسایی کردند. در این فصل به بیان این سه نوع خطا می پردازیم.

۱.۱.۲ مسئله دسته بندی [۱۴]

در ابتدا یک لیست از نماد هایی که در این فصل به کار می رود را به طور مختصر بیان می کنیم.

$$p_m = (a_m, b_m) \quad m = 1, 2, \dots, M \quad \text{نقاط تقاضا}$$

$$X_n = (x_n, y_n) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad \text{سرویس دهنده}$$

فاصله بین دو نقطه u و v را با $d(u, v)$ نشان می دهیم.

فاصله بین نقطه تقاضا m و سرویس دهنده n را با $d_m(X_n)$ نشان می دهیم.

$X = (X_1, \dots, X_N)$ یک N میانه یا یک N مرکز است.

فاصله بین نقطه تقاضا m و نزدیکترین سرویس دهنده در X را با $D_m(x)$ نشان می دهیم.

P'_m نقطه تقاضای دسته بندی شده می باشد که جایگزین P_m شده است.

اگر $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ یک بردار از نقاط تقاضا باشد بردار $P'_m = (p'_1, p'_2, \dots, p'_m)$ یک بردار از

نقاط تقاضای دسته بندی شده است. بنابر این اگر مدل مکان یابی اصلی (اولیه) را با $f(x : p)$ نشان دهیم، مدل مکان یابی تقریبی (دسته بندی شده) را با $f(x : p')$ نشان می دهیم. یک روش موثر جایگزین کردن یک دسته از نقاط تقاضا $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ با تعداد نقاط کمتر $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ از نقاط تقاضا می باشد این جایگزینی با چند قانون زیر بیان می شود.

اولاً "هر نقطه تقاضا P_m تنها در یک دسته قرار می گیرد و به آن p'_m می گوئیم .

ثانیاً "هر نقطه تقاضا P_m در نزدیکترین دسته به آن نقطه تقاضا دسته بندی می شود .

ثالثاً "نقطه تقاضا در j امین مجموعه بوسیله z_j به عنوان نماینده دسته جایگزین می شود.

بنابر این باید روی سه مورد زیر تصمیم بگیریم:

D_1 تعداد نقاط تقاضای دسته بندی شده

D_2 محل نماینده دسته ها در هر دسته از نقاط تقاضا

D_3 قانون جایگزینی

در انتخاب دنباله D_1, D_2, D_3 با مثال زیر نشان می دهیم که چگونه وزن نقاط تقاضا به ساختار

مسئله وابسته است. برای مثال فرض کنید $f(x : p)$ یک مدل مکان یابی ۱ - میانه باشد که به شکل

زیر تعریف شده است.

$$f(x : p) = w_1 d(x : p_1) + w_2 d(x : p_2) + w_3 d(x : p_3) + w_4 d(x : p_4)$$

اگر در یک مسئله ۱ - میانه $\{p_1, p_2\}$ با z_1 و $\{p_3, p_4\}$ با z_2 جایگزین شود، تابع ۱ - میانه تقریبی (دسته

بندی شده)، $f(x : p')$ ، جایگزین $f(x : p)$ می گردد. بنابر این روابط زیر را داریم.

$$f(x : p') = w_1 d(x, p_1) + w_2 d(x, p_2) + w_3 d(x, p_3) + w_4 d(x, p_4)$$

$$= (w_1 + w_2) d(x, z_1) + (w_3 + w_4) d(x, z_2)$$

$$= w'_1 d(x, z_1) + w'_2 d(x, z_2)$$

بنابر این z_1 و z_2 به ترتیب دارای وزن های $w'_1 = w_1 + w_2$ و $w'_4 = w_3 + w_4$ می باشند.
مشابهها" اگر $g(x : p)$ یک مدل مکان یابی ۱- مرکز باشد که به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$g(x : p) = \max\{w_1 d(x, p_1), w_2 d(x, p_2), w_3 d(x, p_3), w_4 d(x, p_4)\}$$

اگر ما قانون جایگزینی مشابهی را در مورد آن به کار ببریم آنگاه تابع تقریبی (دسته بندی شده) $g(x : p')$ جایگزین تابع $g(x : p)$ می شود و داریم:

$$g(x : p') = \max\{w''_1 d(x, z_1), w''_4 d(x, z_2)\}$$

که در آن $w''_1 = \max\{w_1, w_2\}$ و $w''_4 = \max\{w_3, w_4\}$ می باشد.

از دو مثال بالا نتیجه می شود که چگونه وزن نقاط تقاضا با ساختار مسئله رابطه دارد.

۲.۱.۲ خطای دسته بندی [۱۴]

نتیجه دسته بندی نقاط تقاضا جایگزین کردن مدل مکان یابی اصلی $f(x : p)$ با یک مدل مکان یابی تقریبی $f(x : p')$ می باشد. این جایگزینی می تواند سبب ایجاد خطا در انتخاب X شود. روش های متفاوتی برای اندازه گیری این خطا وجود دارد. اگر خطای دسته بندی نقاط تقاضا را در هر مدل مکان یابی با $e(x)$ نشان دهیم، خطا را روی X به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$e(x) = f(x : p) - f(x : p')$$

فرض کنید که $f(x : p) = \sum_{m=1}^M w_m D(x : p_m)$ مدل مکانیابی p میانه باشد. برای هر نقطه

تقاضای m ما می توانیم خطای بدست آمده از X را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$e_m(x) = w_m D(x : p_m) - w_m D(x : p'_m) = w_m (D(x : p_m) - D(x : p'_m))$$

این خطا به وزن نقاط تقاضا و فاصله نقاط تقاضا تا نماینده دسته وابسته است.

همچنین خطای کل را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$e(x) = \sum_{m=1}^M e_m(x) = f(x : p) - f(x : p')$$

خطاهای نقطه تقاضای m در مسائل مکان یابی می تواند مثبت یا منفی، مخالف صفر یا مساوی با صفر باشد. همین امر سبب تولید نوع دیگری از خطا به نام لغو کردن خود (خود کنسل شده) ^۱ می شود. آن چه در تحلیل مسئله p میانه مهم است این است که $e(x)$ به سمت صفر میل کند. در تحلیل عددی نقاط تقاضا در مسائل مکان یابی بیشتر از اندازه خطا که آن را با $ae(x)$ نشان می دهند استفاده می شود، که به صورت زیر بدست می آید:

$$ae(x) = |e(x)|$$

دقت کنید اگر اندازه خطا کوچک باشد (در مقدار نزدیک به صفر باشد) و یا اینکه $f(x : p)$ و $f(x : p')$ تقریباً برابر باشند. مقدار کم خطا به این معنی نیست که $f(x : p')$ تقریب خوبی برای $f(x : p)$ است زیرا $e(x)$ می تواند منفی باشد. در نتیجه با این فرض که $f(x : p)$ همیشه مثبت است ما خطای نسبی را به صورت زیر تعریف می کنیم و با $rel(x)$ نشان می دهیم.

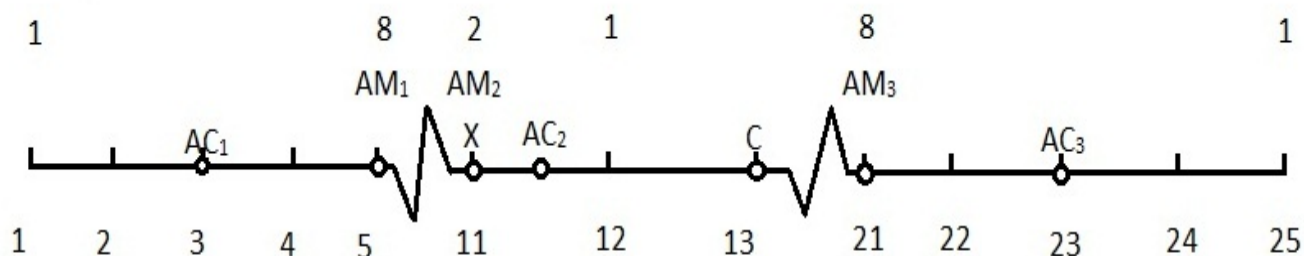
$$rel(x) = 100 \cdot \frac{ae(x)}{f(x : p)}$$

نوع دیگر خطاهای موجود تعیین بیشینه اندازه خطا است، که در آن R نشان دهنده منطقه ای است که همه نقاط تقاضا در آن قرار دارند، و به صورت زیر بدست می آید.

$$Mae = \text{Max}\{ae(x) : x \in R\}$$

حال با یک مثال عددی تعاریف و مفاهیم بالا را شرح می دهیم. شکل (۱.۲) که تحلیل یک مسئله دسته بندی مکان یابی یک بعدی است را در نظر بگیرید. در این مثال رفتار ۲ مسئله، ۱- میانه و ۱- مرکز را بررسی می کنیم.

^۱Self- Canceling



شکل ۱.۲: داده های تقاضای دسته بندی شده

مشتری ها تنها در موقعیت های ۱ و ۵ و ۱۱ و ۱۲ و ۲۱ و ۲۵ قرار دارند اعداد بالای خط نشان دهنده تعداد مشتریان (وزن نقاط) است. نقاط X و C به ترتیب نقاط بهینه برای میانه شدن در مسائل ۱ - میانه و ۱ - مرکز هستند. در نتیجه تابع هدف مسئله ۱ - میانه برای کل داده ها و X به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = 1 \times 10 + 8 \times 6 + 1 \times 1 + 8 \times 10 + 1 \times 14 = 153$$

طریقه بدست آوردن تابع هدف به صورت زیر است، ۱ مشتری در موقعیت ۱ قرار دارد، بنابراین فاصله ی این مشتری از نقطه بهین X ۱۰، واحد است. ۸ مشتری در موقعیت ۵ قرار دارند، در نتیجه ۶ واحد از نقطه بهینه X فاصله دارند و به همین ترتیب ۱ مشتری که در موقعیت ۲۵ می باشد، ۱۴ واحد از نقطه بهینه X فاصله دارد. مجموع این مقادیر تابع هدف را مشخص می کند. به طور مشابه می توان تابع هدف مسئله ۱ - مرکز که روی داده های اولیه و با نقطه بهینه $C = 13$ مطرح شده است را محاسبه نمود.

$$g(c) = \max\{1 \times 12, 8 \times 8, 2 \times 2, 1 \times 1, 8 \times 8, 1 \times 12\} = 64$$

مجموعه نقاط $\{AM_1, AM_2, AM_3\}$ و $\{AC_1, AC_2, AC_3\}$ دو دسته بندی متفاوت از داده های مسئله کلی را نمایش می دهد. یعنی می خواهیم نقاط این مجموعه ها را جایگزین نقاط موجود

کنیم. ابتدا مجموعه دسته بندی $\{AM_1, AM_2, AM_3\} = \{5, 11, 21\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که هر نقطه تقاضا با نزدیکترین عضو از این مجموعه جایگزین شود. بنابراین نقاط تقاضا ۱ و ۵ با AM_1 و ۱۱ و ۱۲ با AM_2 و ۲۱ و ۲۵ با AM_3 جایگزین می شود. اگر ما این سه نقطه دسته بندی شده را برای نمایش مسئله ۱ - میانه به کار بریم، وزن های ۹ و ۳ و ۹ به ترتیب به این نقاط اختصاص می یابد. (مجموع وزن های نقاط ۱ و ۵ برابر با ۹ و نقاط ۱۱ و ۱۲ برابر با ۳ و نقاط ۲۱ و ۲۵ برابر با ۹ است.) بنابراین مقدار تابع هدف مسئله ۱ - میانه تقریبی (دسته بندی شده) برای این سه نقطه (نماینده) روی X برابر با مقدار زیر می باشد.

$$f'(x) = 9 \times 6 + 3 \times 0 + 9 \times 10 = 144$$

بنابر این اندازه خطا در مجموعه دسته بندی شده $\{AM_1, AM_2, AM_3\}$ به صورت زیر بدست می آید.

$$ae(x) = |f(x : p) - f(x : p')| = |153 - 144| = 9$$

و درصد خطای نسبی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$be\ rel(x) = 100 \times \frac{9}{153} = 5/9$$

حال فرض کنید که مجموعه نقاط $\{AC_1, AC_2, AC_3\} = \{3, 11/5, 23\}$ برای دسته بندی مجموعه مسئله ۱ - میانه به جای $\{AM_1, AM_2, AM_3\}$ استفاده شود. در این مورد نیز فرض می کنیم که هر نقطه تقاضا با نزدیکترین عضو از این مجموعه جایگزین شود. بنابراین وزن ها برای نقاط AC_1 و AC_2 و AC_3 به ترتیب ۹ و ۳ و ۹ می باشد. مقدار تابع هدف متناظر روی این سه نقطه تقاضای دسته بندی شده (نماینده های سه دسته از نقاط تقاضا) با سرویس دهنده های جدید روی X برابر با $181/5$ می باشد.

$$f(x) = 9 \times 8 + 3 \times 0.5 + 9 \times 12 = 181/5$$

بنابراین اندازه خطا برای این طرح خاص دسته بندی برابر با مقدار زیر می باشد.

$$ae(x) = 153 - 181/5 = 28.5$$

و درصد خطای نسبی آن برابر با مقدار زیر است.

$$rel(x) = 100 \cdot \frac{28.5}{153} = 18.6$$

به طور مشابه اگر همین مثال را برای مسئله ۱ - مرکز حل کنیم. درحالتی که از دسته بندی

$\{AM_1, AM_2, AM_3\}$ استفاده شود داریم.

$$g'(c) = \max\{9 \times 8, 3 \times 2, 9 \times 8\} = 72$$

$$ae(c) = |64 - 72| = 8$$

$$rel(c) = 100 \cdot \frac{8}{64} = 12.5$$

و نیز اگر مثال بالا را برای حالتی که دسته $\{AC_1, AC_2, AC_3\}$ به کار برده می شود، حل کنیم خواهیم داشت.

$$g'(c) = \max\{9 \times 10, 3 \times 1/5, 9 \times 10\} = 90$$

$$ae(c) = |64 - 90| = 26$$

$$rel(c) = 100 \cdot \frac{26}{64} = 40.62$$

بنابراین برای حل یک مسئله وقتی یک طرح دسته بندی انتخاب می شود تابع هدف، متناظر

با آن طرح حل تغییر می کند. دقت داشته باشید که وقتی از دسته $\{AM_1, AM_2, AM_3\}$ استفاده

کردیم نماینده ها متناظر با بیشترین نقاط تقاضا هستند. در صورتی که در دسته دوم یعنی

$\{AC_1, AC_2, AC_3\}$ چنین خاصیتی وجود ندارد. بنابراین، این حقیقت که مقدار خطا در دسته بندی اول از دسته بندی دوم کمتر باشد دور از تصور نیست.

در یک جمع بندی مقادیر مختلف خطا را با نمادهای آن در زیر آوردیم:

$$e(x) = e_1(x) + \dots + e_m(x) = f(x : p) - f(x : p') \quad \text{خطای کل برای یک مدل مکان یابی } p \text{ میانه}$$

$$ae(x) = |e(x)| = |f(x : p) - f(x : p')| \quad \text{اندازه خطا}$$

$$rel(x) = 100 \cdot \frac{ae(x)}{f(x : p)} \quad \text{درصد خطای نسبی}$$

$$Mae = \text{Max}\{ae(x) : x\} \quad \text{ماکسیمم اندازه خطا}$$

$$eb(x) \quad \text{کران خطا که یک کران بالا روی ماکسیمم اندازه خطا است}$$

$$e_m(x) = w_m D(x : p_m) - w_m D(x : p'_m) \quad \text{خطای نقطه تقاضای } m \text{ برای مدل } p \text{ میانه}$$

همان طور که گفتیم وقتی P_m (موقعیت نقطه تقاضای m) در $f(x : p)$ با P'_m جایگزین می شود ما تابع تقریبی $f(x : p')$ را بدست می آوریم.

فرانسیس و لاوو (۱۹۹۲) نشان دادند که اگر فاصله ی بین p_m و p'_m را با d نشان دهیم و M تعداد نقاط تقاضا باشد، همچنین w_m نشانگر وزن نقاط تقاضا باشد. برای مسئله ۱ - میانه رابطه زیر را در مورد اندازه خطا داریم.

$$ae(x) \leq \sum_{m=1}^M w_m d(p_m, p'_m)$$

بنابر این اگر $z = \{z_1, \dots, z_q\}$ یک مجموعه از نماینده های نقاط دسته بندی باشد و p'_m نزدیکترین نقطه در z به p_m باشد داریم:

$$ae(x) \leq \sum_{m=1}^M w_m D(z, p_m)$$

سمت راست نا مساوی بالا کران خطا یا تابع کران خطا است که با $eb(z)$ نشان می دهیم.

۲.۲ کران خطای دسته بندی در مسائل مکان یابی

هر یک از محققان با روش های متفاوتی با مسئله خطا در مسائل مکان یابی برخورد کردند. هیلسمن^۲ و رودا^۳ در سال (۱۹۹۵) با طبقه بندی مسائل p میانه خطاهای دسته بندی نقاط تقاضا را به سه دسته A و B و C تقسیم کردند. فرانسیس^۴ و لاوو^۵ به جای برخورد روی انواع منحصر به فرد خطا، خطاها را با هم ترکیب کرده و روش هایی برای کم کردن خطای کلی بدست آوردند.

فرانسیس و لاوو در سال (۱۹۹۲)، همچنین فرانسیس و لاوو و رایکو (۱۹۹۶)، اندرسون^۶ (۱۹۹۸) و فرانسیس (۱۹۹۹) به طراحی مناطق دسته بندی پرداختند. هدف آنها در این فرآیند ساختن نواحی بود که دارای کران خطای کمتری است. اما روش های آنها به تعیین کران خطا در مناطق مستطیلی که بعضی از آن ها خیلی بلند و باریک بود محدود شد.

براساس کاری که فرانسیس و لاوو در سال (۱۹۹۲) روی مسئله p میانه انجام دادند یک کران خطا از دسته بندی نقاط تقاضا برای مسائل p میانه به صورت رابطه زیر بدست آمد، [۲۳] که در آن w_i وزن و p_i موقعیت i امین نقطه تقاضا و p'_i موقعیت نزدیکترین نماینده نقاط تقاضای دسته بندی شده به i امین نقطه است. به همین ترتیب $d(p_i, p'_i)$ فاصله بین دو موقعیت p_i و p'_i را نشان می دهد.

$$\sum_i \{w_i d(p_i, p'_i)\}$$

بر اساس رابطه بالا مقدار کران دسته بندی شده به دو عامل نحوه توزیع نقاط تقاضا و شیوه دسته بندی که ما به کار می بریم، وابسته است.

