حوزه معاونت پژوهشی وفناوری

دانشگاه صنعتی شاهرود

گزارش پایانی طرح پژوهشی

همگرایی شعاعهای خارجی گویا در فضای پارامتر چندجمله ایهای متقارن

کد طرح ۲۳۰۱۰

مجری: احمد زیره

عضو هیات علمی دانشکده ریاضی

خرداد ۱۳۸۶

بسم الله الرحمن الرحیم

گزارش نهایی طرح پژوهشی

کد ۲۳۰۱۰

عنوان:

همگرایی شعاعهای خارجی گویا در فضای پارامتر چندجمله‌ایهای متقارن

مجری :
احمد زیره

دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی شاهرود

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است و تاریخ‌های تصویب و خاتمه آن به ترتیب ۱۳۸۵/۹/۱۲ و ۱۳۸۶/۳/۶ می‌باشد

پروژه

در این گزارش، سیستم دینامیک چندجمله‌ای متقارن $f_c(z) = z(z^d + c)$ را بررسی می‌کنیم. در زمینه دینامیک چندجمله‌ای درجه دوم $P_c(z) = z^۲ + c$ دووادی و هوبارد ثابت کردند که شعاعهای خارجی گویا به پارامترهایی در مجموعه مندلبرات $M_۲$ همگرا می‌باشند[۳]. این نتیجه به حالت چندجمله‌ای $z^d + c$ تعمیم یافته است[۵]. ما این نتیجه را به حالت کلیتر چندجمله‌ای متقارن $f_c = z(z^d + c)$ گسترش می‌دهیم[٦].

فهرست مطالب

۰—۱ مقدمه

فرض کنیم $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ یک چندجمله‌ای از صفحه مختلط است. برای هر $z \in \mathbf{C}$ مدار z بصورت زیر می‌باشد.

$$Orb_f(z) = \{z, f(z), f(f(z)), \cdots, f^n(z). \cdots\}$$

صفحه مختلط $\mathbf{C}$ به دو قسمت تقسیم میشود:

مجموعه‌کامل ژولیا

$$K(f) = \{z \in \mathbf{C}; \quad Orb_f(z) \text{ کرانداراست } \}$$

ومتمم آن: پایه جاذب بی‌نهایت

$$.A_\infty(f) = \mathbf{C} - K(f)$$

مرز$K(f)$ را مجموعه ژولیا مینامیم و با نماد $J(f)$ نمایش میدهیم. در این پروژه، سیستم دینامیک چندجمله‌ای $f_c(z) = z^{d+1} + cz$ با $d \geq 1$ را بررسی می کنیم. از میان مسائل متعدد در این زمینه، ما نتایج شناخته شده چندجمله‌ایهای درجه دوم $Q_c(z) = z^2 + c$ و چندجمله‌ایهای $g_c(z) = z^d + c$ را به حالت کلی چندجمله‌ای متقارن f_c گسترش میدهیم. در دهه اخیر خواص توپولوژیک و تئوری اندازه این مجموعه‌ها مورد توجه قرار گرفته است[۵].

گزاره ۰—۳.۲ قضیه ریمان—هورویتز(حالت خاص):

برای هر چندجمله‌ای f با درجه برابر با $deg(f) = d$ داریم $\sum_z v_f(z) = ۲d - ۲$.

مجموعه همبند ساده به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۰—۴.۲ مجموعه همبند ساده:

زیر مجموعه D از کره ریمان $\hat{\mathbb{C}}$ را همبند ساده گوییم اگر متمم آن یعنی $\hat{\mathbb{C}} - D$ همبند باشد.

ارتباط بین مجموعه همبند ساده و مرز آن در قضیه زیر بیان شده است.

گزاره ۰—۵.۲ دامنه D همبند ساده است اگر و تنها اگر مرز ∂D همبند باشد.[۱]

تابع مشخصه اویلر به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۰—۶.۲ تابع مشخصه اویلر:

اگر متمم دامنه D دارای n دامنه همبند ساده باشد، مشخصه اویلر آنرا با نماد $\chi(D)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن برابر است با $\chi(D) = ۲ - n$.

ارتباط بین مجموعه همبند ساده و تابع مشخصه اویلر آن در قضیه زیر بیان شده است.

نتیجه ۰—۷.۲ با استفاده از تابع مشخصه اویلر نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱) $\chi(D) = ۲$ اگر و تنها اگر $D = \hat{\mathbb{C}}$.

۲) $\chi(D) = ۱$ اگر و تنها اگر D دامنه همبند ساده باشد.

۳) $\chi(D) = ۰$ اگر و تنها اگر D دامنه همبند دو گانه باشد.

گزاره ۰—۸.۲ قضیه ریمان—هورویتز:

فرض کنیم $f : U \to V$ یک چند جمله‌ای با درجه m باشد آنگاه

$$\chi(U) + \delta_f(U) = m\chi(V)$$

بطوریکه $\delta_f(U) = \sum_{z\in U}(v_f(z) - ۱)$.

گزاره ۰—۵.۲ و گزاره زیر ارتباط بین نقاط بحرانی و همبندی مجموعه ژولیای چندجمله‌ایها را مشخص می کنند.

گزاره ۰—۹.۲ شرایط هم‌ارزی بین نقاط بحرانی و همبندی مجموعه ژولیا:

فرض کنیم f یک چندجمله‌ای با درجه $deg(f) \geq ۲$ باشد آنگاه شرایط زیر با هم معادل می‌باشد.

الف)مجموعه $A_\infty(f)$ یک دامنه همبند ساده می‌باشد.

ب) نقاط بحرانی f در دامنه $A_\infty(f)$ قرار نمی‌گیرد.

اثبات. الف)← ب). فرض کنیم $A_\infty(f)$ همبند ساده باشد. بنابراین $\chi(A_\infty(f)) = ۱$. با بکارگیری قضیه ریمان—هورویتز برای چندجمله‌ای f داریم $d = ۱ + \delta_f(A_\infty(f))$. از طرفی f دارای مرتبه $d - ۱$ در نقطه ∞ است. در نتیجه $A_\infty(f)$ شامل نقاط بحرانی f نمی‌باشد.

ب)← الف). فرض کنیم نقاط بحرانی f در دامنه $A_\infty(f)$ قرار نگیرد. در این صورت به ازای هر عدد طبیعی n نقاط بحرانی چندجمله‌ای f^n در دامنه $A_\infty(f)$

قرار نمی‌گیرد. حال دیسک $D \subset \hat{\mathbf{C}}$ حول نقطه ∞ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $f(D) \subset D \subset A_\infty(f)$. قرار دهید $D_0 = D$ و $D_n = f^{-n}(D)$. بنابراین D_nها دامنه‌هایی به مرکز ∞ می‌باشند و در رابطه $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \cdots$ صدق می‌کنند.

