بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پرتوهای پارامتری گویا از مجموعه‌ی مولتی برات

دانشجو: علی چمنی

اساتید راهنما:
دکتر احمد زیره
دکتر میرحیدر جعفری

استاد مشاور:
دکتر ابراهیم هاشمی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

تیرماه ۱۳۸۹

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم صورتجلسه دفاع پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **علی چمنی** رشته ریاضی گرایش محض تحت عنوان **پرتوهای پارامتری گویا از مجموعه مولتی برات** که در تاریخ ۸۹/۴/۳۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح زیر است :

قبول (با درجه : عالی امتیاز ۱۸/۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۸) ۲ـ بسیار خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶)

۳ـ خوب (۱۵/۹۹ ـ ۱۴) ۴ـ قابل قبول (۱۳/۹۹ ـ ۱۲)

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	احمد زیره	استادیار	
۲ـ استاد راهنمای دوم	میرحیدر جعفری	استادیار	
۳ـ استاد مشاور	ابراهیم هاشمی	دانشیار	
۴ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	کامران شریفی	استادیار	
۵ـ استاد ممتحن	مهدی ایرانمنش	استادیار	
۶ ـ استاد ممتحن	محمود بیدخام	استادیار	

تأیید رئیس دانشکده : احمد زیره

تقدیم خالصانه به پدر، مادر، فرزند ، همسر عزیزم و خانواده محترمش

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید.

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

قدردانی و تشکر

اگر خزان را امید بهاری نبود، اگر درد را امید شفائی نبود، بی شک تلاش که مهمترین عامل سازندگی و رشد انسان است در گرداب تنبلی هلاک می‌گشت. اما تقدیر این نبود، تا زندگی معنا یابد و آنانکه می‌خواهند همیشه زنده بمانند به تلاشی بزرگ برای رسیدن به امیدی در دوردست واداشته شوند. خداوند متعال را شاکرم که به من توفیق داد تا نگارش این رساله را به پایان برسانم. در به فرجام رسانیدن این مهم، از گنجینه علم و حکمت و سرچشمه بذل و معرفت بزرگانی بهره برده‌ام که بر خود واجب می‌دانم از تمامی آن بزرگواران کمال تشکر و قدردانی را بنمایم. لذا بر خود می‌دانم از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر احمد زیره به خاطر زحمات فراوان و راهنمائی‌های ایشان و جناب آقایان دکتر میرحیدر جعفری و دکتر ابراهیم هاشمی که در انجام این مهم مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم و برایشان سلامتی و موفقیت را از خداوند منان خواستارم. همچنین از آقایان دکترمحمود بیدخام و دکتر مهدی ایرانمنش که قبول زحمت نموده و داوری این پایان نامه را به عهده گرفته‌اند تشکر می‌نمایم. در پایان از خانوادهٔ عزیزم که همیشه و در تمامی مراحل زندگی راهنما و مشوق من بوده‌اند و تمامی موفقیّت‌های من مرهون زحمات و فداکاری ایشان می‌باشد، سپاسگزارم. امیدوارم این پایان نامه برای اهل فن و دوستداران دانش مفید واقع شود.

تعهد نامه

اینجانب .... دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ....

دانشکده .... دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه ....

.... تحت راهنمائی............... متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد

چکیده

این پایان‌نامه تشکیل شده از ۸ فصل که در فصل ۲مفاهیم،تعاریف و قضیه‌هائی مهم از دینامیک مختلط را یادآوری می‌کنیم، مجموعه‌های مولتی‌برات[۱] را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های پایه‌ای آن‌ها رانشان می‌دهیم.

در فصل ۳،پیرو میلنور[۲] توصیف‌های روشن مدار را معرفی می‌کنیم و تعدادی از ویژگی‌های آن‌ها را در بخش‌هایی از فصل ۲ نشان می‌دهیم که برای فصل‌های بعدی مفید خواهند بود.در ادامه،بحث پایداری توصیف‌های روشن مدار تحت آشفتگی پارامترها را شروع می‌کنیم، که‌در چندین برهان ایده‌ی اصلی‌است.بعلاوه همانند برهان حالت درجه‌ی دوم ،این مفهوم را برای اثبات اولین عبارت در قضیه‌ی ساختار بکار می‌بریم(قضیه‌ی ۳.۳) سپس با توجه‌به این حقیقت که برای $d > 2$ بعضی از پرتوهای پارامتری جفت جفت ختم می‌شوند و دیگر پرتوهای پارامتری بصورت تنها، برای شروع پارامترهای معین مختلفی داریم: بویژه در قضیه‌ی ۵.۳ نشان می‌دهیم که در هر پارامتر غیر اساسی حداقل یک پرتو ختم می‌شود و در قضیه‌ی ۴.۳ نشان می‌دهیم که بعضی از پرتوها دوبه‌دو ختم می‌شوند.

دوباره همانند یک باج به این حقیقت که در کل همه‌ی پرتوهای پارامتری دوبه‌دو ختم می‌شوند بلکه دوباره همیشه یک تعداد معین از آن‌ها در یک مولفه‌ی هیپربولیک ختم می‌شوند، ما این موضوعات را در فصل ۵ معرفی می‌کنیم. در برهان‌های شلچر[۳] و میلنور فصلِ مولفه‌های هیپربولیک بعد از پایان یافتن قضیه‌ی ساختار شروع می‌شود.

از جمله موضوعاتی که در فصل ۴ معرفی می‌شوند این حقیقت است که نه‌تنها درحالت کلی همه‌ی پرتوهای پارامتری دوبه‌دو ختم نمی‌شوند، بلکه همیشه تعداد معینی پرتو در یک مولفه‌ی هیپربولیک ختم می‌شوند.

---

[۱] Multibrot sets

[۲] Milnor

[۳] Schleicher

در فصل۵ درخت‌های معروف به درخت هوبارد[۴] را معرفی و به کمک آن‌ها دو لم جداسازی مدار را ثابت می‌کنیم.درخت‌های هوبارد برای بررسی این مطلب که اگر یک پرتو پارامتری در یک پارامتر ختم شود، پرتو دینامیکی متناظر باید در یک نقطه‌ی، معروف به نقطه‌ی‌مشخصه‌ی یک پارامتر ختم شود. بعلاوه ، این مارا در اثبات این مطلب که هر پارامتر غیراساسی نقطه‌ی مختوم دقیقاً یک پرتو پارامتری متناوب است (گزاره‌ی ۱.۵) و این‌که در هر پارامتر سهموی اساسی حداقل دو پرتو پارامتری ختم می‌شوند(گزاره‌ی ۲.۵) قادر می‌سازد، از این رو در این فصل عبارت دوم از قضیه‌ی ساختار ثابت خواهد شد. برای برهانی از سومین عبارت نشان خواهیم داد که حداکثر دو پرتو پارامتری در هر پارامتر سهموی اساسی ختم می‌شود.
در فصل٦ ویژگی‌های بیشتری از مولفه‌های هیپربولیک، بخصوص تعداد ریشه‌ها وبازریشه‌های یک مولفه‌ی هیپربولیک، خواهیم دید.این همچنین عبارت آخر از قضیه‌ی ساختار را ثابت خواهد کرد.
در فصل۷ ما می‌توانیم برهان عبارت سوم۳ را بوسیله‌ی استثناء کردن (بجز) برای هر پارامترسهموی اساسی تمام پرتوها، بجز برای دو تا، همانطور که برای ختم شدن در یک پارامترداوطلب می‌شوند را به پایان ببریم. مفهوم دنباله‌های‌ورزیده[۵] یک ابزار مهم است که برای این منظور بکار می‌بریم.
بوسیله‌ی تحدید کردن حالت یک پرتو باتکرارمتناوب می‌توانیم در فصل۸،چهارمین و پنجمین عبارت از قضیه‌ی ساختار همانند حالت درجه‌ی دوم ثابت کنیم.

دینامیک مختلط ، مولفه هیپربولیک ، پرتو دینامیکی ، دنباله‌های ورزیده
درخت هوبارد

[۴] Hubbard trees
[۵] Kneading Sequences

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

این مقاله در اولین همایش بین المللی نظریه‌توابع هندسی و کاربردهای آن که در شهر ارومیه و در سال ۱۳۸۸ برگزار شد،ارائه گردیده است.

The first International Symposium On Geometric Functions Theory and Application

[1] Reiman Mapping for Mandelbrot set of Symmetric Polynomials

فهرست مندرجات

لیست اشکال

فصل ۱

مقدمه، تاریخه و نگاهی کلی به متن

۱—۱ مقدمه

در این پایان‌نامه،فضای پارامتری چند جمله‌ای‌های تک بحرانی $z^d + c$ که $d \geq ۲$،$d \in \mathbb{Z}$ و $c \in \mathbb{C}$ را مطالعه خواهیم کرد. بویژه به مجموعه‌های مولتی‌برات "$\mathcal{M}_d$" ، یعنی مجموعه‌ی پارامترهای c که برای آن‌ها $z^d + c$ مجموعه‌ی ژولیای همبند دارد،علاقمندیم. مجموعه‌های مولتی‌برات تعمیم فوری مجموعه‌ی آشنای مندلبرات هستند، که برای اولین باربوسیله‌ی دودی و هوبارد[۱] و یادداشت‌های مشهور اُرسی [۲] مطالعه شدند.

ما دوهدف عمده داریم:اولین هدف این است که می‌خواهیم یک برهان از قضیه‌ی‌ساختار برای مجموعه‌های مولتی‌برات ارائه دهیم که یک توصیف ترکیبی از مجموعه‌های مولتی‌برات می‌دهد. برای مجموعه‌ی مندلبرات قضیه‌ی ساختارآشناست و چندین برهان وجود دارد: ابتدا برهان ذکر شده در یادداشت‌های اُرسی فراهم شد. بعلاوه در [۸] یک برهان ساده‌ترو مهم بوسیله‌ی شلچر [۱] وجود دارد، که‌او ابتدا در رساله‌ی دکترای خود [۷] ارائه کرد که بزودی منتشر خواهد کرد. برهان دیگر از میلنور [۶] داده شده‌است.(هر یک از این برهان‌ها با اندکی اصلاحات قضیه‌ی ساختار برای مجموعه‌های مولتی‌برات را ثابت می‌کنند). حال هدف دوم ما ترکیب کردن برهان‌های شلچر و میلنور با روش‌های جدید و بدین وسیله ارائه یک برهان برای قضیه‌ی ساختار است. بعداً قضیه‌ی ساختار را بیان می‌کنیم و بدنبال آن سازماندهی خود از برهان را توصیف می‌کنیم.

قضیّه ۱.۱ (قضیه‌ی ساختار برای مجموعه‌های مولتی‌برات):

برای مجموعه‌ی مولتی‌برات $\mathcal{M}_d$ و پرتوهای پارامتری مربوط به آن عبارات زیر برقرارند:

۱) هر پرتو پارامتری متناوب در یک پارامتر سهموی از $\mathcal{M}_d$ ختم می‌شود.

۲) هر پارامتر سهموی غیراساسی از $\mathcal{M}_d$ نقطه‌ی مختوم دقیقاً یک پرتو متناوب است.

۳) هر پارامتر سهموی اساسی از $\mathcal{M}_d$ ، نقطه‌ی مختوم دقیقاً دو پارامتر متناوب است.

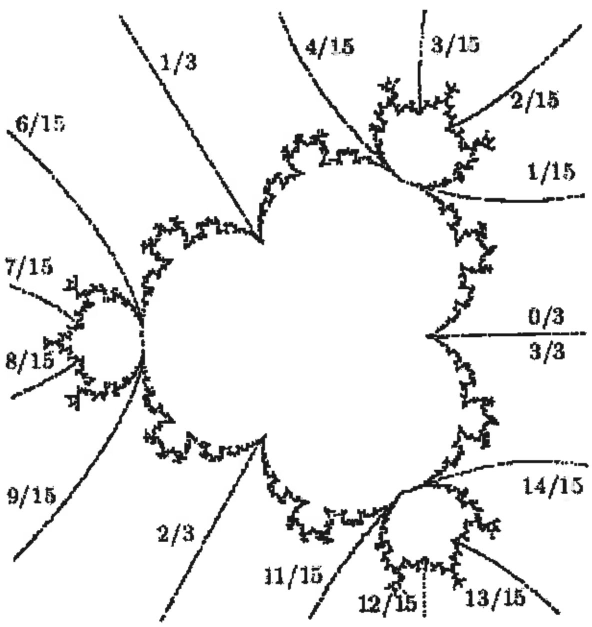
---
[۱] Sheleicher

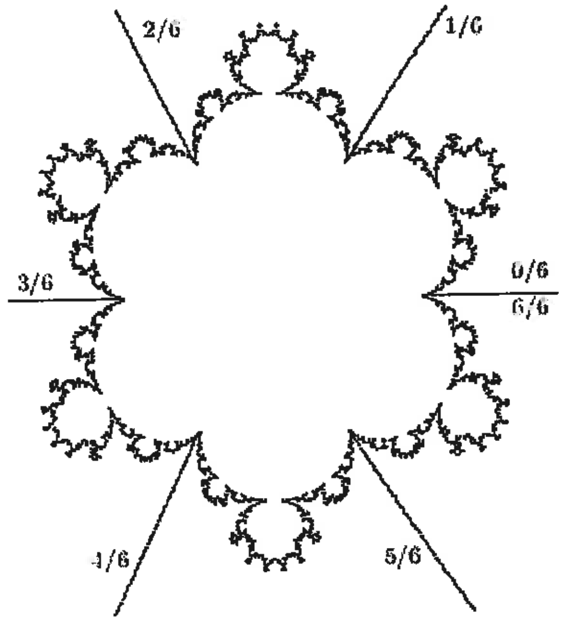
۴) هر پارامتر باتکرارمتناوب در نقطه‌ی میسرویکز[2] از $\mathcal{M}_d$ ختم می‌شود.

۵) هر نقطه‌ی میسیرویکز نقطه‌ی مختوم حداقل یک پرتو پارامتری باتکرارمتناوب است.

٦) هر مولفه‌ی هیپربولیک از $\mathcal{M}_d$ دقیقاً یک ریشه و $d-2$ بازریشه [3] دارد.

برای بدست آوردن ایده‌ی تقریبی از این‌که مجموعه‌های مولتی برات چه سیمایی دارند ما تصاویری از دو تا از آن‌ها نشان می‌دهیم. تصویر سمت چپ $\mathcal{M}_4$ همراه با پرتوهای پارامتری ۱-متناوب و ۲-متناوب است. آن‌ها بوسیله‌ی زاویه‌های متناظرشان نشان شده‌اند. همان‌طور که در قضیه‌ی ساختار بیان شد، این پرتوهای پارامتری مختوم هستند و بویژه بعضی از نقاط، پارامترهای سهموی اساسی ، هر یک نقاط مختوم دقیقاً دو پرتو پارامتری هستند. (پرتو نشان شده بوسیله‌ی صفر و یک مفهوم خاصی دارد که دوباره به حساب می‌آید)





Misiurwicz[2]

Co-root[3]

نقاط مختوم دیگر در تصویر پارامترهای سهموی غیر اساسی هستند. از سمت راست $\mathcal{M}_۷$ با پرتوهای پارامتری ۱-متناوب نشان داده شده است. باید توجه کنیم که قسمت کراندار نیز به مجموعه‌ی مولتی برات تعلق دارد.

کار اصلی ما عبارت است از اثبات این مطلب که دقیقاً دو پرتو پارامتری در هر پارامتر سهموی اساسی ختم می‌شوند. همان‌طور که قبلاً ذکر شده، برهان‌های شلچر و میلنور را ترکیب می‌کنیم. شلچر نشان می‌دهد که هر پارامتر سهموی نقطه‌ی مختوم حداکثر دو پرتو پارامتری است– در حالت درجه‌ی دوم تمام پارامترهای سهموی اساسی هستند– و ترکیب کردن این با یک روش شمارشی عمومی ، ایجاب می‌کند که دقیقاً دو پرتوپارامتری در هر پارامتر سهموی ختم می‌شوند. در مقابل، میلنور نشان می‌دهد که حداقل دو پرتو پارامتری در هر پارامتر سهموی ختم می‌شوندو دوباره با بکار بردن یک روش محاسبه‌ی عمومی، که نشان می‌دهد که هیچ پرتو پارامتری چپ نیست ، یعنی ، آن‌ها دو به دو ختم می‌شوند. قصد ما این است که بوسیله‌ی استراتژی میلنور که حداقل دو تا و بوسیله‌ی روش شلچر که حداکثر دو تا پرتو پارامتری در هر پارامتر سهموی اساسی ختم می‌شوند، نشان دهیم که روش شمارش عمومی را می‌توانیم حذف کنیم زمانی درگذشته میلنور این استراتژی عمومی را برای حالت درجه‌ی دوم پیشنهاد کرد.

۱ – ۲ نگاه کلی به متن

این پایان‌نامه تشکیل شده از ۸ فصل که در فصل ۲ مفاهیم،تعاریف و قضیه‌هائی مهم از دینامیک مختلط را یادآوری می‌کنیم، مجموعه‌های مولتی‌برات را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های پایه‌ای آن‌ها رانشان می‌دهیم.

در فصل ۳،پیرو میلنور توصیف‌های روشن مدار را معرفی می‌کنیم و تعدادی از ویژگی‌های آن‌ها را در بخش‌هایی از فصل ۲ نشان می‌دهیم که برای فصل‌های بعدی مفید خواهند بود.در ادامه،بحث پایداری توصیف‌های روشن مدار تحت آشفتگی پارامترها را شروع می‌کنیم، که‌در چندین برهان ایده‌ی اصلی‌است.بعلاوه همانند برهان حالت درجه‌ی دوم ،این مفهوم را برای اثبات اولین عبارت در قضیه‌ی ساختار بکار می‌بریم(قضیه‌ی ۳.۳) سپس با توجه‌به این حقیقت که برای $d > ۲$ بعضی از پرتوهای پارامتری جفت جفت ختم می‌شوند و دیگر پرتوهای پارامتری بصورت تنها، برای شروع پارامترهای معین مختلفی داریم: بویژه در قضیه‌ی ۵.۳ نشان می‌دهیم که در هر پارامتر غیر اساسی حداقل یک پرتو ختم می‌شود و در قضیه‌ی ۴.۳ نشان می‌دهیم که بعضی از پرتوها دوبه‌دو ختم می‌شوند.

دوباره همانند یک باج به این حقیقت که در کل همه‌ی پرتوهای پارامتری دوبه‌دو ختم می‌شوند بلکه دوباره همیشه یک تعداد معین از آن‌ها در یک مولفه‌ی هیپربولیک ختم می‌شوند، ما این موضوعات را در فصل ۵ معرفی می‌کنیم. در برهان‌های شلچر و میلنور فصل مولفه‌های هیپربولیک بعد از پایان یافتن قضیه‌ی ساختار شروع می‌شود.

از جمله موضوعاتی که در فصل ۴ معرفی می‌شوند این حقیقت است که نه‌تنها درحالت کلی همه‌ی پرتوهای پارامتری دوبه‌دو ختم نمی‌شوند، بلکه همیشه تعداد معینی پرتو در یک مولفه‌ی هیپربولیک ختم می‌شوند.

در فصل ۵ درخت‌های معروف به درخت هوبارد را معرفی و به کمک آن‌ها دو لم جداسازی مدار را ثابت می‌کنیم.درخت‌های هوبارد برای بررسی این مطلب که اگر یک پرتو پارامتری در یک پارامتر ختم شود، پرتو دینامیکی متناظر باید در یک نقطه‌ی، معروف به نقطه‌ی‌مشخصه‌ی یک پارامتر ختم

شود. بعلاوه ، این مارا در اثبات این مطلب که هر پارامتر غیراساسی نقطه‌ی مختوم دقیقاً یک پرتو پارامتری متناوب است (گزاره‌ی ١.۵) و این‌که در هر پارامتر سهموی اساسی حداقل دو پرتو پارامتری ختم می‌شوند(گزاره‌ی ٢.۵) قادر می‌سازد، از این رو در این فصل عبارت دوم از قضیه‌ی ساختار ثابت خواهد شد. برای برهانی از سومین عبارت نشان خواهیم داد که حداکثر دو پرتو پارامتری در هر پارامتر سهموی اساسی ختم می‌شود.

در فصل٦ ویژگی‌های بیشتری از مولفه‌های هیپربولیک، بخصوص تعداد ریشه‌ها وبازریشه‌های یک مولفه‌ی هیپربولیک، خواهیم دید.این همچنین عبارت آخر از قضیه‌ی ساختار را ثابت خواهد کرد.

در فصل٧ ما می‌توانیم برهان عبارت سوم٣ را بوسیله‌ی استثناء کردن (بجز) برای هر پارامترسهموی اساسی تمام پرتوها، بجز برای دو تا، همانطور که برای ختم شدن در یک پارامترداوطلب می‌شوند را به پایان ببریم. مفهوم دنباله‌های‌ورزیده یک ابزار مهم است که برای این منظور بکار می‌بریم.

بوسیله‌ی تحدید کردن حالت یک پرتو باتکرارمتناوب می‌توانیم در فصل٨،چهارمین و پنجمین عبارت از قضیه‌ی ساختار همانند حالت درجه‌ی دوم ثابت کنیم.

فصل ۲

تعاریف و مقدمات

۲–۱ تعاریف اولیه

در این فصل می خواهیم نمادهایمان را معرفی کرده و تعاریف مشهور و حقایقی ازآنالیز مختلط و دینامیک هولومورفیک را تکرار کنیم. همچنین به « سخنرانی های مقدماتی روی دینامیک در یک متغیر» از میلنورمراجعه می کنیم. به علاوه تعدادی ویژگی اساسی از مجموعه‌های مولتی برات در زیربخش ۳.۲ ثابت می کنیم. حال نمادگذاری هایمان را تنظیم می کنیم.

نماد گزاری ۱.۲ میدان اعداد حقیقی رابا $\mathbb{R}$ ، میدان اعداد مختلط را با$\mathbb{C}$ وفضای تصویر یک بعدی روی $\mathbb{C}$ را با$\mathbb{P}_1$ نمایش می دهیم.

بازه‌ی واحد بسته را بوسیله‌ی $I := [0, 1]$، دیسک باز باشعاع r و مرکزa را با $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} | |z - a| < r\}$ و بویژه دیسک واحد باز رابا $D := B_1(0)$ ،بستار و درون یک زیر مجموعه‌ی $A \subset \mathbb{C}$ نسبت به توپولوژی القایی را به‌ترتیب با $A^\circ, \bar{A}$ نمایش می‌دهیم، یک مجموعه‌ی کراندار $A \subset \mathbb{C}$ کامل نامیده می‌شود اگر متممش$(\mathbb{P}_1 - A)$ همبند باشد. بوسیله‌ی یک افراز از $\mathbb{C}$ ما به وجود یک خانواده‌ی شمارا از زیر مجموعه‌های باز $\mathbb{C}$ طوریکه بستارشان برابر $\mathbb{C}$ است پی می‌بریم. مرز تمام این مجموعه‌های باز، افراز مرزاست، مااغلب افراز رابا مرزش یکی می گیریم. چون ما بطور عمده به چند جمله‌ای‌های با یک نقطه‌ی بحرانی علاقمندیم مناسب است تعریف کنیم: $f_{c,d}(z) := z^d + c$,$(d \geq 2, c \in \mathbb{C})$. در کل ما d را تغییر نمی‌دهیم بنابراین معمولاً به‌جای $f_{c,d}$ می‌نویسیم f_c. گاهی‌اوقات مناسب است f_c را با c یکی بگیریم.