^۲Hillsman

^۳Rhoda

^۴Francis

^۵Lowe

^۶Andersson

با توجه به آن چه در قبل بیان شد، کران خطا که آن را با eb نشان دادیم به صورت زیر بیان می شود.

$$|f(x : p) - f(x : p')| \leq eb \quad \forall x$$

این رابطه تضمین می کند که قدر مطلق (اندازه) اختلاف مقادیر تابع هدف مسئله مکان یابی اولیه و تابع هدف مسئله مکان یابی تقریبی از eb تجاوز نمی کند. [۱۴] بنابراین مقدار eb به ساختار مسئله اصلی و بردار p' که موقعیت نماینده نقاط تقاضای دسته بندی شده است وابسته است. در حقیقت روشهای ابتکاری با انتخاب مناسب p' تابع eb را مینیمم می کند. همچنین این کران خطا می تواند با تنظیم تعداد نقاط دسته بندی شده برای کنترل خطا استفاده شود.

فرض کنید $x^*(x')$ بردار موقعیت های بهینه سرویس دهنده ها برای مدل $f(x : p)(f(x : p'))$ باشد (گاهی اوقات ما فرض می کنیم که پاسخ بهینه برای حل مسئله را داریم) دو عبارت زیر را در نظر بگیرید.

$$|f(x^* : p) - f(x' : p')|$$

$$|f(x^* : p) - f(x' : p)|$$

اولین عبارت، اختلاف بین مقادیر تابع هدف بهینه OFV^y با استفاده از موقعیت های بهینه برای سرویس دهنده ها وقتی که مجموعه نقاط تقاضای اولیه (اصلی) را سرویس دهی می کند و تابع هدف بهینه با استفاده از موقعیت های بهینه برای سرویس دهنده ها وقتی مجموعه نقاط تقاضای دسته بندی شده را سرویس دهی می کند، نشان می دهد.

دومین عبارت، اختلاف بین مقادیر تابع هدف بهینه با استفاده از موقعیت های بهینه برای سرویس دهنده ها وقتی که مجموعه نقاط تقاضا اولیه (اصلی) را سرویس دهی می کند و تابع هدف بهینه با

^y Optimal objective function value

استفاده از موقعیت بهینه سرویس دهنده ها برای مسائل دسته بندی وقتی این موقعیت ها مجموعه نقاط تقاضای اولیه را سرویس دهی می کند، را نشان می دهد.

جوفریون [^](۱۹۷۷) رابطه زیر را نشان داد .

$$|f(x^* : p) - f(x' : p')| \leq eb$$

$$|f(x' : p) - f(x^* : p)| \leq 2eb$$

توجه کنید که کران $2eb$ در معادله بالا را برای هر بردار دسته بندی شده p' قبل از اینکه مدل دسته بندی شده را برای بهینه کردن و بدست آوردن x' حل کنیم می توان بدست آورد.

$$|f(x^* : p) - f(x' : p')| \leq eb$$

$$-eb \leq f(x^* : p) - f(x' : p') \leq eb$$

با در نظر گرفتن نامساوی سمت چپ داریم :

$$-f(x^* : p) \leq eb - f(x' : p')$$

به طرفین تساوی جمله $f(x' : p)$ را اضافه می کنیم، در نتیجه داریم :

$$-f(x^* : p) + f(x' : p) \leq eb + f(x' : p) - f(x' : p') \leq eb + eb \leq 2eb$$

۳.۲ انواع خطاهای دسته بندی

هیلسمن و رودا از جمله اولین کسانی بودند که روی طبقه بندی و اندازه گیری خطای دسته بندی در مسائل p میانه مطالعه کردند در این راه محققان منابع خطای دسته بندی را به سه دسته، خطای منبع A و B و C طبقه بندی کردند (در ادامه این بخش این سه منبع خطا را معرفی می کنیم) و این سه منبع خطا را در سه سیستم فضایی، شش ضلعی، مربع و مثلث اندازه گرفتند [۱۹].

فرض کنیم که نقاط تقاضا به طور یکنواخت روی یک صفحه توزیع شده اند محققان ابتدا نقاط تقاضا را در چند ضلعی (شش ضلعی، مربع، مثلث) دسته بندی، سپس محل سرویس دهنده ها را روی آن مشخص نمودند. مطالعات عددی آنها نشان داد که وقتی تعداد دسته ها کمتر باشد خطای دسته بندی بیشتر می شود.

کارنت^۹ و اسچلینگ^{۱۰} جزو اولین کسانی بودند که روی حذف خطای دسته بندی مطالعه کردند مطالعات آنها روی حذف منابع خطای A و B متمرکز شد. آن ها روی مجموعه داده های حقیقی با ۶۸۱ نقطه تقاضا کار کردند و آن ها را به ۳۰ و ۷۰ دسته، دسته بندی و مسئله p میانه را به ترتیب برای $p = 5, 7, 10$ حل کردند. [۵] نتایج آزمایشات آنها نشان داد که منابع خطای A و B می تواند محدود شود با وجودی که خطای منبع C هنوز باقی مانده است.

دسته بندی نقاط تقاضا در مسائل p میانه بوسیله محققان دیگر مثل کاسیلاس (۱۹۸۷)^{۱۱} و هود

جسن^{۱۲} و نیومن^{۱۳} (۱۹۹۳)، بالوو (۱۹۹۴)^{۱۴}، [۲] هودجسن (۱۹۹۷)، پلاستریا^{۱۵} (۲۰۰۱) [۲۵].

^۹Current

^{۱۰}Schilling

^{۱۱}Casillas

^{۱۲}Hodgson

^{۱۳}Neuman

^{۱۴}Ballou

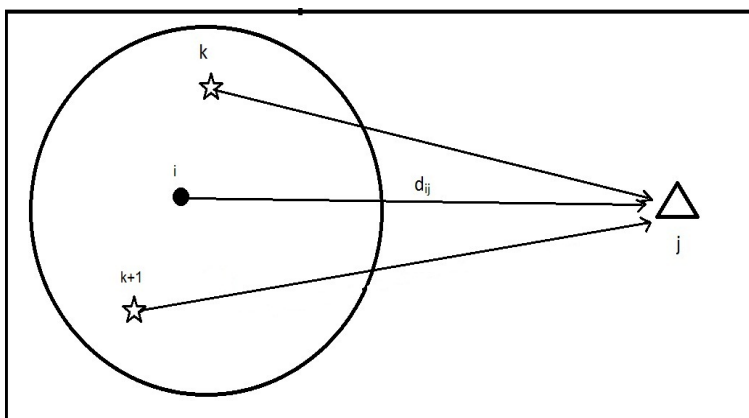
^{۱۵}Plastria

ارکات^{۱۶} و بوزکایا^{۱۷} (۱۹۹۹) مطالعه شد. فرانسویس در سال (۲۰۰۹) از متون و تحقیقات گذشته برای تحلیل خطای دسته بندی در مسئله p میانه استفاده کرد و تحقیقات حرفه ای تری در این زمینه انجام داد [۱۳].

روش های دسته بندی ابتکاری برای مجموعه اطلاعات داده شده پیشنهاد و سپس خطای دسته بندی متناظر با آن برآورد شد. کران خطا که در تحلیل مقدار خطا بدست آمده است عامل مهمی در ارزیابی و سنجش شیوه های دسته بندی، که نوعاً "هدف آنها کاهش خطای دسته بندی است، می باشد.

۴.۲ منابع خطای A, B, C [۵]

محققان خطاهایی که از دسته بندی و جمع بندی داده ها در مسئله p میانه بدست می آید را در سه نوع طبقه بندی می کنند.



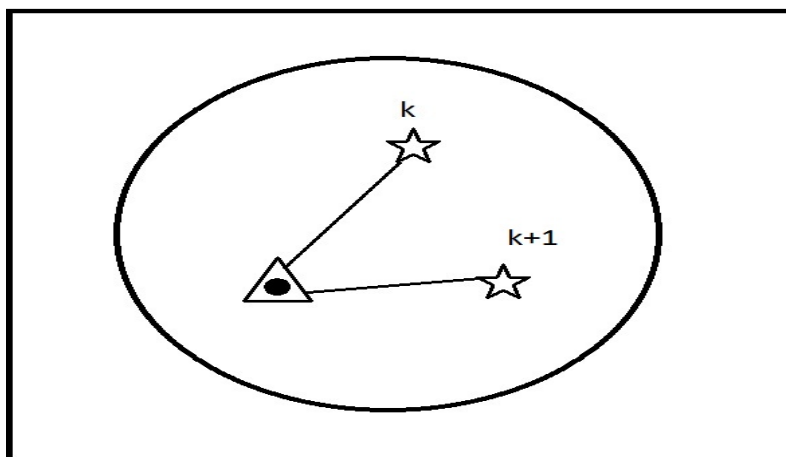
شکل ۲.۲: دسته بندی داده ها برای شرح خطای منبع A

خطای منبع A که تاثیر مستقیم از دست دادن اطلاعات ناشی از دسته بندی است. شکل (۲.۲) را در نظر بگیرید نقاط k و $k+1$ ام در دسته ای با نماینده i دسته بندی شده اند. اگر دسته i ام به

^{۱۶}Erkut

^{۱۷}Bozkaya

سرویس دهنده j ام اختصاص پیدا کند مقدار تابع هدف شامل جمله $a_i d_{ij}$ است که $a_i = w_k + w_{k+1}$ می باشد. اختصاص دسته (نماینده دسته) i ام به سرویس دهنده j ام به این معنی است که نقاط تقاضای k ام و $k+1$ ام به سرویس دهنده j ام تخصیص می یابد. با اختصاص نقطه تقاضای k ام به سرویس دهنده j ام رابطه $d_{ij} \geq d_{kj}$ و با اختصاص نقطه تقاضای $k+1$ ام به سرویس دهنده j ام رابطه $d_{ij} \leq d_{k+1j}$ را داریم که به بوجود آمدن خطا تاکید می کند. این بر آورد خطاها، خطای منبع A می باشند.

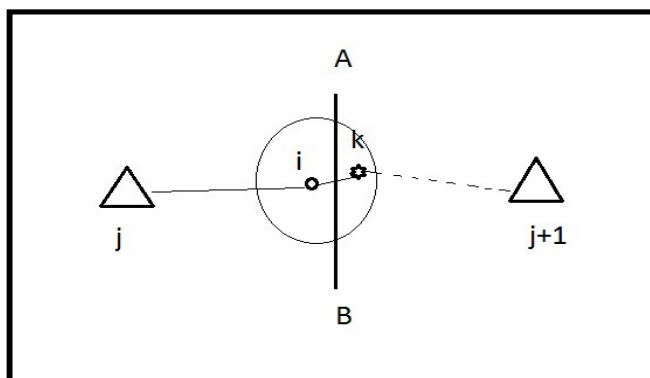


شکل ۳.۲: دسته بندی داده ها برای شرح خطای منبع B

خطای منبع B یک نتیجه مستقیم از، از دست دادن اطلاعات مکان یابی در دسته بندی است در حقیقت خطای منبع B یک مورد خاص از خطای منبع A است و وقتی یک سرویس دهنده بر نماینده دسته منطبق می شود اتفاق می افتد.

طرح دسته بندی را که در شکل (۳.۲) نمایش داده شده است را در نظر بگیرید که نقاط تقاضای k ام و $k+1$ ام در i امین دسته، دسته بندی شده اند. در این مثال سرویس دهنده i ام در دسته i ام قرار گرفته، و بر نماینده دسته منطبق شده است. بنابراین $d_{ii} = 0$ و نیز $a_i d_{ii} = 0$ می باشد و این در صورتی است که با فرض اینکه فاصله و مقدار تقاضا (وزن) هیچکدام منفی نیستند، مقادیر

فاصله در وزن $w_k d_{ki}$ و $w_{k+1} d_{k+1i}$ هر دو باید بزرگتر مساوی با صفر باشند. در نتیجه جمله $a_i d_{ii}$ مقدار کمتری از فاصله وزنی را برای نقاط k و $k+1$ ام نشان می دهد. این نوع از برآورد خطا، خطای منبع B می باشد.



شکل ۴.۲: دسته بندی داده ها برای شرح خطای منبع C

خطای منبع C یک تاثیر غیر مستقیم از، از دست دادن اطلاعات به علت دسته بندی کردن داده ها در مسائل مکان یابی است. این خطا وقتی یک نقطه تقاضا به اشتباه به یک سرویس دهنده که نزدیکترین سرویس دهنده نیست اختصاص پیدا می کند، اتفاق می افتد.

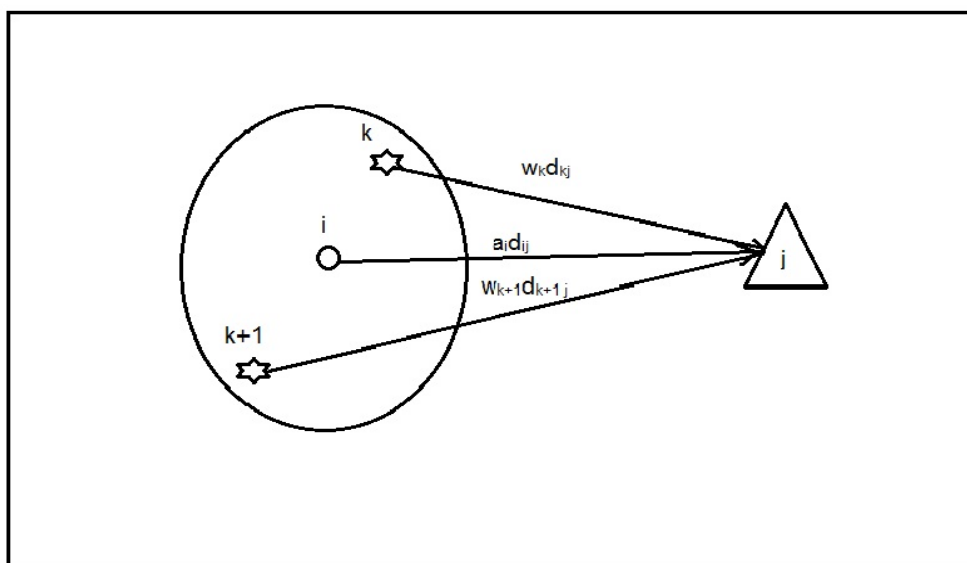
طرح دسته بندی در شکل (۴.۲) را در نظر بگیرید. نقطه k ام در دسته i ام قرار گرفته است و خط AB دارای مسافت های مساوی از سرویس دهنده j ام و $j+1$ ام می باشد. به دلیل این که $d_{ij} < d_{ij+1}$ است، نقاط در i امین دسته به j امین سرویس دهنده اختصاص می یابد، بنابراین نقطه تقاضای k ام با وجودی که $d_{kj} > d_{kj+1}$ است، به j امین سرویس دهنده اختصاص پیدا می کند. این تخصیص نادرست خطای منبع C می باشد.

با این فرض که نقاط تقاضا به نزدیکترین سرویس دهنده اختصاص پیدا می کنند، در خطای منبع

C معمولاً مقدار فاصله وزنی از مقدار واقعی آن بیشتر است.

در بخش بعد روش هایی برای محدود کردن خطای منبع A و B در طی روند دسته بندی نقاط در مسائل مکان یابی نشان داده می شود. متأسفانه روش های شناخته شده ای برای محدود کردن خطای منبع C وجود ندارد.

۱.۴.۲ روش های حذف یا کم کردن خطاهای منبع A و B



شکل ۵.۲: خطای منبع A

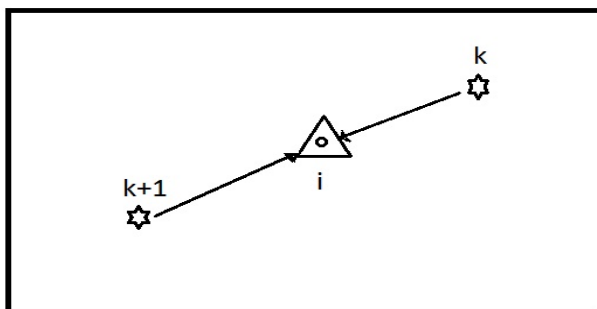
منابع خطای A و B از مسائل p - میانه دسته بندی شده می تواند با اصلاح روش های اندازه گیری محدود و یا حذف شود. [۵] طرح دسته بندی در شکل (۵.۲) را در نظر بگیرید که نقاط تقاضای

k و $k+1$ ام در دسته i ام دسته بندی شده اند در این مثال روش دسته بندی $a_i d_{ij} = \sum_{k \in N_i} w_k d_{kj}$ می باشد که N_i مجموعه ای از نقاط تقاضایی است که در دسته i ام دسته بندی شده است.

بنابر این اگرما فاصله وزنی را به صورت $a_i d_{ij} = \sum_{k \in N_i} w_k d_{kj}$ تعریف کنیم، خطای منبع A

حذف می شود زیرا $a_i d_{ij}$ اندازه دقیق (درست) حاصلضرب فاصله در وزن برای سرویس دهنده j ام

و برای همه نقاط تقاضا k است که در دسته i ام دسته بندی شده اند.



شکل ۶.۲: خطای منبع B

به طور مشابه خطای منبع B می تواند با یک روش اندازه گیری اثبات شده محدود شود. طرح دسته بندی در شکل (۶.۲) را در نظر بگیرید که نقاط تقاضای k ام و $k + 1$ ام در i امین دسته، دسته بندی شده اند و i محل یک سرویس دهنده است. در این مثال از روش های اندازه گیری قبلی به مجموعه $a_i d_{ii}$ می رسیم بنابراین اگر ما $a_i d_{ii} = \sum_{k \in N_i} w_k d_{ki}$ را داشته باشیم خطای منبع B می تواند حذف شود زیرا مقدار $a_i d_{ii}$ اندازه واقعی حاصل ضرب فاصله در وزن همه نقاط k است که در دسته i ام به سرویس دهنده i ام اختصاص پیدا می کند.

از بحث پیشین می توان نتیجه گرفت که خطای منابع A و B بوسیله روش های پیشنهادی حذف می شود اما متأسفانه این روش ها در مورد حذف خطای منبع C پاسخگو نیست.

برای درک بیشتر شکل (۴.۲) را دوباره در نظر بگیرید. یک نقطه تقاضا تنها می تواند به سرویس دهنده ای که در موقعیت j ام و یا به سرویس دهنده ای که در موقعیت $j + 1$ ام قرار دارد، و نه هر دو اختصاص یابد. اما چون فاصله نماینده دسته i ام تا سرویس دهنده $j + 1$ ام بیشتر است با

وجودی که نقطه k به سرویس دهنده $z + 1$ ام نزدیکتر است اما چون از نماینده دسته ای که در آن قرار دارد تبعیت می کند به سرویس دهنده z اختصاص پیدا می کند.