با استفاده از قضیه ریمان—هورویتز برای نگاشت $f^n : D_n \to D$ و اینکه دامنه $A_\infty(f)$ هیچ یک از نقاط بحرانی f^n را در بر نمی‌گیرد و همچنین درجه f^n برابر با d^n است نتیجه می‌گیریم که: $\chi(D_n) + (d^n - 1) = d^n \chi(D)$ پس $\chi(D_n) = 1$ در نتیجه D_n دامنه همبند ساده می‌باشد. از طرفی داریم $A_\infty(f) = \cup_{i=0}^{\infty} D_i$، چون D_iها دامنه‌های همبند ساده و تو در تو می‌باشند پس $A_\infty(f)$ نیز دامنه همبند ساده می‌شود. ■

۰—۳ مجموعهٔ مندلبرات چندجمله‌ایهای درجه دوم $Q_c(z) = z^2 + c$

در این بخش به معرفی مجموعهٔ مندلبرات چندجمله‌ایهای درجه دوم می پردازیم. برای هر چند جمله‌ای درجه دوم $f(z) = az^2 + bz + d$ یک تبدیل خطی $L(z) = Az + B$ موجود است به‌گونه‌ای که رابطهٔ مزدوجِ، $L \circ f \circ L^{-1}(z) = z^2 + c$ به‌ازای $c \in \mathbf{C}$ برقرار باشد.

پس، هر چند جمله‌ايِ درجه دوم $f(z)$ متناظر با یک چند جمله‌ای به‌صورت $Q_c(z) = z^2 + c$ می باشد.

اکنون به بررسی چند جمله‌ایهای درجه دوم $Q_c(z) = z^2 + c$ که $c \in \mathbf{C}$ می پردازیم. از آنجا که $Q_c(z) = z^2 + c$ دارای تک نقطهٔ بحرانيِ $z = 0$ است، پس طبق گزاره های ۰—۲.۵ و ۰—۲.۹، $K(Q_c)$ همبند است اگر وتنها اگر مدار نقطهٔ بحرانی $z = 0$ کراندار

باشد. امّا، کراندار بودنِ مدار نقطهٔ بحرانی وابسته به انتخاب پارامتر c است.

تعریف ۰—۱.۳ تمام مقادیر پارامتر c که به ازای آنها مجموعهٔ $K(Q_c)$ همبند می شود را مجموعهٔ مندلبرات چندجمله‌ایهای درجه دوم $Q_c(z) = z^۲ + c$ می‌نامیم و آنرا با M نمایش می دهیم. به عبارت دیگر،

$$.M = \{c \in \mathbf{C}; ۰ \notin A_\infty(Q_c)\}$$

مجموعهٔ مندلبرات چندجمله‌ایهای درجه دوم $Q_c(z) = z^۲ + c$ ، M، مکان همبندی چندجمله‌ای درجه دوم $Q_c(z) = z^۲ + c$، $c \in \mathbf{C}$، می باشد. مانند توابع گویا، رفتار دینامیکی نقطهٔ بحرانی $w = ۰$، بر رفتار دینامیکی چندجمله‌ای $Q_c(z)$ تاثیر می گذارد. مجموعهٔ کامل ژولیا$K(Q_c)$ همبند است اگر مدار نقطهٔ بحرانی $w = ۰$ کراندار باشد، و کاملاً ناهمبند است موقعی که این مدار بی کران باشد.
مجموعهٔ مندلبرات ،M، مجموعهٔ مقادیری از پارامتر c می‌باشد که $K(Q_c)$ همبند باشد. یا به طور معادل، مجموعهٔ پارامترهایی می‌باشد به طوری که مدار نقطهٔ بحرانی $w = ۰$ کراندار باشد.

تعریف ۰—۲.۳ شعاع خارجی مجموعه مندلبرات M با زاویهٔ θ عبارت است از مجموعهٔ

$$.R_M(\theta) = \phi_M^{-۱}(\{re^{۲\pi i\theta}; ۱ < r < \infty\})$$

در بررسی همبندیِ موضعیِ مجموعهٔ مندلبرات، شعاع های خارجی با زاویهٔ گویا نقش اساسی دارند.

کارهای دووادی و هوبارد، سولیوان و یوکوز[۴، ۳] اکثراً اختصاص به مطالعهٔ مجموعهٔ مندلبرات دارد. در عین حال، مسایل باز زیادی باقی مانده است. نتایج زیر در مورد مجموعه مندلبرات M شناخته شده می باشند[۳]:

۱) مجموعهٔ مندلبرات فشرده و همبند می باشد.

۲) درون مجموعهٔ مندلبرات شامل مولفه‌های همبندی می باشد.

۳) اگر θ گویا باشد، آنگاه شعاع خارجی گویای $R_M(\theta)$ به پارامتری بر مرز ∂M همگراست.

سعی ما بر اینست که نتایج فوق را به حالت کلی چند جمله‌ایهای متقارن گسترش دهیم. تعمیم این نتایج را می‌توانید در بخش پایانی ملاحظه کنید.

۴—۰ خانواده چندجمله‌ایهای متقارن $f_c(z) = z(z^d + c)$

مطالعه مکان همبندی چندجمله‌ایهای تکین $f(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0$ در فضای پارامتر $\mathrm{C^d}$ کار مشکل و پیچیده‌ای میباشد. برای این منظور شرایطی را در نظر می گیریم تا چندجمله‌ایهای فوق به خانواده یک پارامتری $f_c(z) = z(z^d + c)$ تبدیل گردند. برای این منظور تعریف زیر را در نظر می گیریم.

تعریف ۰—۱.۴ نگاشت خطی $R(z) = az + b$ را یک اتومرفیسم چند جمله‌ای $f(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0$ مینامیم اگر R با f جابه جا شود یعنی $R \circ f \circ R^{-1} = f$.

خانواده تمام اتومرفیسمهای f را با نماد $Aut(f)$ نمایش می دهیم.

گروه دورانی $\sum_d = \{a \in C, a^d = ۱\}$ را در نظر بگیرید.

گزاره ۰–۲.۴ برای چندجمله‌ای تکین $f(z) = z^{d+۱} + a_{d-۱}z^{d-۱} + \cdots + a_۰$ شرایط زیر معادل میباشد:

آ) $Aut(f) = \sum_d$.