فرض کنید g, f توابع مختلط مقدار باشند. در این صورت ما طبق معمول می نویسیم $f(z) := O(g(z))$ برای $z \in U \subset \mathbb{C}$ اگر یک ثابت $c \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد طوریکه $|f(z)| \leq c.|g(z)|$ برای تمام $z \in U$.

در دینامیک تحلیلی، اندازه‌گیری زاویه، در کسر یک گردش تمام (دوره کامل تناوب (کسری از 2π)) رایج و مناسب است. بنابراین زوایای ما عناصری از $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ هستند. به سادگی ما می‌توانیم هر زاویه در رادیان را با یک زاویه‌ی متناظردر $\mathbb{S}^1$ یکی بگیریم، بعلاوه $\mathbb{S}^1$ با $[0,1)$ ایزومورفیک است، لذا بیان هر زاویه‌ی $v \in \mathbb{S}^1$ بصورت یک $e^{2\pi i\theta}$ خوش‌تعریف است. چون یک هم‌ارزی بین تصویر یک نقطه در صفحه‌ی دینامیکی بوسیله‌ی f_c ، و ضرب زاویه بوسیله‌ی d وجود دارد، مناسب است که نگاشت d-لایه را بوسیله‌ی $\left\{\begin{smallmatrix}\sigma:\mathbb{S}^1\longmapsto\mathbb{S}^1\\ v\longmapsto d.v\end{smallmatrix}\right.$ نمایش دهیم. بعلاوه ما می‌خواهیم بازه،روی $\mathbb{S}^1$ را تعریف کنیم: برای دو زاویه‌ی v_1, v_2 در $\mathbb{S}^1$ ما (v_1, v_2) را به عنوان آن مولفه‌ی باز همبند $\mathbb{S}^1 - \{v_1, v_2\}$ تعریف می‌کنیم که‌تمام زوایا را شامل می‌شود که اگر ما روی $\mathbb{S}^1$ در جهت مثبت از v_1 به‌سوی v_2 حرکت کنیم به آنها می‌رسیم.

برای حداقل سه زاویه‌ی $v_1, v_2, \cdots, v_s \in \mathbb{S}^1$ می‌نویسیم $v_1 < v_2 < \cdots < v_s$، اگر $v_{i+1} \in (v_i, v_{i+2})$ که $i \in \{1, 2, \cdots, s-2\}$. توجه کنید که‌اگر $s > 3$ آنگاه v_1, v_s لزومی ندارد متمایز باشند. علاوه بر این، طول بازه‌ی $I_1 \subset \mathbb{S}^1$ را بوسیله‌ی $\mathcal{L}(I_1)$ نمایش می‌دهیم که $\mathcal{L}(\mathbb{S}^1) = 1$.

۲—۲ ابزاری از آنالیز:

دو مفهوم از آنالیز هست که میل داریم آنها را اینجا ذکر کنیم. یعنی، عبارت نگاشت *proper* و همبندی موضعی یک مجموعه.

تعریف ۱.۲ (نگاشت سره[1] و نگاره‌ی درجه):

فرض کنید U یک ناحیه در $\mathbb{C}$ باشد و $\phi : U \longmapsto \mathbb{C}$ یک نگاشت تحلیلی باشد ϕ را سره گوییم‌اگر برای هر دنباله‌ی (c_n) در U با $c_n \longmapsto \partial U$، دنباله‌ی تصویر $\phi(c_n)$ هر مجموعه‌ی فشرده در $\phi(U)$ را ترک کند، اگر برای تمام $z \in \phi(U)$ها تعداد تصاویر وارون z (تعداد عناصر $(\phi^{-1}(z)$) ثابت باشد، فرض کنیم

[1] proper

برابر d باشد آنگاه ϕ نگاره‌ی درجه‌ی d دارد.∘

لم ۱.۲ (نگاشت سره یک نگاره‌ی درجه دارد):

هر نگاشت تحلیلی سره یک نگاره‌ی درجه‌ی خوش تعریف دارد.این تنها یک بیان دوباره‌ی لم $A.11$ در [۹]است. آنجا این لم اثبات شده‌است. بویژه در فصل ۵ تعریف بعدی و نتایج توپولوژیکی‌اش اساسی هستند.

تعریف ۲.۲ (قوس ها و مجموعه های همبند قوسی$\gamma : I \longmapsto \mathbb{C}$)

یک نشانده شده توپولوژیکی از I به توی $\mathbb{C}$ یک قوس است و یک زیرمجموعه‌ی U از $\mathbb{C}$ همبندقوسی است اگرهردو نقطه‌ی U بوسیله یک قوس در U به هم متصل شوند. اگر ما بگوییم که قوس $\gamma : [0, 1] \longmapsto \mathbb{C}$ دو نقطه‌ی z_2, z_1 را به هم وصل می‌کند، منظورمان اینست که $z_1 = \gamma(0)$ و $z_2 = \gamma(1)$. بعلاوه تعریف می‌کنیم $\gamma(J) := \{\gamma(t) | t \in J\}$ برای $J \subset I$.∘

تعریف ۳.۲ (همبندی موضعی و مجموعه‌های موضعا همبندقوسی)

یک زیرمجموعه‌ی $U \subset \mathbb{C}$ موضعاً همبند قوسی است اگر هر نقطه‌ی $z \in U$ ویژگی زیررا داشته باشد. برای هر همسایگی V از z یک همسایگی V' از z وجود داشته باشد که $V' \subset V$ و $U \cap V'$ همبند قوسی باشد.∘

به‌سادگی دیده می‌شود که هر زیرمجموعه‌ی همبندقوسی‌از $\mathbb{C}$ ، همبند است.ولی عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست.به هر حال یک زیرمجموعه‌ی $\mathbb{C}$ موضعاً همبند است اگروتنهااگرموضعاً همبند قوسی باشد.(لم ۱۶.۴ در[۵] را ببنبید) برهان قضیه‌ی مهم زیر در مورد همبندی‌موضعی در بخش ۱۶ در[۵] یافت می‌شود.

قضیّه ۱.۲ (قضیه کاراتئودری)

فرض کنید U یک ناحیه‌ی همبندساده در $\mathbb{C}$ باشد و $\phi : D \longmapsto U$ یک نگاشت همدیس باشد. در این صورت ϕ به یک نگاشت پیوسته‌از $\bar{D}$ بروی $\bar{U}$ توسیع می یابد اگروتنهااگر ∂U موضعاً همبند باشد.

۲—۳ دینامیک صفحه:

دراین بخش ما بعضی از تعاریف آشنا و قضیه‌ها را نسبت به صفحه‌ی دینامیکی دوباره بیان می‌کنیم. یعنی فضایی که توابع‌مان $f_c(z) = z^d + c$ در آن زندگی می‌کنند. آنهااساس مطالعه‌ی ماروی مجموعه‌های مولتی‌برات هستند.طبق معمول تکرار n—ام تابع را با$f^n(z) := f(f^{n-1}(z))$ و $f^\circ = Id$ نمایش می‌دهیم. بعلاوه برای یک نقطه‌ی $z \in \mathbb{C}$ مجموعه‌ی $\mathcal{O}:= \{z, f(z), f^2(z), \cdots\}$ مدار z نسبت به f نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲ نقاط متناوب و باتکرارمتناوب

نقاطی که برای آن‌ها یک عدد صحیح $k \geq 1$ وجود داشته باشد که $f^k(z) = z$ متناوب نامیده می‌شود و عدد صحیح k دوره‌ی تناوب مدار z نسبت به f نامیده می‌شود.کوچکترین دوره‌ی تناوب مدار یک نقطه، دوره تناوب کامل مدار نسبت به f و همچنین مدار یک نقطه‌ی متناوب متناوب نامیده می‌شود.

بوضوح برای یک f ثابت ، دوره‌ی تناوب کامل یک نقطه‌ی z هر دوره‌ی تناوب z رابخش می‌کند.

در بین نقاطی که متناوب نیستند، نقاطی‌هستند که در یک تکرار، به روی یک نقطه‌ی متناوب جهش می‌کنند.این نقاط «باتکرارمتناوب» نامیده می‌شوند. در جزییات بیشتر گوییم که یک نقطه‌ی z باتکرارمتناوب است،اگر یک عدد صحیح $l \geq 1$ وجود داشته باشد بطوریکه $f^l(z)$ متناوب باشد کوچکترین عدد صحیح $l \geq 1$ بااین خاصیت «باتکرارمتناوب z نسبت به f » نامیده می شود و دوره‌ی تناوب کامل $f^l(z)$ ، دوره‌ی تناوب z نسبت به f است. این یعنی اینکه نقاط متناوب، باتکرارمتناوب نیستند.همچنین مدار یک نقطه‌ی بازمتناوب، مدارباتکرارمتناوب نامیده می‌شود.

مثال ۱.۲ نقطه‌ی $z = 1$ برای نگاشت $f(z) = z^2 - 1$ یک نقطه‌ی باتکرارمتناوب است ولی متناوب نیست ($l = 1$)

تعریف ۵.۲ مجموعه‌ی ژولیای کامل، مجموعه‌ی ژولیا و مجموعه‌ی فاتو

مجموعه‌ی ژولیای کامل $K(f)$ از یک چندجمله‌ای f، به عنوان مجموعه‌ی تمام نقاطی که مدار کراندار(یعنی مدار تحت تکرارکراندار باشد) نسبت به f دارند، تعریف می‌شود. مرز $\partial K(f)$، مجموعه‌ی ژولیای f و مولفه‌های $\mathbb{C} - \partial K(f)$ را مولفه‌های اساسی مجموعه‌ی فاتو نامیده می‌شود.

برای مجموعه‌ی ژولیای کامل$f_c(z) = z^d + c$ در حالت کل فقط می‌نویسیم$K_c := K(f(c))$. ⋄

مثال ۲.۲ برای تابع $f(z) = z^2$ مجموعه‌ی ژولیای کامل،دیسک یکه ، مجموعه ژولیا دایره‌ی یکه و مجموعه‌ی فاتو درون و بیرون دایره‌ی یکه است.

تعریف ۶.۲ مضرب مدار

فرض کنیدf یک نگاشت چند جمله‌ای باشد وk دوره‌ی تناوب کامل نقطه‌یz باشد، و مدارz نیز برابر$\{z, f(z), \cdots, f^{k-1}(z)\}$ =$\mathcal{O}$ باشد دراین‌صورت $\lambda(f,\mathcal{O}) := \lambda(f,z) :=$ $\frac{d}{dz}f^k(z) = f'(z)f'(f(z))\cdots f'(f^{k-1}(z))$ رامضرب $\mathcal{O}$ نسبت بهf می‌نامیم. در حالت $f = f_c$ می‌نویسیم$\lambda(c,z), \lambda(c,\mathcal{O})$ بجای $\lambda(f_c,z), \lambda(f_c,\mathcal{O})$.

تعریف ۷.۲ نقاط دافع، جاذب و بی‌اثر

نقطه‌ی متناوب $z \in \mathbb{C}$ ومدارش نسبت به f_c را دافع گوییم اگر $|\lambda(c,z)| > 1$، بی خاصیت اگر $|\lambda(c,z)| = 1$ و جاذب نامیم اگر $|\lambda(c,z)| < 1$ باشد. اگر $|\lambda(c,z)| = 0$ آنگاه $z, \mathcal{O}$ جاذب قوی هستند. درکل، حالت نقطه‌ی بی‌خاصیت، پیچیده‌وجالب است. بنابراین دوباره آنها را به زیررده‌های زیر تقسیم می کنیم.

اگر z بطورگویا بی‌خاصیت باشد یعنی $\lambda(c,z) = e^{2\pi ip/q}$ برای کسر $p/q \in Q$، آنگاه z سهموی نامیده می‌شود، در غیر این‌صورت z بطوراصم بی‌خاصیت است و آنرا $Gremer$ یا $Siegel$ گوییم بر طبق آنکه $z \in \partial K_c$ باشدیانه.

پارامتر c که برای آن چندجمله‌ای f_c نقطه‌ی متناوب سهموی داشته باشد را پارامتر سهموی می گوییم.$\circ$

برای پارامتر سهموی ما باید علاوه بر این به عبارت گلبرگ نیز توجه کنیم:

تعریف ۸.۲ گلبرگ:

فرض کنید z_0 یک نقطه‌ی ثابت سهموی باشد و U', U همسایگی‌هایی از z_0 باشند بطوری‌که f، U رابطور دیفئومورفیک بروی U' بنگارد. دراین صورت مجموعه‌ی بازهمبند U_0 یک گلبرگ جاذب برای f در z_0 است، اگر $\bar{U}_0 \subset U_0 \cap U'$، $f(\bar{U}_0) \subset U \cup \{z_0\}$ و $\bigcap f^n(\bar{U}_0) = \{z_0\}$، $n \geq 0$.

مجموعه‌ی V_0 یک گلبرگ دافع برای f در z_0 است اگریک گلبرگ جاذب برای f^{-1} در z_0 باشد.

قضیه‌ی گل فاتو(قضیه ۷.۲ در [۵] را ببینید) می گوید که هرنقطه‌ی z_0 ازیک مدارسهموی $\mathcal{O}$ از f_c بامضرب $\lambda(c,\mathcal{O}) = e^{2\pi ip/q}$ دارای q گلبرگ جاذب و q گلبرگ دافع‌است که بایکدیگر متناوبند و همراه‌با z_0 یک همسایگی باز از z_0 را تشکیل می‌دهند.$\circ$

تعریف ۹.۲ حوضه‌ی جذب و جذب فوری

برای یک مدارجاذب یاسهموی $\mathcal{O}$، مجموعه‌ی تمام نقاط z که $f^n(z) \longmapsto \mathcal{O}$ حوضه‌ی جذب نامیده

می‌شود. این مجموعه بازاست. فرض کنید Ω حوضه‌ی جذب یک مدار جاذب باشد. در این صورت Ω شامل $\mathcal{O}$ است. و برای هر $z' \in \mathcal{O}$، مولفه‌ی همبندی از Ω که شامل z' باشد، حوضه جذب فوری z' نامیده می‌شود.حوضه‌ی جذب فوری $\mathcal{O}$ عبارت است از اجتماع حوضه‌های فوری تمام نقاط $\mathcal{O}$.
تااین‌جامااین عبارات را فقط برای نقاط و مدارهای متناوب تعریف کرده‌ایم،به هر حال مااین تعاریف را برای یک نقطه‌ی‌باتکرارمتناوب و مواردی‌که قابل بکارگرفتن برای تکرارهای متناوبz باشند،استفاده خواهیم کرد.○

حال چند قضیه در مورد مجموعه‌های ژولیاو مدارهای متناوب آنها بیان می‌کنیم. بیشتر آنها در[۵] یافت می‌شوند. قضیه‌ی زیر می‌تواند به شکل مشابه همانند قضیه ۱.۱۷ در[۵] یافت شود.

قضیّه ۲.۲ نگاشت چند جمله‌ای f را در نظر بگیرید.اگر مجموعه‌ی ژولیای f همبندباشد آنگاه مجموعه‌ی ژولیای کامل، یک مجموعه‌ی کامل است وهر مولفه‌ی کراندار فاتواز f همبند ساده‌است.

چون f_c تنها نقطه‌ی بحرانی صفر دارد یعنی صفرِ $\frac{d}{dz}f(z)$ ، وحوضه‌ی فوری هر مدار سهموی و جاذب شامل یک نقطه‌ی بحرانی است (گزاره‌ی ۱۰.۷ و لم ۲.۲۰ از[۵]) و این‌که حوض ها نقطه‌ی مشترک ندارند لم زیر برقرار است.(قضیه ۴.۲۰ از[۵] راببینید)

لم ۲.۲ (حداکثر ، یک مدار دافع نیست)

برای پارامتر ثابتc ، تمام مدارهای متناوب f_c دافعند، بجز احتمالاً یکی. بویژه یک نگاشت f_c حداکثر یک مدار جاذب یا سهموی در$\mathbb{C}$ دارد.

بنابراین هر پارامتر سهموی یک مدار سهموی خوش تعریف دارد. یک مولفه‌ی کراندار فاتو که شامل یک نقطه‌ی متناوب سهموی روی مرزش باشد مولفه‌ی فاتوی سهموی نامیده می‌شود.

قضیّه ۳.۲ (حداکثر یک دور از مولفه های فاتوی کراندار وجود دارد)

هر نگاشت چند جمله‌ای f حداکثر یک دوراز مولفه‌های فاتوی کراندار دارد.یعنی : اگر یک مولفه‌ی کراندار فاتوی U از f وجود داشته باشد آن‌گاه آن متناوب یا باتکرارمتناوب است و هر مولفه‌ی فاتوی

متناوب، بوسیله‌ی یک تکرار f می‌تواند به یک مولفه‌ی‌فاتوی متناوب دیگر نگاشته شود. بعلاوه برای یک پارامتر سهموی c هر مولفه‌ی‌فاتوی متناوب، یک مولفه‌ی‌فاتوی سهموی است.

باید به عبارت زیر توجه کنیم.

فرض کنید c یک پارامتر سهموی و U_0 یک مولفه‌ی فاتو باشد که شامل نقطه‌ی بحرانی است. مولفه‌های متناوب دیگر فاتو را با $U_l := f_c^l(U_0)$ تعریف کرده و با $U_1, U_2, \cdots, U_n = U_0$ برای $l \neq 0$ نمایش می‌دهیم. تحدید $f_c : \bar{U}_l \longmapsto \bar{U}_{l+1}$ یک نگاشت یک‌به‌یک است و $f_c : \bar{U}_0 \longmapsto \bar{U}_1$ یک نگاشت d به ۱ است. تمام نگاشت‌هادر درون سره وتحلیلی هستند و روی مرز پیوسته‌اند.

برای هدف بعدی،ما تعدادی پیش‌نیاز لازم داریم. برای برهان‌های عباراتی که مادر زیر می‌سازیم و برای اطلاعات بیشتر بخش های ۱۷و۱۸ در [۵] را ببینید.

معرفی تابع بوخر و گرین

معروف‌است که برای هر پارامتر $c \in \mathbb{C}$ یک همسایگی U از∞ و یک تابع تحلیلی، که آنرا تابع بوخر $\phi_c : U \longmapsto U$ می‌نامیم وجود دارد،بطوریکه $\phi_c \circ f_c \circ \phi_c^{-1}(z) = z^d$ برای $z \in U$ و $\phi_c(\infty) = \infty$.

با شروع از این مطلب ما تابع گرین g_c روی U را بوسیله‌ی $g_c(z) = log|\phi_c(z)|$ برای $z \in U$ تعریف می‌کنیم و توجه می‌کنیم که معادله‌ی تابعی $g_c(z) = g_c(f_c(z))/d$ برقراراست. حال بسادگی نتیجه می‌شود که تابع گرین می‌تواند به طورپیوسته به$\mathbb{P}_1 - K_c$ توسیع یابد، آن هنگامی‌که ما بهK_c می رسیم به صفر میل می‌کند. بنابراین تعریف می‌کنیم $g_c(z) = 0$ برای$z \in K_c$. مقدار $g_c(z)$ ، پتانسیل z نامیده می‌شود و برای $t > 0$ مجموعه‌ی $\{z \in \mathbb{C}; g_c(z) = t\}$ یک منحنی هم‌پتانسیل از پتانسیلtاست.

باید توجه کنیم که z نقطه‌ی‌بحرانی g_c است هرجا که z نسبت به f_c بحرانی یا بازبحرانی باشد (z نقطه‌ی بحرانی f_c یا نقطه‌ی‌بحرانی تکراری از f_c باشد) یعنی $f_c^l = c$ برای یک عدد صحیح $l \geq 1$ ، اگر K_c همبند باشد نقطه‌ی بحرانی توی K_c واقع است وازاین‌رو g_c هیچ نقطه‌ی‌بحرانی خارج از K_c ندارد. به‌هرحال اگر K_c همبند نباشد g_c تعداد نامتناهی نقطه‌ی‌بحرانی دارد.

برای تابع بوخر ϕ_c این به این معنی‌است که‌ما می‌توانیم ϕ_c را به‌طورهولومورفیک توسیع دهیم به شرطی

که $g_c(z) > g_c(\circ)$. به عبارت دیگر:

اگر K_c همبندباشد ϕ_c به‌یک نگاشت همدیس از $\mathbb{P}_1 - K_c$ بروی $\mathbb{P}_1 - D$ توسیع می‌یابداگر K_c ناهمبند باشد، ϕ_c، $\mathbb{P}_1 - \{z \in \mathbb{C}, g_c(z) \leq g_c(\circ)\}$ را به طورهولومورفیک بروی $\mathbb{P}_1 - \{z \in \mathbb{C}, log|z| \leq g_c(\circ)\}$ می‌نگارد. درهر حالت بسط حاصلضرب زیر را روی دامنه‌ی تعریفش دارد: $\phi_c(z) = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + c/\left(f_c^{k-1}(z)\right)^d\right)^{1/d^k}$.

برای هر عامل، شاخه‌ای از «ریشه d^k–ام» را که‌یک ۱ را به‌یک ۱ می نگارد،انتخاب می‌کنیم. چون هر z در دامنه‌ی تعریف ϕ_c در حوضه‌ی‌جذب ∞است،یک همسایگی N ازیک ۱ وجود دارد که شامل صفر نیست طوریکه $\left(1 + c/\left(f_c^{k-1}(z)\right)^d\right) \in U$ برای تقریباً هرk. حال به سادگی نتیجه می‌شود که بسط حاصلضرب خوش‌تعریف است.(قضیه ۳.۱ در[۹]را ببینید).

بعلاوه ϕ_c دربینهایت (∞) به همانی مماس است. یعنی $\phi_c(z)/z \longmapsto 1$ هنگامی‌که $z \longmapsto \infty$.

برای یک پارامتر c،با ژولیای همبند،پرتو دینامیکی با زاویه‌ی v را به صورت مجموعه‌ی $R_v^c := \left\{\phi_c^{-1}(re^{2\pi iv}), r > 1\right\}$ تعریف می‌کنیم.اگر $lim_{r\searrow 1}\phi_c^{-1}(re^{2\pi iv})$ وجود داشته باشد دراین صورت پرتو دینامیکی R_v^c به‌نقطه‌ی حدی ختم می شود. توجه کنید که با توجه به همدیس بودن نگاشت بوخر و تعریف پرتوهای دینامیکی، پرتوهای دینامیکی با زوایای مختلف هیچ نقطه‌ی اشتراکی ندارند. اما بطورقطع آن‌ها می توانند به یک نقطه‌ی مشترک ختم شوند.

اگر مجموعه‌ی‌ژولیای f_c ناهمبند باشد ما پرتوهای‌دینامیکی را تنها درپتانسیل‌هایی که از $g_c(\circ)$ بیشترند می‌توانیم به صورت قبل تعریف کنیم، به هر حال، هنوز توسیع ϕ_c بوسیله‌ی یک معادله‌ی تابعی ، به تمام مجموعه‌ی $\mathbb{P}_1 - K_c$ امکان‌پذیراست، در صورتی که به یکتایی نیازی نداشته باشیم. بابکار بردن این توسیع ϕ_c دوباره پرتوهای دینامیکی را بصورت تصاویر وارون پرتوهای شعاعی $\left\{re^{2\pi iv}, r > 1\right\}$ بدست می‌آوریم.بوسیله‌ی ساختارتوسیع ϕ_c این پرتوها در نقاط بحرانی g_c نقاط شاخه‌ای دارند.برای بحث بیشتر این حالت، پیوست A از[۳] را ببینید.