هودجسن و نیومن در سال (۱۹۹۳) از چند جمله ای ورونی^{۱۸} و روند هم پوشانی آنها برای محدود کردن خطای منبع C استفاده کردند. اما این روش در مورد خطاهای منبع A و B با شکست مواجه شد. هودجسن و شمیولو یترز^{۱۹} و کورکل^{۲۰} روش مشابهی را برای حذف خطای منبع C به کار بردند که آن را افزاز نقاط تقاضا نامیدند. این روش مشابه روش کارنت و اسپلینگ (اختصاص مجموع وزن های نقاط تقاضای اولیه به نماینده نقاط تقاضای دسته بندی شده) که پیش از این به طور کامل شرح داده شده است می باشد. [۲۰]

پس از یافتن یک جواب برای مسئله، به سادگی می توان خطای منبع C را اندازه گیری کرد. برای اندازه گیری خطا فرض کنید که هر نقطه تقاضا به نزدیکترین سرویس دهنده اختصاص پیدا کند، سپس فاصله وزنی را محاسبه می کنیم در نتیجه اختلاف بین این مقدار و مقدار تابع هدف از مسئله p میانه، بدون منابع خطای A و B را به عنوان مقدار کل خطای منبع C معرفی می کنیم [۵]

خطای منبع A و B و C سبب ایجاد اختلاف در مقدار خطا^{۲۱}، خطای بهینه^{۲۲} و موقعیت (مکان) خطا^{۲۳} در مدل های p میانه می شود. [۱۰] در این قسمت این خطاها را به صورت فرموله بیان می کنیم. در ابتدا تابع f و g و مقادیر x و y را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f = \text{تابع هدف مدل } p \text{ میانه مسئله اولیه (دسته بندی نشده)}$$

$$g = \text{تابع هدف مدل } p \text{ میانه مسئله دسته بندی شده}$$

^{۱۸}Voronoi

^{۱۹}Shmulevitz

^{۲۰}Corcel

^{۲۱}Cost error

^{۲۲}Optimality error

^{۲۳}Location error

$x =$ پاسخ بهین برای مسئله p میانه دسته بندی نشده

$y =$ پاسخ بهین برای مسئله p میانه دسته بندی شده

خطا = مقدار (اندازه) $[f(y) - g(y)]/f(y)$

خطای بهینه = $[f(y) - f(x)]/f(x)$

موقعیت (محل) خطا = $\|x - y\|$

با توجه به روابط بالا به راحتی می توان نتیجه گرفت که مقدار (اندازه) خطا تنها به اندازه گیری خطای متناظر با پاسخ بهین مسئله دسته بندی شده یعنی به مقدار y وابسته است. همچنین درصد بالایی از خطای بهینه از مدل p میانه دسته بندی شده تاثیر گرفته است. به وضوح خطای موقعیت ، فاصله بین دو پاسخ بهین است (مطابق با متر تعریف شده است).

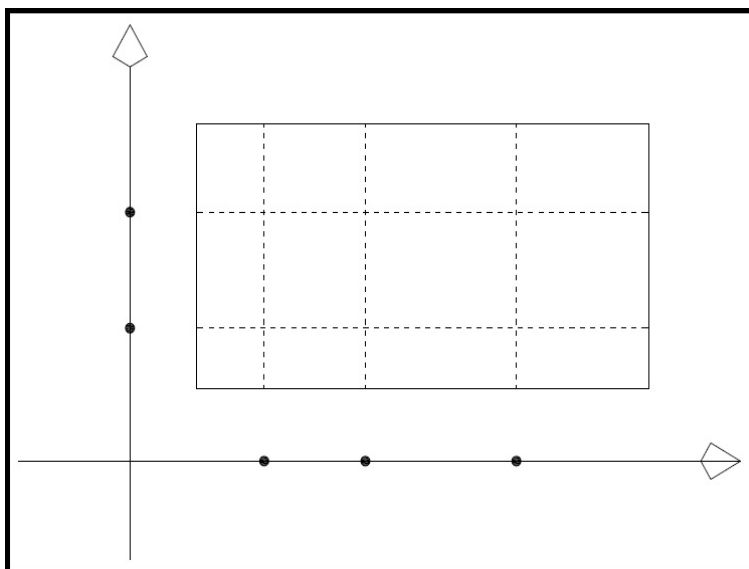
بحث در مورد خطای دسته بندی در مسائل مکان یابی بسیار متنوع می باشد مثلاً اراکات و بازکایا (۱۹۹۹) [۱۰] خطای دسته بندی را وقتی نقاط تقاضا به طور یکنواخت توزیع شده اند، و یا وقتی از روش دسته بندی تصادفی استفاده می شود، همچنین با تمرکز روی مقدار خطا و خطای بهینه و... بررسی کرده، آنگاه نتایج آنها را به صورت عددی با هم مقایسه نمودند.

۲.۴.۲ الگوریتم دسته بندی MRC [۱۲]

در این بخش ما یک روش دسته بندی برای مسئله p میانه مسطح که به روش سطر و ستون MRC ^{۲۴} معروف است و فرانسیس و لاوو و رایکو ^{۲۵} (۱۹۹۵) به بیان آن پرداخته اند، را معرفی می کنیم. در این روش هدف یافتن یک دسته بندی با کران خطای کمتر است.

^{۲۴} Median row column

^{۲۵} Rayco



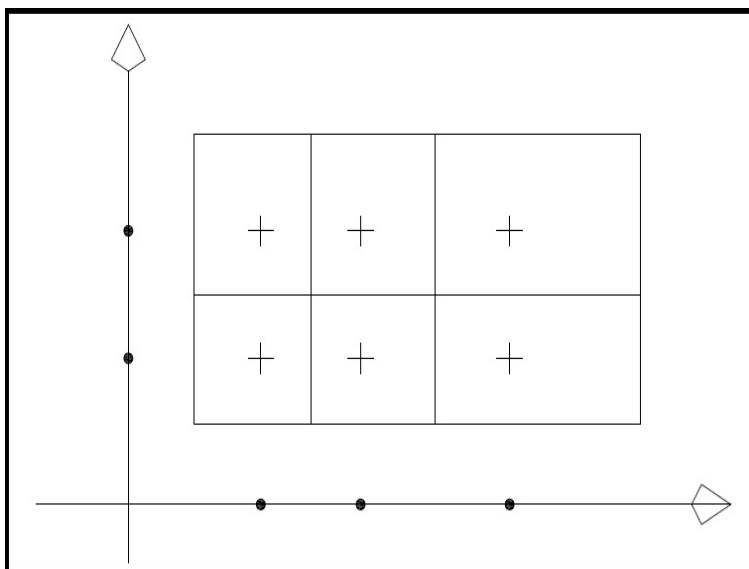
شکل ۷.۲: روش دسته بندی سطر و ستون

ابتدا تمام نقاط تقاضا را در کوچکترین مستطیل ممکن که هر ضلع آن موازی یکی از محورهای مختصات است در نظر می گیریم. این منطقه مستطیل شکل را با $A(R)$ نشان می دهیم.

شکل (۷.۲) را در نظر بگیرید. فرض کنید که هر شبکه از خطوط نقطه چین از r سطر و c ستون که روی منطقه $A(R)$ قرار گرفته اند تشکیل شده باشد (سطرها و ستونها موازی محورهای مختصات هستند). این شرط که فضای بین سطرها و ستونها همجوار یکسان باشد الزامی نیست. نماینده دسته را نقطه‌ای تعریف می کنیم که از محل تقاطع خطوط نقطه چین (سطرها و ستونها) در شبکه بوجود آمده اند و مجموعه این نقاط را با Z نشان می دهیم و مسئله را با این فرض $q = rc$ نماینده حل می کنیم. لذا در این روش تعداد نماینده ها به تعداد سطرها و ستونها و حاصلضرب آنها وابسته است.

الگوریتم MRC ، تعداد rc نماینده را طوری پیدا می کند که مقدار تابع هدف مسئله مینیمم

شود.



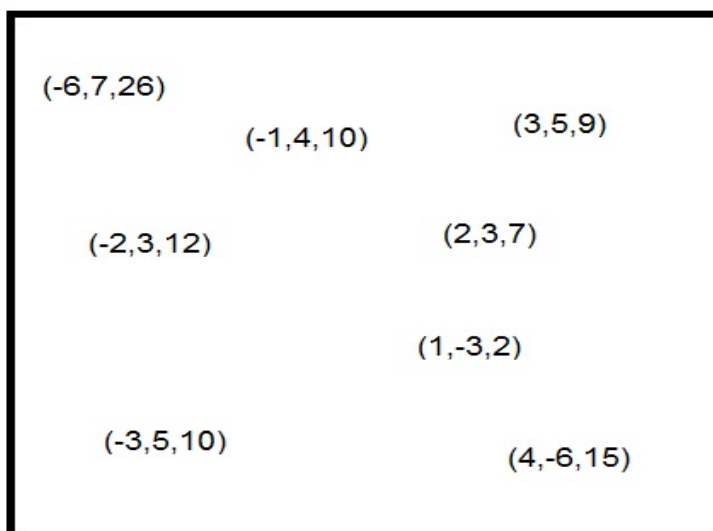
شکل ۸.۲: روش دسته بندی سطر و ستون

در این مرحله خطوط ممتد را از یک ضلع ناحیه $A(R)$ به ضلع موازی آن بین هر جفت از خطوط نقطه چین مجاور می کشیم به طوری که ناحیه بین سطر ها و ستون ها را نصف کند، در این صورت خطوط ممتد ناحیه R را به $q = rc$ خانه (حفره) تقسیم می کند.

در مثال بالا ۶ حفره بوجود آمده است. هر نقطه تقاضا در هر خانه با نماینده آن دسته (محل تقاطع سطر و ستون ها) دسته بندی می شود. با این فرض که $Z_{ij} = (u_j, v_i)$ مختصات نقاط نماینده دسته در i امین سطر و j امین ستون باشد. همچنین نشان دهنده مقدار خطا باشد، فرانسیس و لاوو و ریکو رابطه زیر را بیان نمودند [۶]

$$eb(Z) = \sum w_m \min\{|u_j - a_m| : j = 1, \dots, c\} + \sum w_m \min\{|v_j - b_m| : i = 1, \dots, r\}$$

این کران خطا برای مسئله p میانه با مسافت های دارای مسیر مستقیم یعنی نرم L_1 ، به مواردی محدود می شود که نقاط تقاضا در خانه ای از سطر ها و ستون ها محدود شده اند. نقاط تقاضا دسته بندی شده که در یکی از خانه ها تعیین شده اند به دو کران خطای مجزا تجزیه شده اند و هر کدام



شکل ۹.۲: مثال عددی برای روش دسته بندی MRC

روی یکی از محورهای مختصات تصویر می شوند. به عبارت دیگر الگوریتم MRC مختصات خطوط نقطه چین را با ساخت مسائل r و c میانه را به ترتیب روی محورهای x و y تصویر می کند. مرتبه محاسباتی الگوریتم MRC کمتر از $O(M(\log(M+r+c)))$ می باشد. بنابراین برای مسائل با نقاط تقاضای زیاد مناسب است و با مسائلی با حدود $200,000$ نقطه تقاضا اجرا می شود. حال با یک مثال عددی روش دسته بندی MRC را شرح می دهیم. شکل (۹.۲) را در نظر بگیرید. در این شکل ۸ نقطه تقاضا با سه مشخصه طول و عرض و وزن (x, y, w) در صفحه تعیین شده اند. مسئله را با $r = 2$ سطر و $c = 2$ ستون حل میکنیم.

ابتدا همان طور که در شکل (۱۰.۲) نشان داده شده است، با دو خط افقی $u_1 = 3$ و $u_2 = -2$ (موازی محور x ها) مستطیلی که نقاط تقاضا در آن قرار گرفته اند را به سه قسمت تقسیم می کنیم. در مرحله بعد با رسم دو خط قائم $v_1 = -4$ و $v_2 = 3$ (موازی محور y ها) ناحیه ای که نقاط تقاضا در آن قرار گرفته اند به ۹ قسمت مش بندی می شود. در این مرحله همانطور که در شکل (۱۱.۲) نشان داده شده است، با دوخط k و h ناحیه بین u_1 و u_2 و v_1 و v_2 را به دو قسمت

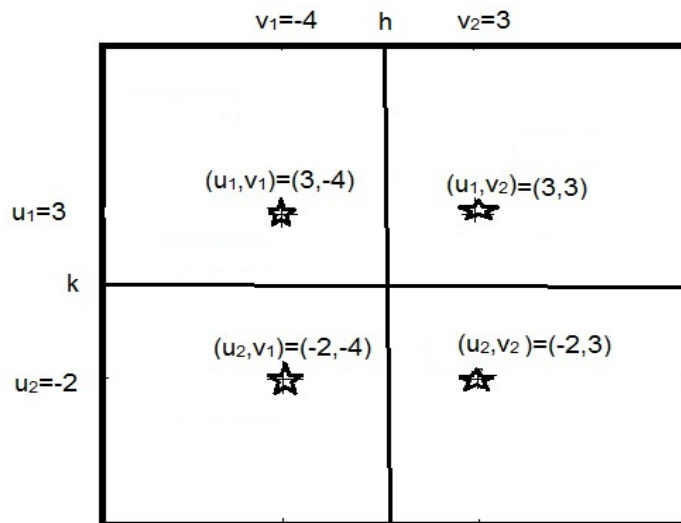
	$v_1=-4$	$v_2=3$	
$u_1=3$	(-6,7,26)	(-1,4,10)	(3,5,9)
$u_2=-2$	(-2,3,12)	(1,-3,2)	(2,3,7)
	(-3,5,10)		(4,-6,15)

شکل ۱۰.۲: مثال عددی برای روش دسته بندی MRC

مساوی تقسیم می کنیم. با این عمل ۴ ناحیه بوجود می آید که نقاط $z_{12} = (u_2, v_1) = (-2, -4)$ و $z_{22} = (u_2, v_2) = (-2, 3)$ به عنوان $z_{21} = (u_1, v_2) = (3, 3)$ و $z_{11} = (u_1, v_1) = (3, -4)$ و نماینده این ۴ ناحیه انتخاب می شوند.

حال با استفاده از رابطه ای که فرانسویس و لاوو و رایکو برای کران خطا در این روش دسته بندی بیان کردند، کران خطا را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned}
 eb(z) &= \sum_{m=1}^A w_m \min\{|u_j - a_m| : j = 1, \dots, c\} + \sum_{m=1}^A w_m \min\{|v_j - b_m| : i = 1, \dots, r\} = \\
 eb(z) &= w_1 \times \min\{|u_1 - a_1|, |u_2 - a_1|\} + w_2 \times \min\{|u_1 - a_2|, |u_2 - a_2|\} + \dots \\
 &+ w_\lambda \times \min\{|u_1 - a_\lambda|, |u_2 - a_\lambda|\} + w_1 \times \min\{|v_1 - b_1|, |v_2 - b_1|\} + \\
 &w_2 \times \min\{|v_1 - b_2|, |v_2 - b_2|\} + \dots + w_\lambda \min\{|v_1 - b_\lambda|, |v_2 - b_\lambda|\} = \\
 eb(z) &= 12 \times \min\{|3 - (-2)|, |(-2) - (-2)|\} + 26 \times \min\{|3 - (-6)|, |(-2) - (-6)|\} + \dots \\
 &+ 2 \times \min\{|3 - 1|, |(-2) - 1|\} + 12 \times \min\{|(-4) - (-3)|, |3 - 3|\} + 26 \times \min\{| \\
 &\min\{|(-4) - 7|, |3 - 7|\} + \dots + 2 \times \min\{|(-4) - (-3)|, |3 - (-3)|\} =
 \end{aligned}$$



شکل ۱۱.۲: مثال عددی برای روش دسته بندی *MRC*

$$12 \times 0 + 26 \times 4 + 10 \times 1 + 10 \times 1 + 9 \times 0 + 7 \times 1 + 15 \times 1 + 2 \times 1 + 12 \times 0 + 26 \times 4 + 10 \times 1 + 10 \times 1 + 9 \times 2 + 7 \times 0 + 15 \times 2 + 2 \times 1 = 322$$

۵.۲ روش مجموع مربعات برای تعیین مرکز تلفن

این روش که برای تعیین مرکز تلفن در مراکز مخابرات استفاده می شود و یک مسئله ۱ - میانه است، یک روش قدیمی است و از کتاب درسی طراحی ۱ که یکی از منابع درسی رشته مخابرات و الکترونیک است برداشت شده است.

برای ایجاد تاسیسات تلفنی در یک منطقه به علت گرانی قیمت دستگاهها و کابلها و سایر لوازم مورد نیاز اعتبارات مالی زیادی لازم است که اغلب درستی ارقام هزینه ها مانع بزرگی در راه انجام مقصد محسوب می شود. مثلا کابل که وسیله اصلی ارتباط تلفنی است، به علت سادگی شکل ظاهری در مقایسه با سایر وسایل از قبیل سلکتور ها در مرحله اول ، چندان جلب توجه نمی کند در حالی که عمده ترین رقم هزینه تاسیسات تلفنی مربوط به کابلهای شبکه می باشد، لذا در نخستین گام

باید سعی شود که حتی المقدور از طول و مقدار آن بکاهند. برای این منظور اولین موضوعی که باید رعایت شود این است که برای نصب دستگاههای مرکزی تلفن در یک منطقه محلی انتخاب شود که ارتباط بین مشترکین و متقاضیان آتی را با حداقل مصرف کابل ممکن سازد.

۱.۵.۲ طرز تعیین مرکز تلفن:

تعریف ۱.۵.۲. مرکز ثقل مشترکین تلفن در یک منطقه محدوده ای است که چنانچه مرکز تلفن آنجا باشد کابل مصرفی حداقل مقدار را داشته باشد.

برای تعیین مرکز تلفن ابتدا باید از منطقه بررسی و بازدید به عمل آید، این کار توسط مامورین آموزش دیده مخابرات انجام می شود، سپس با دریافت اطلاعات از وزارت مسکن و شهرسازی و شهرداری محل طرح جامع شهر را که نشان می دهد هر قسمت از شهر در آینده چه وضعی پیدا خواهد کرد دریافت می نماییم. پس روی این نقشه ها مناطق مختلف از قبیل پارک ها و مناطق مسکونی کم تراکم، مناطق مسکونی پر تراکم، مناطق صنعتی، مناطق کسب و کار تا ۲۰ سال آینده (در حالت اشباع) باید مشخص شوند.

تعریف ۲.۵.۲. مجموعه ای از ساختمان ها که اطراف آنرا معابر فراگرفته باشد، یک بلوک نام دارد.

تعریف ۳.۵.۲. محلی که یک خانواده به طور مستقل در آن زندگی می کنند، یک واحد مسکونی نامیده می شود. به طور مثال ساختمانی که دارای ۴ طبقه و هر طبقه شامل ۲ آپارتمان می باشد، ۸ واحد مسکونی را تشکیل می دهد.

تعریف ۴.۵.۲. کلیه مغازه ها، سوپر مارکت ها، بانکها، ادارات، مطب پزشکان، داروخانه ها، رستورانها، دانشگاه ها، بیمارستانها، مدارس، باشگاه ها، سینما ها، تئاتر ها، هتلها، مساجد و نهادهای دولتی و غیر دولتی و غیره محل کار به حساب می آیند.