ب) وجود دارد $c \in C$ بطوریکه $f(z) = f_c(z) = z(z^d + c)$.

ج)مبدا یک صفر f میباشد و نقاط بحرانی $Z(f') = \{z \in C, f'(z) = ۰\}$ تحت عمل گروه$\sum_d$ پایدار میباشد.

اثبات. آ)$\leftarrow$ ب). اگر $Aut(f) = \sum_d = \{a \in C, a^d = ۱\}$ آنگاه اتومرفیسم‌های f به‌صورت $R(z) = az$ می‌باشد که $a^d = ۱$. بنابراین $R^{-۱}(z) = \frac{۱}{a}z$. حال از رابطه $R \circ f \circ R^{-۱} = f$ داریم: $R \circ f \circ R^{-۱}(z) = z^{d+۱} + \frac{a_{d-۱}}{a^{d-۲}}z^{d-۱} + \cdots + a_۱z + aa_۰$ با مقایسه ضرایب با $f(z) = z^d + a_{d-۱}z^{d-۱} + \cdots + a_۰$ (ب) نتیجه می‌شود.

ب)$\leftarrow$ ج). اگر $f(z) = z(z^d + c)$ آنگاه $z = ۰$ یک نقطه ثابت چندجمله‌ای f می‌باشد و نقاطبحرانی f به صورت زیر

$$c_۰, c_۱ = ac_۰, \cdots, c_{d-۱} = a^{d-۱}c_۰$$

می باشد که $a = e^{۲\pi i/d}$ و $c_۰$ یکی از جواب های معادلهٔ $\frac{d}{dz}f(z) = ۰$ است یعنی

$$.c_۰ = (\frac{-c}{d+۱})^{۱/d}$$

ج)$\leftarrow$ آ). فرض کنیم $c_{\circ}, c_{1}, \cdots, c_{d-1}$ تعداد d نقطه بحرانی چندجمله‌ای $f(z)$ باشند که تحت عمل گروه$\sum_d$ پایدارند. پس $c_1 = ac_{\circ}, \cdots, c_{d-1} = a^{d-1}c_{\circ}$ که $a = e^{2\pi i/d}$. از طرفی نقاط بحرانی ریشه‌های $f'(z)$ است یعنی $f'(z) = (z-c_{\circ})(z-c_1)\cdots(z-c_{d-1})$.

پس از ضرب داریم: $f'(z) = z^d - (1+a+a^2+\cdots+a^{d-1})c_{\circ}z^{d-1} + (1+a+a^2 +$ $\cdots + a^{d-1})c_{\circ}^2 z^{d-2} + \cdots + (1+a+a^2+\cdots+a^{d-1})c_{\circ}^{d-1}z^1 + a^{d-1}c_{\circ}^d$ از طرفی چون $a^d = 1$ پس $1 + a + a^2 + \cdots + a^{d-1} = \frac{1-a^d}{1-a} = \circ$ در نتیجه $f'(z) = z^d + a^{d-1}c_{\circ}^d$ بنابراین $f(z) = \frac{1}{d+1}z^{d+1} + a^{d-1}c_{\circ}^d z + l$ حال چون $z = \circ$ نقطه ثابت چندجمله‌ای تکین $f(z)$ است در نتیجه $f(z) = z^{d+1} + cz$ که $c = a^{d-1}c_{\circ}^d$. حال با فرض $R(z) = az + b$ و رابطه $R \circ f \circ R^{-1} = f$ داریم: $az^{d+1} + acz + b = (az+b)^{d+1} + c(az+b)$ با مقایسه ضرایب نتیجه می‌شود که $a^d = 1$ و $b = \circ$. ■

تعریف ۰—۳.۴ چند جمله‌ای $f_c(z) = z(z^d + c)$ را یک چند جمله‌ای متقارن مینامیم.

تعریف ۰—۴.۴ مدار متناوب زیر را در نظر بگیرید.

$$z_{\circ}, z_1 = f_c(z_{\circ}), \cdots, z_{n-1} = f_c^{n-1}(z_{\circ}), z_n = f_c^n(z_{\circ}) = z_{\circ}.$$

اگر نقاط $z_1, \cdots, z_n$ نقاط مجزایی باشند، عدد صحیح $n \geq 1$ را دورهٔ تناوب این مدار می نامیم.

مقدار مشتق f_c را برای این مدار متناوب بصورت زیر

$$\lambda = (f_c^n)'(z_i) = f_c'(z_1).f_c'(z_2)\cdots f_c'(z_n)$$

تعریف می کنیم و آنرا مضرب این مدار متناوب می نامیم.

تعریف ۰–۵.۴ یک مدار متناوب راجاذب ،دافع و بی تفاوت می‌نامیم، اگر مضرب آن به ترتیب $|\lambda| < 1$، $|\lambda| > 1$ و $|\lambda| = 1$ باشد. نقطهٔ متناوب z_0 راسهموی گوییم اگر $\lambda = 1$ یعنی مضرب آن برابر یک باشد و هیچ تناوب f_c^n برابر با نگاشت همانی نباشد.

برای چند جمله‌ای $f_c(z) = z(z^d + c)$، بینهایت یک نقطه ثابت جاذب می باشد. حوزهٔ جذب آن را با$A_c(\infty)$ نمایش می دهیم، یعنی

$$A_c(\infty) = \{z \in \mathbf{C}; \lim_{n\to\infty} f_c^n(z) = \infty\},$$

و مجموعهٔ کامل ژولیا را برابر با متمم $A_c(\infty)$ می گیریم، یعنی $K_c = \mathbf{C} - A_c(\infty)$ و مجموعه ژولیا را برابر با مرز K_c در نظر می گیریم، یعنی $J_c = \partial K_c$. همانطور که می دانیم همبندی مجموعهٔ ژولیای J_c وابسته به نقاط بحرانی $f_c(z)$ می باشد. چند جمله ای متقارن $f_c(z) = z(z^d + c)$ دارای d نقطهٔ بحرانی متقارن به صورت زیر

$$c_0, c_1 = \omega c_0, \cdots, c_{d-1} = \omega^{d-1} c_0$$

می باشد که $\omega = e^{2\pi i/d}$ و c_0 یکی از جواب های معادلهٔ $\frac{d}{dz} f_c(z) = 0$ می باشد یعنی

$$c_0 = (\frac{-c}{d+1})^{1/d}.$$

مقادیر بحرانی نیز دارای تقارن می‌باشند:

$$\nu_0 = f_c(c_0), \nu_1 = \omega \nu_0, \ldots, \nu_{d-1} = \omega^{d-1} \nu_0.$$

حال طبق گزاره های ۰—۵.۲ و ۰—۹.۲، مجموعهٔ ژولیا J_c همبند است اگر و تنها اگر نقاط بحرانی چندجمله‌ای $f_c(z)$ متعلق به $A_c(\infty)$ نباشند. چون نقاط بحرانی و مقادیر بحرانی چندجمله‌ای $f_c(z)$ متقارن می باشند، پس مجموعهٔ J_c همبند است اگر و تنها اگر $c_\circ \notin A_c(\infty)$.