تعاریف زوایای متناوب و باتکرارمتناوب بطور کامل مشابه‌با تعاریف متناظر نسبت به مدارهاست.

بعلاوه مااین عبارات و صفات گویا واصم را برای پرتوهابکار می‌بریم در صورتی که زوایایشان در این ویژگی‌هاصدق کند. علاوه براین، پرتوهای درون مجموعه‌ی ژولیای کاملK_c را معرفی می‌کنیم:
اگرf_c یک مدار جاذب‌قوی داشته باشد.فرض کنیدU یک مولفه‌ی فاتوی K_c باشد.دراین صورت معروف است که U یا باتکرارمتناوب است و یامتناوب شامل دقیقاً یک نقطه (قضیه ۳.۲)، فرض کنیم این نقطه z_U باشد، که توسط یک تکراری ازf_c بروی نقطه‌ی‌بحرانی صفر نگاشته می‌شود.(نگاشت ریمان $\phi : U \longmapsto D$ وجود دارد چون بوسیله‌ی قضیه ۲.۲، U همبندساده است ومی‌توانیم فرض کنیم که‌این z_U را به صفر تصویر می‌کند.) علاوه بر این معروف است کهϕ به طورهولومورفیک به $\bar{U}$ توسیع می‌یابد. بنابراین می‌توانیم برای هر زاویه‌ی v ، مجموعه‌ی $R_v^U := \left\{\phi^{-1}(re^{2\pi iv}), r \in I\right\}$ را به عنوان پرتودینامیکی داخلی U در زاویه‌ی v، نسبت بهϕ، تعریف کنیم. توجه کنیم که برای هر دورانT حول مبدا، واضح است که$T \circ \phi$ دوباره،نگاشت ریمان ازUاست که z_U را به صفر می‌نگارد.
یک قضیه و چندین لم وجود دارد که باید قبل از رسیدگی ویژگی‌های مقدماتی مجوعه‌ی مولتی‌برات آن‌ها راذکر کنیم:قضیه‌ی زیر منسوب به سولیوان[۲]،دودی[۳] و هوبارد[۴]است. برای‌استنتاج برهان در حالت متناوب، قضیه ۱۸.۱ در[۵] راببینید. در حالت‌باتکرارمتناوب با تقلیل دادن به تناوب ۱ و سپس گرفتن تصاویر وارون حکم نتیجه می شود.

قضیّه ۴.۲ (هر پرتو دینامیکی متناوب مختوم است):
یک پارامتر با مجموعه‌ی‌ژولیای همبند را در نظر بگیرید، هر پرتودینامیکی متناوب و باتکرارمتناوب به یک نقطه‌ی دافع یا سهموی ختم می‌شود که به ترتیب متناوب وباتکرارمتناوب است.

قضیّه ۵.۲ (هر نقطه دافع و سهموی نقطه مختوم است):
برای یک مجوعه‌ی‌ژولیای همبندK_c، هر نقطه‌ی‌متناوب و باتکرارمتناوب دافع یاسهموی در∂K_c

[۲] Sullivan
[۳] Douady
[۴] ubbard

نقطه‌ی‌مختوم حداقل یکی ولی تعداد متناهی پرتو دینامیکی متناوب یا بازمتناوب‌است(به ترتیب). بعلاوه اگرK_c اضافه بر این موضعاً همبند باشد، تعداد پرتوهای‌مختوم در$z \in \partial K_c$، برابراست با تعداد مولفه‌های $K_c - \{z\}$.

اثبات. ادعای اول می‌تواند به صورت قضیه ۱۸.۲ در[۵] یافت شود، که منسوب به دودی و یوکوزاست.برای برهان دوم لم$A.8$ در[۱۰] را ببینید. که‌بطور عمده به قضیه‌ی‌کاراتئودری و قضیه‌ی ریس[۵] وابسته‌است. □

باید به لم خیلی مفید زیر توجه کنیم، برای یک K_c همبند،می‌تواند بصورت لم ۱۸.۷ در[۵] یافت شود. برهان فوری برای مجموعه‌ی‌ژولیای ناهمبند تعمیم می یابد.

لم ۳.۲ (مختوم بودن تصویر یک پرتو دینامیکی مختوم):

یک پرتو دینامیکی R^c_v به$z \in \partial K_c$ ختم می‌شوداگروتنهااگر $R^c_{\sigma(v)}$ به$f_c(z)$ ختم شود.

قضیه‌ها ولم قبل می‌دهد که برای مدارهای متناوب دافع و سهموی درون یک مدارمتناوب دیگر، نوع باتکرارمتناوب دیگری وجود دارد: یک مدار متناوب دافع یا سهموی O را در نظربگیرید و فرض کنیدR^c_v پرتوی باشد که به یک نقطه‌از مدارO مختوم است. دوره‌ی‌تناوب مدار و دوره‌ی تناوب زاویه‌یv می توانند متفاوت باشند. بنابراین دوره‌ی پرتوی مدارO را به صورت دوره‌ی تناوب زاویه‌یv تعریف می‌کنیم. مشهوراست که زوایای تمام پرتوهای مختوم به یک نقطه ازمدار، دوره‌ی‌تناوب یکسان دارند، یعنی دروه‌ی‌تناوب پرتوی خوش تعریف است. سرانجام، باید به تناظر زیر بین مضرب یک مدار سهموی و دوره‌ی‌تناوب پرتو آن، توجه کنیم.

لم ۴.۲ (دوره‌ی پرتوی و مضرب):

فرض کنیدc یک پارامترسهموی باشد. دراین صورت n دوره‌ی پرتوی کامل مدارسهمویO است اگروتنهااگر برای یک نقطه‌یz ازمدارO،n کوچکترین عدد باخاصیت $\frac{d}{dz}f^n(z) = 1$ باشد.

[۵] F.and M. Riesz

۲ـ۴ تعریف و برخی خواص مجموعه‌ی مولتی‌برات:

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم در این بخش مجموعه‌های مولتی‌برات[۶] را معرفی می‌کنیم و برخی ویژگی‌های اساسی آن‌هارا نشان می‌دهیم. مجموعه‌های مولتی‌برات تعمیم مجموعه‌های آشنای مندلبرات هستند(آنها مکان هندسی همبندی مجموعه‌های ژولیای چند جمله‌ای‌های $f_c(z) = z^2 + c$ هستند.) عبارت «مجموعه‌ی مولتی‌برات» منسوب به شلچر[۷] است.

تعاریف، ویژگی‌ها وبراهین در این بخش برای مجموعه‌ی مندلبرات معروف هستند: و به‌آسانی تعمیم می‌یابند. در زیر فرض کنید $d \geq 2$ عدد صحیحی باشد،d را برای کل مقاله ثابت در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۰.۲ (مجموعه‌ی مولتی‌برات$\mathcal{M}_d$):

مجموعه‌ی مولتی‌برات از درجه‌ی d عبارتست از مجوعه‌ی $\mathcal{M}_d := \{c \in \mathbb{C} |$ همبنداست $K_c\}$. $\diamond$

بطور قطع مجموعه‌ی مولتی‌برات $\mathcal{M}_2$ همان مجموعه‌ی مندلبرات است. یک حقیقت اساسی این است که چند جمله‌ای‌هایf_c دقیقاً یک نقطه‌ی‌بحرانی دارند. به سادگی دیده می‌شود که هرچند جمله‌ای درجه دوم ، بوسیله‌ی مزدوجی همدیس می‌تواند به صورت $z^2 + c$ نوشته شود. به هرحال درحالت کلی برای $d > 2$ درست نیست، دقیقاً، چند جمله‌ای‌هایی که بیشتر از یک نقطه‌ی‌بحرانی دارند، نمی‌توانند به فرم$z^d + c$ نوشته شوند. همان‌طور که قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد، تعاریف معادلی برای$\mathcal{M}_d$ وجود دارد.

قضیّه ۶.۲ (تعاریف معادل$\mathcal{M}_d$):

۱) $c \in \mathcal{M}_d$

۲) مدار بحرانی نسبت بهf_c، کرانداراست.

۳) $|f_c^n(0)| \leq 2$ برای هر $n \geq 1$.

---

[۶] Multibrot

[۷] Schlecher

اثبات. بوسیله‌ی قضیه‌ی ۳.۵ در[۱۱] مجموعه‌ی ژولیای یک چندجمله‌ای همبند است اگروتنهااگر تمام مدارهای بحرانی، یعنی مدارنقاط بحرانی، همگی کراندار باشند.بنابراین دو عبارت اول معادلند.

حال نشان می‌دهیم نفی ۳، نفی۲ را ایجاب می‌کند: اگر $|c| > 2$ آنگاه به استقراء خواهیم داشت

$$|f_c^{n+1}(c)| \geq |f_c^n(c)|^d - |c| \geq |s|^d(|c|-1)^{d^{n-1}.d} - |c| \geq |c|.(|c|-1)^{d^n}$$

واین یعنی این‌که مدار بحرانی غیرکراندار است.

حال یک $c \in \mathbb{C}$ و یک عدد صحیح $n \geq 1$ را درنظر می‌گیریم، طوری‌که $|c| \leq 2$ و $|f_c^n(0)| > 2+\varepsilon$ برای هر $\varepsilon > 0$. بنابراین به‌کمک استقراء خواهیم داشت $|f_c^{n+k+1}(0)| \geq \left(2+2^k\varepsilon\right)^d - 2 \geq 2 + 2^{k+1}\varepsilon$ یعنی مداربحرانی دور می شود.

$2 \longmapsto 3$ بدیهی است. □

همانند صفحه‌ی‌دینامیکی می‌خواهیم پرتوها را در صفحه‌ی پارامتری تعریف کنیم. یعنی صفحه‌ی‌مختلط به صورت پارامترهای c ازf_cها در نظر گرفته شود. برای این منظور مشابهی برای نگاشت بوخر در حالت درجه‌ی‌دوم لازم داریم. قضیه‌ی زیر وجود چنین نگاشتی را تضمین می کند.

قضیّه ۷.۲ **(ویژگی‌های مجموعه‌ی مولتی‌برات$\mathcal{M}_d$):**

مجموعه‌ی مولتی‌برات $\mathcal{M}_d$ ویژگی‌های زیر را دارد:

۱) $\mathcal{M}_d$ فشرده و کامل است.

۲) $\mathcal{P}_1 - \mathcal{M}_d$ همبند ساده است.

۳) $\mathcal{M}_d$ همبند است.

اثبات. در برهان قضیه‌ی قبل اثبات این مطلب را که$\mathcal{M}_d$ مشمول در یک دیسک$B_2(0)$ است راآماده داریم، چون اشتراک یک خانواده‌ی شمارا از مجموعه‌های فشرده‌ی تودرتو، فشرده‌است، خاصیت (۳) در قضیه‌ی قبل نشان می‌دهد که $\mathcal{M}_d$ فشرده‌است.

قسمت سوم به وسیله‌ی یک قضیه‌ی کلاسیک از الکساندرف[۸]از (۲) نتیجه می‌شود.

---

[۸] Alexandroff

جهت اثبات دومین عبارت، نشان می‌دهیم که یک نگاشت بی‌هولومورفیک$\Phi(c)$ از$\mathcal{M}_d - \mathcal{P}_1$ به‌روی$D - \mathcal{P}_1$ وجود دارد. این ایجاب می کند که$\mathcal{M}_d - \mathcal{P}_1$ همبندساده باشد. برای $c \in \mathcal{P}_1 - \mathcal{M}_d$ تعریف می‌کنیم $\Phi(c) := \phi_c(c)$. نگاشت $\Phi(c)$ خوش‌تعریف است، چون$g_c(c) > g_c(0)$ و اگر شاخه‌ی d^l-امین ریشه، را همانند بخش۲—۳انتخاب کنیم،Φ بسط حاصلضرب خوش تعریف $\Phi(c) = c\prod_{l=1}^{\infty}\left(1 + c/\left(f_c^{l-1}(c)\right)^d\right)^{1/d^l}$ را دارد. دیدن این مطلب کاملاً ساده است که$\Phi(c)$ روی $\mathcal{P}_1 - \mathcal{M}_d$ بطورموضعی همگرای یکنواخت است و ازاین‌رو آنجا$\Phi(c)$ هولومورفیک است. بعلاوه می‌بینیم که$\Phi(c)/c \longmapsto 1$ هنگامی که$c \longmapsto \infty$. چون می‌خواهیم نشان دهیم که$\Phi(c)$، $\mathcal{P}_1 - \mathcal{M}_d$ را به روی$\mathcal{P}_1 - D$ می‌نگارد، باید ثابت کنیم که$|\Phi(c)| \longmapsto 1$ هنگامی که$c \longmapsto \partial\mathcal{M}_d$. برای این هدف فرض کنید$R > 2$ و برای یک $c \in \bar{B}_{R(0)} - \mathcal{M}_d$، دنباله‌ی $c_l := f_c^l(c)$ برای$l \geq 0$ تعریف کنید. بوضوح دنباله‌ی(c_l)،$\bar{B_R}(0)$ راترک خواهد کرد و از این رو اندیس خوش‌تعریف $N(c) := min\left\{l \in \mathbb{N} | c_l \notin \bar{B_R}(0)\right\}$ وجود دارد. حال برای هر$c \in \bar{B_R}(0)$ نابرابری‌های $|c_{N(c)}| \leq R^d + R$ و$|c_k|^d > 2|c|$ را برای تقریباً تمامkها(برهان قضیه‌ی۶.۲را ببینید) بدست می‌آوریم. باترکیب‌کردن مطالب بدست آمده با معادله‌ی تابعی نگاشت بوخرازی، برای تمام$c \in \bar{B}_{R(0)} - \mathcal{M}_d$ها و$S > 1$ی بدست می‌آوریم:

$$|\Phi(c)| = |\phi_c(c_{N(c)})|^{1/d^{N(c)}} = \left|c_{N(c)}\prod_{l=1}^{\infty}\left(1 + c/\left(c_{N(c)+l-1}^d\right)\right)^{1/d^l}\right|^{1/d^{N(c)}} \leq S^{1/d^{N(c)}}.$$

همراه با$N(c) \to \infty$ هنگامی‌که$c \to \partial\mathcal{M}_d$، ایجاب می‌کند که$|\Phi(c)| \to 1$ هنگامی‌که$c \to \partial\mathcal{M}_d$.ازاین رو$\Phi$ یک نگاشت سره‌از$\mathcal{P}_1 - \mathcal{M}_d$ به‌روی $\mathcal{P}_1 - D$است وبنابراین بوسیله‌ی لم۲.۱ یک نگاشت درجه‌ی خوش تعریف دارد، که درجه‌ی آن یک۱ است چونΦ نزدیک بی‌نهایت(∞) به همانی مماس است، یعنی این‌کهΦ یک نگاشت دوسویی همدیس از$\mathcal{P}_1 - \mathcal{M}_d$ به روی $\mathcal{P}_1 - D$ است. □

حال ما می‌توانیم تعاریف مشابهی برای پرتوهای دینامیکی در صفحه پارامتری بیان کنیم: فرض کنیدΦ نگاشت بی‌هولومورفیک از $\mathcal{P}_1 - \mathcal{M}_d$ به روی $\mathcal{P}_1 - D$ باشد که در برهان قضیه‌ی قبل به دست آمده‌است، پرتو پارامتری با زاویه‌ی v به صورت مجموعه‌ی $R_v^{\mathcal{M}} := \left\{\Phi^{-1}(re^{2\pi it}); r > 1\right\}$

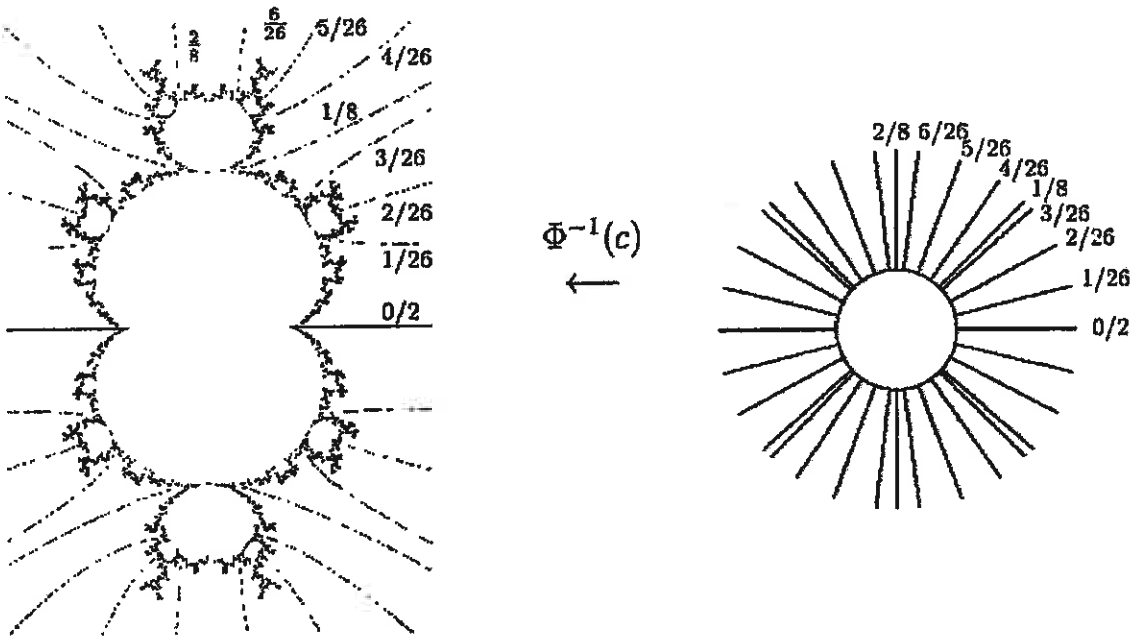
تعریف می‌شود،اگر$lim_{r\downarrow 1}\Phi^{-1}(re^{2\pi it})$ وجود داشته باشد، می‌گوییم که$R_v^{\mathcal{M}}$ در یک نقطه حدی ختم می‌شود. اگریک پارامتر$c \notin \mathcal{M}_d$ روی یک پرتو پارامتری با زاویه‌یv واقع شود، vرا زاویه‌ی‌خارجیc می‌نامیم. بوضوح برای هرپارامتردر$\mathbb{C} - \mathcal{M}_d$،زاویه‌ی‌خارجی خوش‌تعریف است. اگر چه هیچ دینامیکی در صفحه‌ی پارامتری وجود ندارد، به کار بردن صفات متناوب، باز متناوب، گویاواصم همانند حالت پرتودینامیکی، برای پرتوهای‌پارامتری،اگر زوایایشان این ویژگی‌ها را داشته باشد مناسب است.لم زیر نشان می‌دهد که چگونه پرتوهای‌دینامیکی به پرتوهای‌پارامتری متناظرشان وابسته اند.

لم ۵.۲ (زمانی که پرتوهای دینامیکی گویا مختوم هستند):

فرض کنیدc یک پارامتر با مجموعه‌ی‌ژولیای ناهمبند باشد، در این صورت پرتودینامیکی R_v^cمختوم است اگروتنهااگر$v_0 \neq \sigma^n(v)$ برای هر عدد صحیح $n \geq 1$. بعلاوه پارامترc روی پرتودینامیکی $R_{v_0}^c$ واقع است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که برای پارامتر$c \notin \mathcal{M}_d$ بازاویه‌ی‌خارجی v_0 مقدار بحرانی روی $R_{v_0}^c$ واقع است. چون $g_c(c) > g_c(0)$، نگاشت بوخرϕ_cدرc خوش‌تعریف است و از این رو$e^{2\pi iv_0} = \Phi(c)/|\Phi(c)| = \phi_c(c)/|\phi_c(c)|$.

پرتو دینامیکیR_v^c در پتانسیل t خوش‌تعریف است اگروتنهااگر پرتودینامیکی $R_{\sigma(v)}^c$ در پتانسیل $d.t$ خوش‌تعریف باشد، یعنی شامل مقداربحرانی نباشد. بنابراین،$R_v^c = \left\{\phi_c^{-1}(re^{2\pi iv}) : r > 1\right\}$ خوش‌تعریف‌است اگروتنهااگر $v_0 \neq \sigma^n(v)$ برای تمام اعداد صحیح $n \geq 1$. چون مجموعه‌ی حدی یک پرتودینامیکی یک زیرمجموعه‌ی فشرده از مجموعه‌ی ژولیاست(برای مثال تذکر بعد از تعریف ۲.۴ در[۱۰] راببینید) وK_c کاملاً ناهمبند است، یک پرتودینامیکی خوش‌تعریف R_v^c تنها در یک نقطه‌ختم می‌شود. □



تصویر۱: در سمت چپ می‌توانیم مجموعه‌ی مولتی‌برات $\mathcal{M}_{۳}$ را با پرتوهای پارامتری از دوره‌ی پرتوی۳ و کمتر ببینیم . در سمت دیگر پرتوهای تصویر تحت نگاشت بوخر Φ نشان داده شده‌اند.

هنگام مطالعه‌ی ویژگی‌های ختم شدن پرتوهای پارامتری خواهیم دید که آنها تنها می‌توانند در پارامترهای سهموی ختم شوند، داشتن این دانش مهم است که پارامترهای سهموی خیلی زیادی وجود ندارد.

لم ٦.٢ (تعداد پارامترهای سهموی شمارا ست):

تعداد پارامترهایی که مدار سهموی از دروه‌ی مفروضی دارند، متناهی است. به ویژه تعداد تمام پارامترهای سهموی شماراست.

اثبات. فرض کنید $k \geq ۱$ عدد صحیح مثبتی باشد و تعریف کنید

$$Q(c,z) := f_c^k(z) - z$$

فصل ۳

توصیف روشن مدار

۳—۱ مقدمه

در این بخش توصیف‌های روشن مدار را پیرو میلنور در [٦] معرفی می‌کنیم، یعنی، الگوی مختوم پرتوهای دینامیکی مختوم در یک مدار متناوب، و برخی ویژگی‌های آن‌هارا نشان می‌دهیم. این به ما در بدست آوردن یک توصیف ترکیباتی از مجموعه‌های ژولیا و یک وسیله، جهت رسیدگی کردن به ویژگی‌های مختوم پرتوهای پارامتری کمک می‌کند. به‌ویژه در این بخش آن‌ها را در نشان دادن این مطلب که هر پرتو پارامتری متناوب در یک پارامتر سهموی ختم می‌شود(قضیه‌ی ۳.۳ را ببینید) و بعضی از آن‌هادر زوج‌هایی ختم می شوند، بکار می‌بریم. به هر حال تکنیک‌های بیشتری نیاز داریم که آن‌ها را در بخش‌های بعدی معرفی خواهیم کرد، برای تمام کردن برهان قضیه‌ی ۱.۱مفهوم توصیف روشن‌مدار در برهان میلنور از قضیه‌ی ساختار در حالت درجه‌ی دوم ، اساسی است.

۳—۲ تعاریف و خواص مقدماتی :

تعاریف و ویژگی‌هایی که در این بخش ارائه می‌کنیم،اغلب برای حالت $d = 2$ مشهورهستند. به‌هر حال به خاطر کامل شدن مطلب آن‌ها را ذکر می‌کنیم و همچنین برهان‌های حالت درجه‌ی دو۲ به سادگی به درجات بالاتر قابل تعمیم است.