در این مرحله نقشه را با خطوط مستقیم افقی و قائم که دارای فواصل معین و یکنواخت از یکدیگر هستند (معمولا این فاصله ها ۱۰۰ متر است) شطرنجی می کنیم . نقشه شهر را که به سطوح یک هکتاری شطرنجی شده است بلوک بندی و شماره گذاری می کنیم و شهر را بلوک به بلوک بررسی می نماییم و احتیاجات هر شماره پلاک و یا زمین بایر در بلوک را با توجه به طرح جامع مشخص می کنیم. جمع احتیاجات بلوک ها نمایانگر میزان احتیاجات تلفنی شهر خواهد بود. بنابراین نقشه به تعدادی مربع که در هر یک از آنها احتیاجات تلفنی مربوط به آنها مشخص شده تبدیل می شود. به این نقشه شطرنجی که در آن مشخص شده است که در آینده در هر هکتار به چند تلفن نیاز خواهیم داشت، نقشه دانسیته پلان سطحی گفته می شود.

	15	16	24	102	91	2
4	78	10	59	21	56	10
80	19	9	14	15	61	12
11	9	5	23	17	44	
	45	17	4	7		

شکل ۱۲.۲: نقشه دانسیته پلان سطحی

حال به شرح زیر عمل می کنیم:

۱- اعدادی را که در مربع های افقی نوشته شده اند با هم جمع می کنیم . جمع نیازمندی های

هر سطر را با A_1 نشان می دهیم. (ستون A_1)

$$۱۵ + ۱۶ + ۲۴ + ۱۰۲ + ۹۱ + ۲ = ۲۵۰$$

۲-مجموع نیازمندی های سطر دوم را به مجموع احتیاجات سطر اول اضافه می کنیم و حاصل را که

برابر با احتیاجات دو سطر می باشد در سطر دوم ستون A_2 درج می نماییم. به همین ترتیب مجموع

نیازمندی های سطر ۱ و سطر ۲ را به نیازمندی های سطر سوم اضافه می کنیم و حاصل را در سطر

سوم ، ستون A_2 درج می کنیم . این عمل را ادامه می دهیم تا نیاز تلفنی کل منطقه تعیین گردد.

$$۲۵۰ + ۲۳۸ = ۴۸۸$$

$$۲۱۰ + ۴۸۸ = ۶۹۸$$

۳-مجموع نیازمندیهای سطر های اول و دوم که در ستون A_2 نوشته شده است را به رقم مربوط به

نیازمندیهای سطر اول اضافه می کنیم و حاصل را که متناسب با زوج سیمی قائم است که چنانچه

مرکز در سطر دوم باشد برای مشترکین سطر های اول و دوم لازم است در ستون مربوط به A درج

می کنیم. به همین ترتیب حاصل جمع A_2 هر سطر را به حاصل جمع سطر های ما فوقش می

افزاییم و حاصل را در در ستون A درج می نماییم.

به همین ترتیب حاصل جمع ستون A_2 در هر سطر را به حاصل جمع سطرهای مافوقش اضافه

می کنیم و در ستون A درج می کنیم، تا زوج سیم لازم در صورتیکه مرکز در آن سطر باشد برای

مشترکین همان سطر و سطر های مافوقش بدست آید.به عنوان مثال ۷۳۸ در سطر دوم از ستون A

در شکل (۱۳.۲) نشان می دهد که اگر مرکز تلفن در سطر دوم قرار داشته باشد، ۷۳۸ متر زوج سیم

به طور قائم برای مشترکینی که در سطر اول و سطر دوم قرار دارند، نیاز داریم.

برای اینکه زوج سیم قائم برای سطر های پایینی مرکز را بدست آوریم اعمال قسمت ۲ و ۳ را

از پایین به بالا انجام می دهیم و آنها را به ترتیب در ستون B_2 و B قرار می دهیم. (اعدادی که در ستون B مشخص شده اند بیان می کنند که وقتی مرکز در سطری قرار می گیرد برای مشترکین همان سطر و مشترکین سطر های پایینی آن چه مقدار زوج سیم لازم است.) به عنوان مثال عدد ۶۴۷ در سطر سوم از ستون B در شکل (۱۳.۲) نشان می دهد که اگر مرکز تلفن در سطر سوم قرار داشته باشد چه مقدار زوج سیم به طور قائم برای مشترکین سطر سوم و چهارم و پنجم داده های تقاضا لازم است.

۴- برای اینکه زوج متر سیم قائم را که برای کل منطقه لازم است بدست بیاوریم از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\text{زوج متر سیم قائم که برای کل ناحیه لازم است} = L_1 = (A + B - A_1)a$$

به عنوان مثال عدد ۲۳۸۹ در جدول داده ها نشان می دهد که اگر مرکز تلفن در سطر چهارم باشد مقدار زوج متر سیم قائم لازم برای همه سطر ها (کل منطقه) ۲۳۸۹ متر می باشد.

همه اعمالی را که برای سطر ها انجام دادیم برای ستون ها انجام می دهیم. مثلا مجموع نیازمندی های هرستون را در سطر A_1 قرار می دهیم. $(۹۵=۱۱+۸۰+۴)$ همچنین مجموع نیازمندی های ستون اول و دوم را در سطر A'_1 قرار می دهیم. به عنوان مثال ۶۷۴ درستون سوم از سطر A'_1 نشان می دهد که اگر مرکز تلفن در ستون سوم قرار داشته باشد، ۶۷۴ متر زوج سیم به طور افقی برای مشترکینی که درستون اول و دوم و سوم قرار دارند، نیاز داریم. همچنین عدد ۷۳۸ در ستون پنجم از سطر B' نشان می دهد که اگر مرکز تلفن در ستون پنجم قرار داشته باشد، ۷۳۸ متر زوج سیم به طور افقی برای مشترکین ستون پنجم و ششم و هفتم نیاز است.

و مقدار زوج متر سیم که به طور افقی برای منطقه لازم است را از رابطه زیر بدست می آوریم:

$$\text{متر سیم افقی (بر حسب متر) که برای کل ناحیه لازم است} = L_2 = (A' + B' - A'_1)a$$

								A ₁	A ₂	A	B ₁	B	L ₁
		15	16	24	102	91	2	250	250	250	880	2157	2157
	4	78	10	59	21	56	10	238	488	738	630	1277	1777
	80	19	9	14	15	61	12	210	698	1436	392	647	1873
	11	9	5	23	17	44		109	807	2243	182	255	2389
		45	17	4	7			73	880	3123	73	73	3123
A' ₁	95	166	57	124	162	252	24						
A' ₂	95	261	318	442	604	856	880						
A'	95	356	674	1116	1720	2576	3456						
B' ₁	880	785	619	562	438	276	24						
B'	3584	2704	1919	1300	738	300	24						
L ₂	3584	2894	2536	2292	2296	2624	3456						

شکل ۱۳.۲: یافتن مرکز تلفن

به عنوان مثال عدد ۲۲۹۲ در جدول داده ها نشان می دهد که اگر مرکز تلفن در ستون چهارم باشد مقدار زوج متر سیم افقی لازم برای همه ستون ها (کل منطقه) ۲۲۹۲ متر می باشد.

$$L = L_1 + L_2 = \text{مقدار زوج متر سیم لازم برای کل منطقه}$$

مثلا عدد (۴۰۶۹=۲۲۹۲+۱۷۷۷) نشان می دهد که اگر مرکز تلفن در سطر دوم و ستون چهارم

قرار داشته باشد، چه مقدار زوج سیم لازم است.

بنا بر تعریف مرکز تلفن، سطر و ستونی که در آنجا مقدار سیم لازم کمترین مقدار را دارد را

انتخاب کرده و محل برخورد این سطر و ستون را به عنوان مرکز ثقل انتخاب می کنیم. همان طور که

در مثال بالا دیده می شود، چنانچه مرکز در سطر دوم باشد، مقدار سیم قائم برای منطقه و چنانچه

مرکز در ستون چهارم باشد، مقدار سیم افقی برای منطقه کمترین مقدار است. بنابر این مرکز تلفن

در محل تقاطع سطر دوم و ستون چهارم قرار می گیرد.

روش ساده تری برای تعیین مرکز تلفن با استفاده از جدول بدست آمده نیز وجود دارد. در این روش آخرین عضو در ستون A_2 و سطر A'_2 را بر دو تقسیم می کنیم و اولین عدد بزرگتر مساوی این عدد را در ستون A_2 و سطر A'_2 را تعیین و سطر و ستون مربوط به این اعداد را محور های مرکز تلفن انتخاب می کنیم .

در مثال بالا عدد ۸۸۰ را بر دو تقسیم می کنیم $۸۸۰/۲ = ۴۴۰$ و با جستجو در ستون A_2 و سطر A'_2 ، مطابق با روش قبل محل تلاقی سطر دوم و ستون چهارم به عنوان به عنوان مرکز تلفن انتخاب می شود.

فصل ۳

روش های ابتکاری چند ضلعی و کاشی کاری

۱.۳ مقدمه

در این فصل ما به بیان روش ابتکاری چند ضلعی که توسط پاپادیمتریو^۱ در سال (۱۹۸۱) ارائه شد [۲۴] می پردازیم. همچنین روش ابتکاری کاش کاری^۲ که توسط لیان^۳ و زوو^۴ در سال (۲۰۱۰) معرفی شد، [۲۳] را بیان کرده و به تحلیل کمترین خطا وقتی نقاط تقاضا به طور دلخواه در صفحه توزیع شده اند، می پردازیم.

۲.۳ روش های ابتکاری

پیش از آن که به بیان روش ابتکاری شش ضلعی بپردازیم، نماد هایی که در این فصل به آنها نیازمندیم را معرفی می کنیم.

$\{DP\}$	مجموعه نقاط تقاضا
q	تعداد دسته هایی از نقاط تقاضا که ما در نظر گرفته ایم.
R	منطقه ای که نقاط تقاضا در آن توزیع شده اند.
$A(R)$	مساحت منطقه R که نقاط تقاضا در آن توزیع شده اند.
w_p	وزن p امین نقطه تقاضا همچنین داریم $\sum_{p \in \{DP\}} w_p = 1$
$eb(Q)$	کران خطایی که با دسته بندی نقاط تقاضا به روش Q بدست می آید.
$d(x, y)$	فاصله اقلیدسی بین دو نقطه x و y
a	طول ضلع شش ضلعی در روش ابتکاری
$pa(i)$	الگوی i ام

^۱Papadimitriou

^۲tiling

^۳Lian

^۴Zuo

پاپادیمتریو (۱۹۸۱) [۲۴] روش ابتکاری شش ضلعی را معرفی کرد. او در این روش ناحیه ای که در آن نقاط تقاضا به طور دلخواه توزیع شده اند را با شش ضلعی هایی منتظم پوشاند. پاپادیمتریو طول ضلع این شش ضلعی را برابر با مقدار زیر بدست آورد که متناسب با تعداد نماینده ها و مساحت ناحیه مورد نظر است.

$$a = \sqrt{\frac{A(R)}{1/5\sqrt{3}q}} = 0.620403\sqrt{\frac{A(R)}{q}}$$

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنید که نقاط تقاضا به طور یکنواخت در منطقه R توزیع شده باشند، در این صورت رابطه زیر را داریم .

$$eb(Q_1) \leq 0.620403\sqrt{A(R)/q}$$

همچنین کوچکترین کران بالا از روش ابتکاری شش ضلعی وقتی همه نقاط روی رئوس شش ضلعی قرار دارند بدست می آید.

اثبات. اگر ما c_p را برای نشان دادن مرکز شش ضلعی که نقطه تقاضای p را می پوشاند به کار ببریم و a نشان دهنده طول شش ضلعی باشد از رابطه $eb = \sum w_i d(p'_i, p_i)$ نتیجه می شود که

$$eb(Q_1) = \sum_{p \in \{Dp\}} w_p d(p, c_p) \leq \sum_{p \in \{Dp\}} (w_p \times a) = a = 0.620403\sqrt{\frac{A(R)}{q}}$$

برای هر نقطه تقاضای p کوچکترین کران بالا وقتی $d(p, c_p) = a$ است بدست می آید. به عبارت دیگر وقتی همه نقاط تقاضا روی رئوس شش ضلعی تولید شده قرار می گیرند کوچکترین کران بالا نتیجه می شود.

لیان و زوو در سال ۲۰۱۰ روش ابتکاری شش ضلعی را توسعه داده و روش ابتکاری کاشی کاری با سه الگو و کاشی کاری با چند الگو و روش تعمیم نسل ها را که دارای کران خطای کمتری از روش ابتکاری شش ضلعی هستند را پیشنهاد دادند. [۲۳]

۳.۳ الگوریتم کاشی کاری (مش بندی) با سه الگو

در این بخش ما به بیان یک الگو برای یک مجموعه از شش ضلعی ها که در دو خاصیت زیر صدق می کند، می پردازیم. [۲۳]

(الف) هیچ هم پوشانی بین دو شش ضلعی در یک الگو وجود ندارد.

(ب) یک الگو باید تمام نقاط تقاضا را بپوشاند.

الگوریتم کاشی کاری با سه الگو که با Q_2 نشان می دهیم، برای دسته بندی نقاط تقاضا از چهار مرحله زیر تشکیل شده است.

مرحله اول: چیدن

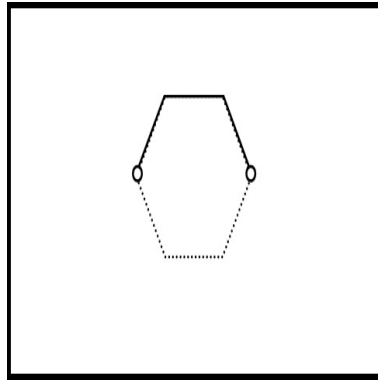
ابتدا ما روش ابتکاری شش ضلعی را وقتی نقاط تقاضا به طور دلخواه توزیع شده اند برای چیدن شش ضلعی ها روی منطقه R به کار می بریم. مجموعه شش ضلعی های بدست آمده از این مرحله را با الگوی ۱ نشان می دهیم.

قانون کرانداری را برای روش ابتکاری شش ضلعی که در شکل (۱.۳) نشان داده شده است به صورت زیر تعریف می کنیم :

با استفاده از روش ابتکاری همه نقاط درون شش ضلعی و ضلع بالایی و ضلع سمت چپ بالایی و سمت راست بالایی به جز رئوس چپ و راست شش ضلعی پوشیده می شود .

با این قانون کرانداری می توان مطمئن بود که هر نقطه تقاضا توسط یک و فقط یک شش ضلعی

پوشیده می شود.



شکل ۱.۳: قانون کراننداری در روش ابتکاری

مرحله دوم: انتقال

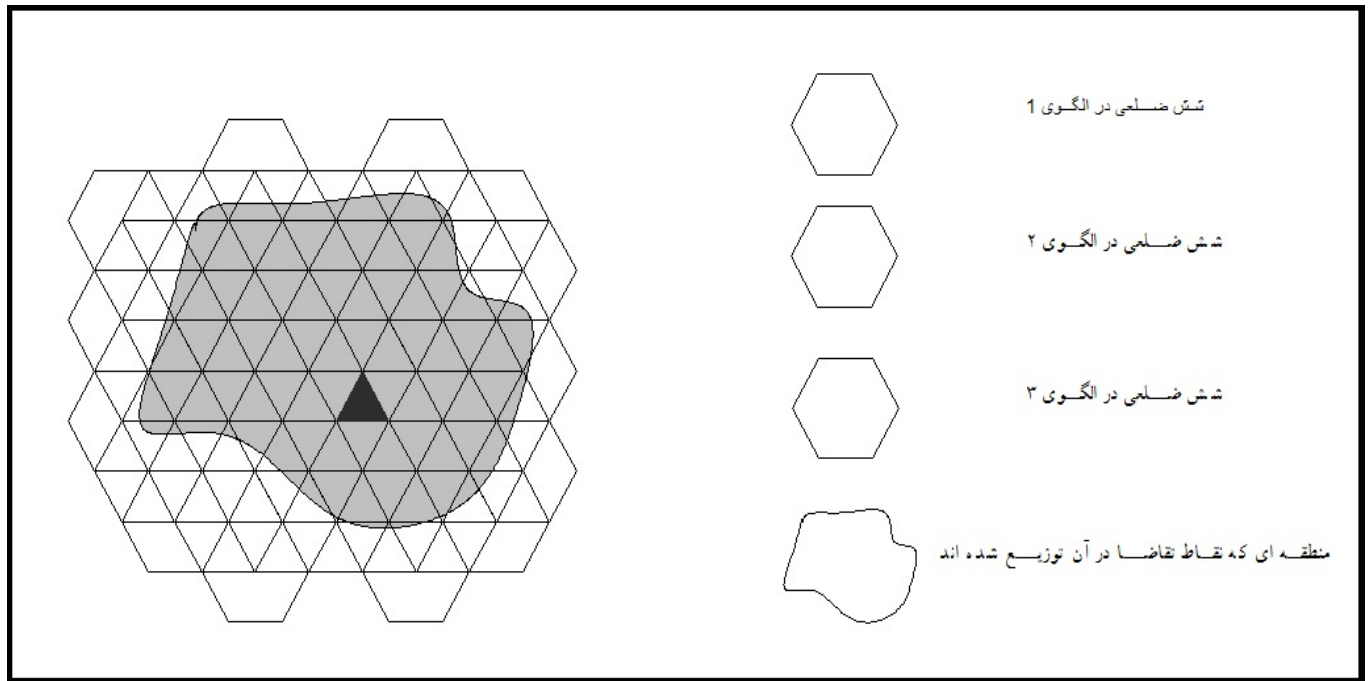
انتقال الف) همه شش ضلعی ها در الگوی ۱ را به اندازه a (طول ضلع شش ضلعی) به سمت راست انتقال می دهیم تا الگوی شماره ۲ بدست بیاید.

انتقال ب) همه شش ضلعی ها در الگوی ۱ را به اندازه $a/2$ به سمت راست و سپس به اندازه $\sqrt{3}a/2$ به سمت بالا انتقال می دهیم تا الگوی شماره ۳ بدست بیاید. $\sqrt{3}a/2$ با توجه به طول ضلع شش ضلعی که برابر با a است و قضیه فیثاغورث نتیجه می شود.

شکل شماره (۲.۳) نتایج این مرحله را این نشان می دهد.

مرحله سوم: تنظیم

بعد از مرحله ۲ بعضی نقاط تقاضا ممکن است بوسیله هیچ شش ضلعی در الگوی ۲ یا ۳ پوشیده نشده باشند. بنابراین تعدادی شش ضلعی در هر الگو اضافه می کنیم تا جایی که مطمئن شویم که همه نقاط تقاضا توسط شش ضلعی ها پوشش داده شده اند. از سوی دیگر بعضی شش ضلعی ها در الگوی ۲ یا ۳ ممکن است تهی باشند بنابراین تمام شش ضلعی های تهی رادر الگوی ۲ یا ۳ حذف می کنیم، که این عمل در هنگام انجام محاسبات سبب سرعت در انجام عملیات می شود.