حال درفضای پارامترC، مجموعهٔ مقادیر پارامتر c را در نظرمی گیریم که J_c همبند باشد. همانند تعریف ۰—۱.۳ برای مجموعه مندلبرات چندجمله‌ایهای درجه دوم می‌توان مجموعه مندلبرات چندجمله‌ایهای متقارن را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۰—۶.۴ مجموعهٔ مندلبرات $f_c(z) = z(z^d + c)$، عبارت است از مجموعهٔ

$$C_d = \{c \in \mathbf{C}; c_0 \notin A_c(\infty)\}.$$

۰—۵ خواص مجموعه مندلبرات C_d

دراین بخش به بررسی مجموعهٔ C_d می پردازیم. نخست نشان می دهیم که مجموعهٔ C_d در یک گوی به شعاع $\frac{d+1}{d}\alpha$ قرار دارد. با استفاده از آن، نشان می‌دهیم که C_d فشرده است. بعد از آن مولفه‌های همبند درون C_d را بررسی می کنیم. و در انتها همگرایی شعاعهای خارجی در مجموعه مندلبرات C_d را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۰—۱.۵ برای هر $d \geq ۲$ عدد حقیقی α، $۲ > \alpha > ۱$ وجود دارد که

$$C_d = \{c \in C; \quad |f_c^n(c_0)| \leq (1 + \frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d}, \qquad \forall n \in N\}.$$

اثبات. فرض کنیم $|z| > (1 + |c|)^{1/d}$، مثلاً $|z|^d = 1 + |c| + \epsilon$ که $\epsilon > 0$. آنگاه با استفاده از نامساوی مثلث داریم:

$$|f_c(z)| \geq |z|(|z|^d - |c|) \geq (1 + \epsilon)|z|,$$

و با استقراء خواهیم داشت $|f_c^n(z)| \geq (1 + \epsilon)^n |z|$. در واقع اگر فرض استقراء را بپذیریم، آنگاه

$$|f_c^n(z)| \geq (1 + \epsilon)^n |z| \Rightarrow |f_c^n(z)|^d \geq (1 + \epsilon)^{nd} |z|^d > |z|^d = 1 + |c| + \epsilon$$

لذا

$$|f_c^n(z)| > (1 + |c|)^{1/d}.$$

بنابراین

$$|f_c(f_c^n(z))| \geq (1 + \epsilon)|f_c^n(z)| \geq (1 + \epsilon)(1 + \epsilon)^n |z|.$$

در نتیجه، برای نقاط $|z| > (1 + |c|)^{1/d}$، دنبالهٔ تکرارهای $\{f_c^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ به بی‌نهایت واگرا می باشد. یعنی دامنهٔ $\{z; |z| > (1 + |c|)^{1/d}\}$ در حوزهٔ جذب بی نهایت قرار می گیرد،

$$\{z; |z| > (1 + |c|)^{1/d}\} \subset A_c(\infty).$$

اکنون چندجمله‌ای حقیقی—مقدار $g : R \to R$ با ضابطهٔ $g(t) = t^{d+1} - (d + 1)t - d$ را در نظر می‌گیریم. به ازای $d \geq 2$، چند جمله‌ای $g(t)$ دارای مشتقی برابر

است. $g'(t) = (d+1)(t^d - 1)$ پس $g(t)$ در فاصله(۱و۰) نزولی است و چون $g(0) < 0$ پس $g(t)$ در فاصله(۱و۰) ریشه ندارد. از طرفی $g(t)$ در فاصله(۲و۱) صعودی است و چون $g(1) < 0$ و $g(2) > 0$ پس $g(t)$ در فاصله(۲و۱) فقط یک ریشه دارد. پس بنا بر قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته، $g(t)$ تنها یک ریشهٔ مثبت α دارد،که $1 < \alpha < 2$.

حال اگر مقادیر پارامتر c خارج قرص به شعاع $\frac{d+1}{d}\alpha$ انتخاب شوند، یعنی اگر $|c| > \frac{d+1}{d}\alpha$ آنگاه $\frac{d}{d+1}|c| > \alpha$ و از آنجا $g(\frac{d}{d+1}|c|) > 0$، یعنی $\frac{d^d}{(d+1)^{d+1}}|c|^{d+1} > (1+|c|)$ و از طرفی مقدار بحرانی $f_c(c_0)$ برابر است با:

$$|f_c(c_0)|^d = \frac{d^d}{(d+1)^{d+1}}|c|^{d+1}.$$

در نتیجه، $|f_c(c_0)| > (1+|c|)^{\frac{1}{d}}$ یعنی $f_c(c_0)$ متعلق به حوزهٔ جذب بی نهایت می باشد، $c_0 \in A_c(\infty)$. به همین طریق اگر به ازای nای داشته باشیم $|f_c^n(c_0)| > (1+\frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d}$ آنگاه به شیوهٔ مشابه $c_0 \in A_c(\infty)$.

پس $c \in C_d$ اگروتنهااگر برای هرعدد طبیعی n داشته باشیم $|f_c^n(c_0)| \leq (1+\frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d}$.

■

۰—۵—۱ فشردگی مجموعهٔ مندلبرات C_d

در [۴] ثابت شده‌که مجموعهٔ مندلبرات چندجمله‌ایهای درجه دوم،M، یک مجموعه فشرده است. ما در این بخش ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ مندلبرات C_d همانند M یک مجموعهٔ فشرده‌می‌باشد.

نتیجه ۰–۲.۵ مجموعهٔ مندلبرات C_d یک زیر مجموعهٔ فشرده از قرص $\{c; |c| \leq \frac{d+1}{d}\alpha\}$ می‌باشد.