تعریف ۱.۳ (توصیف روشن مدار):

پارامتر $c \in \mathbb{C}$ ومدارمتناوب $\mathcal{O}= \{z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}\}$ نسبت به f_c را در نظر بگیرید،مجموعه‌ی تمام زاویه‌هایی که به یک نقطه‌ی $z_i \in \mathcal{O}$ ختم می‌شود را باA_i نمایش می‌دهیم. دراین صورت$\mathcal{P}:= \{A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}\}$ را توصیف روشن مدار$\mathcal{O}$ نسبت به f_c می‌نامیم و مجموعه‌ی تمام زاویه‌هایی که به مدار $\mathcal{O}$ ختم می‌شوند را با$A_{\mathcal{P}}:= A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۳ (توصیف روشن اساسی):

یک توصیف‌روشن $\mathcal{P}=\{A_\circ, A_۲, \cdots, A_{k-۱}\}$ رااساسی گوییم هرگاه هر A_i شامل حداقل دو زاویه باشد، در غیراین صورت توصیف‌روشن، غیراساسی نامیده می شود. همچنین توصیف روشن $\mathcal{P}=\{\{\circ\}\}$ اساسی‌است که یک حالت استثناست.

مناسب است که پارامتر c با توصیف‌روشن سهموی‌اساسی را پارامترسهموی‌اساسی بنامیم و به‌طور مشابه پارامترسهموی غیر اساسی نیز تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۳ (توصیف روشن ابتدایی):

اگر دوره‌ی تناوب تمام زاویه‌های موجود در $A_{\mathcal{P}}= A_\circ \cup A_۱ \cup \cdots \cup A_{k-۱}$ برابر k باشد، یعنی دوره‌ی تناوب مداری و پرتوی برابر باشند، آنگاه توصیف روشن، ابتدایی نامیده می‌شود و در غیراین‌صورت غیرابتدایی است.

دوباره مناسب است، به پارامترهای سهموی با توصیف‌روشن سهموی ابتدایی، به عنوان پارامترسهموی ابتدایی و به‌طور مشابه پارامتر سهموی غیرابتدایی مراجعه کنیم.

تعریف ۴.۳ (توصیف روشن دو به‌دو نامربوط):

توصیف روشن مدار $\mathcal{P}=\{A_\circ, A_۱ \cdots A_{k-۱}\}$ را دوبه‌دو نامربوط نامیم اگر به ازای هر $i \neq j$، مجموعه‌ی A_i مشمول دریک مولفه‌ی‌همبند $\mathbb{S}^۱ - A_j$ باشد.

تعریف ۵.۳ (بازه‌های مکمل):

برای یک عضو $A = \{v_\circ, v_۱, \cdots, v_{s-۱}\} \in \mathcal{P}$ با $s > ۲$، $v_\circ < v_۱ < \cdots < v_{s-۱} < v_\circ$ (برای یک تعریف ازاین نمادگذاری به ابتدای فصل ۲ مراجعه کنید) گوییم بازه‌های $(v_\circ, v_۱), (v_۱, v_۲), \cdots, (v_{s-۱}, v_\circ)$ بازه‌های مکمل هستند.$\circ$

باید به یک تفاوت عمده بین حالت‌های $d = ۲$ و $d \geq ۲$ توجه کنیم: در حالت درجه‌ی دوم تمام پارامترهای سهموی، یک مدارسهموی با توصیف‌روشن‌اساسی دارند.(گزاره ۴.۸ در [۶] را ببینید) اما

برای $d > 2$ این درست نیست.

سپس ما چند ویژگی پایه‌ای برای توصیف‌های روشن بیان می‌کنیم.در واقع آن‌ها برای توصیف روشن ویژگی مشخصه هستند که در زیرآن‌ها را برای تعریف توصیف‌روشن‌مدارصوری به کارخواهیم گرفت.

لم ۱.۳ (ویژگی‌های مقدماتی توصیف روشن مدار):

فرض کنید $\mathcal{P}=\{A_0, A_2, \cdots, A_{k-1}\}$ ، $A_k = A_0$ ، توصیف‌روشن مدار نقطه‌ی متناوب z نسبت به f_c که $c \in \mathbb{C}$ باشد، در این صورت داریم:

۱) هر A_i به وسیله‌ی یک نگاشت d–لایه‌ی σ به طور دوسویی با حفظ مرتبه‌ی‌دوری به روی A_{i+1} نگاشته می‌شود.

۲) تمام زاویه‌ها در $A_{\mathcal{P}}$ دوره‌ی پرتوی دقیق یکسانی دارند.

۳) A_i ها دو به دو نامربوط هستند.

۴) اگر توصیف روشن، اساسی باشد دراین صورت برای هرA_i، هر بازه‌ی‌مکمل به جزیکی، که آن‌را با I_0 نمایش می‌دهیم به‌وسیله‌ی σ به طور همئومورفیسم به‌روی یک بازه‌ی مکمل ازA_{i+1} نگاشته می‌شود.

این ایجاب می‌کند که برای I_0 ، یک بازه‌ی‌مکمل I'_0 ازA_{i+1} وجود داشته باشد، به طوری که $\sigma(I_0)$ دقیقاًdبار I'_0 را بپوشاند، یعنی برای هر$v \in I'_0$، d زاویه‌ی متفاوت درI_0 هستند که به وسیله‌ی σ به v تصویر می‌شوند، (بعلاوه تمام بازه‌های مکمل A_i به جزI_0 ، با هم طول کمتر از $1/d$ دارند) و طول I_0 از $1 - 1/d$ بیشتر است.

تذکر ۱.۳ :

توجه کنید که ویژگی‌های ۱و۲ ایجاب می‌کند که هر A_i متناهی است و تمام A_iها تعداد زاویه‌ی

یکسانی دارند. بعلاوه ، بوسیله‌ی ویژگی دوم براحتی نشان داده می‌شود که هر زاویه در A_P گویاست ، یعنی در $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ است: چون هر زاویه‌ی $v \in A_P$ متناوب است، فرض کنید دوره‌ی تناوب آن n باشد، داریم $v = \sigma^n(v) = d^n v$ و از این‌رو برای یک عدد صحیح a داریم $v = a/(d^n - ۱) + \mathbb{Z}$ اثبات. برهان ویژگی‌های ۱تا۳ مشهور هستند، براحتی بدست می‌آیند و دقیقاً مشابه حالت درجه‌ی دوم هستند. بنابراین ما آن را حذف می‌کنیم وبه لم ۲.۳ در [٦] ارجاع می‌دهیم.

در حالت $d = ۲$ ویژگی ۴ از ویژگی‌های قبلی نتیجه می‌شود، چون چند جمله‌ای درجه‌ی دوم با بیش از یک نقطه‌ی بحرانی وجود ندارد. به هر حال، برهان ویژگی ۴ را برای حالت $d \geq ۲$ می‌آوریم. فرض کنید z_i نقطه‌ی مختوم پرتوهای دینامیکی از زاویه‌های واقع در A_i باشد. برای یک m ثابت، افراز $z_m \cup \bigcup R_v^c$ $(v \in A_m)$, دقیقاً یک مولفه‌ی باز دارد که شامل تنها نقطه‌ی بحرانی صفر است. بنابراین هر مولفه، بجز مولفه‌ی شامل نقطه‌ی بحرانی ، بطور هومورفیک بوسیله‌ی f_c تصویر می‌شوند. این به این معنی است که تمام بازه‌های مکمل از A_m ، بجز برای یکی ، نیز بطور هومورفیسم بوسیله‌ی σ نگاشته می‌شوند. بازه‌های متمم که بطور هومورفیسم نگاشته می‌شوند لزوماً دارای طول کمتر از $۱/d$ هستند. با بکار بردن ویژگی ۱ نتیجه می‌شود که تصاویر (تصاویر بازه‌های متمم ازA_m) بازه‌های متمم $A_{m+۱}$ هستند.

حال نشان می‌دهیم که چگونه این باقی‌مانده را ایجاب می‌کند: فرض کنید $I_۱, \cdots, I_{s-۱}$ آن بازه‌های متمم از یک A_l باشند که بطور هومورفیسم بروی بازه‌های متمم $A_{l+۱}$ تصویر می‌شوند و از این‌رو هر یک دارای طول $\mathcal{L}(\sigma(I_i)) = d\mathcal{L}(I_i) < ۱$، هستند. چون برای هر دو I_j, I_i مجزا ، $i, j \in \{۱, ۲, \cdots, s - ۱\}$، با توجه به ویژگی‌های قبل، تصاویر مجزا هستند، نتیجه می‌شود که $\mathcal{L}(\sigma(I_i)) + \cdots + \mathcal{L}(\sigma(I_{s-۱})) < ۱$ ، یعنی ، $\mathcal{L}(I_۱) + \cdots + \mathcal{L}(I_{s-۱}) < ۱/d$. به هر حال ، طول تصاویر تمام بازه‌های متمم برابر d است. این یعنی این‌که تنها بازه‌ی متمم از A_l یعنی $I_۰$، که بطور هومورفیسم نگاشته نمی‌شوند دارای طول بیشتر از $۱/d - ۱$ است. این نتجه می‌دهد که $\mathcal{L}(\sigma(I_۰) > d - ۱$ و بنابراین یک بازه‌ی متمم از $A_{l+۱}$ وجود دارد طوری‌که هر نقطه از این بازه d

تصویر وارون در $I_\circ$ دارد و تمام بازه‌های متمم دیگر از A_{i+1} ، $d-1$ بار بوسیله‌ی $I_\circ$ پوشیده می‌شوند.

□

برای توصیف‌روشن مداراساسی $\mathcal{P}=\{A_\circ, A_1, \cdots, A_{k-1}\}$ ،کوتاهترین زاویه‌ی مکمل در بین تمام A_iها را که آن‌را با (v_-, v_+) نمایش می‌دهیم، بازه‌ی مشخصه $\mathcal{P}$ می‌نامیم و زاویه‌های v_- و v_+ زاویه‌های مشخص $\mathcal{P}$ هستند.اگر $\mathcal{P}=\{\{\circ\}\}$ بازه‌ی مشخص، مولفه‌ی باز $\mathbb{S}^1-\{\circ\}$ است و زاویه‌های مشخص عبارتند از صفر و یک. در این حالت خاص ما صفرویک را مجزا می‌کنیم،اگرچه آن‌ها به عنوان عناصری در $\mathbb{S}^1$ با هم برابرند، همچنین برای چنین توصیف روشنی، پرتوهای پارامتری و دینامیکی در زاویه‌های صفرویک را به صورت دو زاویه‌ی مختلف در نظر می‌گیریم.

دو روش برای تعریف توصیف روشن وجود دارد: روش اول که قبلاً معرفی شده،از یک مدار و مجموعه‌ی تمام زاویه‌های مختوم در این مدارشروع می‌کند. روش دیگر، از یک مجموعه‌ی $\mathcal{P}=\{A_\circ, A_1, \cdots, A_{k-1}\}$ که در ویژگی های لم ۱.۳ صدق می کند، شروع می‌کند و به تعریف زیر منجر می‌شود.

تعریف ۶.۳ (توصیف روشن مدار صوری):

یک مجموعه‌ی $\mathcal{P}=\{A_\circ, A_1, \cdots, A_{k-1}\}$ از زیرمجموعه‌های $A_i \subset \mathbb{S}^1$ یک توصیف‌روشن صوری‌است اگردر ویژگی‌های لم۱.۳ صدق کند.

عبارات اساسی، ابتدایی، غیراساسی، غیرابتدایی، بازه‌ی‌مشخص ، زاویه‌های مشخص وبازه‌ی مکمل برای توصیف روشن مدار صوری نیز به طور مشابه با تعاریف فوق ، تعریف می‌شوند. ⋄

توصیف‌های روشن مدارصوری غیراساسی، بوسیله‌ی مدارهای نگاشت $f_\circ(z)=z^d$ تولید می‌شوند و به‌وسیله‌ی قضیه‌ی ۱.۳ خواهیم دید،که برای هر توصیف روشن مدارصوری‌اساسی $\mathcal{P}$ یک پارامتر c با مداری که $\mathcal{P}$ را تولید می‌کند وجود دارد،از جهت دیگر یعنی این که هر توصیف روشن‌مدار، یک توصیف روشن مدارصوری است، قطعاً واضح است.

لم ۲.۳ (بازه مشخص یک توصیف روشن خوش تعریف است):

فرض کنید $\mathcal{P}=\{A_۰, A_۱, \cdots, A_{k-۱}\}$ یک توصیف روشن مدارصوری اساسی باشد، دراین صورت در بین اجتماع بازه‌های مکمل هر A_i، $۰ \leq i \leq k-۱$ دقیقاً یک بازه با کوتاهترین طول وجود دارد، یعنی بازه‌ی مشخص یک توصیف‌روشن ، خوش تعریف است.

اثبات. ابتدا توجه کنید که مجموعه‌ی طول‌های بازه‌های مکمل از مجموعه‌هایی که در $\mathcal{P}$ واقعند ، یک مینیمم که آن را باι نمایش می‌دهیم، دارد. از این رو بدون آن که‌از کلیت کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که یک بازه‌ی مکمل از یک $A_{l+۱}$ یعنی $I_{\mathcal{P}}$ دارای طول ι است. چون ι مینیمال است و تمام بازه‌های با طول کمتراز $۱/d$ بطور همئومورفیک به‌وسیله‌ی σ تصویر می‌شوند و d برابر بزرگتر می‌شوند، هیچ بازه‌ی مکملی که به طورهمئومورفیک به روی $I_{\mathcal{P}}$ نگاشته شود وجود ندارد، یعنی $I_{\mathcal{P}}$ باید بازه‌ای باشد که d بار بوسیله‌ی یک بازه‌ی مکمل از A_l، به طور مثال I_c، که طول آن از$۱/d - ۱$ بیشتر است، پوشیده شده‌است d، تصویر وارون را بوسیله‌ی $I_c^۱, I_c^۲, \cdots, I_c^d \subset I_c$ نمایش دهید. قطعاً طول هریک از این بازه‌ها برابر l/d است و آن‌ها بازه‌های مکمل A_l نیستند، با توجه به مینیمال بودن $I_{\mathcal{P}}$ و ویژگی‌های نامربوطی، $I_{\mathcal{P}}$ از این رو $I_c^۱, I_c^۲, \cdots, I_c^d$ شامل هیچ نقطه‌ای از $A_{\mathcal{P}}$ نیستند. ویژگی نامربوطی $I_{\mathcal{P}}$ ایجاب می‌کند که هر A_i باید به طورکامل مشمول در $\mathbb{S}^۱ - I_c$ باشد یا در $I_c - \left(\bigcup_{m=۱}^{d} I_c^m\right)$. درهرحالت اجتماع تصاویر تمام بازه‌های مکمل هرA_iبا طول کمتر از $۱/d$ مشمول در $\mathbb{S}^۱ - I_{\mathcal{P}}$ است. حال ما یک $j \in \{۰, ۱, \cdots, k-۱\}$ دلخواه را در نظرگرفته و بازه‌ی‌مکملی از $A_{j+۱}$ را که d بار به وسیله‌ی یک بازه‌ی‌مکمل از A_i با طول بیشتراز $۱/d - ۱$ ، پوشیده می‌شود را با $I'_{\mathcal{P}}$ نمایش می دهیم: نتیجه می‌شود که$I'_{\mathcal{P}}$ مشمول در $\mathbb{S}^۱ - I_{\mathcal{P}}$ نیست، یعنی $I'_{\mathcal{P}} \supset I_{\mathcal{P}}$. اگر $\iota(I'_{\mathcal{P}}) = \iota$ آن‌گاه با به کاربردن آرگومان بالا برای $I_{\mathcal{P}}$ نتیجه‌ی $I'_{\mathcal{P}} \subset I_{\mathcal{P}}$ رابه دست می‌آوریم و این یعنی $I'_{\mathcal{P}} = I_{\mathcal{P}}$ و بنابراین $I_{\mathcal{P}}$ به طور یکتا معین می‌شود. □

حال موضوعات بیشتری را معرفی می‌کنیم که برای توصیف پارامترهای سهموی به ما کمک می‌کنند. به طور خاص در فصل‌های ۷،۶،۵ آن‌ها را به کار خواهیم گرفت.

تعریف ۷.۳ (مشخصه پارامتر سهموی) :

یک پارامترc با مدار سهموی از توصیف‌روشن $\mathcal{P}$ را در نظر بگیرید مولفه‌ی‌فاتوی U_1 شامل مقداربحرانی c ، مولفه‌ی‌فاتوی مشخصه c نامیده می‌شود. مشهوراست که دقیقاً یک نقطه‌ی سهموی روی مرز مولفه‌ی‌فاتوی مشخصه وجود دارد. این نقطه، نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی z نامیده می‌شود. $\diamond$

فرض کنید $\mathcal{P}$ یک توصیف روشن باشد. در این صورت مینیمم تعداد زوایای $v_0, v_1, \cdots, v_{s-1} \in A_{\mathcal{P}}$ که ما برای نمایش هر زاویه‌ی دیگر $v \in A_{\mathcal{P}}$ به صورت $v = \sigma^l(v_i)$ نیاز داریم را عدد دورهای $A_{\mathcal{P}}$ یا $\mathcal{P}$ گوییم. لم زیر یک تفاوت مهم بین توصیف‌های روشن‌ابتدایی و غیرابتدایی را نشان می دهد. به خاطراین حقیقت، نتایج و برهان‌های تمام انواع توصیف‌های روشن و پارامترهای متناظرشان اغلب، کاملاً متفاوت هستند.

لم ۳.۳ (توصیف های روشن ابتدایی و غیر ابتدایی):

فرض کنید$\mathcal{P}= \{A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}\}$ یک توصیف روشن مدار صوری باشد. اگر $\mathcal{P}$ ابتدایی باشد آنگاه هرA_i شامل حداکثر دو زاویه است و $\mathcal{P}$ در حالت غیر اساسی یک دور و در حالت اساسی دو دور دارد. در غیراین صورت، اگر $\mathcal{P}$ غیرابتدایی باشد، هرA_i شامل حداقل دو زاویه است و دقیقاً یک دور دارد.

اثبات. به وضوح توصیف های روشن غیراساسی، ابتدایی هستند و دقیقاً یک دوردارند. از این رو برای باقی برهان فقط توصیف‌های روشن‌اساسی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید n دوره‌ی پرتوی زوایای موجود در $A_{\mathcal{P}}$ باشد، و v تعداد زاویه‌هایی باشد که هرA_i در بردارد. در این صورت تعداد زاویه‌های موجود در $A_{\mathcal{P}}$ برابر است با$k.v$ و عدد صحیح $k.v/n$ عبارت است از تعداد دورهای مجزای در $A_{\mathcal{P}}$.

حال دو فرض را در نظر می‌گیریم: فرض اول این که $v \geq 3$ و فرض دوم عبارت است از این‌که

حداقل دو دور مجزا وجود داشته باشد. همانند قبل ما بازه‌ی مشخصه $\mathcal{P}$ را بانماد $I_{\mathcal{P}}= (v_-, v_+)$ نمایش می‌دهیم و بدون کاستن از کلیت لم فرض کنیم که $I_{\mathcal{P}}$ یک بازه‌ی مکمل از $A_\circ$ باشد، چون $v \geq ۳$ دو زاویه‌ی (نه لزوماً مجزا) وجود دارد به طوری که $v_۱ < v_- < v_+ < v_۲ \leq v_۱$ و ما بازه‌های متناظرشان را با $I_- = (v_۱, v_-)$ و $I_+ = (v_+, v_۲)$ نمایش می‌دهیم. بدون محدودیت ، فرض کنیم که $\mathcal{L}(I_-) \leq \mathcal{L}(I_+)$. چون I_- طول مینیمم ندارد همانند برهان لم ۳.۲، یک بازه‌ی متمم $I_۱ \supset I_{\mathcal{P}}$ از A_j هست که به وسیله‌ی $m \in \mathbb{Z}, \sigma^m$ به طور همئومورفیک بروی I_- تصویر می‌شود. این ایجاب می‌کند که $\mathcal{L}(I_۱) < \mathcal{L}(I_-)$. با بکار بردن فرض دوم، یعنی این‌که دو دور مجزا وجود دارد، نتیجه می‌شود که v_-, v_+ به دورهای مجزایی از $A_{\mathcal{P}}$ تعلق دارند، در غیر این‌صورت باید یک عدد صحیح $۱ \leq \iota$ وجود داشته باشد طوری که $\sigma^\iota(v_-) = v_+$ وهر بازه $\left(\sigma^{\iota j}(v_-), \sigma^{\iota(j+۱)}(v_-)\right) = (\sigma^{\iota j}(v_-), \sigma^{\iota j}(v_+))$ باید یک بازه‌ی مکمل از $A_\circ$ باشد. چون $A_{\mathcal{P}} \cap I_{\mathcal{P}}= \emptyset$ و σ حافظ ترتیب است، باید ایجاب کند که تنها یک دور وجود دارد. بنابراین $\sigma^\iota(v_+) \neq v_-$ برای تمام اعداد صحیح $۱ \leq \iota$، یعنی $I_{\mathcal{P}}$ نمی تواند بروی I_- تصویر شود. این نشان می دهد که $I_۱ \not\supseteq I_{\mathcal{P}}$ و این که $I_۱$ یک بازه‌ی متمم‌از$A_\circ$ نیست. می‌نویسیم $I_۱ = (v'_-, v'_+)$ واز آن جاکه $\mathcal{L}(I_۱) < \mathcal{L}(I_-)$ این نتیجه به دست می آید که $v'_- \in I_-$. با توجه‌به ویژگی نامربوط بودن، باید $I_۱$ در یک مولفه‌ی همبند $\mathbb{S}^۱ - \{v_۱, v_-\}$ باشد وازاین رو باید داشته باشیم$v'_+ \in I_-$. این ایجاب می‌کند که $I_+ \subset I_۱$ که متناقض با$\mathcal{L}(I_۱) < \mathcal{L}(I_-) \leq \mathcal{L}(I_+)$ است، بنابراین ثابت کرده‌ایم که:

اگر$v \geq ۳$ آن‌گاه فقط یک دور در$A_{\mathcal{P}}$ وجود دارد و اگر دودور در$A_{\mathcal{P}}$ وجود داشته‌باشد آنگاه$v \leq ۲$ واین لم را به اتمام می‌رساند. □

قضیه‌ی زیر مورد علاقه ویژه‌است که نشان می‌دهد برای هر توصیف روشن مدارصوری، یک پارامتر c موجود است که یک مدار دارد که توصیف روشن را تولید می‌کند. برهان به راحتی از حالت $d = ۲$ به $d > ۲$ تعمیم می یابد(لم ۲.۸ و ۲.۹ را در [٦] ببینید) این عبارت برای برهان قضیه‌ی ۴.۳ مهم خواهد بود.

قضیّه ۱.۳ فرض کنید $\mathcal{P}$ یک توصیف روشن مدار صوری اساسی با بازه‌ی مشخصه‌ی (v_-, v_+) باشد.برای یک پارامتر $c \in \mathbb{C} - \mathcal{M}_d$ نگاشت f_c یک مدار با توصیف روشن $\mathcal{P}$ دارد اگروتنهااگر زاویه‌ی خارجی c در(v_-, v_+) باشد.