شکل ۲.۳: کاشی کاری با سه الگو

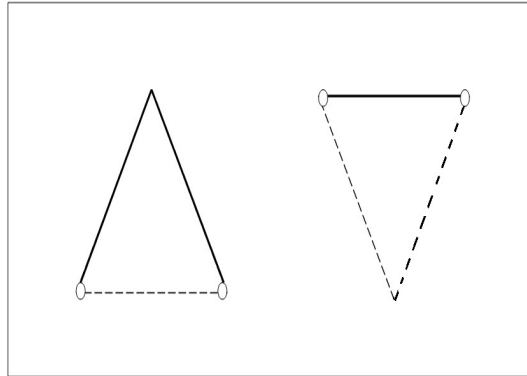
مرحله چهارم : دسته بندی

در هر الگو ما همه نقاط تقاضا را در شش ضلعی ها دسته بندی می کنیم و در هر شش ضلعی مرکز آن شش ضلعی را به عنوان نماینده آن در نظر می گیریم و کران خطای دسته بندی متناظر با آن را با استفاده از معادله $eb = \sum w_i d(p'_i, p_i)$ محاسبه می کنیم . در انتها کران خطایی که در این الگوریتم صدق می کند را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$eb(Q_2) = \min_{i=1,2,3} \{eb(pa(i))\}$$

و نیز باز هم تاکید می کنیم که در این روش هر نقطه تقاضا توسط یک و فقط یک شش ضلعی در هر الگو پوشیده می شود. با دقت نظر بیشتر در این سه الگو می توان یافت که محل تقاطع (اشتراک) این سه شش ضلعی که نقاط تقاضا را می پوشاند یک مثلث متساوی الاضلاع است (در شکل (۲.۳) سایه زده شده است) که رئوس این مثلث مراکز سه شش ضلعی حاصل از سه الگو می

باشد. به عبارت دیگر هر نقطه تقاضا بوسیله یک و تنها یک مثلث متساوی الاضلاع پوشیده می شود. که ما این مثلث متساوی الاضلاع را پایه اصلی الگوریتم کاشی کاری با سه الگو قرار می دهیم.



شکل ۳.۳: قانون کرانداری در روش ابتکاری در مثلث

مشابه قانون کرانداری که برای شش ضلعی ها بیان کردیم قانون کرانداری برای مثلث که در شکل (۳.۳) نشان داده شده است، به صورت زیر بیان می شود:

الف) هر مثلث رو به بالا (پایه واحد) همه نقاط تقاضای درون مثلث و ضلع سمت راست و ضلع سمت چپ آن به جز رئوس پایینی (رئوس سمت چپ و سمت راست) را می پوشاند.

ب) هر مثلث رو به پایین (پایه واحد) همه نقاط تقاضای درون مثلث و ضلع بالایی به جز رئوس بالایی (رئوس سمت چپ و سمت راست) و به جز ضلع سمت راست و سمت چپ را می پوشاند.

v_{ip} ، i امین راس از مثلث پایه است که نقطه تقاضا p را می پوشاند. (راس $i = 1, 2, 3$ ام $i = 1, 2, 3$ مرکز شش ضلعی در الگوی i ام است که p را می پوشاند). بنابراین رابطه زیر را داریم:

$$eb(pa(i)) = \sum_{p \in \{DP\}} w_p d(p, v_{ip}) \quad i = 1, 2, 3$$

قضیه زیر کران خطای نقاط تقاضا دسته بندی شده وقتی نقاط تقاضا به طور دلخواه توزیع شده اند را با استفاده از الگوریتم کاشی کاری با سه الگو تعیین می کند.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید که نقاط تقاضابه طور دلخواه در منطقه R پخش شده باشند اگر $eb(pa(1)) = eb(pa(2)) = eb(pa(3))$ ، همچنین برای همه نقاط تقاضا $\sum_{i=1,2,3} d(p, v_{ip}) = 2a$ ، در این صورت کوچکترین کران بالا برابر با مقدار زیر بدست می آید.

$$eb(Q_2) \leq (2/3)a = 0.4136 \sqrt{A(R)/q}$$

اثبات.

$$\begin{aligned} eb(Q_2) &= \min_{\{i=1,2,3\}} eb(pa(i)) \leq \left(\frac{1}{3}\right) \sum_{i=1,2,3} eb(pa(i)) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\{i=1,2,3\}} \left\{ \sum_{p \in \{DP\}} w_p d(p, v_{ip}) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{p \in \{DP\}} w_p \left\{ \sum_{\{i=1,2,3\}} d(p, v_{ip}) \right\} \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{p \in \{DP\}} w_p \times 2a \\ &= \frac{2}{3} a = 0.4136 \sqrt{\frac{A(R)}{q}} \end{aligned}$$

دومین نامساوی بالا از این اصل (در یک مثلث متساوی الاضلاع مجموع فاصله ها از یک نقطه درون مثلث تا رئوس آن وقتی این نقطه روی یکی از رئوس مثلث قرار داشته باشد، بیشترین مقدار را خواهد داشت.) نتیجه می شود.

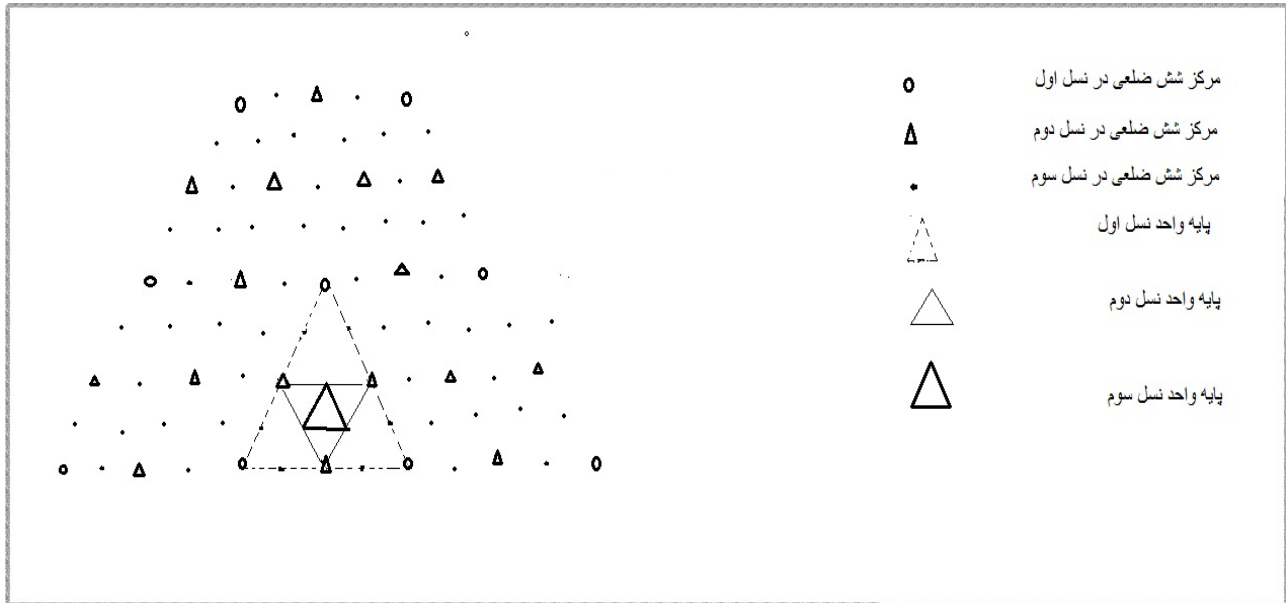
از قضیه (۱.۳.۳) و گزاره (۱.۲.۳) نتیجه می شود که وقتی نقاط تقاضا به طور دلخواه توزیع شده باشند. روش کاشی کاری با سه الگو در مقایسه با روش ابتکاری شش ضلعی که توسط پاپادیمتریو معرفی شده است خطای کمتری دارد.

۴.۳ روش تولید نسل ها با تعمیم روش کاشی کاری

در این بخش الگوریتم کاشی کاری با سه الگو را تعمیم می دهیم و الگوریتم کاشی کاری با چند الگو را بیان می کنیم و خطای حاصل از آن را نیز محاسبه می کنیم.

۱.۴.۳ تولید (ایجاد) نسل [۲۳]

برای توضیح روش کاشی کاری با چند الگو ابتدا مفهوم کلی ایجاد نسل را که در شکل (۴.۳) نشان داده شده است، بیان می کنیم.



شکل ۴.۳: رابطه بین نسل های متوالی

مجموعه ی رئوس مثلث که بوسیله روش کاشی کاری با سه الگو تولید شده است را به عنوان نسل ۱ معرفی می کنیم پایه واحد متناظر با آن را نیز به عنوان پایه واحد نسل ۱ تعریف می کنیم. اگر ما a_1 را برای نشان دادن طول ضلع پایه واحد از نسل ۱ به کار ببریم. a_1 مساوی با طول ضلع شش ضلعی است که ما در روش کاشی کاری از آن استفاده کردیم که برابر با طول a است. همچنین

از این پس ما نماد $ge(K)$ را برای نشان دادن نسل k ام به کار می بریم.

حال نسل ۲ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

نسل ۲ شامل همه الگوهای نسل ۱ بعلاوه همه الگوهای جدید تولید شده بوسیله هر یک از سه

انتقال زیر است.

الف) انتقال همه الگوها در نسل ۱ به اندازه $a_1/2$ به سمت راست.

ب) انتقال همه الگوها در نسل ۱ به اندازه $a_1/4$ به سمت راست و $\sqrt{3}a_1/4$ به پایین.

پ) انتقال همه الگوها در نسل ۱ به اندازه $a_1/4$ به سمت چپ و $\sqrt{3}a_1/4$ به پایین.

مرحله تنظیم نیز در این قسمت برای اینکه مطمئن شویم که همه نقاط تقاضا بوسیله هر الگو در

نسل ۲ پوشیده می شود، ضروری است. به طور مشابه نسل ۳ را که شامل همه الگوها در نسل ۲ و

الگوهای جدید تولید شده به وسیله هر یک از ۳ انتقال بالا از الگوها، از نسل ۲ می باشد را تعریف

می کنیم. با این تفاوت که در این مرحله $a_2 = a_1/2$ جایگزین a_1 می شود. به طور کلی نسل $k + 1$

ام از نسل k ام با $a_k = a_{k-1}/2$ برای $k = 1, 2, 3, \dots$ تولید می شود.

بنابراین

$$a_1 = a \quad k = 1$$

$$a_k = a_{k-1}/2 \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

$$a_k = a/2^{k-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

اگر ما $|ge(k)|$ را برای نشان دادن تعداد الگوها در نسل k ام برای $k = 1, 2, 3, \dots$ به کار ببریم.

از روند بالا نتیجه می شود که:

$$|ge(k)| = 4 \times |ge(k-1)|$$

$$|ge(1)| = 3$$

بنابراین تعداد الگوها در نسل k ام وقتی $k \geq 2$ است با مقدار زیر برابر است.

$$|ge(k)| = 4 \times |ge(k-1)| = 4^{k-1} \times |ge(1)| = 3 \times 4^{k-1}$$

با کاشی کاری با سه الگو در نسل k ام هر نقطه تقاضا بوسیله یک و تنها یک شش ضلعی در هر الگو پوشیده می شود. با استفاده از استقرای ریاضی می توان اثبات کرد که فصل مشترک (تقاطع) این شش ضلعی ها (تعداد $3 \times 4^{k-1}$ شش ضلعی در هر الگو در نسل k ام) که تعداد یکسانی نقاط تقاضا را می پوشاند، یک مثلث متساوی الاضلاع با طول ضلع a_k می باشد که در قانون کرانداری که در شکل (۱.۳) نشان داده شده است، صدق می کند. ما این مثلث های متساوی الاضلاع را پایه واحد از نسل k ام می نامیم. یک نمونه از پایه واحد از نسل ۱ و ۲ و ۳ در شکل (۴.۳) نشان داده شده است.

۲.۴.۳ الگوریتم کاشی کاری با چند الگو

در این بخش بر اساس تعریف نسل ها، الگوریتم کاشی کاری با چند الگو را در ادامه بیان می کنیم. [۲۳] برای هر $k \geq 1$ و هر الگو در نسل k ام اگر مراکز شش ضلعی را در این الگوها از نقاط تقاضای دسته بندی استفاده کنیم، مراکز شش ضلعی را به عنوان نماینده دسته در نظر می گیریم. کران خطای دسته بندی متناظر با آن را محاسبه می کنیم. سپس الگویی با کمترین خطا را انتخاب می کنیم.

کاشی کاری با چند الگو را برای دسته بندی نقاط تقاضا کاشی کاری نسل k ام می نامیم. بدین ترتیب کاشی کاری با سه الگو را که در بخش ۳-۳ بیان شده است را کاشی کاری نسل اول نامیده می شود.

برای بدست آوردن کران خطا در روش کاشی کاری به تعریف نمادهای زیر احتیاج داریم.

C_p^i = مرکز شش ضلعی که متعلق به الگوی i ام از نسل k ام است که نقطه تقاضا p را می پوشاند.

Δ_p^k = پایه واحد از نسل k ام که نقطه p را می پوشاند.

همچنین ما v_{1p}^k و v_{2p}^k و v_{3p}^k را برای نشان دادن رئوس این مثلث به کار می بریم (یاد آوری می کنیم که هر پایه واحد از نسل k ام یک مثلث متساوی الاضلاع است).

$S_p^k =$ مجموعه مراکز شش ضلعی هایی که نقطه p را در نسل k ام می پوشاند.

هر مرکز در S_p^k از یک و تنها یک الگو در نسل k ام بدست می آید. بنابراین روابط زیر را داریم.

$$S_p^k = \{c_p^i | i \in ge(k)\}$$

$$|S_p^k| = |ge(k)|$$

$H_p =$ شش ضلعی به مرکز p و طول ضلع a می باشد.

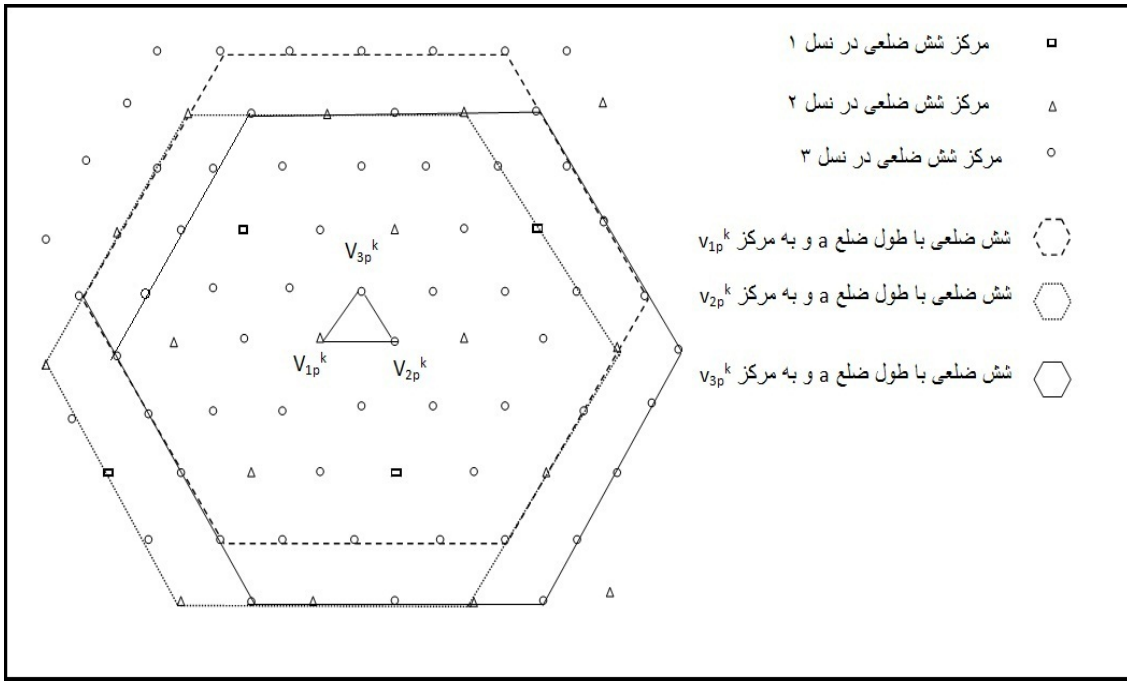
H_p همه نقاط درون شش ضلعی و روی ضلع های آن را می پوشاند. به تفاوت بین قانون کرانداری که ما در اینجا تعریف کردیم و قانون کرانداری که برای شش ضلعی ها در روش کاشی کاری با سه الگو استفاده شد و در شکل (۱.۳) نشان داده شده است توجه کنید. در این میان H_p و شش ضلعی استفاده شده در روش کاشی کاری با سه الگو دارای طول ضلع یکسانی هستند.

بر اساس الگوریتم دسته بندی که در بخش قبلی بیان شد، اگر eb_k را برای نشان دادن کران خطای دسته بندی که از الگوریتم کاشی کاری نسل k ام بدست آمده است مورد استفاده قرار گیرد. برای هر نقطه تقاضای p و هر عدد صحیح $k \geq 1$ ما کران خطایی را که در الگوریتم کاشی کاری نسل k ام صدق می کند را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$eb(k) = \min_{\{i \in ge(k)\}} \{eb(pa(i))\}$$

که خطای الگوی نسل k ام می تواند به صورت زیر محاسبه شود.

$$eb(pa(i)) = \sum_{p \in \{D_p\}} \{w_p \times d(p, c_p^i)\}$$



شکل ۵.۳: تصویر S_p^k وقتی $k = 1$ است

بنابراین کران بالا (کوچکترین کران بالا) برای $eb(k)$ و برای $k \geq 1$ به صورت زیر بیان می شود.

$$\begin{aligned}
 eb(k) &= \min_{i \in ge(k)} \{eb(pa(i))\} \leq \frac{1}{|ge(k)|} \sum_{i \in ge(k)} \{eb(pa(i))\} \\
 &= \frac{1}{|ge(k)|} \sum_{i \in ge(k)} \sum_{p \in \{Dp\}} \{w_p \times d(p, c_p^i)\} \\
 &= \frac{1}{|ge(k)|} \sum_{p \in \{Dp\}} \{w_p \times \sum_{i \in ge(k)} d(p, c_p^i)\} \\
 &= \frac{1}{|ge(k)|} \sum_{p \in \{Dp\}} \{w_p \times \sum_{c \in S_p^k} d(c, p)\}
 \end{aligned}$$

آخرین مرحله بالا از اینکه $S_p^k = \{c_p^i | i \in ge(k)\}$ نتیجه می شود. بنابراین برای بدست آوردن یک کران خطا برای $eb(k)$ لازم است موقعیت دقیق عناصر در مجموعه S_p^k را برای هر نقطه تقاضا بدانیم.

لم ۱.۴.۳. برای هر $k \geq 1$ و هر نقطه تقاضای $p \in \{Dp\}$ ، S_p^k برابر مجموعه مراکز شش ضلعی است

که در نسل k ام بوسیله $\bigcap_{i=1}^k H_{v_{ip}^k}$ پوشیده می شود.