اثبات. اگر $|c| > \frac{d+1}{d}\alpha$ آنگاه با استفاده از گزاره قبل نقطهٔ بحرانی $c_\circ$ متعلق به $A_c(\infty)$ است. پس، از تعریفِ C_d نتیجه می شود که $C_d \subset \{c; |c| \leq \frac{d+1}{d}\alpha\}$. حتی اگر $|c| \leq \frac{d+1}{d}\alpha$ برقرار باشد، موقعی که برای بعضی از nهاداشته باشیم $|f_c^n(c_\circ)| > (1 + \frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d}$، آنگاه $c_\circ$ متعلق به $A_c(\infty)$ است، یعنی $c \notin C_d$. پس، بنابر دو حالت فوق داریم که $c \in C_d$ اگروتنهااگر به ازای هرعدد طبیعی n داشته باشیم $|f_c^n(c_\circ)| \leq (1 + \frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d}$. بنابراین با قرار دادن $D_\alpha = \{c; |c| \leq \frac{d+1}{d}\alpha\}$ داریم، $C_d = \cap_{n=1}^{\infty} f_c^{-n}(D_\alpha)$. چون توابع f_c^n پیوسته می‌باشند و مجموعه D_α بسته است پس C_d یک زیرمجموعهٔ بسته در قرص $\{c; |c| \leq \frac{d+1}{d}\alpha\}$ است. ■

گزاره ۰–۳.۵ مجموعهٔ C_d تحت عمل گروه Σ_d ناوردا می باشد.

اثبات. فرض کنیم که $c \in C_d$ و $\omega = e^{2\pi i/d}$ یکی از عناصر گروه Σ_d باشد. نقطهٔ $c_\circ$ یک نقطهٔ بحرانی چند جمله‌ای $f_c(z)$ می باشد. در نتیجه، مقدار $\omega^{1/d}c_\circ$ یک نقطهٔ بحرانی تابع $f_{\omega c}$ می شود. مقادیر بحرانی دو تابع بدین صورت با هم در ارتباط می باشند:

$$f_{\omega c}(\omega^{1/d}c_\circ) = \omega^{1/d}c_\circ(\omega c_\circ^d + \omega c) = \omega^{\frac{1}{d}+1}c_\circ(c_\circ^d + c) = \omega^{\frac{1}{d}+1}f_c(c_\circ).$$

بنابراین $|f_{\omega c}(\omega^{1/d}c_\circ)| = |f_c(c_\circ)|$. از طرف دیگر، با توجه به مقدار α در گزارهٔ قبل، مجموعه C_d تنها وابسته به d می باشد و چون دو چندجمله‌ای f_c و $f_{\omega c}$ هم درجه می‌باشند پس $\omega c \in C_d$. ■

در قضیه زیر مولفه‌های همبندی درون مجموعه C_d بررسی می شوند و همین طور نشان

می‌دهیم متمم C_d یک دامنهٔ همبند می‌باشد. برای بررسی همبندی مجموعه C_d نیاز به نتایجی داریم که در بخش بعدی به آن می پردازیم.

قضیه ۰—۴.۵ مجموعهٔ C_d دارای خواص زیر می باشد:

آ) مجموعهٔ C_d شامل قرص واحد بسته $\{c; |c| \leq ۱\}$ می باشد،

ب) مولفه های درون C_d، دامنه های همبند ساده می باشند،

ج)مجموعهٔ باز $\mathbb{C} - C_d$، یک مجموعهٔ همبند می باشد.

اثبات.

آ) اگر $|c| < ۱$ آنگاه مبدا $z = ۰$ یک نقطهٔ ثابت جاذب برای $f_c(z)$ می باشد. پس دامنهٔ جاذب آن باید حداقل یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد. با توجه به تقارن نقاط بحرانی، دامنه جاذب مبدا شامل تمام نقاط بحرانی است. یعنی به ازای $|c| < ۱$ مجموعهٔ ژولیا J_c همبند است. در حالتی که $|c| = ۱$ باشد در این حالت یا مبدا نقطهٔ سهموی می باشد پس نقطهٔ بحرانی به دامنه سهموی آن تعلق دارد و یا مبدا نقطهٔ سهموی نمی‌باشد، پس نقطهٔ بحرانی متعلق به مجموعهٔ ژولیا می باشد. پس در هر حال بنا به تقارن، تمام نقاط بحرانی خارج از حوزهٔ جذب بینهایت قرار می‌گیرند، یعنی به ازای $|c| = ۱$ مجموعهٔ ژولیا J_c همبند است یعنی قرص واحد بسته نیز در C_d قرار دارد $\{c; |c| \leq ۱\} \subset C_d$.

ب) فرض کنیم که D یکی از مولفه های درون C_d باشد که همبند ساده نیست. حال یکی از مولفه های متمم D را که کراندار باشد، مثلا X، را در نظر بگیریم. پس X نیز زیر مجموعه $\mathbb{C} - C_d$ می باشد. چون مرز X زیر مجموعه بسته‌ای از C_d است، پس به

ازای هر نقطه c متعلق به‌مرز X، دنبالهٔ $\{f_c^n(c_\circ)\}$ کراندار می باشد. حال اگر هر نقطهٔ c متعلق به‌درون X را در نظر بگیریم، و اصل ماکزیمم را برای دنبالهٔ $\{f_c^n(c_\circ)\}$ بکار ببریم، می‌بینیم که مقدار مطلق $|f_c^n(c_\circ)|$ بیشترین مقدار خود را بر مرز می گیرد. از طرفی برمرز X دنبالهٔ $\{f_c^n(c_\circ)\}$ کراندار می باشد و دارای یک کران ثابت $(1+\frac{d+1}{d}\alpha)^{\frac{1}{d}}$ است. در نقاط درونی X نیز دنبالهٔ $\{f_c^n(c_\circ)\}$ کمتر از این کران ثابت می‌باشد. با توجه به تعریف C_d، نتیجه می شود که $X \subset C_d$ و این با فرضِ $X \subset \mathbf{C} - C_d$ در تناقض است. پس مولفهٔ D همبند ساده می باشد.