اثبات. فرض کنید v_c زاویه‌ی خارجی c باشد، ابتدا باید یک معیار برای پرتوهای دینامیکی مختوم در یک نقطه‌ی مشترک در نظر بگیریم. چون c روی پرتو دینامیکی در زاویه‌ی v_c واقع است،d پرتو دینامیکی در زاویه‌های $v_c^1, v_c^2, \cdots, v_c^d$ که بوسیله‌ی σ به v_c نگاشته می‌شوند در نقطه‌ی بحرانی صفر همدیگر را ملاقات می‌کنند و ما یک افراز از صفحه دینامیکی باd مولفه‌ی باز بدست می آوریم. مااین مولفه‌ها را طوری نشان‌گذاری می‌کنیم که هرمولفه یک برچسب یکتا داشته باشد و با هر زاویه‌ی v یک دنباله‌ی برچسب‌های $v, \sigma(v), \sigma^2(v), \cdots$ مرتبط می‌کنیم. مشهور است که دو پرتو دینامیکی در یک نقطه‌ی مشترک از∂K_c ختم می‌شوند اگروتنهااگر دنباله‌های برچسب‌های آن‌ها یکسان باشند، اگر$v_c \in (v_-, v_+)$ آن‌گاه زاویه‌های $v_c^1, v_c^2, \cdots, v_c^d$ در مولفه‌های $I_c^1, I_c^2, \cdots, I_c^d$ از تصویر وارون (v_-, v_+) واقعند. به وسیله‌ی ویژگی غیرمربوط‌بودن برای $\mathcal{P}=\{A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}\}$ این‌به این معنی‌است که هرA_j در یک مولفه‌ی‌همبنداز $\mathbb{S}^1 - \bigcup_i I_c^i$ واقع است. حال با بکار بردن معیار بالا نتیجه می‌شود که برای هر j ثابت، پرتوهای دینامیکی از زاویه‌های درA_j در یک نقطه مشترک ختم می‌شوند، توصیف روشنی که‌زاویه‌ها تشکیل می‌دهند را با $\mathcal{P}' = \{A'_0, A'_1, \cdots, A'_{k'-1}\}$ نمایش می‌دهیم، این به این معنی است که $k' \leq k$ و ما بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $A_i \subset A'_i$,$0 \leq i \leq k'$.
فرض کنید n دوره‌ی پرتوی مشترک زاویه‌های موجود در$A_{\mathcal{P}}$ باشد. فرض می‌کنیم که $k > k'$،اگر $\mathcal{P}$ یک توصیف روشن‌ابتدایی باشد چون $\mathcal{P}$ اساسی است بوسیله‌ی لم ۳.۳ نتیجه می‌شود که $\mathcal{P}$ دو دور مجزا دارد. به هرحال چون $k > k'$ هر$A'_i \in \mathcal{P}'$ ازحداقل سه زاویه تشکیل می‌شود و بنابراین با توجه به لم ۳.۳ فقط یک دور دارد که متناقض است با$A_{\mathcal{P}} = A_{\mathcal{P}'}$. اگر$\mathcal{P}$ غیرابتدایی باشد،$k > k'$ ایجاب می‌کند که $A_{k'} \subset A'_0$. چون $A_{k'}, A'_0$ نامرتبط هستند وσ حافظ رتبه است، به‌این معنی است که σ^k هر پرتو در$A_{k'} \cup A_0$ را ثابت نگه می‌دارد، یعنی $k = n$ و این متناقض بافرض غیرابتدایی بودن $\mathcal{P}$است.

حال نشان دادن طرف دیگر برهان قضیه باقی می‌ماند: اگر $v_c = v_-$ یا $v_c = v_+$ آن گاه پرتوهای دینامیکی در زاویه‌های مشخصه، یک نقطه‌ی پیش بحرانی قبول می‌کنند و بنابراین ختم‌نمی شوند. سرانجام اگر v_c یکی از زاویه‌های مشخصه نباشد و $v_c \notin (v_-, v_+)$ آن گاه به سادگی دیده می‌شود که $v_c^{\pm} \in (v_-, v_+)$ ، یعنی هر دو زاویه‌ی مشخصه، دنباله‌های متفاوتی از برچسب‌ها دارند و در یک نقطه‌ی مشترک ختم نمی‌شوند. □

تعریف ۸.۳ (عدد دوران ترکیبات $\mathcal{P}$)

فرض کنید $\mathcal{P} = \{A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}\}$ یک توصیف روشن از یک مدار با s پرتو مختوم در هرنقطه از مدار باشد. بعلاوه فرض کنید یک $A_i = \{v_0, v_1, \cdots, v_{s-1}\} \in \mathcal{P}$ ی با $v_0 < v_1, \cdots < v_{s-1} < v_0$ و فرض کنید $r \in \{0, 1, \cdots, s-1\}$ یک عدد صحیح باشد طوری که $\sigma^r(v_i) = v_{i+1}$.دراین صورت عدد r/s را عدد دوران ترکیبات $\mathcal{P}$ می‌نامیم.

این مشهور است و به سادگی دیده می‌شود که عدد دوران ترکیبات $\mathcal{P}$ به زیرمجموعه‌ی $A_i \subset \mathcal{P}$ که برای تعریف آن به کار رفته‌است، وابسته نیست. باید توجه کنیم که اگر $e^{2\pi i p/q}$ مضرب یک پارامتر سهموی باشد آن گاه عدد دوران ترکیبات توصیف‌روشن مدار سهموی مربوطه عبارت است از p/q.

۳—۳ پایداری توصیف های روشن مدار

حال می‌توانیم موضوعاتی را که کمی پیش تعریف کردیم، به کار بریم. به‌ویژه نتایجی درباره‌ی آشفتگی پارامترها و نتایجی برای مدارهای قطعی و توصیف‌های روشنشان بدست آوردیم. این نتایج به قضایایی روی پرتوهای پارامتری ختم می‌شوند که ما آن‌هارا در شروع این فصل ذکر کرده‌ایم. با یک عبارت در باره‌ی پایداری نقاط متناوب تحت آشفتگی پارامتر شروع می‌کنیم که از موضوعات مورد علاقه‌مان در فصل‌های بعدی خواهد بود. به وضوح برهان به درجه‌ی d وابسته نیست.

لم ۴.۳. فرض کنید $c_\circ$ یک پارامتر باشد و $z_\circ$ یک نقطه‌ی متناوب با دوره‌ی تناوب دقیق k و مضرب $\lambda(c_\circ, z_\circ) \neq 1$ باشد. در این صورت یک همسایگی U از $c_\circ$ و یک تابع تحلیلی $z : U \to \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری‌که $z(c)$ یک نقطه‌ی متناوب f_c با دوره‌ی تناوب دقیق k برای هر $c \in U$ و $z(c_\circ) = z_\circ$ است.

اثبات. برهان: ادعابراحتی از قضیه‌ی تابع ضمنی نتیجه می‌شود: فرض کنید $Q(c,z) := f_c^k(z) - z$ این تابع بوضوح در c و z تحلیلی است و$(c_\circ, z_\circ)$ یک صفر آن است و$\frac{d}{dz}Q(c_\circ, z_\circ) \neq \circ$ چون $\lambda(c_\circ, z_\circ) \neq 1$.ازاین رو بوسیله‌ی قضیه‌ی تابع‌ضمنی همسایگی‌های V, U از $z_\circ, c_\circ$ ویک تابع تحلیلی $z : U \to V$ وجود دارند به طوری که $Q(c, z(c)) = \circ$ ، یابه عبارت دیگر $z(c)$ یک نقطه از دوره‌ی تناوب دقیق k برای هر $c \in U$ است. □

قضیه‌ی زیر تعمیمی از لم$B.1$ در[۳]است و پایداری موضعی توصیف‌روشن یک مدار دافع را تحت‌آشفتگی پارامتر، تضمین می‌کند.

قضیّه ۲.۳ (پایداری توصیف های روشن):

فرض کنید $c_\circ$ یک پارامتر با نقطه‌ی متناوب دافع $z_\circ$ و توصیف‌روشن $\mathcal{P}$ باشد. در این صورت یک همسایگی U از $c_\circ$ و تابع تحلیلی $z : U \to \mathbb{C}$ با$z(c_\circ) = z_\circ$ وجود دارند که $z(c)$ یک نقطه‌ی‌متناوب دافع باتوصیف روشن $\mathcal{P}$ برای هر $c \in U$ است.

اثبات. فرض کنید n, k به ترتیب دوره‌ی تناوب مداری و دوره‌ی تناوب پرتوی‌مدار دافع $c_\circ$ باشند. به کمک لم ۴.۳ وجودِ یک همسایگی U از $c_\circ$ ، یک تابع هولومورفیک z روی U با ویژگی‌های ادعا شده را تضمین می‌کند بجز برای این عبارت که $z(c)$ دافع است و توصیفات روشن پایدار،باقی می‌مانند. نشان خواهیم داد که یک تحدید از z در ویژگی‌های باقی‌مانده صدق می‌کند. ما چهار الزام که U باید برقرار کند را بیان می‌کنیم:

بوسیله‌ی احتمال انقباض U می‌توانیم فرض کنیم که $z(c)$ برای تمام $c \in U$ها دافع است، چون مضرب $\lambda(c, z(c))$ بطور هولومورفیک بهc وابسته است. بعلاوه، بوسیله‌ی قضیه‌ی یکنواخت‌سازی

کونیگس[۱] (قضیه‌ی ۶.۱ و تذکر ۶.۲ در [۵] را ببینید) دوباره برای یک Uی احتمالاً منقبض (چروک شده) یک نگاشت هولومورفیک $\Phi_c : z(U) \longmapsto \mathbb{C}$ که همچنین بطور هولومورفیک روی $c \in U$ وابسته است وجود دارد طوری‌که $\Phi_c(z_\circ) = \circ$ و $\Phi_c \circ f_c^k(z(c)) = \lambda(c, z(c)).\Phi_c \circ z(c)$ برای تمام $c \in U$.

اکنون فرض کنید $R_v^{c_\circ}$ یک پرتودینامیکی باشد که در $z_\circ$ ختم می‌شود. دوباره بوسیله‌ی منقبض کردن U، در صورت لزوم می‌توانیم فرض کنیم که یک نقطه از R_v^c با یک پتانسیل $t > \circ$ بقدر کافی کوچک مشمول در $z(U)$ است برای هر $c \in U$. الزام آخر روی U مطابق این است که $c_\circ \in \mathcal{M}_d$ یا نه، اگر $c_\circ \notin \mathcal{M}_d$ از لم ۵.۲ می‌دانیم که زاویه‌ی خارجی $c_\circ$ ازتمام زاویه‌های $\sigma(v), \sigma^{\text{۲}}(v), \cdots$ مجزاست و از این‌رو می‌توانیم فرض کنیم که زاویه‌های خارجی از پارامترهای در U از $\sigma(v), \sigma^{\text{۲}}(v), \cdots$ مجزا هستند، در حالتی که $c_\circ \in \mathcal{M}_d$، فرض کنیم که U آن‌قدر کوچک باشد که تمام نقاط واقع در $z(U)$ دارای پتانسیل کمتر از $t/\text{۲}$ باشند.

حال همسایگی U از $c_\circ$ ویژگی‌هایی که ما برای تمام کردن برهان نیاز داریم را دارد: بوسیله‌ی ساختار U، قضیه‌ی ۴.۲ و لم ۵.۲ پرتوهای دینامیکی R_v^c برای تمام $c \in U$ها مختوم هستند. برای هر $c \in U$ یک شاخه از نگاشت وارون از f_c^k وجود دارد. فرض کنید q_c شاخه‌ای باشد که $z(c)$ و پرتودینامیکی R_v^c را ثابت نگه می‌دارد. چون $|\lambda(f_c, z(c))| < \text{۱}$ هر نقطه در $z(U)$ بوسیله‌ی تکرارهای q_c به $z(c)$ میل می‌کند، بویژه نقطه‌ی روی R_v^c با پتانسیل t. ازاین رو، R_v^c در $z(c)$ ختم می‌شود برای هر $c \in U$. این نشان می‌دهد که توصیف روشن در U پایدار باقی می‌ماند. □

اکنون آماده‌ایم تا اولین گزاره‌ی‌مان در مورد ویژگی‌های مختوم پرتوهای پارامتری متناوب را بسازیم که نشان می‌دهد پرتوهای پارامتری متناوب مختوم هستند. از این‌رو اولین ادعا از قضیه‌ی ساختار۱.۱ را ثابت می‌کند و به ما می‌گوید که می‌تواند به معنی مطالعه‌ی ویژگی‌های مختوم پرتوهای پارامتری بیشتر

[۱] Koeniga

باشد. برهان منسوب به دودی[۲]، گُلدبرگ[۳]، میلنور[۴] و هوبارد[۵] است (قضیه‌ی $C.7$ در [۳] را ببینید). اگرچه آن‌ها قضیه را فقط برای حالت درجه‌ی دوم بیان می‌کنند، برهان آن‌ها در حالت $d \geq 2$ نیز برقرار است. میلنور و شلچر[۶] این قضیه را همچنین برای برهانشان از قضیه‌ی ساختار در حالت درجه‌ی دوم بکار بردند(برهان قضیه‌ی ۳.۱ در [۶] و گزاره‌ی ۳.۱ در [۸] را ببینید).

قضیّه ۳.۳ (پرتوهای پارامتری متناوب مختوم هستند):
فرض کنید v یک زاویه با دوره‌ی تناوب دقیق n باشد. در این صورت پرتو پارامتری $R_v^{\mathcal{M}}$ در یک پارامترسهموی $c_\circ$ با مدار سهموی از دوره‌ی پرتو دقیق n ختم می‌شودو پرتو دینامیکی R_v^c در یک نقطه از مدار سهموی ختم می‌شود.

تذکر ۲.۳ در حقیقت در قضیه‌ی ۱.۵ خواهیم دید که پرتو دینامیکی $R_v^{c_\circ}$ در یک نقطه‌ی خاص از مدار سهموی ختم می‌شود، که آن‌را نقطه‌ی مشخصه می‌نامیم.

اثبات. فرض کنید $c_\circ$ یک نقطه‌ی انباشتگی از پرتو پارامتری $R_v^{\mathcal{M}}$ باشد. در این صورت بوسیله‌ی قضیه‌ی ۴.۲ پرتو دینامیکی $R_v^{c_\circ}$ در یک نقطه‌ی سهموی یا دافع z از دوره‌ی تناوب n ختم می‌شوند. فرض کنید z با درنظرگرفتن $c_\circ$ دافع باشد در این صورت بوسیله‌ی قضیه‌ی ۲.۳ یک همسایگی U از $c_\circ$ وجود دارد طوری‌که برای هر $c \in U$ پرتو دینامیکی R_v^c در یک نقطه‌ی دافع ختم می‌شود. اما بوسیله‌ی لم۵.۲ می‌بینیم که هر همسایگی از $c_\circ$ شامل پارامترهای c است طوری که $R_v^{c_\circ}$ مختوم نیست واز این رو $c_\circ$ سهموی است. چون مجموعه‌ی حدی یک پرتو همبنداست(برای مثال تذکر بعد از تعریف ۲.۴ در [۱۰] را ببینید) و بوسیله‌ی لم ۶.۲ فقط تعدادی متناهی پرتو وجود دارد که مدارهای

---

[۲] Douady
[۳] Goldberg
[۴] Milnor
[۵] Hubbard
[۶] Schleicher

سهموی از دوره‌ی تناوب n داشته باشند، $c_\circ$ تنها نقطه‌ی حدی از پرتو پارامتری است. □

بوسیله‌ی ادامه‌ی تحلیلی تابع $z(c)$ و قضیه‌ی ۲.۳ اکنون یک نسخه‌ی عمومی بصورت گزاره‌ی زیر بدست می‌آوریم.

گزاره ۱.۳ (پایداری توصیفات روشن): فرض کنید $c_\circ$ یک پارامتر با نقطه‌ی متناوب دافع $z_\circ$ و توصیف روشن مرتبط $\mathcal{P}$ از دوره‌ی پرتوی n باشد. بعلاوه، U یک همسایگی همبند ساده از $c_\circ$ باشد طوری‌که هر $c \in U$ دو ویژگی زیر را برقرار کند:

۱) c مدار سهموی از دوره‌ی تناوب پرتوی n ندارد

۲) c روی هیچ پرتو پارامتری از دوره‌ی تناوب n قرار نداشته باشد.

در این صورت یک تابع هولومورفیک $z : U \to \mathbb{C}$ وجود دارد طوری که $z(c), z(c_\circ) = z_\circ$ یک نقطه‌ی متناوب دافع با توصیف روشن مرتبط $\mathcal{P}$ برای هر $c \in U$ باشد.

تذکر ۳.۳ از این رو، توصیف روشن از یک نقطه‌ی دافع می‌تواند خراب شده باشد فقط در نقاط سهموی یا در یک پرتو پارامتری از دوره‌ی تناوب یکسان. بوضوح در قضیه‌ی ۱.۴ می‌بینیم که توصیف روشن یک مدار دافع است خراب شده در بعضی حالات در تمام مدت آشفته شدن به توی یک پارامتر سهموی، اگر یک زاویه‌ی v مشمول در یک زیرمجموعه از توصیف روشن یک مدار دافع نسبت به یک پارامتر $c_\circ$ باشد، بوسیله‌ی لم ۵.۲ توصیف روشن خراب شده خواهد بود اگر ما آشفته کنیم به یک پرتو پارامتری با زاویه‌ای که بایک تصویر پیشرو از v یکسان است.

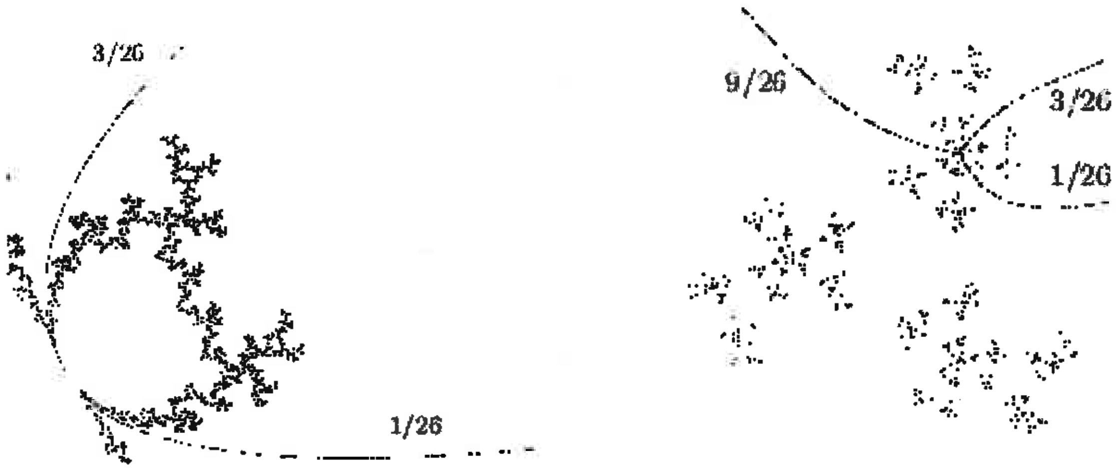
اکنون با داشتن یک نسخه کل از گزاره‌ای روی پایداری توصیفات روشن مدار دافع، می‌توانیم یک نسخه ضعیفتر از قضیه‌ی ۳.۱ در [٦] از میلنور پیرو برهان او بدست آوریم که واقعاً به درجه وابسته نیست. در این متن ما آن را برای نشان دادن این مطلب که درهر پارامتر سهموی اساسی حداقل دو پرتو پارامتری ختم می‌شوند، بکار می‌بریم. در حالت درجه‌ی دوم این نشان می‌دهد که تمام پرتوهای

پارامتری در زوج‌هایی ختم می‌شوند زیرا تمام توصیفات روشن مدار سهموی اساسی هستند. به هر حال در حالت $d > 2$ این مطلب درست نیست.

قضیّه ۴.۳ پرتوهای پارامتری مختوم در یک نقطه‌ی مشترک): فرض کنید $\mathcal{P}$ یک توصیف روشن اساسی با زاویه‌های مشخصه‌ی v_+, v_- باشد. در این صورت پرتوهای پارامتری $R^{\mathcal{M}}_{v_+}, R^{\mathcal{M}}_{v_-}$ در یک پارامتر سهموی مشترک $c_\circ$ ختم می‌شوند، بعلاوه هر پارامتری که در متمم $\mathbb{C} - \{R^{\mathcal{M}}_{v_+} \cup R^{\mathcal{M}}_{v_-} \cup \{z_\circ\}\}$ که شامل صفر نیست، واقع است، یک مدار با توصیف روشن $\mathcal{P}$ دارد.

اثبات. دوره‌ی تناوب مشترک زوایای در $A_{\mathcal{P}}$ را با n نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم که F_n مجموعه‌ی تمام پارامترهای سهموی با مدار سهموی از دوره‌ی تناوب پرتوی n باشد. حال مولفه‌های همبند U_i از افراز $F_n \cup \bigcup_{v \in A_{\mathcal{P}}} R^{\mathcal{M}}_v$ را در نظر بگیرید چون $A_{\mathcal{P}}$ و F_n متناهی هستند(لم‌های ۶.۲ و۱.۳)فقط تعدادی متناهی مولفه وجود دارد و بوسیله‌ی قضیه‌ی۳.۳ این مولفه‌ها باز هستند. بیشتر با بکار بردن گزاره‌ی ۱.۳ بدست می‌آوریم که توصیف روشنی که زاویه‌های $A_{\mathcal{P}}$ تشکیل می‌دهند در هر U_i پایدار باقی می‌ماند، یعنی برای هر U_i مفروض توصیف روشن زاویه‌های $A_{\mathcal{P}}$ برای تمام پارامترهای در U_i یکسان است. چون بوسیله‌ی لم ۲.۳ هیچ زاویه‌ای در $A_{\mathcal{P}}$ واقع در (v_-, v_+) وجود ندارد و پرتوهای پارامتری در زاویه‌های مجزا نقطه‌ی مشترکی در $\mathbb{C} - \mathcal{M}_d$ ندارند، دقیقاً یک مولفه وجود دارد که آن‌را با $U_\circ$ نمایش می‌دهیم، که شامل پارامترهای در $\mathbb{C} - \mathcal{M}_d$است و زاویه‌های خارجی در (v_-, v_+) دارد. بوسیله‌ی قضیه‌ی ۱.۳ این ها تنها پارامترهای در $\mathbb{C} - \mathcal{M}_d$ هستند که یک مدار با توصیف روشن $\mathcal{P}$ دارند، با ترکیب این مطلب به نتیجه‌ی توصیف شده از گزاره‌ی ۱.۳ می‌بینیم که $U_\circ$ نمی‌تواند شامل هیچ پارامتر دیگری در $\mathbb{C} - \mathcal{M}_d$ باشد و این یعنی $U_\circ$ بوسیله‌ی $R^{\mathcal{M}}_{v_+}, R^{\mathcal{M}}_{v_-}$ و دقیقاً یک نقطه‌ی $c_\circ$ از F_n محدود شده است . این اولین ادعا را ثابت می‌کند. حال برای یک پارامتر $c \notin \mathcal{M}_d$ دومین ادعا به وسیله‌ی قضیه‌ی ۱.۳ ثابت می‌شود. با ترکیب کردن این با گزاره‌ی ۱.۳ می‌بینیم که ادعا همچنین برای $c \in \mathcal{M}_d$ نیز برقرار است. چون تمام مدارهای متناوب $f_\circ(z) = z^d$ یک توصیف

روشن غیراساسی دارند، واضح است که $0 \notin U_0$. □



سمت چپ تصویر: $\mathcal{P}-Wake$ از $\mathcal{M}_3$ برای توصیف روشن $\mathcal{P}$ با بازه‌ی مشخصه‌ی (۱/۲۶, ۳/۲۶)

سمت راست تصویر : مجموعه‌ی ژولیا $z \to z^3 + c$ برای یک پارامتر c که درون $\mathcal{P}-Wake$ ولی خارج از $\mathcal{M}_3$ واقع است.(c نزدیک $0.65 + 0.59i$ است).