اثبات. بر اساس تعریف Δ_p^k (پایه واحد از نسل k ام که p را می پوشاند) و با توجه به این رابطه که

داریم: $S_p^k = \{c_p^i | i \in ge(k)\}$

$$\Delta_p^k \subset \bigcap_{i \in ge(k)} H_{c_p^i} = \bigcap_{c \in S_p^k} H_c$$

یک راس از Δ_p^k است که برای هر $c \in S_p^k$ به وسیله H_c پوشش داده می شود. بنابراین با توجه به این خاصیت (برای هر دو نقطه p و p' اگر شش ضلعی تولید شده به مرکز p و شعاع a ، p' را نیز بپوشاند، شش ضلعی به مرکز p' و شعاع a نیز p را می پوشاند) نتیجه می گیریم که هر $c \in S_p^k$ به وسیله $H_{v_{ip}^k}$ پوشیده می شود استفاده می شود.

بنابر این برای اثبات این لم تنها باید نشان دهیم که $\bigcap_{i=1}^3 H_{v_{ip}^k}$ حد اکثر توسط یک مرکز شش ضلعی در هر الگو از نسل k ام پوشیده می شود. اگر در یک الگو از نسل k ام ۲ مرکز شش ضلعی c_1 و c_2 وجود داشته باشد که $\bigcap_{i=1}^3 H_{v_{ip}^k}$ آنها را بپوشاند پس H_{c_1} و H_{c_2} هم باید v_{ip}^k را برای $i = 1, 2, 3$ بپوشاند که در این صورت قانون هم پوشانی (دو شش ضلعی نمی توانند هم پوشانی داشته باشند) نقض می شود.

با توجه به لم ۱ می توان دید که برای k داده شده و نقطه تقاضای p ، مجموعه مراکز شش ضلعی در نسل k ام است که بوسیله محل تقاطع $H_{v_{1p}^k}$ و $H_{v_{2p}^k}$ و $H_{v_{3p}^k}$ که به ترتیب مراکز شش ضلعی در سه راس Δ_p^k هستند، پوشیده می شوند.

شکل (۵.۳) یک مثال از S_p^k وقتی $k = 3$ است را نشان داده است. در این شکل طول ضلع برابر a است.

لم ۲.۴.۳. برای هر نقطه تقاضای p و $k \geq 1$ داریم:

$$\sum_{c \in S_p^k} d(c, v_{1p}^k) = \sum_{c \in S_p^k} d(c, v_{2p}^k) = \sum_{c \in S_p^k} d(c, v_{3p}^k)$$

اثبات. اثبات این لم با توجه لم به قبل و خاصیت تقارن در مثلث و شش ضلعی های متساوی الاضلاع واضح است.

لم ۳.۴.۳. برای هر نقطه تقاضای p و هر $k \geq 1$ اگر v یک راس دلخواه از Δ_p^k باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{c \in S_p^k} d(c, p) \leq \sum_{c \in S_p^k} d(c, v)$$

اثبات. با توجه به اینکه نرم اقلیدسی (فاصله اقلیدسی) $d(c, p)$ یک تابع محدب از موقعیت نقطه تقاضای p می باشد. همچنین $\sum_{c \in S_p^k} d(c, p)$ نسبت به نقطه تقاضای p یک تابع محدب است. از طرف دیگر براساس تعریف، نقطه تقاضای p بوسیله Δ_p^k که یک چند ضلعی محدب است پوشیده می شود، بنابراین مطابق با قضیه ۳.۴.۷ در کتاب بازارا^۵، و همکاران (۲۰۰۶) بیشترین مقدار تابع Δ_p^k در رئوس Δ_p^k اتفاق می افتد. بنابراین با توجه به اینکه v یکی از رئوس Δ_p^k می باشد، داریم. $\sum_{c \in S_p^k} d(c, p) \leq \sum_{c \in S_p^k} d(c, v)$ علاوه بر این با توجه به لم قبل می توان نتیجه گرفت که راس v می تواند هر یک از رئوس Δ_p^k باشد.

با توجه به مقدار eb_k و لم ۳ می توان نتیجه گرفت که:

$$eb(k) \leq \frac{1}{|ge(k)|} \sum_{p \in \{Dp\}} \{w_p \times \sum_{c \in S_p^k} d(c, v)\}$$

با توجه به فرمول بالا اگر v یک راس از Δ_p^k باشد، برای هر نقطه تقاضای داده شده، برای بدست آوردن یک کران بالا برای eb_k باید $\sum_{c \in S_p^k} d(c, v)$ را محاسبه کنیم. با توجه به لم ۱ و خاصیت متساوی الاضلاع بودن مثلث و شش ضلعی و بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می کنیم Δ_p^k یک مثلث رو به بالا و v راس سمت چپ و پایین این مثلث می باشد چون با انتقال الگوها یک نسل جدید بوجود می آید، S_p^k از چندین سطر از مراکز شش ضلعی تشکیل شده است که این مراکز شش ضلعی نقطه تقاضای p را در نسل k ام را می پوشاند.

^۵Bazaraa

قضیه ۴.۴.۳. برای هر نقطه تقاضای p و هر $k \geq 1$ داریم :

۱- تعداد مراکز شش ضلعی در S_p^k برابر با $3 \times 4^{k-1}$ می باشد.

۲- تعداد سطر ها از مراکز شش ضلعی در S_p^k برابر با 2^k می باشد.

۳- تعداد مراکز شش ضلعی در سطر $1 + 2^{k-1}$ ام از S_p^k برابر با 2^k می باشد.

۴- تعداد مراکز شش ضلعی در سطر i ام که $(1 \leq i \leq 2^{k-1})$ از S_p^k برابر با $2^k - (2^{k-1} + 1 - i)$

$1 - i + 2^{k-1}$ می باشد. همچنین تعداد مراکز شش ضلعی در سطر i ام که $(2^{k-1} + 2 \leq i \leq 2^k)$

از S_p^k برابر با مقدار $1 + i - 2^{k-1} = 3 \times 2^{k-1} - i + 1$ می باشد.

۵- فاصله افقی بین مراکز از دو شش ضلعی متوالی در a سطر از S_p^k برابر با a_k می باشد. فاصله

قائم (عمودی) بین دو سطر متوالی در S_p^k برابر با $\sqrt{3}a_k/2$ می باشد.

۶- فاصله افقی بین اولین مرکز شش ضلعی در سطر i ام و اولین مرکز شش ضلعی در سطر

$1 + 2^{k-1}$ برابر با $|i - 2^{k-1} - 1| \frac{a_k}{2}$ می باشد.

اثبات. ۱- اثبات این قسمت از دو رابطه زیر نتیجه می شود .

$$|ge(k)| = 3 \times 4^{k-1}$$

$$S_p^k = |ge(k)|$$

۲- مطابق با مرحله انتقال که در قسمت های قبل بیان شد و همان طور که در شکل (۵.۳) و (۴.۳)

دیده می شود، تعداد سطر ها در S_p^1 برابر با ۲ است همچنین با توجه به الگوی انتقال می دانیم که

وقتی نسل جدید k ام از نسل $k - 1$ ام به وجود می آید تعداد سطر ها دو برابر می شود، بنابراین

تعداد سطر ها ی مراکز شش ضلعی در S_p^k برابر با $2^k = 2 \times 2^{k-1}$ می باشد.

۳- این قسمت بر اساس معادله خطی با یک متغیر اثبات می شود. اگر ما x را برای نشان دادن

تعداد مراکز شش ضلعی در سطر $1 + 2^{k-1}$ از S_p^k به کار ببریم. تعداد مراکز شش ضلعی در سطر i

ام $(1 \leq i \leq 2^{k-1})$ از S_p^k برابر با $x - (2^{k-1} + 1 - i)$ است. برای $1 \leq i \leq 2^{k-1}$ سطر $i + 1$ ام معمولاً یک مرکز شش ضلعی بیشتر از سطر i ام دارد. به عبارت دیگر تعداد مراکز شش ضلعی در سطر i ام $2^{k-1} + 2 \leq i \leq 2^k$ از S_p^k برابر با $x - (i - 2^{k-1} - 1)$ است. بنابراین سطر $i - 1$ ام معمولاً یک مرکز بیشتر از سطر i ام برای $2^{k-1} + 2 \leq i \leq 2^k$ دارد. پس تعداد مراکز شش ضلعی در S_p^k برابر رابطه زیر می باشد.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2^{k-1}} [x - (2^{k-1} + 1 - i)] + x + \sum_{i=2^{k-1}+2}^{2^k} [x - (i - 2^{k-1} - 1)] = \\ & x \times 2^{k-1} - 2^{k-1} \times 2^{k-1} - 1 \times 2^{k-1} + \frac{2^{k-1} \times 2^{k-1} + 1}{2} + x + (2^k - 2^{k-1} - 2 + 1) \times x + \\ & 2^{k-1}(2^k - 2^{k-1} - 1) + 1 \times (2^k - 2^{k-1} - 1) - \frac{(2^k - 2^{k-1} - 1)(2^k - 2^{k-1})}{2} = \\ & 2^{k-1}x - 2^{2k-2} - 2^{k-1} + 2^{2k-3} + x + 2^k x - 2^{k-1}x - x + 2^{2k-1} - 2^{2k-2} - 2^{k-1} + 2^k - \\ & 2^{k-1} - 1 - 2^{2k-1} + 2^{2k-2} - 2^{2k-2} - 2^{2k-3} + 2^{k-1} - 2^{k-2} = \\ & = 2^k x - 2^{2k-2} \end{aligned}$$

که با توجه به قسمت اول قضیه و مساوی قرار دادن دو رابطه زیر اثبات می شود.

$$2^k \times x - 2^{2k-2} = 3 \times 4^{k-1}$$

$$2^k x = 3 \times 2^{2k-2} + 2^{2k-2} = 3 \times 4^{k-1} + 4^{k-1} = 4 \times 4^{k-1} = 2^{2k}$$

$$2^k x = 2^k \times 2^k \quad \longrightarrow \quad x = 2^k$$

۴-کافی است در قسمت قبل به جای x ، 2^k را قرار دهیم. با کمک عملیات ساده ریاضی این قسمت اثبات می شود.

۵- با توجه به اینکه در مرحله انتقال هر شش ضلعی به اندازه $\frac{a}{4}$ به سمت راست انتقال پیدا می

کند و به اندازه $\frac{\sqrt{3}a}{4}$ به سمت پایین منتقل می شود. همچنین با در نظر داشتن این نکته که نسل

k ام از نسل $k - 1$ بوجود می آید. واضح است که فاصله افقی بین مراکز از دو شش ضلعی متوالی

در a سطر از S_p^k برابر با a_k می باشد، و نیز فاصله قائم (عمودی) بین دو سطر متوالی در S_p^k برابر با $\sqrt{3}a_k/2$ می باشد.

۶- اثبات این قسمت براساس اثبات قسمت قبل و خاصیت متقارن بودن مثلث های متساوی الاضلاع و شش ضلعی ها بیان می شود.

حال اگر ما یک سیستم مختصات دو بعدی را در نظر بگیریم و مختصات اولین مرکز شش ضلعی را در سطر $1 + 2^{k+1}$ از S_p^k برابر با $(0,0)$ در نظر بگیریم. از قسمت ۵ قضیه بالا نتیجه می شود که مختصات y از مرکز هر شش ضلعی در سطر i ام که $1 \leq i \leq 2^k$ از S_p^k می باشد، برابر با $\frac{\sqrt{3}a_k}{2}(2^{k-1} + 1 - i)$ است.

بعلاوه از قسمت ۵ و ۶ قضیه بالا نتیجه می شود که مختصات x ، j امین مرکز شش ضلعی در سطر i ام برابر با $a_k(j-1) + |i - 2^{k-1} - 1| \frac{a_k}{4}$ می باشد با این فرض که Δ_p^k یک مثلث رو به بالا و v راس سمت چپ پایین می باشد v ، 2^{k-1} امین نقطه در سطر $1 + 2^{k-1}$ از S_p^k می باشد. بنابراین ما می توانیم فاصله اقلیدسی $d(x, y)$ را برای همه $c \in S_p^k$ بر اساس مختصات x و y که در بالا بدست آورده ایم، محاسبه کنیم. همچنین می توان مقدار $\sum_{c \in S_p^k} d(c, v)$ را با استفاده از فرمول زیر بدست آورد. (در این رابطه c متعلق به سطر i ام می باشد)

$$\sum_{c \in S_p^k} d(c, v) = \sum_{i=1}^{2^k} \sum_{c \in \{row i\}} d(c, v)$$

مقدار $\sum_{c \in S_p^k} d(c, v)$ به مقدار k وابسته است و به موقعیت نقطه تقاضای p بستگی ندارد.

اگر ما تابع \wp_k را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\wp_k = \sum_{c \in S_p^k} d(c, v)$$

داریم:

$$\begin{aligned} eb_k &\leq \frac{1}{|ge(k)|} \sum_{p \in \{Dp\}} \{w_p \times \sum_{c \in S_p^k} d(c, v)\} \\ &\leq \frac{1}{|ge(k)|} \sum_{p \in \{Dp\}} \{w_p \times \wp_k\} = \frac{\wp_k}{|ge(k)|} \end{aligned}$$

بر اساس بحث بالا ما قضیه زیر را که بیان می کنیم که یک کران بالا دست یافتنی برای eb_k را بیان می کند.

$$\text{قضیه ۵.۴.۳. برای } k \geq 1 \text{ داریم } eb_k \leq \frac{\wp_k}{|ge(k)|}$$

از روند بالا می توان دید که کران بالا برای eb_k تنها هنگامی بدست می آید که $eb(pa(i))$ برای همه $i \in ge(k)$ برابر باشد، همچنین برای همه نقاط تقاضا داشته باشیم $\sum_{c \in S_p^k} d(c, p) = \sum_{c \in S_p^k} d(c, v)$. این شرایط وقتی همه نماینده های نقاط تقاضای دسته بندی شده در مرکز شش ضلعی ها در نسل k ام تعیین شده باشند بوجود می آید.

بنابر این ما کران بالا خطا را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$UB(eb_k) = \frac{\wp_k}{|ge(k)|}$$

با توجه به تعریف نسل ها رابطه زیر را داریم.

$$ge(k-1) \subset ge(k)$$

بنابراین برای هر مجموعه از نقاط تقاضا با توزیع دلخواه داریم.

$$eb_k \leq eb_{k-1}$$

$$UB(eb_k) \leq UB(eb_{k-1})$$

قضیه ۶.۴.۳. برای هر مجموعه از نقاط تقاضا با توزیع دلخواه یک الگو $\{i \in ge(k)\}$ وجود دارد به طوری که وقتی $k \rightarrow \infty$ داریم:

$$eb(pa(i)) \leq 0.37719 \sqrt{\frac{A(R)}{q}}$$

اثبات. وقتی $k \rightarrow \infty$ روابط زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i \in ge(k)} eb(pa(i))}{|ge(k)|} &= \frac{\sum_{i \in ge(k)} \sum_{p \in \{Dp\}} \{w_p \times d(p, c_p^i)\}}{|ge(k)|} \\ &= \frac{\sum_{p \in \{Dp\}} w_p \sum_{i \in ge(k)} d(p, c_p^i)}{|ge(k)|} \\ &= \sum_{p \in \{Dp\}} w_p E_{i \in ge(k)} [d(p, c_p^i)] \\ &= \sum_{p \in \{Dp\}} w_p E_{c \in S_p^k} [d(p, c)] \end{aligned}$$

آخرین مرحله از اثبات بالا از رابطه $S_p^k = \{c_p^i | i \in ge(k)\}$ نتیجه می شود. $E_{c \in S_p^k} [d(p, c)]$ نیز میانگین فاصله نقطه p از همه نقاطی است که بوسیله شش ضلعی H_p پوشیده می شود که بنابر نتایجی که هیلسمن و رودا (۱۹۷۸) بدست آوردند، این مقدار برابر با $0.608a$ پیشنهاد شده است.

بنابراین وقتی $k \rightarrow \infty$ داریم:

$$\frac{\sum_{i \in ge(k)} eb(pa(i))}{|ge(k)|} = 0.608a = 0.608 \cdot \sqrt{\frac{A(R)}{1.5\sqrt{3}q}} = 0.37719 \sqrt{\frac{A(R)}{q}}$$

که این روابط به این معنی است که وقتی $k \rightarrow \infty$ یک الگو $i \in ge(k)$ با شرط $eb(i) \leq$

$$0.37719 \sqrt{\frac{A(R)}{q}} \text{ وجود دارد.}$$

به این ترتیب اثبات قضیه کامل می شود.

از مراحل بالا نتیجه می شود که وقتی نقاط تقاضا به طور دلخواه توزیع شده اند، همچنین

$$\text{با جمع بندی روابط بالا نتیجه زیر را داریم. } k \rightarrow \infty \text{ کران خطای دسته بندی برابر با مقدار } UB(eb(k)) = 0.37719 \sqrt{\frac{A(R)}{q}} \text{ است.}$$

با جمع بندی روابط بالا نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۷.۴.۳. $UB(eb_k)$ یک تابع غیر صعودی از k می باشد و $\lim_{k \rightarrow \infty} UB(eb_k) = 0.37719 \sqrt{\frac{A(R)}{q}}$

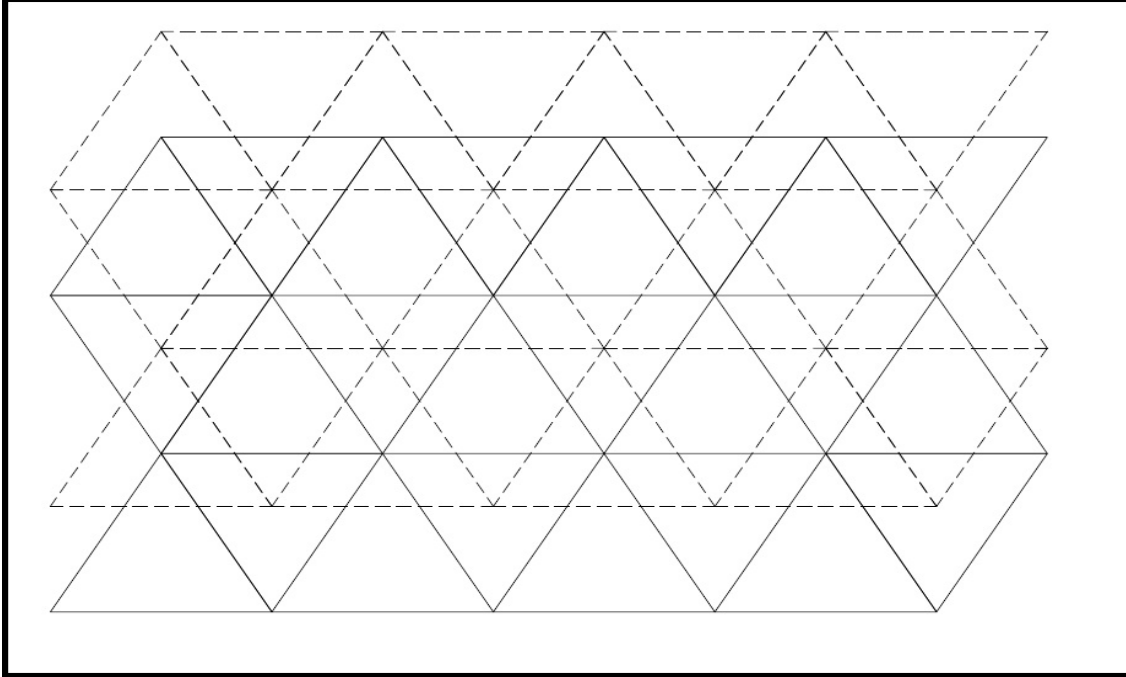
که کران خطایی کمتر از کران خطایی که از روش کاشی کاری با چند الگو بدست می آید، تولید می کند.