ج)فرض خلف: اگر مجموعهٔ $\mathbf{C} - C_d$ همبند نباشد، آنگاه $\mathbf{C} - C_d$ دارای مولفهٔ کرانداری مانند X می‌باشد. دقیقاً با استفاده از روش قسمت (ب)، به تناقض می رسیم. پس $\mathbf{C} - C_d$ همبند می باشد. ■

۰—۵—۲ همگرایی شعاعهای خارجی در مجموعه مندلبرات C_d

در مقاله [۲] این مطلب ثابت شده‌است که نگاشت همدیس Ψ به گونه‌ای وجود دارد که:

$$\Psi : \mathbf{C} - C_d \to \mathbf{C} - \overline{D}$$

$$.\Psi(c) = \psi_c(\nu_\circ)$$

با استفاده از نگاشت همدیس Ψ می‌توان شعاع خارجی را برای مجموعه مندلبرات C_d به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۰—۵.۵ شعاع خارجی برای مجموعه مندلبرات C_d با زاویهٔ θ عبارت است از مجموعهٔ

$$R_{C_d}(\theta) = \Psi_M^{-۱}(\{re^{۲\pi i\theta}; ۱ < r < \infty\}).$$

قضیه ۰–۶.۵ شعاع خارجی $R_{C_d}(\frac{۱}{۲(d+۱)})$ به پارامتر $c = ۱$ بر مجموعه مندلبرات C_d همگرا می‌باشد.

اثبات.

شعاع خارجی $R_c(۰)$ را در مجموعه باز $A_c(\infty)$ در نظر می‌گیریم. شعاع خارجی $R_c(۰)$ یک شعاع ثابت می‌باشد یعنی $f_c(R_c(۰)) \subset R_c(۰)$. اگر شعاع خارجی $R_c(۰)$ به شاخه‌های متعدد تقسیم نشود آنگاه به یک نقطه ثابت همگرا می‌شود. برای شعاع خارجی $R_c(۰)$ دو حالت وجود دارد.

حالت پایدار: در این حالت این نقطه ثابت یک نقطه ثابت دافع می‌باشد. اگر نقطه ثابت یک نقطه ثابت دافع باشد آنگاه همسایگی باز V حول پارامتر c چنان موجود است که به ازای تمام پارامترهای $c' \in V$، شعاع خارجی $R_{c'}(۰)$ همگراست. این حالت را حالت پایدار پارامتر c می‌نامیم. مجموعه نقاط پایدار در فضای پارامتر یک مجموعه باز می‌باشد. در حالی که نقاط تجمع در فضای پارامتر C_d یک مجموعه بسته می‌باشد. پس نقطه ثابت یک نقطه ثابت دافع نمی باشد.

حالت ناپایدار: در این حالت یا شعاع خارجی $R_c(۰)$ به یک نقطه ثابت سهموی با ضریب یک همگرا می‌شود، از طرفی ۰ نقطه ثابت f_c باضریب برابر با c می‌باشد. پس در این حالت $c = ۱$. یا شعاع خارجی $R_c(۰)$ شامل مجموعه مقادیر بحرانی می‌باشد و در نتیجه به شاخه‌های متعدد تقسیم می‌شود.

از طرفی شعاع خارجی $R_c(0)$ شامل مجموعه مقادیر بحرانی است اگر و تنها اگر $c \in_{C_d} (\frac{1}{2(d+1)})$.

برای $c = 1 + \frac{1}{d}$ چندجمله‌ای f_c یک نقطه ثابت جاذب دارد و $\mathbf{R}_+ \subset \mathbf{C} - K_c$. بنابر خاصیت تقارن $R_c(0) = \mathbf{R}_+$ بنابراین $R_c(0)$ به نقطه ثابت $z = 0$ همگرا می‌شود.

همچنین مقدار $\rho > 1$ وجود دارد بطوریکه برای $c = \rho e^{\pi i/d} \in \partial C_d$ چند جمله‌ای f_c دارای یک مدار متناوب با دوره تناوب برابر دو و جاذب می‌باشد که $c_0 < 0 < \nu_o$. بنابر خاصیت تقارن $R_c(0) \subset \mathbf{R}_+$ اما $R_c(0)$ نمی تواند به نقطه ثابت $z = 0$ همگرا شود. در نتیجه فقط برای cهایی در فضای پارامتر حالت ناپایدار برقرار است که یا $c = 1$ یا $c \in_{C_d} (\frac{1}{2(d+1)})$. یعنی شعاع خارجی $R_{C_d}(\frac{1}{2(d+1)})$ به پارامتر $c = 1$ همگرا می‌شود. ■

بنا بر گزاره ۰—۳.۵، مجموعهٔ C_d تحت عمل گروه Σ_d ناوردا می باشد.در نتیجه داریم:

نتیجه ۰—۷.۵ شعاعهای خارجی $R_0 = R_{C_d}(\frac{1}{2(d+1)}), \omega R_0, \cdots, \omega^{d-1} R_0$؛ که $\omega = e^{2\pi i/d}$؛ به پارامترهایی بر مجموعه مندلبرات C_d همگرا می‌باشد.

کتاب‌نامه

[1] A. F. Beardon, (1991): *Iteration of Rational Functions*, Grad. Texts Math. 132, Springer-Verlag, New York.

[2] A. Chademan and A. Zireh, Extension of the Douady-Hubbard's Theorem on Connectedness of the Mandelbrot set to Symmetric Polynomials , *Bull. Iranian Math. Soc*, **31**, no. 1 (2005), 77-84.

[3] A. Douady and J. H. Hubbard, (1984,1985): Etude dynamique des polynomes complexes,I,II, *Publ. Math. Orsay.*

[4] A. Douady and J. H. Hubbard, Itération des polynómes quadratiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **294**, (1985), 123-126.

[5] J. Peterson and G. Ryd, Convergence of rational rays in parameter spaces, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.***274**, (2000), 161-172.

[6] A.Zireh, Convergence of external rays in parameter spaces of symmetric polynomials. *Int. Math. Sciences*, **2**, no. 6, (2007), 291-296.

پیوست

Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 2, 2007, no. 6, 291 - 296

Convergence of external rays in parameter spaces of symmetric polynomials

Ahmad Zireh

Department of Mathematics, Shahrood University
of Technology, P.O.Box 316-36155 Shahrood, Iran
azireh@gmail.com

Abstract

We consider the complex dynamics a one parametric family of polynomials $f_c(z) = z(z^d + c)$, where $d \geq 1$ is a given integer and $c \in \mathbb{C}$. In the dynamics of quadratic polynomials $P_c(z) = z^2 + c$, Douady-Hubbard[1, 2] have proved that periodic rational external rays land on a parameter in the Mandelbrot set. This result has been extended to the parameter space of uni-critical polynomials $g_c(z) = z^d + c$[6]. We extend special case of the Douady-Hubbard Theorem to parameter space of *symmetric polynomials* $f_c(z) = z^d + cz$. Note that when $d = 1$, f_c is just a quadratic polynomial.