برای دو پارامتر R_{v_-}, R_{v_+} که در یک نقطه‌ی مشترک z_0 ختم می‌شوند مولفه‌ای از $\mathbb{C} - \{R^{\mathcal{M}}_{v_+} \cup R^{\mathcal{M}}_{v_-} \cup \{z_0\}\}$ که شامل صفر نیست $\mathcal{P}-Wake$ از $\mathcal{M}_3$ نامیده می‌شود.(بخش ۳ از [۶] را ببینید) ما لم بعد را در قضیه‌ی ۵.۳ با یک روش جدید ترکیب می‌کنیم، که منسوب به شلچر است، برای اثبات این مطلب که هر پارامتر ابتدایی یک نقطه‌ی مختوم حداقل دو تا یا یکی پرتو پارامتری است بسته به آن‌که اساسی باشد یا نباشد.

لم ۵.۳ (در یک همسایگی از یک نقطه‌ی سهموی ابتدایی):

فرض کنید c_0 یک پارامتر سهموی ابتدایی و z_0 یک نقطه از مدار سهموی با دوره‌ی تناوب دقیق k باشد در این صورت دو امکان وجود دارد: همسایگی‌های V, U از z_0, c_0 و توابع $z_1, z_2 : U \to V$ وجود دارند طوری که $z_1(c), z_2(c)$ نقاطی از دوره‌ی تناوب دقیق k هستند و $z_1(c_0) = z_2(c_0) = z_0$. یا یک پوشش‌دولایه[۷] $\pi : U' \to U$ از یک همسایگی U از c_0 با تنها نقطه‌ی شاخه‌ای [۸] $\pi(c'_0) = c_0$ ، یک همسایگی V از z_0 و یک تابع هولومورفیک $z : V' \to V$ وجود دارد طوری که $z(c')$ یک نقطه از دوره‌ی تناوب دقیق k برای $z(c'_0) = z_0, c = \pi(c')$ است.

تذکر ۴.۳ می‌توانیم بگوییم که مدار سهموی c_0 به دو مدار با دوره‌ی تناوب دقیق k شکافته می‌شود. سپس قادر خواهیم بود که ببنیم درحالت ابتدایی همیشه امکان دوم اتفاق می‌افتد. این به این معنی است که اگر ما در امتداد یک قوس بسته‌ی بقدر کافی کوچک حول c_0 حرکت کنیم آن‌گاه دو مداری که مدار سهموی c_0 به آن‌ها شکافته می‌شود، جابجا خواهندشد.

اثبات. فرض کنیم $Q(c, z) := f_c^k(z) - z$. ابتدا ثابت می‌کنیم که همسایگی‌های U, V به ترتیب از c_0, z_0 وجود دارند طوری که $Q(c, z)$ برای یک $c \in U$ ثابت، دقیقاً دو صفر در V دارد. فرض کنید U یک همسایگی از c_0 باشد طوری که هیچ یک از پارامترهای دیگر با مدار سهموی k–متناوب در U واقع نباشند. چون بوسیله‌ی لم ۴.۲ مضرب در رابطه‌ی ۱ $= \lambda(c_0, z_0)$ صدق می‌کند، برای یک $c \in U$ ثابت بسط تیلور نزدیک z_0 نسبت به z بصورت $Q(c, z) = a(z - z_0)^{q+1} + O\left((z - z_0)^{q+2}\right)$ است. این‌جا $q \geq 1$ و $a \in \mathbb{C}$. بوسیله‌ی قضیه‌ی گل لئو–فاتو[۹] (ابتدای بخش ۲–۳ و قضیه‌ی ۷.۲ در [۵] را ببینید) می‌دانیم که q دقیقاً برابر است با تعداد گلبرگ‌های جاذب. چون f_c تنها یک نقطه‌ی بحرانی دارد و بوسیله‌ی گزاره‌ی ۷.۱۰ در [۵] حوضه‌ی فوری هر یک از گلبرگ‌های جاذب

[۷] two-Sheeted

[۸] ramification point

[۹] Leau-Fatou Flower Theorem

حداقل از یک نقطه‌ی بحرانی تشکیل شده است، f_c^k فقط یک نقطه‌ی بحرانی در حوضه‌ی فوری مدار z_0 دارد و از این‌رو دقیقاً یک گلبرگ جاذب نسبت به f_c^k وجود دارد یعنی $q = 1$. این به این معنی است که z_0 یک صفر دوگانه از $z \to Q(c_0, z)$ است و با بکار بردن اصل آرگومان این نتیجه می‌دهد که برای یک U احتمالاً منقبض [10] که برای هر $c \in U$ یک ϵمثبت وجود دارد طوری‌که دقیقاً دو صفر ساده $z_1(c), z_2(c) \in V := B_\epsilon(z_0)$ وجود دارد. حال خواهیم دیدبسته به این‌که در مدتی که پارامتر حول c_0 حرکت می‌کند، دو مدار جابجا می‌شوند یا نه، امکان‌هابصورت لم رخ می‌دهند. چون طبق فرض U شامل هیچ پارامتر با مدار سهموی k-متناوب برای هر $c \in U - \{z_0\}$ نیست و نقطه‌ی متناوب $z \in V$ از دوره‌ی تناوب دقیق k مضرب $\lambda(c, z)$ همیشه مخالف یک ۱ است. این به این معنی است که اگر ما یک پارامتر $c^* \in U - \{z_0\}$ با صفرهای $z_1^*, z_2^* \in V$ از $Q(c^*, z)$ انتخاب کنیم آن‌گاه بوسیله‌ی لم ۴.۳، جرم‌های تحلیلی Z_1, Z_2 در c^* با $Z_1(c^*) = z_1^*$ و $Z_2(c^*) = z_2^*$ وجود دارند و ما می‌توانیم بطور تحلیلی آن‌ها را در امتداد هر قوس در $U - \{c_0\}$ ادامه دهیم. اگر یک قوس $\gamma : I \to U - \{c_0\}$ حول c_0 با $\gamma(0) = \gamma(1) = c^*$ انتخاب کنیم آنگاه دو موقعیت برای ادامه‌ی تحلیلی Z_1, Z_2 در امتداد γ وجود دارد: یا ادامه‌ی Z_1 دوباره به z_1^* منجر می‌شود و از این رو ادامه‌ی Z_2 به z_2^* یا آنها جابجا می‌شوند. با بکار بردن قضیه‌ی $Mondromy$ در حالت اول بدست می آوریم که ما می‌توانیم جرم‌های Z_1, Z_2 را به توابع هولومورفیک کراندار روی $U - \{c_0\}$ ادامه دهیم و سپس آن‌ها را بیشتر به توابع تحلیلی $z_1, z_2 : U \to V$ با $z_1(c_0) = z_2(c_0) = z_0$ ادامه دهیم طوری که برای هر $c \in U$، $z_1(c), z_2(c)$ هر دو نقطه بادوره‌ی تناوب دقیق k نسبت به f_c هستند.

در دومین حالت پیش از این دیدیم که هیچ تابع تحلیلی با ویژگی‌های خواسته شده روی U وجود ندارد. به هر حال روی یک پوشش دولایه‌ی $\pi : U' \to V$ با تنها نقطه‌ی شاخه‌ای c_0 ، Z_1, Z_2 به یک تابع هولومورفیک $z : U' \to V$ با $\pi^{-1}(c_0) = \{c'_0\}, z(c'_0) = z_0$ منجر می‌شود طوری‌که $z(c')$ یک نقطه از دوره‌ی تناوب k نسبت به $f_{\pi(c')}$ برای هر $c' \in U'$ است. □

همانطور که قبلاً اعلان کردیم می‌توانیم نشان دهیم قضیه‌ی زیر را روی پارامترهای سهموی ابتدایی .

[10] shrunken

قضیّه ۵.۳ (پارامترهای سهموی ابتدایی):

فرض کنید $c_{\circ}$ یک پارامتر سهموی ابتدایی باشد. در این صورت حداقل دو پرتو پارامتری در $c_{\circ}$ ختم می‌شوند اگر $c_{\circ}$ اساسی باشدو حداقل یک پرتو پارامتری در $c_{\circ}$ ختم می‌شود اگر $c_{\circ}$ غیراساسی باشد.

ایده‌ی برهان زیر به این صورت است : اگر ما یکبار حول یک پارامتر سهموی ابتدایی بچرخیم آن‌گاه لزوماً یک توصیف روشن مدار دافع وجود خواهد داشت که باید«خراب شده» باشد، چون در هنگامی‌که حول پارامتر ابتدایی می‌چرخیم مدار دافع در یک دفعه‌ای(تکراری) جاذب می‌شود. اگر منحنی مسیر حرکت ما بقدر کافی کوچک باشد این فقط در یک پرتو پارامتری می‌تواند اتفاق افتد. از این رو یک پرتو پارامتری در یک پارامتر سهموی ابتدایی ختم می‌شود.

اثبات. فرض کنید k عبارت باشد از دوره‌ی تناوب دقیق از یک مدار سهموی. دوباره دو امکان لم قبل را برای بحث داریم: اگر امکان اول رخ دهد آن‌گاه یک همسایگی U از $c_{\circ}$ وجود دارد طوری‌که هیچ یک از نقاط سهموی از دوره‌ی تناوب k در U واقع نیستند و مضرب‌های $\lambda_{1}(c) := \lambda(c, z_{1}(c)), \lambda_{2}(c) := \lambda(c, z_{2}(c))$ روی U هولومورفیک هستند و از این رو بوسیله‌ی اصل نگاشت‌باز آنگاه هر همسایگی U از $c_{\circ}$ را بروی یک همسایگی از یک۱ می‌نگارند. فرض کنید γ یک قوس بسته در U ، پیچیده حول $c_{\circ}$ با $\gamma(1) = c^{*} = \gamma(0)$ باشد. در این صورت یک $t_{\circ} \in I$ وجود دارد طوری‌که $1 < |\lambda_{1}(\gamma_{\epsilon}(t_{\circ}))|, 1 < |\lambda_{2}(\gamma_{\epsilon}(t_{\circ}))|$ بوسیله‌ی قضیه‌ی ۵.۲ نقطه‌ی $z_{1}(\gamma_{\epsilon}(t_{\circ}))$ نقطه‌ی مختوم یک پرتو دینامیکی است واز این رو مدارش دارای توصیف روشن $\mathcal{P} \neq \emptyset$ است. اکنون بدون کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم که یک t_{1} با $t_{\circ} < t_{1}$ وجود دارد طوری‌که $1 < |\gamma_{1}(\gamma_{\epsilon}(t_{1}))|$. چون یک نقطه‌ی جاذب هرگز نقطه‌ی مختوم یک پرتو دینامیکی نیست و توصیف روشن نقاط دافع تحت آشفتگی پایدار است (گزاره‌ی ۱.۳را ببینید) باید یک $t^{*} \in (t_{\circ}, t_{1})$ وجود داشته باشد طوری‌که $\gamma_{\epsilon}(t^{*})$ روی یک پرتو پارامتری با زاویه‌ی از دوره‌ی تناوب k واقع باشد. این پرتو پارامتری بوسیله‌ی قضیه‌ی ۳.۳ در $c_{\circ}$ ختم می‌شود، چون با توجه به فرض هیچ پارامتر دیگری با مدار سهموی از دوره‌ی تناوب k در U قرار ندارد. زاویه‌ی این پرتو پارامتری که در $c_{\circ}$ ختم می‌شود، باید با زاویه‌ی

پرتو دینامیکی مختوم در مدار سهموی $c_\circ$ برابر باشد. چون در حالت اساسی توصیف روشن مدار سهموی دو دور دارد، می‌توانیم بحث بالا را برای هر دوی آن‌ها بکار ببریم و بدست آوریم که حداقل دو پرتو پارامتری در $c_\circ$ ختم می‌شوند. در حالت دوم یک پوشش دولایه‌ی $\pi : U' \to U$ از یک همسایگی U از $c_\circ$ با تنها نقطه‌ی شاخه‌ای $c_\circ = \pi(c'_\circ)$ و یک تابع هولومورفیک $z : U' \to \mathbb{C}$ وجود دارد طوری‌که $z(c')$ یک نقطه از دوره‌ی تناوب k است و $z(c'_\circ)$ یک نقطه‌ی سهموی است. از این رو مضرب $\lambda(c') := \lambda(\pi(c'), z(c')), z(c')$ هولومورفیک است و $\lambda(c'_\circ) = ۱$. حال فرض کنید $c'_۱, c'_۲ \in U'$ طوری‌که $\pi(c'_۱) = \pi(c'_۲)$ ولی $c'_۱ \neq c'_۲$ و یک قوس γ در U' را در نظر بگیرید طوری که $\gamma(\circ) = c'_۱, \gamma(۱) = c'_۲$ و $\pi(\gamma(I))$ یک قوس بسته در U باشد. بوسیله‌ی اصل نگاشت باز می‌توانیم فرض کنیم که $|\gamma(c'_۱)| < ۱$ و این ایجاب می‌کند که $|\gamma(c'_۲)| > ۱$. از این رو یک $t^* \in I^\circ$ وجود دارد طوری‌که $z(\gamma(t^*))$ روی یک پرتو پارامتری از دوره‌ی تناوب k واقع باشد. این پرتو فقط می‌تواند در $c_\circ$ ختم شود. همانند حالت اول این نتیجه می‌دهد که برای یک توصیف روشن اساسی یک پرتو پارامتری دوم در $c_\circ$ ختم می‌شود و این برهان را تمام می‌کند. □

فصل ۴

مولفه های هیپربولیک

۴–۱ مقدمه

در این‌فصل مولفه‌های هیپربولیک از $\mathbb{M}_d$ رامعرفی می‌کنیم. این ها مولفه‌های همبندی از پارامترها هستند که مدارهای جاذب دارند.

با مقایسه‌ی این برهان از قضیه‌ی ساختار با برهان‌های میلنور و شلچر در [۸] و[٦] متوجه می‌شویم که آن‌ها از مولفه‌های هیپربولیک در برهان‌های خود استفاده نکرده‌اند. برعکس بحث آن‌ها از مولفه‌های هیپربولیک بر قضیه ساختار استوار است. این دو دلیل دارد: اولی این است که ما در بخش ۵ ابزار جداسازی مدار را با شروع از پارامترهایی با مدارهای جاذب که ما برای آشفته کردن سراسر مولفه‌های هیپربولیک لازم داریم ، به پارامترهای سهموی گسترش دهیم.علت دوم این است که ما برای برهان‌هایمان لازم است ببینیم که پرتوهای پارامتری متناوب در گروه‌ها ختم می‌شوند. درحالت درجه‌ی دوم این ساده‌تر است چون تمام پرتوهای پارامتری دوبه‌دو ختم می‌شوند. به هر حال برای $d \geq ۲$ این درست نیست و آن‌ها در گروه‌هایی از d پرتو در مولفه‌های هیپربولیک ختم می‌شوند.

ما با تعریف مولفه‌های هیپربولیک و موضوعات مرتبط با آن شروع می‌کنیم، به‌علاوه ما این موضوعات را درقضیه‌های ۱.۴ و ١.٦ با پارامترهای سهموی و پایداری نقاط مختوم پرتوهای دینامیکی تحت آشفتگی پارامترها، مرتبط کنیم.

تعریف ۱.۴ : هیپربولیکی

برای یک پارامتر $c \in \mathbb{C}$ گوییم f_c یک نگاشت هیپربولیک است اگر یک مدار جاذب داشته باشد. یک پارامتر c هیپربولیک است اگر f_c یک نگاشت هیپربولیک باشد.

این عبارت منسوب به دودی و هوبارد هستند.([۲] را ببینید). به هرحال ما باید توجه کنیم که هیپربولیکی ارائه شده توسط آن‌ها نسبت به آن چیزی که ما این‌جا به کار می‌بریم کلی‌تر است. همچنین بخش ۱۴ در[۵] را برای بحث در نگاشت های هیپربولیک ببینید.

تعریف ۲.۴ مولفه‌ی هیپربولیک:

یک مولفه هیپربولیک با دوره‌ی تناوب n از $\mathbb{M}_d$ عبارت است از یک مولفه‌ی همبند از مجموعه‌ی

پارامترهایی که یک مدار جاذب با دوره‌ی تناوب دقیق n دارند.

لم ۱.۴ (خواص مقدماتی مولفه‌های هیپربولیک)

فرض کنید $\mathcal{H}$یک مولفه‌ی هیپربولیک با دوره‌ی تناوب n باشد. دراین صورت $\mathcal{H}$ یک زیر مجموعه‌ی باز $\mathbb{M}_d$ است و یک نگاشت هیپربولیک $Z : H \to \mathbb{C}$ چنان موجود است که برای تمام $c \in \mathbb{C}$ها، $Z(c)$ جاذب بوده و دوره‌ی تناوب دقیق آن n است.

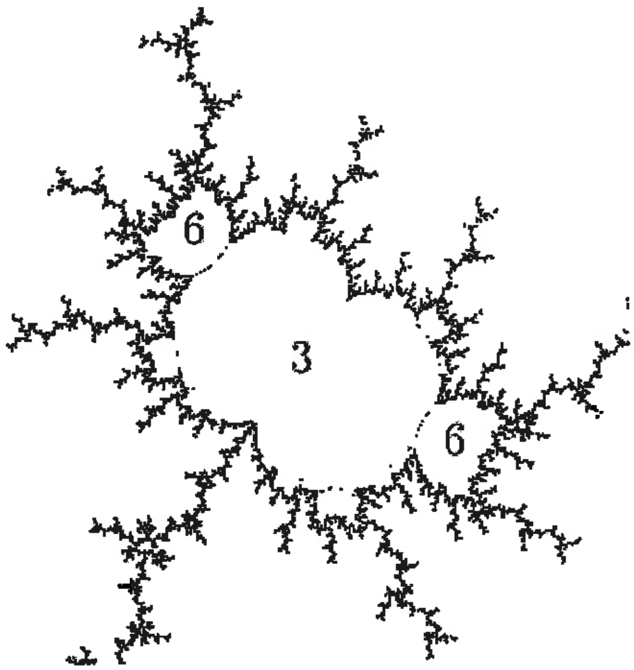
اثبات. چون H دارای دوره‌ی تناوب دقیق n است لذا با توجه به تعریف یک $c_0 \in H$با مدار جاذب از دوره‌ی تناوب دقیق n وجود دارد. به وسیله‌ی لم۲.۲، f_{c_0} یک مدار جاذب خوش تعریف دارد. جاذب بودن به این معنی است که قدر مطلق مضرب متناظر از یک کمتر است و از این رو به وسیله لم۳.۲.۱ یک نگاشت $Z : H \to D$ با خواص مورد نیاز وجود دارد. به وسیله‌ی لم مشابهی نتیجه می‌شود که هر $c' \in H$ یک همسایگی U دارد به طوری‌که تمام $c \in U$ها هیپربولیک هستند، یعنی $\mathcal{H}$باز است. به‌علاوه اگر f_c یک مدار جاذب داشته باشد، آن‌گاه نقطه‌ی بحرانی در حوضه‌ی جذب فوری این مدار واقع است.(تذکر قبل از لم۲.۲ را ببینید) و بنابراین مدار بحرانی کراندار است یعنی $c \in \mathbb{M}_d$ و این به این معنی است که $H \subset \mathbb{M}_d$. □

تعریف ۳.۴ ریشه‌ها، بازریشه‌ها و مرکزها

فرض کنید$\mathcal{H}$ یک مولفه‌ی هیپربولیک از دوره‌ی تناوب nباشد. دراین صورت یک پارامتر واقع در ∂H که دارای مدار سهموی اساسی از دوره‌ی تناوب پرتوی دقیق n است ، یک ریشه از $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود.به طور مشابه یک پارامتر در $\partial\mathcal{H}$ با مدار سهموی غیراساسی از دوره‌ی تناوب پرتوی دقیق n یک بازریشه از $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود. بعلاوه یک پارامتر در $\mathcal{H}$ که یک مدار جاذب قوی از دوره‌ی تناوب دقیق n دارد مرکز$\mathcal{H}$ نامیده می‌شود.

تصویر ۴: در تصویرپایین مولفه‌های هیپربولیک از $\mathcal{M}_2$ را می‌بینید.این جا مامی توانیم مولفه‌های هیپربولیک راببینیم.در بین آن‌ها یکی از آن‌ها که دارای دوره‌ی تناوب ۳ است دو مولفه‌ی همسایه از

دوره‌ی تناوب ٦ دارد.



قضایای٣.٦ و ٢.٦ نشان خواهند داد که هر مولفه‌ی هیپربولیک دقیقاً یک ریشه و یک مرکز دارد. به علاوه در گزاره‌ی ٢.٦ خواهیم دید که تعدادبازریشه‌های یک مولفه‌ی هیپربولیک دقیقاً برابر با $d-۲$ است. به ویژه در حالت درجه‌ی دوم هیچ ریشه‌ی مشترک وجود ندارد.
قضیه‌ی زیر و دوباره اطلاعاتی درباره‌ی پارامترهای سهموی به مامی‌دهد. به ویژه این قضیه نشان می‌دهد که مدارهای سهموی به چندین مدار شکافته می‌شود، اگر ما پارامترها را آشفته کنیم .برهان این قضیه در حالت درجه دوم فوراً به حالت $d \geq ۲$ تعمیم می‌یابد.(لم‌های ٦.١ و ٦.٢ در [٦] و لم ٥.١در [٨] را ببینید).

قضیّه ۱.۴ در همسایگی پارامترهای سهموی

فرض کنید $c_۰$یک پارامتر سهموی با دوره‌ی تناوب مداری دقیق k و دوره‌ی تناوب پرتوی دقیق nباشد و $z_۰$ یک نقطه از مدار سهموی $c_۰$ باشد. در این صورت عبارات زیر برقرارند.

۱) اگر توصیف روشن مدار سهموی غیر ابتدایی باشد آنگاه $c_\circ$ روی مرز مولفه های هیپربولیک با دوره‌ی تناوب دقیق k و n واقع است. به علاوه یک همسایگی Uاز $c_\circ$ و یک تابع هولومورفیک $Z_1 : U \to \mathbb{C}$ چنان موجودند که$Z_1(c)$ یک نقطه‌از دوره‌ی تناوب دقیق k است وو$Z_1(c_\circ) = z_\circ$.
به علاوه برای هر $c \in U - \{c_\circ\}$ یک مدار $\mathbb{O}(c)$ با دروه‌ی تناوب دقیقn وجود دارد که به توی مدار $\mathbb{O}(c_\circ)$ فرو می‌رود هنگامی که $c \to c_\circ$ و برای آن $c \longmapsto \lambda(c, \mathbb{O}(c))$ یک هولومورفیک روی U است.

۲) اگر توصیف روشن مدار سهموی اولیه باشد آن‌گاه $c_\circ$ یک ریشه یا یک بازریشه از یک مولفه‌ی هیپربولیک با دوره‌ی تناوب n است. به علاوه پوشش دو لایه‌ی $\Pi : U' \longmapsto U$ از یک همسایگی U از $c_\circ$ با تنها مقدار بحرانی $\Pi(c'_\circ) = c_\circ$ و یک تابع هولومورفیک $Z : U' \longmapsto \mathbb{C}$ وجود دارند به طوری‌که $Z(c)$ یک نقطه از دوره‌ی تناوبدقیق n است و $Z(c'_\circ) = z_\circ$.