همان طور که دیدیم در روش کاشی کاری نسل k ام برای هر الگو که متعلق به نسل k ام است، مرکز شش ضلعی در این الگو را در نظر می گیریم و کران خطای متناظر با آن ها را در این روش دسته بندی محاسبه می کنیم، سپس مراکز شش ضلعی هایی که کمترین کران خطا را در دسته بندی نقاط تقاضا دارند انتخاب می کنیم.

پاپادیمتریو (۱۹۸۱) نشان داد که اگر n تعداد نقاط تقاضا در روش ابتکاری شش ضلعی باشد، کران خطای محاسبه شده در هر الگو دارای درجه پیچیدگی (درجه سختی) $O(n \log(n))$ است. از طرف دیگر می دانیم که $|ge(k)| = 3 \times 4^{k-1}$ می باشد، بنابراین درجه پیچیدگی الگوریتم کاشی کاری نسل k ام برابر با مقدار $O(3 \times 4^{k-1} \times n \log n)$ است.

نتیجه بالا نشان می دهد که می توان یک مقدار مناسب برای k را طوری انتخاب کنیم که دارای درجه پیچیدگی کمتر و کران خطای کمتری باشد. به عنوان مثال وقتی $k = 1$ که متناظر با الگوریتم کاشی کاری با ۳ الگو است. $UB(eb_1) = 0.4136 \sqrt{\frac{A(R)}{q}}$ همچنین وقتی $k = 2$ می باشد ۱۲ الگو وجود دارد، و $UB(eb_2) = 0.39282 \sqrt{\frac{A(R)}{q}}$ است. در نتیجه $UB(eb_2)$ به کران خطای $0.37719 \sqrt{\frac{A(R)}{q}}$ نزدیکتر می باشد.

۵.۳ الگوریتم کاشی کاری با شش الگو [۲۳]



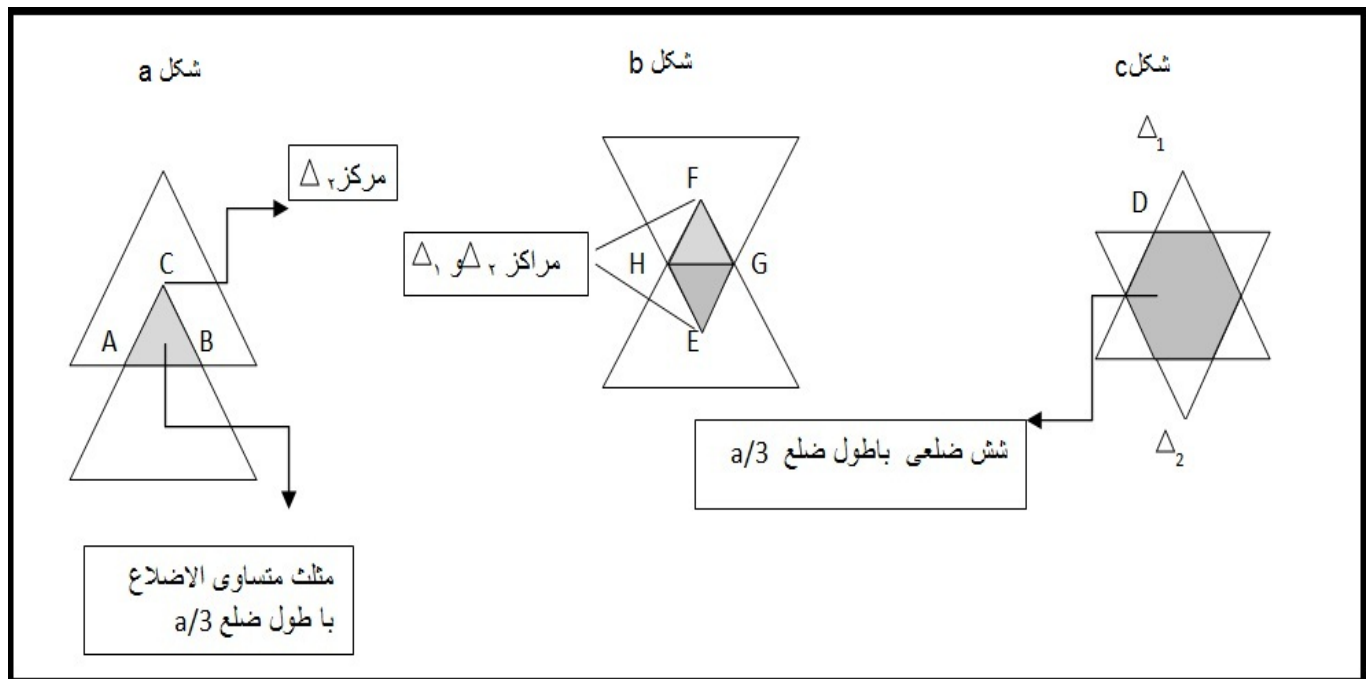
شکل ۶.۳: الگوریتم کاشی کاری با شش الگو

در این بخش الگوریتم کاشی کاری با شش الگو که آن را با Q_3 نشان می دهیم را بیان می کنیم. همچنین نشان می دهیم که کران بالای خطا در این روش یعنی $eb(Q_3)$ به $\frac{1}{37719} \sqrt{\frac{A(R)}{q}}$ میل می کند و $UB(eb_2)$ نیز در این الگو متناسب با روش کاشی کاری با دوازده الگو می باشد. درجه ی (سختی) پیچیدگی در این روش برابر با مقدار $O(6n \log n)$ است که کمتر از درجه سختی (پیچیدگی) کاش کاری با دوازده الگو که برابر با $O(12n \log n)$ است می باشد.

در روش کاشی کاری با شش الگو ابتدا به صورت الگوریتم کاشی کاری با سه الگو عمل می کنیم و سه الگوی تولید شده را الگوی شماره ۱ و الگوی شماره ۲ و الگوی شماره ۳ نام گذاری می کنیم. همچنین مثلث های متساوی الاضلاع را برای نشان دادن پایه واحد متناظر با این سه الگو به کار می بریم. این مثلث ها در شکل (۶.۳) با خطوط ممتد نشان داده شده است. حال در مرحله انتقال سه

الگوی بوجود آمده در این روش را به اندازه $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ به سمت بالا حرکت می دهیم تا سه الگوی جدید بدست آوریم و این الگوها را الگوی شماره ۳ و الگوی ۴ و الگوی ۵ می نامیم.

در شکل (۶.۳) ما مثلث متساوی الاضلاع را که طول ضلع آن نقطه چین شده است را برای نشان دادن پایه واحد متناظر با سه الگوی جدید به کار می بریم.



شکل ۶.۳: حالت های ممکن از تقاطع چند ضلعی ها که نقطه p را می پوشاند.

مرحله تنظیم نیز بعد از مرحله ی انتقال برای اینکه مطمئن شویم همه نقاط تقاضا به وسیله ی هر یک از این شش الگو پوشیده شده اند لازم است. دقت کنید که هر نقطه ی تقاضای p به وسیله ی یک و تنها یک شش ضلعی در هر الگو پوشیده می شود، به عبارت دیگر p باید با محل تقاطع (اشتراک) این شش، شش ضلعی ها پوشیده شود. با مطالعه ارتباط بین این شش شش ضلعی، در می یابیم که محل تقاطع این شش ضلعی ها که نقطه تقاضای p را می پوشاند، تنها سه حالت ممکن دارد، که این سه شکل متفاوت در شکل (۷.۳) نشان داده شده است.

در شکل (۷.۳) ما Δ_1 را برای نشان دادن تقاطع (اشتراک) سه شش ضلعی که از الگوی شماره ۱ و ۲ و ۳ بدست می آید و نقطه تقاضای p را می پوشاند، به کار می بریم. همچنین Δ_2 نشان دهنده تقاطع (اشتراک) سه شش ضلعی که از الگوی شماره ۴ و ۵ و ۶ بدست می آید و نقطه تقاضای p را پوشش می دهد، می باشد.

با توجه به مطالبی که در این فصل بیان کردیم، می توان گفت Δ_1 و Δ_2 مثلث های متساوی الاضلاع با طول ضلع a هستند که رئوس آنها مراکز شش ضلعی های متناظر از الگو های مختلف هستند.

لم ۱.۵.۳. برای هر نقطه تقاضای p در الگوی کاشی کاری با شش الگو داریم :

$$\sum_{i=1}^6 d(p, c_p^i) \leq \left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)a$$

اثبات. مشابه اثبات لم ۳.۴.۳ ما می توانیم نشان دهیم که مجموع زیر یک تابع محدب از p است.

$$\sum_{i=1}^6 d(p, c_p^i) = \sum_{i=1,2} \sum_{i=1}^3 d(p, \Delta_i)$$

از محل تقاطع الگو ها سه طرح مختلف بوجود آمده است. بنابر این p باید به وسیله یکی از سه طرح که در شکل (۷.۳) نشان داده شده است و همه چند ضلعی محدب هستند پوشیده شود. از طرف دیگر مطابق با قضیه (۳.۴.۷) بازارا و همکاران [۱] ماکسیمم مقدار تابع $\sum_{i=1}^6 d(p, c_p^i)$ در یکی از رئوس چند ضلعی اتفاق می افتد.

حالت ۱- محل تقاطع الگو ها مثلث متساوی الاضلاعی با طول ضلع $\frac{a}{3}$ است. یعنی p توسط ناحیه سایه زده شده در شکل (۷.۳) (شکل a) پوشیده می شود، بنابر این بیشترین مقدار $\sum_{i=1}^6 d(p, c_p^i)$ در رئوس A و B اتفاق می افتد بنابراین رابطه زیر را داریم.

$$\sum_{i=1}^6 d(A, c_p^i) = \sum_{i=1}^6 d(B, c_p^i) > \sum_{i=1}^6 d(C, c_p^i)$$

حالت ۲- اگر p توسط ناحیه سایه زده شده در شکل (۷.۳) (شکل b) پوشیده می شود، به دلیل خاصیت متقارن بودن شش ضلعی ها و مثلث های متساوی الاضلاع بیشترین مقدار $\sum_{i=1}^6 d(p, c_p^i)$ در رئوس شش ضلعی سایه زده شده اتفاق می افتد.

حالت ۳- محل تقاطع الگوها شش ضلعی با طول ضلع $\frac{a}{3}$ می باشد. بنابراین p توسط ناحیه سایه زده شده در شکل (۷.۳) (شکل c) پوشیده می شود، و بیشترین مقدار $\sum_{i=1}^6 d(p, c_p^i)$ در رئوس E و F اتفاق می افتد بنابراین رابطه زیر را داریم.

$$\sum_{i=1}^6 d(E, c_p^i) = \sum_{i=1}^6 d(F, c_p^i) > \sum_{i=1}^6 d(G, c_p^i) = \sum_{i=1}^6 d(H, c_p^i)$$

با جمع بندی مطالب بالا و سه حالت بوجود آمده برای p به روابط زیر می رسیم.

$$\sum_{i=1,2} \sum_{x=A,B,D,E,F} d(x, \Delta_i) = \left(2 + \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)a$$

$$\sum_{i=1}^6 d(p, c_p^i) \leq \left(2 + \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)a$$

بدین ترتیب اثبات لم کامل می شود.

در روش کاشی کاری با شش الگو از بین تمام الگوها، ما الگویی با کمترین خطا را انتخاب می کنیم. $\{i = 1, 2, \dots, 6\}$ و $eb(pa(i))$ و مراکز شش ضلعی در این الگو را برای دسته بندی نقاط تقاضا و به عنوان نماینده آن دسته انتخاب می کنیم. بنابراین در مجموع نتایج زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} eb(Q_3) &= \min_{i=1,2,\dots,6} \{eb(pa(i))\} \leq \frac{1}{6} \times \sum_{i=1}^6 eb(pa(i)) \\ &= \frac{1}{6} \times \sum_{i=1}^6 \left\{ \sum_{p \in \{DP\}} \{w_p \times d(p, c_p^i)\} \right\} \\ &= \frac{1}{6} \times \sum_{p \in \{DP\}} \{w_p \times \sum_{i=1}^6 d(p, c_p^i)\} \\ &\leq \frac{1}{6} \times \sum_{p \in \{DP\}} w_p \times \left(2 + \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)a \\ &= \frac{1}{6} \times \left(2 + \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)a = 0.38918 \sqrt{\frac{A(R)}{q}} \end{aligned}$$

دومین نامساوی بالا از لم قبل نتیجه می شود.

همانطور که دیدیم کران خطای بدست آمده از روش کاشی کاری با شش الگو یعنی $0/38918 \sqrt{\frac{A(R)}{q}}$

به کران $0/37719 \sqrt{\frac{A(R)}{q}}$ نزدیکتر است. این کران بالا روی $eb(Q_3)$ وقتی $eb(pa(i))$ برای $i =$

$1, 2, \dots, 6$ مساوی باشد، همچنین برای هر نقطه تقاضای p رابطه $\sum_{i=1}^6 d(p, c_p^i) = (2 + \frac{2\sqrt{7}}{3})a$

را داشته باشیم بدست می آید. دقت داشته باشید که این شرایط تنها وقتی نقاط تقاضا روی رئوس

منطقه سایه زده شده که در شکل b شکل (۷.۳) نشان داده شده است قرار داشته باشند، اتفاق می

افتد.

فصل ۴

روش ابتکاری تقسیمات متوالی مربعات

۱.۴ مقدمه

در این فصل یک روش ابتکاری برای تعیین p میانه در مسائل مکان یابی بیان می شود. این روش که روش تقسیم متوالی مربعات نام دارد. با روش ابتکاری شش ضلعی که در فصل ۳ بیان شد، از نظر عددی مقایسه می شود.

۲.۴ روش تقسیم متوالی مربعات

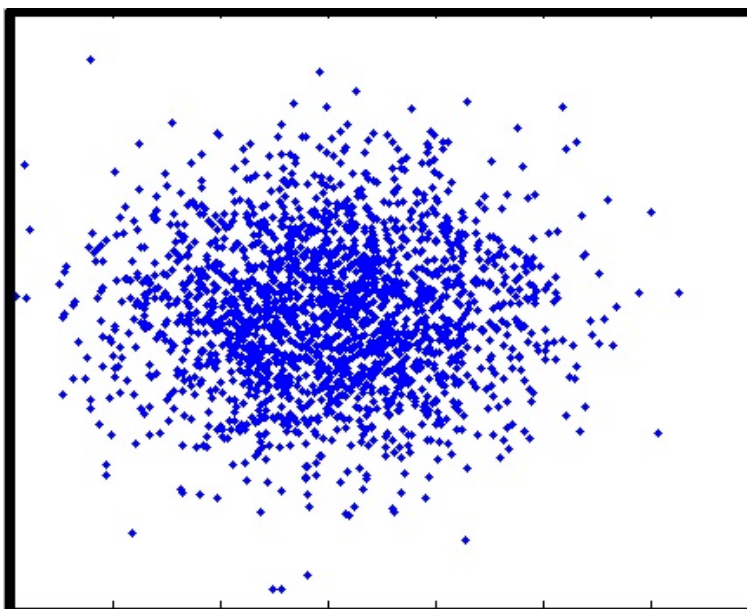
در روش های ابتکاری شش ضلعی و کاشی کاری تمام شش ضلعی هایی که منطقه مورد بررسی ما را تحت پوشش قرار می دادند دارای مساحت های یکسان بودند همچنین در این روش طول شش ضلعی ها متناسب با تعداد نماینده ها و مساحت ناحیه مورد بررسی تغییر می کردند. در روش تقسیم متوالی مربعات نیز که الگوریتم آن را در ادامه فصل بیان می کنیم، مساحت مربع های بدست آمده یکسان نمی باشد، مساحت مربع ها با توجه به وزن نقاط تقاضا تعیین می شود. همچنین در این روش شرط $\sum w_i = 1$ الزامی نمی باشد.

۱.۲.۴ الگوریتم روش تقسیم متوالی مربعات

در این بخش به بیان الگوریتم روش ابتکاری تقسیم متوالی مربعات در مسائل دسته بندی مکان یابی می پردازیم. هدف یافتن محل p نماینده با دسته بندی نقاط تقاضا است، به طوری که مقدار خطا مینیمم شود.

فرض کنید n نقطه تقاضا داریم که با سه مشخصه طول و عرض و وزن بیان می شوند. بردارهای $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ، $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ، $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ به ترتیب طول و عرض و وزن نقاط تقاضا را مشخص می کنند.

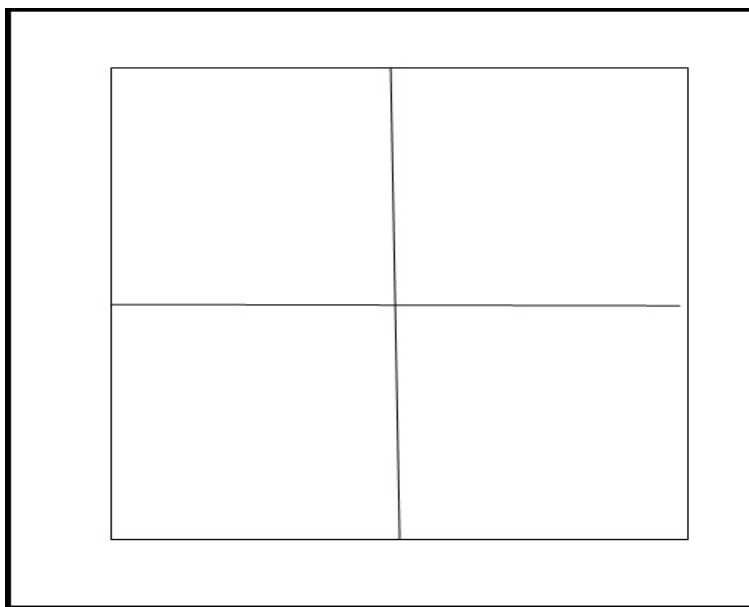
فرض می کنیم نقاط تقاضا به طور دلخواه توزیع شده باشند.