Mathematics Subject Classification: Primary: 32H50, Secondary: 37F45, 30D05

Keywords: Mandelbrot set, Multibrot set, connectedness locus, polynomial dynamics, symmetric polynomials, external rays.

1 Introduction

We first recall some terminology and definitions in holomorphic dynamics. let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be a polynomial self-map of the complex plan. For each $z \in \mathbb{C}$, the orbit of z is

$$\mathrm{Orb}_f(z) = \{z, f(z), f(f(z)), \cdots, f^n(z), \cdots\}.$$

The dynamical plane $\mathbb{C}$ is decomposed into two complementary sets: the *filled Julia set*

$$K(f) = \{c \in \mathbb{C} : \quad \mathrm{Orb}_f(z) \quad \text{is bounded}\},$$

and its complementary, the *basin of infinity*

$$A_f(\infty) = \mathbb{C} - K(f).$$

The boundary of $K(f)$, called the *Julia set*, is denoted by $J(f)$.
When f is a quadratic polynomial, say $f(z) = P_c = z^2 + c$, in the extended complex plane $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, the point at infinity is a super-attracting fixed point and hence there exists U_c a neighborhood of infinity and a conformal map(the Böttcher map),

$$\varphi_c : U_c \to \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\},$$

such that $\varphi_c(\infty) = \infty, \varphi_c'(\infty) = 1$ and $\varphi_c \circ P_c = (\varphi_c)^2$. For $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, the external ray of argument θ is defined as

$$R_c(\theta) = \varphi_c^{-1}\{re^{2\pi i\theta}; r > 1\}.$$

A classical result shows that the inverse, Riemann map, φ^{-1} extends continuously to a map from the closed disk if and only if the Julia set J_c is locally connected.
The *Mandelbrot set* $\mathcal{M}_2$ is defined as the set of parameter value c, for which $K(P_c)$ is connected

$$\mathcal{M}_2 = \{c \in \mathbb{C} : K(P_c) \quad \text{is connected}\}.$$

Let $\Phi : \hat{\mathbb{C}} - \mathcal{M}_2 \to \hat{\mathbb{C}} - \overline{D}$ denote the unique *Riemann map* tangent to the identity at infinity(D is open unit disk), then $\Phi(c) = \varphi_c(c)$. Given $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and $c \in \mathbb{C}$: the dynamical(external) ray $R_c(\theta)$ of J_c starts at ∞ and either ends at a precritical point $z_0 \in \bigcup_{n\geq 0} P_c^{-n}(c)$ or ends by accumulating on some subset of the Julia set J_c. The parameter(external) ray $R_{M_2}(\theta)$ of $\mathcal{M}_2$ is the analytic arc $\Phi^{-1}(re^{2\pi i\theta})$. A ray is called a rational ray if θ is rational, i.e. $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. A ray R is said to land or converge, if the accumulation set $\overline{R} - R$ is a singleton subset of J.
The conjecture that the Mandelbrot set is locally connected is equivalent to the continuous landing of all external rays.

The following substantial result have been obtained:

Douady-Hubbard's Theorem[1, 2]. *If $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ is rational, then the external ray $R_{M_2}(\theta)$ for the Mandelbrot set lands on a parameter $c \in \partial M_2$.*

The extension of the theorem to other classes of polynomials constitutes part of today's research in this area. For instance, Douady-Hubbard's Theorem has been extended to uni-critical polynomials $g_c(z) = z^d + c$ [6].

We assume that $\mathcal{C}_d = \{c \in \mathbb{C}; c_0 \notin A_c(\infty)\}$ is the *connectedness locus* of the family f_c. We shall see some properties of $\mathcal{C}_d$, among them the following main result:

Main result. *Let* $\omega = e^{2\pi i/d}$ *then the external rays*

$$R_0 = R_{C_d}(\pm\frac{1}{2(d+1)}), \omega R_0, \cdots, \omega^{d-1}R_0$$

land at root points of the connectedness locus C_d.

2 Symmetric polynomials

To better understand the major contribution, we provide in this section the necessary preliminaries, including a symmetry condition, for the family of polynomials of degree d. This condition is similar to one investigated by Milnor [5] who introduced quadratic rational maps with symmetries and derived the one-parameter family $f_k(z) = k(z + z^{-1})$ instead of the general family of all quadratic rational maps.

From now on, $d \geq 2$ will be a fixed integer. In the study of monic centered polynomials $f(z) = z^{d+1} + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0$, with the parameter space $\mathbb{C}^d$, we can restrict ourselves to a one parameter family, just as Milnor did. For this purpose, we define an *automorphism of* $f(z) = z^{d+1} + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0$, as a non-constant linear map $R(z) = az + b$; $\quad a, b \in \mathbb{C}$ which commutes with f, i.e., $R \circ f \circ R^{-1} = f$. The collection of all automorphisms of f, denoted by Aut (f), forms a finite subgroup of the rotation group $\Sigma_d = \{\gamma \in \mathbf{C}; \gamma^d = 1\}$. In some particular cases, the groups Aut(f) and Σ_d are equal. The following lemma characterizes all such polynomials.

Lemma 2.1 *For a monic centered polynomial* $f(z) = z^{d+1} + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0$, *the following are equivalent:*
(i) $Aut(f)=\sum_d$
(ii) There exists $c \in \mathbb{C}$ *such that* $f(z) = f_c(z) = z(z^{d-1} + c)$ *for all,* $z \in \mathbf{C}$.
(iii) The polynomial f *vanishes at the origin and the critical set* $Z(f') = \{z \in \mathbb{C}; f'(z) = 0\}$ *is stable under the action of* $\sum_d$.

The proof is straightforward and is omitted.

Definition 2.2 *A* $d-$*symmetric polynomial, or it symmetric polynomial if there is no confusion, is a polynomial of the form* $f_c(z) = z(z^d + c), c \in \mathbb{C}$.