اثبات. ابتدا حالت توصیف روشن مدار سهموی غیرابتدایی را در نظر می‌گیریم. از لم‌های۴.۲و ۴.۳ نتیجه می‌شود که یک همسایگی U از $c_\circ$ و یک تابع هولومورفیک $Z_1 : U \longmapsto \mathbb{C}$ چنان موجودند که $Z_1(c)$یک نقطه بادوره‌ی تناوب مدار دقیق kاست و $Z_1(c_\circ) = z_\circ$ به علاوه مضرب $\lambda(c, Z_1(c))$یک تابع هولومورفیک در cروی U است(چون $Z_1(c)$ چنین است)،به‌وسیله‌ی اصل‌نگاشت باز و رابطه‌ی $|\lambda(c_\circ, Z_1(c_\circ))| = 1$ نتیجه می‌شود که هر همسایگی از $c_\circ$ شامل پارامترهای c است طوری که $Z_1(c)$ جاذب است. بنابراین $c_\circ$ روی مرز یک مولفه‌ی هیپربولیک با دوره‌ی تناوب k واقع است .برای نشان دادن این‌که $c_\circ$ نیز روی مرز یک مولفه‌ی هیپربولیک از دوره‌ی تناوب n واقع است، ثابت می‌کنیم که یک مدار جاذب با دوره‌ی تناوب دقیق nوجود دارد. چون $\lambda(f^n_{c_\circ}, z_\circ) = 1$ ،برای یک عدد صحیح $q \geq 1$ و $a \in \mathbb{C}$ رابطه‌ی $f^n_{c_\circ}(z) = z + a(z - z_\circ)^{q+1} + \mathbb{O}\left((z - z_\circ)^{q+2}\right)$ رامانند بسط تیلور نزدیک $z_\circ$ به‌دست می‌آوریم، که با توجه به قضیه گل فاتو و لیو به این معنی است که $z_\circ$ دارای qگلبرگ جاذب است که f^nاولین تکراری از f است که آن‌هارا ثابت نگه می‌دارد و qپرتو دینامیکی در $z_\circ$ ختم می‌شوند.این پرتوهابه وسیله‌ی اولین نگاشت تکرار f^n به‌طور انتقالی جابجا می‌شوند، چون

f_cتنهایک نقطه‌ی‌بحرانی دارد. به علاوه چون $\lambda(f_{c_\circ}, z_\circ) = ۱$ لذا به‌وسیله‌ی لم ۴.۲ $\lambda\left(f_{c_\circ}^{k}, z_\circ\right)$ یک ریشه‌ی $\frac{n}{k}$–ام دقیق از یک ۱ است. سرانجام این نشان می‌دهد که $q = \frac{n}{k}$ همانند برهان ۵.۳ به‌وسیله‌ی اصل آرگومان نتیجه می‌شود که همسایگی‌های Uاز $c_\circ$ و V از $z_\circ$ چنان موجودند که $f_c^n(z)$ برای هر $c \in U$ دقیقاً $\frac{n}{k+۱}$نقطه‌ی ثابت در Vدارد(باشمردن چندگانگی) مابه دوره‌ی تناوب دقیق این نقاط نسبت به f_cبرای $c \in U - \{c_\circ\}$ علاقه‌مندیم، با توجه به بحث بالا دقیقاً یک از آن‌ها دوره‌ی تناوب دقیق k دارد و هیچ یک دوره‌ی تناوب کمترندارند. چون $\lambda\left(f_{c_\circ}^{l.k}, z_\circ\right) \neq ۱$ برای $l = ۲, \cdots, \frac{n}{k-۱}$ به دست می آوریم که تکرارهای $f_c^{l.k}$برای $c \in U$ دقیقاً یک نقطه‌ی ثابت در V دارند یا به عبارت دیگر: برای هر $c \in U$ و هر $l \in \left\{۲, \cdots, \frac{n}{k-۱}\right\}$ نگاشت f_c دقیقاً یک نقطه از دوره‌ی تناوب $l.k$ در V دارد. اما اکنون ما می‌دانیم که یک نقطه با دوره‌ی تناوب دقیق k نسبت به f_c در V وجود دارد.از این رو تمام نقاط $l.k$–متناوب فقط نقطه‌ی متناوب با دوره‌ی تناوب دقیق k در V هستند. این نشان می‌دهد که $\frac{n}{k}$ نقطه در V دوره‌ی تناوب دقیق n دارند. بنابراین ما برای هر $c \in U - \{c_\circ\}$ یک مدار $\mathbb{O}(c)$ با دوره‌ی تناوب دقیق n و مضرب خوش تعریف داریم طوری که $\frac{n}{k}$ نقطه از $\mathbb{O}(c)$ در یک نقطه از مدار سهموی $\mathbb{O}(c_\circ)$ اگر $c \to c_\circ$ به هم می‌پیوندند.مضرب $c \to \lambda\left(c, \mathbb{O}(c)\right)$ یک تابع هولومرفیک روی هر ناحیه همبند ساده در $U - \{c_\circ\})$ تعریف می‌کند. چون(نگاشت)مضرب روی U کراندار است، می‌توانیم آن‌رابه یک تابع هولومرفیک روی U ادامه دهیم. دوباره به‌وسیله‌ی قضیه‌ی‌نگاشت‌باز با $|\lambda\left(c_\circ, \mathbb{O}(c_\circ)\right)| = ۱$ نتیجه می‌شود که هر همسایگی از $c_\circ$ شامل پارامترهای cاست طوری که $\mathbb{O}(c)$ یک مدار جاذب است، یعنی $c_\circ$ روی مرز یک مولفه‌ی هیپربولیک با دوره‌ی تناوب n واقع است. این ،قضیه را در حالت غیرابتدایی ثابت می‌کند.

در حالت ابتدایی دومین ادّعا، یعنی وجود تابع هولومورفیک، مستقماً از لم۵.۳ نتیجه می‌شود. این دوباره به‌وسیله‌ی قضیه‌ی‌نگاشت‌باز ادّعای اول را ایجاب می‌کند. □

همانند یک نتیجه باید به تناظر بین پارامترهای‌سهموی وریشه‌هاتوجه کنیم، برای بحث بیشتر از مولفه‌های‌هیپربولیک نگاشت معروف به نگاشت مضرب‌یک مولفه‌های هیپربولیک خیلی مهم است.

تعریف ۴.۴ نگاشت مضرب یک مولفه‌ی هیپربولیک:

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک مولفه‌ی هیپربولیک باشد و برای $c \in H$ فرض کنید $\lambda(c, \mathbb{O})$ مضرب مدار جاذب f_c باشد. در این صورت $\lambda_H : H \to D$ که $c \longmapsto \lambda(c, \mathbb{O})$ را نگاشت مضرب $\mathcal{H}$ می‌نامیم. فوراً نتیجه می‌شود که λ_H خوش تعریف است: برای پارامترهای هیپربولیک یک مدار جاذب یکتا وجود دارد قدرمطلق مضرب یک مدار کمتر از یک ۱ است. حال می‌خواهیم چند خاصیت جالب از نگاشت مضرب را نشان دهیم.

لم ۲.۴ (ویژگی‌های نگاشت مضرب یک مولفه‌ی هیپربولیک):

نگاشت مضرب λ_H از مولفه‌ی هیپربولیک $\mathcal{H}$ یک نگاشت هولومورفیک *proper* است و یک توسیع پیوسته‌ی $\lambda_{\bar{H}}$ از $\bar{H}$ به‌روی $\bar{D}$ دارد.

اثبات. فرض کنید k دوره‌ی تناوب $\mathcal{H}$ باشد. به‌وسیله‌ی لم ۴.۱ یک نگاشت Z روی $\mathcal{H}$ وجود دارد طوری‌که $Z(c)$ یک نقطه‌ی جاذب با دوره‌ی تناوب دقیق k است. این ایجاب می‌کند که λ_H روی $\mathcal{H}$ هولومورفیک است. برای پارامترهای $c \in \partial H$ که نقاط سهموی با دوره‌ی تناوب پرتوی k ندارند، با توجه به لم ۴.۳ می‌توانیم $Z(c)$ را به‌طور تحلیلی در یک همسایگی از c توسیع دهیم. در دیگر پارامترهای روی ∂H هنوز می‌توانیم به‌وسیله‌ی قضیه ۱.۴ $Z(c)$ را ادامه دهیم، به علاوه برای دو دنباله‌ی $(c_i), (c_j)$ در $\mathcal{H}$ که به $c \in \partial H$ همگرا هستند حدهای $lim \lambda_H(c_i)$ و $lim \lambda_H(c_j)$ برابر هستند، چون هر $c \in H$ یک مدار بی‌اثر یکتا دارد. این نشان می‌دهد که λ_H یک توسیع پیوسته‌ی $\lambda_{\bar{H}} : \bar{H} \longmapsto \bar{D}$ دارد. اکنون دنباله‌ی $(c_n)_{\mathbb{N}}$ را در $\mathcal{H}$ در نظر بگیرید که $c \in H$ را در نظر بگیرید که $c_n \longmapsto c \in \partial H$ و فرض کنید که یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $K \subset D$ وجود داشته باشد طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\lambda_H(c_n) \in K$ باشد. در این صورت یک $1 > \lambda$ با $|\lambda_H(c_n)| < \lambda < 1$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد، یعنی ، تمام نقاط انباشتگی $(\lambda_H(c_n))_n$ قدرمطلق کمتر از یک ۱ دارند. اما این متناقض است با $1 = |\lambda_{\bar{H}}(c)| = |\lambda_H(c_n)| lim$، به وسیله‌ی ادامه‌ی $|\lambda_{\bar{H}}|$ □

فصل ۵

جداسازی مدار

۵–۱ مقدمه

در این فصل ،هدف به‌دست آوردن اطلاعاتی روی ویژگی‌های ختم‌شدن پرتوهای پارامترهای متناوب است. به‌ویژه می‌خواهیم نشان دهیم که اگر یک پرتوپارامتری دریک پارامتر ختم شود،آنگاه پرتو دینامیکی در زاویه‌ی یکسان، در نقطه‌ی مشخه‌ی مدارسهموی ختم می‌شود. مهمترین ابزاری که برای این منظور به کار می‌بریم مفهوم «جداسازی مدار» است، که منسوب به شلچراست. ما لم‌های «جداسازی مدار» مشخص را ثابت خواهیم کرد. دو نقطه‌ی z, z' به وسیله‌ی پرتوهای دینامیکی در K_c مجزا می‌شوند اگر زاویه‌های v, v' وجود داشته باشند به طوری‌که $R^c_v, R^c_{v'}$ در یک نقطه‌ی مشترک $z_\circ$ ختم شوند و z, z' در مولفه‌های مختلفی از $\mathbb{C} \setminus R^c_v \cup R^c_{v'} \cup \{z_\circ\}$ واقع شوند. پیرو شلچر ما این دو پرتو را به همراه نقطه‌ی مختوم این دو پرتو یک زوج پرتو در زاویه‌های (v, v') می‌نامیم. در زیربخش۵.۳ این تکنیک‌ها به عبارت ذکرشده در کمی قبل‌تر منجر می‌شوند. به‌علاوه با ترکیب کردن این‌هابا نتایج بخش ۳ ماقادریم نشان دهیم که در هر پارامترابتدایی دقیقاً دو یا یک۱ پرتو پارامتری ختم می‌شود،بسته به این‌که آن پارامتر اساسی باشد یا نه(گزاره‌ی ۱.۵). به عنوان مشابهی برای قضیه‌ی ۵.۳ برای پارامترهای غیر ابتدایی ما نشان می‌دهیم که هر پارامتر سهموی اساسی نقطه‌ی مختوم پرتوهای پارامتری در زاویه‌های مشخصه توصیف‌های روشن سهموی‌شان است.(گزاره‌ی ۱.۵).

برای بخشی از «جداسازی مدار» درحالت درجه‌ی دوم بخش‌های ۳و۵ در[8] را ببینند. بخش زیر بر پایه‌ی این است وعقاید یکسان هستند.

۵-۲ درخت‌های هوبارد

جهت ثابت کردن ویژگی‌های جداسازی مدار از پارامترهایی با مدارهای جاذب قوی شروع می‌کنیم و با متصل کردن آن‌ها به هم درخت‌های هوبارد به دست می‌آیند. این امکاپذیر است، چون مجموعه‌های ژولیای نگاشت‌های هیپربولیک موضعاً همبند هستند واز این رو همبند قوسی هستند. مانشان خواهیم داد که در حالت جاذب‌قوی یک زوج پرتو وجود دارد که مقدار بحرانی را از دیگر نقاط در مدار بحرانی جدا می‌کنند. سپس ما ثابت می‌کنیم که این جداسازی تحت آشفتگی پارامتر به پارامترسهموی سراسر یک مولفه‌ی هیپربولیک، پایدار باقی می‌ماند. این به ما نشان خواهد داد که هر دو نقطه در یک مدارسهموی می‌توانند مجزا شوند. همانطور که به‌وسیله‌ی شلچر پیشنهاد شده است ما اکنون درخت‌های‌هوبارد استاندار را بکار می‌بریم و درخت‌های هوبارد سهموی را همانند[8] چون بعضی آرگومان‌ها برای درخت‌های‌هوبارد استاندار آسان‌تر هستند و موضعاً همبندی مجموعه‌های ژولیای هیپربولیک بسیار ساده‌تر از موضعاً همبندی مجموعه‌های ژولیای سهموی ثابت می‌شود. در طول تمام زیر بخش ما فرض می‌کنیم که تمام مدارهای جاذب قوی دوره‌ی‌تناوب‌دقیق حداقل ۲ دارند(برای حالت نقطه‌ی ثابت جاذب قوی ما نیاز به درخت هوبارد نداریم). ابتدا تعریف درخت و چند ویژگی‌اش را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۵ (درخت هوبارد):

فرض کنید c یک پارامتر با مدار جاذب قوی $\mathcal{O}$ باشد. دراین صورت یک زیرمجموعه‌ی Γ_c از K_c درخت هوبارد برای c نامیده می‌شود اگر

۱) هر نقطه‌ی انتهایی Γ_c یک نقطه از مدار جاذب قوی باشد.

۲) برای هر مولفه‌ی فاتوی U از K_c ، مقطع $\Gamma_c \cap \bar{U}$ یا تهی باشد یا برابر با اجتماع تعداد متناهی پرتو داخلی از Uباشد(برای تعریف پرتو داخلی زیربخش ۲.۲ را ببینید.)

به ویژه توجه کنید که نقطه‌ی مختوم یعنی نقطه‌ای در ∂K_c، یک جزء از پرتو است. یک نقطه‌ی انتهایی از یک درخت Γ یک نقطه $z \in \Gamma$ است که برای آن $\Gamma - \{z\}$ همبند است.

قوسی که یک نقطه‌ی zرا با یک مجموعه‌ی همبند قوسی $S \neq \emptyset$ در K_c متصل می‌کند، یک قوس γ شامل z و یک نقطه از S است و برای تمام $t \in [0, 1)$ داریم $\gamma(t) \notin S$ به وضوح چنین قوسی همواره وجود دارد.

از تعریف چند سوال ناشی می‌شود.به ویژه ماباید عبارتی درباره‌ی وجود یکتایی بگوییم. قبل از آن ما توجه می‌کنیم که مدار جاذب‌قوی یک نگاشت f_c دقیقاً همان مدار بحرانی است. مالم زیر را داریم:

لم ۱.۵ (وجود یکتایی درخت هوبارد)

برای یک پارامتر c با مدار جاذب قوی $\mathbb{O}$ یک درخت هوبارد وجود دارد که یکتاست، یعنی اگر Γ_1, Γ_2درخت های هوبارد برای cباشند آن‌گاه $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

اثبات. ما یک استراتژی برای چگونگی ساختن درخت هوبارد برای c می‌دهیم: چون مجموعه‌های ژولیای کامل هیپربولیک، فشرده،همبند و موضعاً همبند هستند (قضیه‌ی ۵.۱۷ در[۵]را ببینید) از لم‌های ۱۶.۳ و ۱۶.۴ در[۵] نتیجه می‌شود که همبندقوسی نیز هستند.بنابراین می‌توانیم ساختن درخت هوبارد را با وصل کردن نقطه‌ی بحرانی به دیگر نقاط در مدار بحرانی، به‌وسیله‌ی یک قوس در K_c شروع کنیم. چون $\mathbb{O}$ متناهی است این پیش‌روی پس از تعداد متناهی مرحله خاتمه می‌یابد. در هر مرحله لازم است که برای هر مولفه‌ی U از فاتو، مقطع $\bar{U}$ با درخت ساخته شده تا این مرحله یا تهی باشد یا اجتماع تعدادی متناهی پرتوهای داخلی از Uباشد. این امکان‌پذیر است، چون برای هر مولفه فاتوی U ، نگاشت $\phi : U \longmapsto D$ به یک نگاشت همیومورفیسم روی $\bar{U}$ توسیع می‌یابد. با توجه به ساختار درخت، این درخت فشرده و همبند است و هر نقطه‌ی انتهایی،یک نقطه از $\mathbb{O}$ است، یعنی درخت، یک درخت هوبارد برایc است. ادعای دوم را به وسیله‌ی برهان خلف ثابت می‌کنیم: فرض کنید درخت‌های هوباد Γ_1, Γ_2برای c وجود داشته باشند طوری‌که یک نقطه‌ی $z^* \in \Gamma_1$ وجود داشته

باشد که $z^* \notin \Gamma_2$.فرض کنید $z^* \notin \partial K_c$ در این صورت با توجه به تعریف درخت‌هوبارد،z^* باید روی یک پرتوداخلی از یک مولفه‌ی فاتوی U مانند R_θ^U قرار داشته باشد. چون دو پرتوداخلی از یک مولفه‌ی فاتو دارای یک نقطه‌ی مشترک در ∂K_c هستند اگروتنهااگر آنهاعین هم باشند، لذا ما می‌توانیم فرض کنیم که $z^* \in \partial K_c$. دراین صورت z^* یک نقطه‌ی انتهایی Γ_1 نیست و از این رو نقاط $z, z' \in \mathbb{O}$ و یک قوس γ_1 در Γ_1 که z, z' را به هم وصل می‌کند، وجود دارند طوری‌که $z^* \in \gamma_1(I^\circ)$، به‌علاوه یک قوس γ_2 در Γ_2 نیز وجود دارد که zوz' را به هم وصل می‌کند. چون $z^* \in K_c$ این به این معنی است که یک زیرمجموعه از K_c هست که توسط$\Gamma_1(I)$ و $\Gamma_2(I)$ محدود شده‌است. که‌این با کامل بودن K_c در تناقض است. □

به علاوه باید توجه کنیم که تعریف با بکاربردن پرتوهای داخلی ایجاب می‌کند که درخت‌هوبارد برای پارامترc ، تحت نگاشت پیشرو به‌وسیله‌ی f_c ناوردا باشد.لم بعد به ویژه به ما نشان می‌دهد که مقدار بحرانی یک نقطه‌ی انتهایی هر درخت‌هوبارد است. این مطلب در برهان لم‌های جداسازی مدار، مهم خواهد بود.

لم ۲.۵ (ویژگی‌های مشترک درخت‌های هوبارد)

فرض کنید c یک پارامتر با مدار جاذب قوی $\mathbb{O}$ بوده و Γ یک درخت هوبارد برای c باشد. در این صورت مقطع Γ و مرز آن مولفه از فاتو که شامل مقدار بحرانی است، دقیقاً از یک نقطه‌ی متناوب تشکیل شده است. به هر حال، مقطع Γ و مرز هر مولفه‌ی‌فاتوی کراندار دیگر از حداکثرdنقطه تشکیل می‌شود که نقاط متناوب یا بازمتناوب $\mathbb{O}$ هستند.

اثبات. فرض کنید U_0 مولفه‌ی فاتوی شامل نقطه‌ی بحرانی باشدو$U_1, U_2, \cdots, U_{n-1}$دیگر مولفه‌های متناوب کراندار باشند که $U_l := f_c^l(U_0)$ باشد. مناسب است تعریف کنیم $U_n := U_0$. به‌علاوه تعداد نقاطی که مقطع Γ با ∂U_l دارد را با a_l نمایش دهیم. دونقطه‌ی $z, z' \in \mathbb{O}$ و یک قوس γ در Γ که این دو نقطه را به هم متصل می‌کند را در نظر گرفته و فرض کنید $z^* \in \partial U_l \cap \gamma(I)$ برای یک l. چون Γ یکتا و ناورداست، می‌بینیم که $f_c(z^*) \in \partial U_{l+1} \cap \Gamma$. این به معنی است که نقاط

مشترک Γ با مرز مولفه‌ی متناوب فاتو، به روی یک چنین نقاط مشترکی نگاشته می‌شوند. چون $f_c : \bar{U_l} \longmapsto U_{l+1}^{-}$ یک نگاشت یک‌به‌یک است برای $l \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ و یک نگاشت d به یک برای $l = 0$ است. لذا داریم $\frac{a_0}{d} \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{n-1} \le a_0$. می‌خواهیم نشان دهیم که یک $l_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ با $a_{l_1} = 1$ وجود دارد. توجه کنید که اگر $\bar{U_l}$ درخت را غیرهمبند نکند، یعنی $\Gamma - \bar{U_l}$ همبند باشد، آنگاه $a_l = 1$، چون تنها نقاطی از مدار بحرانی —که در درون یک مولفه‌ی متناوب و کراندار از فاتو واقعند— می‌توانند نقاط انتهایی درخت باشند. فرض می‌کنیم که هر $\bar{U_l}$ درخت Γ را ناهمبند کند ویکی از مولفه‌های $K_c - \bar{U_0}$ را در نظر گرفته و آنرا با K_c° نمایش می‌دهیم. به علاوه بخشی از Γ را که در K_c° واقع است را با Γ° نمایش می‌دهیم.با توجه به این حقیقت که Γ نقاط مدار بحرانی را به هم وصل می‌کند، Γ° شامل حداقل یک نقطه از مدار بحرانی است که دریک مولفه‌ی متناوب از فاتو واقع است. فرض کنید U_{l_1} یکی از آن مولفه‌های فاتو باشد که هیچ نقطه‌ای از مدار بحرانی، روی آن تکه‌ای از درخت که نقاط، در مدار بحرانی و واقع در U_{l_1}, U_0 را به هم وصل می‌کند، واقع نباشد. چون $\Gamma, \bar{U_{l_1}}$ را ناهمبند می‌کند، دوباره حداقل یک مولفه از $K_c^\circ - \bar{U_{l_1}}$ وجود دارد طوری که شامل یک نقطه از مدار بحرانی است. با تکرار ما به تناقض می‌رسیم، چون مدار بحرانی متناهی است. از این رو یک $l_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ با $a_{l_1} = 1$ وجود دارد که $\Gamma - \bar{U_{l_1}}$ همبند است. با به کار بردن این مطلب همراه با نابرابری‌های بالا رابطه‌ی $\frac{a_0}{d} \le a_1 \le a_2 \le a_{l_1} = 1, a_1 \le a_2 \le \cdots, \le a_{n-1} \le a_0 \le d$ را به دست می‌آوریم که لم را ثابت می‌کند. □

این مشهور است(۵.۲) که یک نقطه‌ی z در یک مجموعه‌ی ژولیای کامل موضعاً همبند K که K را ناهمبند می‌کند نقطه‌ی مختوم q پرتو است که q تعداد مولفه های $K - \{z\}$ است. لزوماً z در مرز K واقع است($z \in \partial K$). همانطور که قبلاً تذکر دادیم می‌خواهیم وجود پرتوهای دینامیکی که نقاط معینی را مجزا می‌کنند، ثابت کنیم. این دلیل علاقه‌ی ما به نقاط شاخه‌ای از یک درخت هوبارد است.