شکل ۱.۴: نقاط تقاضا در صفحه

- ۱- مینیمم مقدار x_i (طول) را با x_{min} و ماکسیمم مقدار آن را با x_{max} نشان می دهیم. همچنین اختلاف x_{max} و x_{min} را دامنه تغییرات x نامیده و با R_x نشان می دهیم.
- ۲- مینیمم مقدار y_i (عرض) را با y_{min} و ماکسیمم مقدار آن را با y_{max} نشان می دهیم. همچنین اختلاف y_{max} و y_{min} را دامنه تغییرات y نامیده و با R_y نشان می دهیم.
- ۳- مقدار R_x و R_y را با هم مقایسه کرده و بزرگترین آنها را به عنوان طول مربع (ناحیه ای که نقاط تقاضا در آن واقع شده اند) انتخاب می کنیم. این کار سبب می شود که تمام نقاط تقاضا داخل مربع قرار بگیرند. در نتیجه طول ضلع مربع که با R_m نشان می دهیم از طریق زیر بدست می آید.

$$R_m = \max\{R_x, R_y\}$$



شکل ۲.۴: مرحله اول الگوریتم تقسیم متوالی مربعات

بنابر این مساحت منطقه ای که نقاط تقاضا در آن واقع شده اند از طریق زیر بدست می آید.

$$A(R) = R_m \times R_m$$

۴- حال وزن نقاط تقاضا را در کل منطقه با هم جمع می کنیم و آن را در متغیر g_w قرار می

دهیم. (وزن نقاط تقاضا در این روش مثبت در نظر گرفته شده است.)

۵- مقدار $\frac{g_w}{p}$ را محاسبه کرده و آن را در متغیر r_w جایگزین می کنیم. در این رابطه p تعداد

نماینده های مورد نظر ماست.

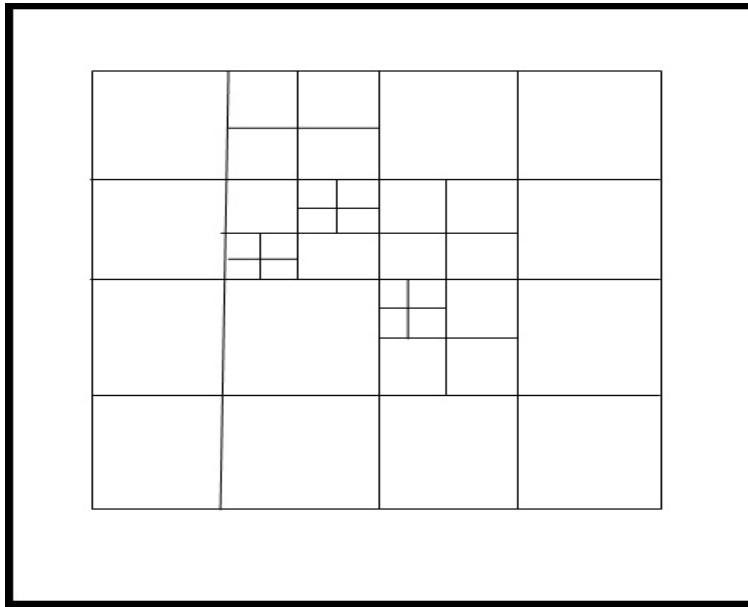
۶- حال در مربع بدست آمده مقادیر r_w و g_w را با هم مقایسه می کنیم اگر شرط $g_w > r_w$ برقرار

باشد مربع را به چهار مربع مساوی تقسیم می کنیم و دوباره همین اعمال را روی هر یک از چهار

مربع بدست آمده تکرار می کنیم.

این عملیات را تا زمانی که $g_w < r_w$ باشد انجام می دهیم بدین ترتیب مربع هایی با وزن های

تقریباً برابر ولی مساحت های غیر یکسان بدست می آوریم.



شکل ۳.۴: تقسیم متوالی مربعات

۶- در پایان مربع هایی که تهی هستند یعنی هیچ نقطه تقاضایی در آن ها وجود ندارد را حذف می کنیم. این کار سبب سرعت در انجام عملیات و محاسبات آن می شود.
مرکز مربع های بدست آمده را به عنوان نماینده دسته انتخاب می کنیم.

محاسبات عددی

روش تقسیم متوالی مربعات و روش شش ضلعی و روش کاشی کاری با نرم افزار متلب کدنویسی شده است و با کامپیوتر شخصی اجرا شده است و نتیجه محاسبات آن در ادامه این بخش آورده شده است.

در این جدول ها $normrnd(A, B, D)$ نمایش دهنده داده های نرمال با میانگین A و واریانس B می باشد. همچنین D یک ماتریس $1 \times n$ می باشد که نمایشگر تعداد داده ها است.

روش تقسیم متوالی مربعات	روش ابتکاری شش ضلعی	
		$a = \text{normrnd}(40, 10, [5000, 1])$ $b = \text{normrnd}(40, 10, [5000, 1])$ $c = \text{unifrnd}(0, 200, [5000, 1])$
خطا	۱/۸۳۹۷	۰/۰۳۸۱
زمان	۰/۱۸۶۷۷۲	۰/۵۲۰۶۹۹

جدول ۱.۴: مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۱۰۰$ نماینده

روش تقسیم متوالی مربعات	روش ابتکاری شش ضلعی	
		$a = \text{normrnd}(0, 1, [5000, 1])$ $b = \text{normrnd}(0, 1, [5000, 1])$ $c = \text{unifrnd}(0, 200, [5000, 1])$
خطا	۰/۱۹۲۲	۰/۰۰۳۹
زمان	۰/۱۹۰۷۲۸	۰/۵۴۰۱۵۳

جدول ۲.۴: مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۱۰۰$ نماینده

در سطر اول و ستون اول هر جدول سه متغیر a و b و c وجود دارد که متغیر a طول نقاط تقاضا، متغیر b عرض نقاط، و متغیر c وزن نقاط تقاضا را مشخص می کنند. مختصات طول و عرض نقاط نرمال انتخاب می شود و وزن نقاط با توجه به دستور $\text{unifrnd}(O, P, Q)$ در بازه (O, P) به صورت تصادفی برداشته می شود. در تمام جداول این بخش وزن نقاط به طور تصادفی و از بازه $(۰, ۲۰۰)$ انتخاب شده است.

$a=\text{normrnd}(3,5,[5000,1])$ $b=\text{normrnd}(1,6,[5000,1])$ $c=\text{unifrnd}(0,200,[5000,1])$	روش ابتکاری شش ضلعی	روش تقسیم متوالی مربعات
خطا	۱/۱۲۸۷	۰/۰۱۹۳
زمان	۰/۱۸۹۹۴۷	۰/۶۲۸۴۴۸

جدول ۳.۴: مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = 100$ نماینده

$a=\text{normrnd}(10,20,[5000,1])$ $b=\text{normrnd}(30,20,[5000,1])$ $c=\text{unifrnd}(0,200,[5000,1])$	روش ابتکاری شش ضلعی	روش تقسیم متوالی مربعات
خطا	۳/۸۲۱۹	۰/۰۶۸۸
زمان	۰/۱۸۶۹۶۶	۰/۵۱۳۷۴۹

جدول ۴.۴: مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = 100$ نماینده

جداول (۱.۴) و (۲.۴) و (۳.۴) و (۴.۴) نشاندهنده مقایسه ۵۰۰۰ نقطه تقاضا با تعداد $q = 100$

نماینده می باشند.

حال اگر تعداد نقاط تقاضا ۱۰۰۰۰ باشد و تعداد نماینده ها به $q = 200$ نماینده افزایش یابد،

خطا و زمان اجرا به صورت زیر تغییر می کند. جداول (۵.۴) و (۶.۴) این اختلافات را نشان می دهد.

روش تقسیم متوالی مربعات	روش ابتکاری شش ضلعی	$a=\text{normrnd}(40,10,[10000,1])$ $b=\text{normrnd}(40,10,[10000,1])$ $c=\text{unifrnd}(0,200,[10000,1])$
خطا	۱/۴۲۶۰	۰/۰۲۳۹
زمان	۰/۷۳۵۰۱۶	۲/۳۳۵۵۴۰

جدول ۵.۴: مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = 200$ نماینده

روش تقسیم متوالی مربعات	روش ابتکاری شش ضلعی	$a=\text{normrnd}(0,1,[10000,1])$ $b=\text{normrnd}(0,1,[10000,1])$ $c=\text{unifrnd}(0,200,[10000,1])$
خطا	۰/۱۴۷۷	۰/۰۰۲۸
زمان	۰/۷۱۳۴۰۴	۲/۰۳۲۲۵۶

جدول ۶.۴: مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = 200$ نماینده

همین برنامه را برای تعداد ۱۰۰۰۰ نقطه تقاضا و تعداد $q = 500$ نماینده اجرا می کنیم و نتایج زیر را که در جدول های (۷.۴) و (۸.۴) و (۹.۴) و (۱۰.۴) آمده است را بدست آوردیم.

حال اگر تعداد داده ها را بازهم افزایش داده و یا تعداد نماینده ها را تغییر دهیم در می یابیم که با افزایش تعداد نقاط تقاضا خطا نیز افزایش می یابد و زمان اجرای برنامه نیز بیشتر می شود. همچنین با توجه به مقادیر بدست آمده از جدول ها و با مقایسه دو روش شش ضلعی و روش تقسیم متوالی مربعات می توان نتیجه گرفت که روش تقسیم متوالی مربعات نسبت به روش ابتکاری شش

$a=\text{normrnd}(40,10,[10000,1])$ $b=\text{normrnd}(40,10,[10000,1])$ $c=\text{unifrnd}(0,200,[10000,1])$	روش ابتکاری شش ضلعی	روش تقسیم متوالی مربعات
خطا	۰/۹۳۸۰	۰/۰۴۵۹
زمان	۱/۹۹۸۶۰۰	۵/۷۸۴۷۰

جدول ۷.۴: مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده

$a=\text{normrnd}(0,1,[10000,1])$ $b=\text{normrnd}(0,1,[10000,1])$ $c=\text{unifrnd}(0,200,[10000,1])$	روش ابتکاری شش ضلعی	روش تقسیم متوالی مربعات
خطا	۰/۰۹۱۰	۰/۰۰۵۳
زمان	۱/۹۷۸۹۸۵	۵/۶۶۲۳۶۹

جدول ۸.۴: مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده

ضلعی دارای خطای کمتری است ، اما همین روش نسبت به روش شش ضلعی زمان اجرای طولانی تری دارد که این امر با توجه به تعداد تکرارها در الگوریتم روش تقسیم متوالی مربعات امری واضح و روشن می باشد.

روش تقسیم متوالی مربعات	روش ابتکاری شش ضلعی	$a=\text{normrnd}(3, 5, [10000,1])$ $b=\text{normrnd}(1, 6, [10000,1])$ $c=\text{unifrnd}(0,200,[10000,1])$
۰/۰۲۳۴	۰/۵۴۲۸	خطا
۵/۶۵۵۴۹۲	۱/۹۷۱۹۰۸	زمان

جدول ۹.۴: مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده

روش تقسیم متوالی مربعات	روش ابتکاری شش ضلعی	$a=\text{normrnd}(10,20, [10000,1])$ $b=\text{normrnd}(30,20,[10000,1])$ $c=\text{unifrnd}(0,200,[10000,1])$
۰/۰۸۱۸	۱/۸۶۴۸	خطا
۵/۸۰۰۶۰۱	۱/۹۷۵۶۳۸	زمان

جدول ۱۰.۴: مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده

۳.۴ نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه به بیان و بررسی خطا در روش دسته بندی که یکی از روش های ابتکاری در مسائل مکان یابی در مقیاس بزرگ است، پرداخته شده است. همچنین در این پایان نامه الگوریتم دسته بندی MRC را بیان نمودیم و با یک مثال عددی این روش شرح داده شده است. در پایان دو روش ابتکاری شش ضلعی و روش تقسیم متوالی مربعات که با زبان برنامه نویسی متلب کد نویسی شده است، به طور عددی با هم مقایسه شده اند.

پاپادیمتریو روش ابتکاری شش ضلعی را معرفی کرد، پس از آن لیان و زوو در سال ۲۰۱۰ از این روش دو روش ابتکاری کاشی کاری با سه الگو و کاشی کاری با چند الگو را نتیجه را گرفتند که این روش ها نسبت به روش ابتکاری شش ضلعی که پاپادیمتریو آن را بیان کرده بود، دارای خطای کمتری می باشند.

در روش ابتکاری دسته بندی ناحیه ای که نقاط تقاضا در آن قرار گرفته اند با شش ضلعی، مربع و مثلث پوشانده می شود، می توان این کار را با لوزی و متوازی الاضلاع که هر دو از مثلث بدست می آیند نیز انجام داد. همچنین به طور معمول در این روش ها مرکز چند ضلعی به عنوان نماینده انتخاب می شوند، می توان نماینده داده ها را به طور تصادفی و با توجه به وزن داده ها انتخاب کرد. در پایان پیشنهاد می شود که نماینده را به جای مرکز در جای دیگر چند ضلعی و با توجه به مرکز ثقل چند ضلعی انتخاب شود.

پیوست

مراجع

- [1] Bazaraa. M. S, Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. Wiley interscience, Hoboken, NJ.(2006) 70
- [2] Ballou, R.H., Measuring transport costing error in customer aggregation for facility location. Transportation journal 33, 49-54. (1994) 28
- [3] Bowerman. R. L, Calamai. P. H, Brent Hall. G, The demand partitioning method for reducing aggregation errors in p-median problems, Computers Operations Research 26(1991) 1097-1111 12
- [4] Casillas, P.A., Data aggregation and the p-median problem in continuous space. in: Ghosh, A., Rushton, G.(Eds), Spatial Analysis and location-allocation Models. Van Nostrand Reinhold Publishers, New York.(1987)
- [5] Current. J. R ,Schilling. D. A, Elimination of Source A and B Errors in p-median Location Problems. Geographical Analysis 19, 95-110. , 12, 28, 29, 32, 34
- [6] Daskin. M. S, Network and Discrete Location:Models Algorithms and Applications. John Wiley and Sons Publishers, new york .(1995) 37
- [7] Drezner. Z, editor, facility location: a survey of applications and methods. Springer-verlag (1995) 6
- [8] Drenzer. Z, Hamacher, H. W (Eds), Facility Location: Theory and Algorithms. Springer verlag, Berlin. 6
- [9] Drezner. Z, Klamroth. K, Schobel. A, Wesolowsky. G, Facility location: Application and theory, Springer- verlag (ISBN)(2002) 3, 6
- [10] Erkut. E, Bozkaya. B, Analysis of aggregation errors for the p-median problem. Computers and Operations Reserch 20,1075-1096.(1999) 11, 34, 35
- [11] Francis. R. L, Lowe. T. J, On worst-case aggregation analysis for network location problems, Annals of Operation Reserch 40, 229-246(1992)
- [12] Fransis. R. L, Lowe. T. J, Rayco. M. B, Row-column aggregation for rectilinear p-median problems. Transportation science 30,160-174(1996) , 35

- [13] Francis. R. L, Lowe. T. J, Rayco. M. B, Tamir. A, Aggregation error for location models:survey and analysis, *Annals of Operations Research* 167, 171-208(2009) [29](#)
- [14] Francis. R. L, Lowe. T. J, Tamir. A, Demand point Aggregation for Location models , [17](#), [19](#), [26](#)
- [15] Francis. R. L, Lowe. T. J, Tamir. A, Aggregation error bounds for a class of location models, *Operation Research* 48,294-307(2000)
- [16] Francis. R. L, McGinnis. Jr. L. F, White. J. A, *Facility layout and Location : An Analytical Approach*, Approach, Prentice Hall(1992)
- [17] Fisher, M.L., Hochbaum, D.S., Probabilistic analysis of the planar K-median problem. *Mathematics of Operations Research* 5, 27-34(1980)
- [18] Hakimi. S. L, Optimum location of switching centers and absolute centers and medians of a graph, *operations Research*, 12,450-459(1964) [9](#)
- [19] Hillsman. E. L, Rhoda. R, Errors in measuring distances from population to service centers.*The Annals of Regional Science* 12, 74-88(1978) [28](#)
- [20] Hodgson. M. J, Hewko. J, Aggregation and Surrogation Error in the p-median model, *Annals of Operations Research* 123,53-66(2003) [14](#), [34](#)
- [21] Hodgson. M. J, Neumen. S, A GIS approach to eliminating Source C aggregation error in p-median models. *location Science* 1, 155-170(1993)
- [22] Kariv, O., Hakimi, S.L., An algorithmic approach to network location Problems: part 1 the P- center : part 2 the p- medians. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 37,513-560
- [23] Lion. Qi, Max Shen. Z. J, Worst-case analysis of demand point aggregation for the Euclidean p-median problem, *European Journal of Operational Research* 202(2010) 434-443 , [25](#), [48](#), [49](#), [50](#), [55](#), [57](#), [68](#)
- [24] Papadimitriou. C. H, Worst-case and probabilistic analysis of a geometric location problem, *SIAM Journal on computing* 10(1981) 542-557 [48](#), [49](#)
- [25] Plastria. F, Continuous covering location problems. In Drezner, pages 225-262(1995) [28](#)
- [26] Robert L. Bowerman, paul H. Calamai, Brent Hall, The demand Partitioning Method for reducing aggregation errors in p-median problems, *computer Operations Research* 26(1999) 1097-1111

-
- [27] Weber, A.(1929) vber den standort der Inustrientm,Tubingen, 1909; English Trans. :Theory of Location of Industries, (C.J. Friedrich, ed. and trans.), Chicago University press, Chicago, Illinois. [3](#)
- [28] Weiszfeld. E, sur le point pour Lequel la somme des Distances den points Donnes est minimum: The tohoku mathematical Journal, 43, 355-386 [4](#)
- [29] Zemel, E., Probabilistic analysis of geometric Location problems. SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 6, 189-200(1985)
- [30] Zhao, P., Batta, R., Analysis of centriod aggregation for the euclidean distance p-median problem. European Journal of Operational Research 113,147-168.(1985)

Abstract

In recent decades, and applied to environmental issues has increased. One of these types of issues, problems locating the key indicators of progress and industrialization in a society.

location causes the unit to reach its goal of profitability and does not want to stay open.

Issues such as deployment server for one or more points according to the number of requests that applicants have the lowest cost and most profitable of these issues are. Also Complex issues such as selection of an airport emergency centers, hospitals, power plants, landfill sites, the game, transportation terminals, nuclear laboratories, chain stores and ... Locate large-scale problems.

In this thesis the expression and error method of classification, one of the ways we solve problems of large-scale positioning.

The basic concepts of positioning and define aggregation. Innovative methods of classification in Chapter 3 and hexagonal tiling and tiling patterns with a few models have been reviewed and new methods into the fourth consecutive season in the bottom of the box and explaining the algorithm, it also with innovative methods of numerical comparisons are hexagonal.

Keywords: *location , aggregation , error , p - median , Representative*



Shahid Beheshti University
Faculty of Mathematical Sciences
Department of Mathematics

M.S Thesis

Probelam location in large scale

By:

Aazam nadali

Supervisor:

Ph.D. A.nezakati

2011-12-7