Remark. A $d-$symmetric polynomial $f_c(z) = z(z^d + c), c \in \mathbb{C}$ has d symmetric critical points (counting with multiplicity when $c = 0$):

$$c_0, c_1 = \omega c_0, \cdots, c_{d-1} = \omega^{d-1}c_0$$

where $\omega = e^{2\pi i/d}$ and c_0 is one of the solutions of $(d+1)z^d + c = 0$, denoted

$$c_0 = (\frac{-c}{d+1})^{1/d}; \tag{1}$$

accordingly, it has d symmetric critical values

$$v_0 = f_c(c_0) =, v_1 = \omega v_0, \ldots, v_{d-1} = \omega^{d-1} v_0. \tag{2}$$

Notations. We have already fixed the number $d \geq 2$. For each $c \in \mathbb{C}$, let $A_c = A_c(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; \lim_{n\to\infty} f_c^n(z) = \infty\}$ is the domain of attraction at infinity of f_c, K_c is the *filled Julia set* of f_c,i.e.

$$K_c = \{z \in \mathbb{C}; \{f_c^n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{is bounded}\},$$

and $J_c = \partial K_c$ is the *Julia set* of f_c. denote $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{r})$ is a closed disk with radius r around origin, and $\overline{\mathbf{D}}$ is the closed unit disk. Let $\psi_c : \mathbb{C} - K_c \to \mathbb{C} - \overline{D}$ denote the Böttcher coordinate for f_c, i.e. conjugating f_c to $z \to z^{d+1}$ and tangent to the identity at infinity.

3 Properties of the connectedness locus

We first observe that the connectedness locus is bounded and symmetric with respect to the action of Σ_d. More precisely, with the notations above, we have the following.

Proposition 3.1 *For each $d \geq 2$, there exists a real number $1 < \alpha < 2$ such that*

$$\mathcal{C}_d = \{c \in \mathbb{C}; \quad |f_c^n(c_0)| \leq (1 + \frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d} \quad \textit{for every} \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Proof. For $|z| > (1+|c|)^{1/d}$, we have $|f_c(z)| \geq |z|(|z|^d - |c|) > |z|$. It follows that

$$\{z; |z| > (1+|c|)^{1/d}\} \subset A_c(\infty).$$

Now if α is the unique positive root of the polynomial $g(t) = t^{d+1} - (d+1)t - d$, then for $|c| > \frac{d+1}{d}\alpha$, we have

$$|f_c(c_0)| = \frac{d|c|}{d+1}(\frac{|c|}{d+1})^{1/d} > (1+|c|)^{1/d}.$$

Henceforth, $c_0 \in A_c(\infty)$. $\square$

Proposition 3.2 *The set $\mathcal{C}_d$ is invariant under the action of the group Σ_d.*

Proof. Let $c \in \mathcal{C}_d, \omega = e^{2\pi i/d}$ and c_0 a critical point of f_c. Then $\omega c \in \mathcal{C}_d$. Indeed, $\omega^{1/d}c_0$ is a critical point of $f_{\omega c}$, the corresponding critical values being related by

$$f_{\omega c}(\omega^{1/d}c_0) = \omega^{1/d}c_0(\omega c_0^d + \omega c) = \omega^{\frac{1}{d}+1}c_0(c_0^d + c) = \omega^{\frac{1}{d}+1}f_c(c_0),$$

hence $|f_{\omega c}(\omega^{1/d}c_0)| = |f_c(c_0)|$. In view of the proposition 3.1, the value α depends only on degrees and the polynomials f_c and $f_{\omega c}$ have the same degree. This completes the proof. □

4 Main Result

It is proved [3] that the connectedness locus $\mathcal{C}_d$ is connected, precisely there exist the Riemann map,

$$\Psi : \hat{\mathbb{C}} - \mathcal{C}_d \to \hat{\mathbb{C}} - \overline{D}$$

$$\Psi(c) = \psi_c(v_0).$$

Now we are going to prove the landing theorem in the connectedness locus.

Theorem 4.1 *The external rays $R_{\mathcal{C}_d}(\pm\frac{1}{2(d+1)})$ land at $c = 1$, the root point of the connectedness locus.*

Proof. Note that if the ray $R_c(0)$ does not branch then it must land at a fixed point. The situation is stable in c if the fixed point is repelling. It is unstable either if the fixed point is indifferent in which case it is parabolic of multiplier 1, or if the ray $R_c(0)$ branches at the critical points. The stable set is open in the parameter space and the unstable set is closed in the same space.

The ray $R_c(0)$ passes through critical values if and only if

$$Arg(\psi_c(v_0)) = 0.$$

From equation(1) it follows that this is equivalent to

$$c \in R_{\mathcal{C}_d}(\frac{n}{d} \pm \frac{1}{2(d+1)}), \quad n \in \mathbb{Z}$$

i.e., restricted to the one part of the connectedness locus we have $c \in R_{\mathcal{C}_d}(\pm\frac{1}{2(d+1)})$.

For $c = 1 + \frac{1}{d}$ the polynomial f_c has a superattracting fixed point and $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C} - K_c$. By symmetry, $R_c(0) = \mathbb{R}_+$ and $R_c(0)$ lands at fixed point $z = 0$.

There exists $\rho > 1$ so that the polynomials f_c for $c = \pm\rho e^{(\pi i/d)} \in \partial\mathcal{C}_d$ have a superattracting cycle of period two with $c_0 < 0 < v_0$. By symmetry, $R_c(0) \subset \mathbb{R}_+$ but $R_c(0)$ does not land at $z = 0$.

For c in the parameter space the situation can change only if $c = 1$ for which 0 is a parabolic fixed point of multiplier 1, or if $c \in R_{C_d}(\pm\frac{1}{2(d+1)})$ for which the ray $R_c(0)$ branches at c_0. $\square$

Now from theorem 4.1 and proposition 3.2, we have:

Corollary 4.2 *Let* $\omega = e^{2\pi i/d}$ *then the external rays*

$$R_0 = R_{C_d}(\pm\frac{1}{2(d+1)}), \omega R_0, \cdots, \omega^{d-1} R_0$$

land at root points of the connectedness locus C_d.

References

[1] A. Douady and J. Hubbard, Iterations des Polynomes Quadratiques Complexes , *C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. I,* **29** (1982), 123-126.

[2] A. Douady and J. Hubbard, Etude dynamique des polynomes complexes, *Prepublications mathemathiques d'Orsay,* no. 2/4 (1984 / 1985).

[3] A. Chademan and A. Zireh, Extension of the Douady-Hubbard's Theorem on Connecteness of the Mandelbrot set to Symmetric Polynomials, *Bull. of Iranian Math. Soc,* **31**, no. 1 (2005), 77-84.

[4] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, American Mathematical Society, Providence 2000.

[5] J. Milnor, Geometry and dynamics of quadratic rational maps, *Experimental Math*, **2** , no. 1 (1993), 37-83.

[6] J. Peterson and G. Ryd, Convergence of rational rays in parameter spaces, *The Mandelbrot set, theme and variations, London Math. Soc. Lecture Note Ser.,***274**, Cambridge Univ. Press, Cambridge,(2000), 161-172.

Received: July 26, 2006