تعریف ۲.۵ (شاخه و نقطه‌ی شاخه‌ای):

فرض کنید c یک پارامتر با مدار جاذب قوی باشد و Γ درخت هوبارد cباشد. در این صورت برای $z \in \Gamma$، مولفه‌های $\Gamma - \{z\}$ شاخه‌های Γ در z نامیده می‌شوند.اگر تعداد شاخه‌های مربوط به z بزرگتر یا مساوی ۳ باشد آن‌گاه z یک نقطه‌ی شاخه‌ای از Γ نامیده می‌شود.

لم ۳.۵ (ویژگی‌های نقاط شاخه‌ای) فرض کنیدc یک پارامتر با مدار جاذب قوی باشد و Γ درخت هوبارد c باشد.یک $z \in \Gamma$ را که Γ دارای m شاخه در z است را در نظر بگیرید. در این صورت:

۱) اگر z در بستار مولفه‌ی بحرانی واقع نباشد، یعنی مولفه‌ای از فاتو که شامل نقطه‌ی بحرانی‌است، آنگاه تصویر $f_c(z)$ حداقل m شاخه دارد.

۲) به هر حال اگر z در بستار مولفه‌ی فاتوی بحرانی واقع باشد آن‌گاه $f_c(z)$ حداقل $m - 1$ شاخه دارد.

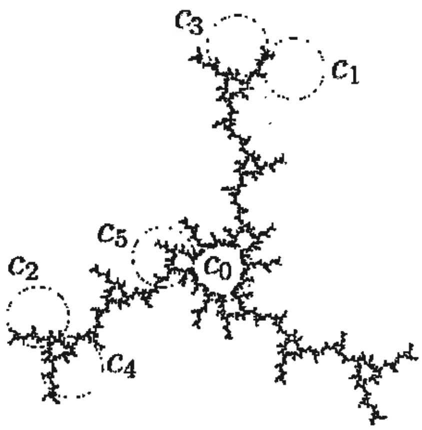
۳) اگر z یک نقطه‌ی شاخه‌ای باشد، آنگاه $f_c(z)$ متناوب یا باز متناوب است وروی یک مدار دافع یا جاذب قوی واقع است.

اثبات. عبارت اولی می‌تواند به وسیله‌ی لم ۱.۵ ثابت شود. چون z ,mشاخه دارد، یک زیرمجموعه‌ی $\Gamma_z \subset \Gamma$ وجود دارد که یک زیر مجموعه‌ی M از مدار بحرانی را با m نقطه وصل می‌کند طوری‌که $\Gamma_z - \{z\}$ دارای m مولفه است. در این صورت برای هر دو نقطه‌ی $z', z'' \in M$ یک قوس γ در Γ_z وجود دارد که z' را به z'' وصل می‌کند و از این رو $f_c \circ \gamma$ ، $f(z')$ را به $f(z'')$ وصل می‌کند که روی مدار بحرانی f_c واقع است. چون درخت هوبارد ناورداست و z در مرز مولفه‌ی فاتوی بحرانی واقع نیست تحدید f_c به یک همسایگی ازz، یک به یک است وادعا نتجه می‌شود.
اگر z روی مولفه‌ی فاتوی بحرانی واقع باشد تمام شاخه‌های z بجز احتمالاً شاخه‌هایی که در مولفه‌ی فاتوی بحرانی واقع هستند، به طور همومورفیسم به‌وسیله‌ی f_c نگاشته می‌شوند. بنابراین ما می‌توانیم

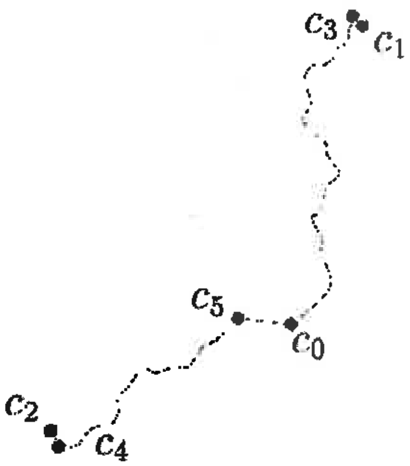
حداکثر شاخه‌ای از z را که در مولفه‌ی فاتوی بحرانی است را از دست بدهیم، یعنی تعداد شاخه‌های $f_c(z)$ احتمالاً یکی کمتر از تعداد شاخه‌های z است. این ۲ را ثابت می‌کند.

حال عبارت ۳ واضح است، چون درخت هوبارد تنها تعداد متناهی شاخه دارد و به‌وسیله‌ی لم ۲.۲ تمام مدارهای متناوب ، بجز برای مدار جاذب قوی همگی دافعند. □

تصویر ۵:جموعه‌ی ژولیای چند جمله‌ای درجه‌ی سوم $z \longmapsto z^{۳} + c$ که یک مدار جاذب قوی از دوره‌ی تناوب ٦ دارد.(پارامتر c نزدیک $۰.۲۷۹۴۸۴ + ۱.۲۵۱۴۰i$ است.)مولفه‌های فاتو که شامل نقاط $c_l = f_c^l(۰)$ از مدار بحرانی درون دیسک‌های متناظر هستند.



تصویر ٦:درخت هوبارد برای مجموعه‌ی ژولیای تصویر قبل .همانطور که می‌توانیم ببنیم در این حالت غیر شاخه‌ای است.توجه کنید که $c = c_۱$ یک نقطه‌ی انتهایی درخت است.



۵–۳ دو لم جداسازی

اکنون تکنیک های کافی برای اثبات دو لم زیر را داریم. لم اول نشان می‌دهد که نقاط سهموی می‌توانند از یکدیگر مجزا شوند(همچنین لم ۳.۷ در[۸] را ببینید). به طور مشابه دومین لم نشان می‌دهد که نقاط متناوب دافع و سهموی در حالت توصیف روشن سهموی ابتدایی می‌توانند مجزا شوند. در بخش ۵ در [۸] آن ویژگی جداسازی مدار نامیده می‌شود.

لم ۴.۵ (لم جداسازی مدار برای دو نقطه‌ی سهموی)

فرض کنید c_0 یک پارامتر سهموی باشد و z, z' نقاط سهموی متفاوت باشند، در این صورت یک زوج پرتو وجود دارد که z را از z' مجزا می کند.

اثبات. فرض کنید c_1 مرکز مولفه‌ی هیپربولیک $\mathcal{H}$ با دوره‌ی تناوب n باشد که برای آن c_0 یک ریشه یا یک‌بازریشه‌باشد وفرض کنیدΓ درخت‌هوبارد برای c_1 باشد(به کمک قضیه‌ی۱.۴ ما می‌دانیم که c_0 یک ریشه یا یک بازریشه‌از یک مولفه‌ی هیپربولیک است). ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر نقطه‌ی z_1 از مدار بحرانی f_{c_1}، بجز برای خود c_1، یک زوج پرتو وجود دارد که z_1 را از c_1 مجزا می‌کند. فرض کنید γ یک قوس در Γ باشد که z_1 را به c_1 وصل می‌کند. بدون کاستن از کلیات فرض می‌کنیم که هیچ نقطه‌ای از مدار بحرانی روی $\gamma(I^\circ)$ واقع نیست. اگر یک نقطه‌ی شاخه‌ای از Γ روی $\gamma(I^\circ)$ واقع باشد، یک زوج پرتو وجود دارد که z_1 را از c_1 مجزا می‌کند(به کمک قضیه‌ی ۵.۲. در غیر این‌صورت فرض کنید $m \geq 1$ کوچکترین عدد صحیحی باشد که $f_{c_1}^m(z_1) = c_1$. در این صورت $c_1, f_{c_1}^m \circ \gamma$ را به $f_{c_1}^m(c_1)$ وصل می‌کنند و از یکتایی درخت هوبارد $f_{c_1}^m \circ \gamma(I) \subset \Gamma$ بدست می آید. چون هیچ نقطه‌ای از $\gamma(I^\circ)$ یک نقطه‌ی شاخه‌ای یا یک نقطه از مدار بحرانی نیست، و با توجه به لم ۲.۵ c_1 یک نقطه‌ی انتهایی است، یک $t^* \in I^\circ$ وجود دارد به‌طوری که $\gamma(t^*) = f_{c_1}^m \circ \gamma(t^*)$. نقطه‌ی $z^* := \gamma(t^*)$ باید دافع باشد، چون متناوب است و یک نقطه از مدار بحرانی که تنهامدار متناوب غیردافع است، نیست(لم ۲.۲ را ببینید). نتیجه می‌شود که $z^* \in \partial K_c$ و بنابراین $\partial K_c - \{z^*\}$ ناهمبند است. بنابراین به وسیله‌ی قضیه‌ی ۵.۲ ، z^* یک نقطه‌ی مختوم از یک زوج پرتو دینامیکی است که دارای

زاویه‌های v', v هستند. این پرتوها c_1 را از z_1 مجزا می‌کنند، چون Γ در z^* فقط دو شاخه دارد و z_1, c_1 در شاخه‌های مجزایی هستند.

حال ما می‌خواهیم نشان دهیم که می‌توانیم c_1 را به c_0 آشفته کنیم. برای مولفه هیپربولیک $\mathcal{H}$ طوری‌که z_1, c_1 به ترتیب نقطه‌ی مشخصه و نقطه‌ی دیگری از مدار سهموی c_0 شوند، و زوج پرتوها در زاویه‌های v', v دو نقطه را مجزا کنند. با بکار بردن لم ۱.۴ و گزاره‌ی ۱.۳ به سادگی دیده می‌شود که ادامه‌های پیوسته‌ی $Z_{z^*}, Z_{c_1}, Z_{z_1}$ به ترتیب از z^*, c_1, z_1 به $\mathcal{H} \cup \{c_0\}$ وجود دارد طوری که $Z_{c_1}(c_0)$ یک نقطه‌ی مشخصه است و $Z_{z_1}(c_0)$ نقطه‌ی دیگری از مدار سهموی c_0 است و $Z_{z^*}(c_0)$ یک نقطه‌ی مختوم از زوج پرتوهای در زاویه‌های v', v برای تمام $c \in \mathcal{H} \cup \{c_0\}$ است.از این رو زوج پرتو، نقطه‌ی مشخصه رااز $Z_{z_1}(c_0)$ مجزا می‌کنند. هر نقطه از مدار بحرانی، یک چنین ادامه‌ای به $\mathcal{H} \cup \{c_0\}$ دارد که به یک نقطه از مدار سهموی c_0 منجز می‌شود. به‌علاوه هر نقطه از مدار سهموی c_0 به یک نقطه‌ی دافع و یک نقطه‌ی جاذب شکافته می‌شود اگر پارامتر به $\mathcal{H}$ آشفته شود(به‌وسیله‌ی قضیه‌ی ۱.۴). بنابراین هر نقطه‌ی سهموی از c_0 می‌تواند از نقطه‌ی مشخصه مجزا شود. اگر z', z نقاط سهموی متفاوتی از نقطه‌ی مشخصه‌ی z_1 باشند، فرض کنید m کوچکترین عدد طبیعی باشد که $z = f_{c_0}^{m}(z_1)$. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $z' \neq f_{c_0}^{m'}(z_1)$ برای $0 < m' < m$.
بابکار بردن نتیجه‌ی بالا بدست می‌آوریم که دو پرتو مختوم در یک نقطه‌ی مشترک متناوب یا بازمتناوب z^* از یک مدار دافع وجود دارند و z_1 را از نقطه‌ی متناوب $f_{c_0}^{-m}(z')$ که توسط به عقب کشیدن در امتداد مدار سهموی تعریف می‌شود، مجزا می‌کنند. از این رو m–امین تصویر پیشروی z^* به همراه پرتوهای مختوم در آن z', z را مجزا می‌کنند. □

لم ۵.۵ (لم جداسازی مدار برای یک نقطه‌ی دافع و یک نقطه‌ی سهموی):

فرض کنید c_0 یک پارامتر سهموی ابتدایی باشد و k دوره‌ی تناوب دقیق مدار سهموی با نقطه‌ی مشخصه‌ی z_1 باشد. علاوه براین‌ها، فرض کنید z' نقطه‌ی دافع دلخواهی با دوره تناوب مدار k باشد

که روی مرز مولفه‌ی فاتوی مشخصه واقع نیست. در این صورت یک زوج پرتو وجود دارد که z_1 را از z' مجزا می‌کند.

اثبات. همانند برهان قبل فرض کنید c_1 مرکز یک مولفه‌ی هیپربولیک $\mathcal{H}$ باشد که برای آن c_0 یک ریشه یا یک بازریشه‌باشد. (قضیه‌ی ۱.۴ نشان می‌دهد که c_0 یک ریشه یا ریشه مشترک از یک مولفه‌ی هیپربولیک است). بوسیله‌ی قضیه‌ی ۱.۴ و گزاره‌ی ۱.۳ توابع پیوسته‌ی $Z_1(c)$ و $Z'(c)$ روی $\mathcal{H}\cup\{c_0\}$ وجود دارند به‌طوری که $Z_1(c_0) = Z_1$ ، $Z'(c_0) = Z'$، $Z_1(c_1) = c_1$ و $Z'(c)$ برای تمام $c \in \mathcal{H}\cup\{c_0\}$ یک نقطه‌ی دافع از دوره‌ی تناوب یکسان با z' است.چون z' روی مرز مولفه‌ی فاتوی مشخصه قرار ندارد، $Z'(c_1)$ در بستار آن مولفه‌ی فاتو که شامل مقدار بحرانی است، واقع نیست. فرض کنید Γ درخت هوبارد برای c_1 باشد و γ یک قوس در Γ باشد که c_1 را به $Z'(c_1)$ وصل می‌کند. چون مولفه‌ی فاتوی کراندار متناوب یا بازمتناوب است، عدد m در زیر خوش تعریف است.

$$m := min\{n \in \mathbb{N}_0 : f_{c_1}^n \circ \gamma(I^\circ) \cap U \neq \emptyset, \text{است}\ U \ \text{یک مولفه فاتوی متناوب}\}$$

با توجه به ساختار، $f_{c_1}^m \circ \gamma$ یک نقطه‌ی مرزی از یک مولفه‌ی فاتو که شامل یک نقطه مانند c^* از مدار بحرانی است، را به $f_{c_1}^m(c_1)$ متصل می‌کند. بوسیله ساختار هر زوج پرتو که $f_{c_1}^m(c_1), c^*$ را مجزا می‌کنند، همچنین $c_1, Z'(c_1)$ را مجزا می‌کنند. باتوجه به لم جداسازی مدار قبل یک چنین زوج پرتوی وجود دارد. چون دو مولفه‌ی فاتوی متناوب هیچ نقطه‌ی مرزی مشترک در حالت ابتدایی(اولیه) ندارند. همانند قبل می‌توانیم ببینیم که نقطه‌ی مختوم زوج پرتو دافع باقی می‌ماند اگر ما از c_1 به c_0 آشفته کنیم. □

۴—۵ فضای پارامتری و جداسازی مدار

در این زیر بخش ابزار توسعه یافته‌ی گذشته را برای بدست آوردن اطلاعات بیشتر درباره‌ی ویژگی‌های مختوم پرتوهای پارامتری متناوب به‌کار می‌بریم. اگر یک پرتو پارامتری در زاویه‌ی مفروض را در نظر بگیریم، می‌توانیم مطالب بیشتری درباره‌ی نقطه‌ی مختوم پرتو دینامیکی از زاویه‌ی یکسان بگوییم.

قضیه‌ی زیر می‌تواند به عنوان یک گزاره‌ی ۳.۲ در [۸] برای حالت درجه‌ی دوم یافت شود و برهان برای حالت $d \geq ۲$ مشابه است.

قضیّه ۱.۵ (یک شرط لازم)

اگر یک پارامتر متناوب $R_v^{\mathcal{M}}$ در یک پارامتر $c_۰$ ختم شود آن‌گاه پرتو دینامیکی $R_v^{c_۰}$ در نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی $c_۰$ ختم می‌شود.

اثبات. پرتو پارامتری $R_v^{\mathcal{M}}$ مختوم در پارامتر $c_۰$ را در نظر بگیرید، که با توجه به قضیه‌ی ۳.۳ لزوماً سهموی است. در این صورت دوباره از قضیه‌ی ۳.۳ پرتو دینامیکی $R_v^{c_۰}$ در یک نقطه از مدار سهموی $c_۰$ ختم می‌شود. برای یک نقطه‌ی ثابت سهموی، این مطلب قضیه را ثابت می‌کند. بنابراین فرض کنیم که دوره‌ی تناوب دقیق مدار سهموی حداقل ۲ است. لم جداسازی ۴.۵ به ما می‌گوید که برای یک نقطه‌ی مشخصه‌ی $z_۱$ و هر نقطه‌ی دیگر z_i از مدار سهموی، یک زوج پرتو از زاویه‌های v_i', v_i وجود دارد که دو نقطه‌ی سهموی را جدا می‌کنند. از این رو تعداد متناهی جفت پرتو وجود دارد که در نقاط دافع ختم می‌شوند و صفحه‌ی مختلط را به چندی مولفه تقسیم می‌کنند طوری‌که مولفه‌ی شامل نقطه‌ی $z_۱$ شامل هیچ نقطه‌ی سهموی دیگری نیست به کمک قضیه‌ی ۲.۳ یک همسایگی U از $c_۰$ وجود دارد طوری‌که نقاط مختوم پرتوهای در زاویه‌های v_i', v_i بطور تحلیلی روی c برای تمام $c \in U$ وابسته‌اند. یعنی ادامه‌ی پیوسته‌وار نقطه‌ی مشخصه هنوز از ادامه‌های دیگر نقاط سهموی مجزا است. با ترکیب کردن این مطلب با این حقیقت که برای تمام پارامترهای c روی پرتو پارامتری $R_v^{\mathcal{M}}$ مقدار بحرانی c روی پرتو دینامیکی R_v^c واقع است (لم ۵.۲)، نتیجه می‌گیریم که R_v^c باید در افراز شامل مقدار بحرانی ختم شود. بنابراین دوباره به کمک قضیه‌ی ۳.۳ آن در نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی $c_۰$ ختم می‌شود. □

تعدادی نتیجه‌ی فوری وجود دارد. باید توجه کنیم که گزاره‌ی زیر تنها از موضوعات مورد علاقه‌ی جزئی در حالت درجه‌ی دوم است، چون هیچ پرتو پارامتری غیر اساسی وجود ندارد،یعنی هیچ پرتو پارامتری که برای $d = ۲$ به تنهایی ختم شود. به هر حال این یک توصیف کامل از پرتوهای پارامتری

متناوب مختوم در پارامترهای ابتدایی به دست می‌دهد.

گزاره ۱.۵ (پرتوهای پارامتری مختوم در پارامترهای ابتدایی)

هر پارامتر سهموی ابتدایی c نقطه‌ی مختوم دقیقاً دو پرتو پارامتری متناوب است اگر c اساسی باشد و دقیقاً یک پرتو پارامتری متناوب است.اگر c غیر اساسی باشد. به‌علاوه، پرتوهای دینامیکی در زاویه‌های یکسان در صفحه‌ی دینامیکی c در نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی c ختم می‌شوند.

اثبات. یک پارامتر سهموی ابتدایی دلخواه c را اختیار کنید.بوسیله‌ی قضیه‌ی ۵.۳ می‌دانیم که‌اگر c اساسی باشد حداقل دو پرتو پارامتری متناوب در c ختم می‌شوند واگر c غیر اساسی باشد حداقل یک پرتو پارامتری متناوب در c ختم می‌شود. از طرف دیگر چون c یک توصیف روشن سهموی ابتدایی دارد، لذا از قضیه‌ی ۱.۵ فوراً نتیجه می‌شود ه حداکثر ۲ یا ۱ پرتو پارامتری می‌تواند در c ختم شوند بسته به این‌که c اساسی باشد یا نباشد. این برهان را تمام می‌کند. □

این عبارت (۲) از قضیه‌ی ساختار(۱–۱) ۱.۱ را اثبات می‌کند. به هر حال برهان یک عبارت متناظر برای پارامترهای غیرابتدایی به این سادگی نیست. در این هنگام دو بخش زیر را کار خواهیم کرد. گزاره‌ی دیگری وجود دارد که در قضیه‌ی میلنور۴.۳ و جداسازی مدار شلچر بکار می‌رود. به نوعی یک مشابه برای قضیه‌ی ۵.۳ در حالت غیرابتدایی و یک عبارت دقیقتر از قضیه‌ی۴.۳ است. این گزاره یک عبارت یکسان با گزاره‌ی ۴.۳ در [۶]است.

گزاره ۲.۵ (حداقل پرتوهای مشخصه‌ی مختوم در یک پارامتر)

در هر پارامتر سهموی اساسی، پرتوهای پارامتر c با زاویه‌های مشخصه از توصیف روشن مدار سهموی ختم می‌شوند.

اثبات. در حالت ابتدایی با توجه به گزاره‌ی ۱.۵ یک عبارت قوی‌تر داریم. بنابراین فرض کنید c یک پارامتر سهموی غیرابتدایی باشد و زاویه‌های مشخصه از توصیف روشن سهموی متناظر $\mathcal{P}$ را با v_- و v_+ نمایش دهید. در این صورت به‌وسیله‌ی قضیه‌ی ۴.۳ پرتوهای $R^M_{v_+}$ و $R^M_{v_-}$ در یک پارامتر

سهموی مشترک c' ختم می‌شوند. با بکار بردن قضیه‌ی ۱.۵ می‌بینیم که پرتوهای دینامیکی $R^{c'}_{v_+}$ و $R^{c'}_{v_-}$ در نقطه‌ی مشترک $f_{c'}$ ختم می‌شوند. این به این معنی است که زوایای v_- و v_+ مشمول در یک عضو یکسان از توصیف روشن مدار سهموی $\mathcal{P}'$ از c'، هستند. مجموعه‌های $A_{\mathcal{P}'}$ و $A_{\mathcal{P}}$ یکسان هستند زیرا $v_-, v_+ \in A_{\mathcal{P}'}$ و $\mathcal{P}'$ غیر ابتدایی است. واز این رو فقط یک دور دارد(لم ۳.۳). چون v_-, v_+ زاویه‌های مشخصه‌ی $\mathcal{P}$ هستند. بوسیله‌ی لم ۲.۳ هیچ زاویه‌ای از درون (v_-, v_+) در $A_{\mathcal{P}'} = A_{\mathcal{P}}$ وجود ندارد. این ایجاب می‌کند که دوره‌ی تناوب مدار سهموی c' کمتر یا مساوی دوره‌ی تناوب مدار سهموی c است. همانند برهان قضیه‌ی ۱.۳ نتیجه می‌گیریم که آنها با هم برابر هستند. و بنابراین (v_-, v_+) همچنین بازه‌ی مشخصه‌ی $\mathcal{P}'$ است . این برهان را تمام می‌کند. □

فصل ٦

مولفه‌های هیپربولیک و توصیف های روشن

۱—۶ مقدمه

در این فصل رسیدگی‌مان را روی مولفه‌های هیپربولیک که آنها را در فصل ۴ معرفی کردیم، ادامه می‌دهیم. به‌ویژه نشان خواهیم داد که هر مولفه‌ی هیپربولیک که دقیقاً یک مرکز دارد،یک ریشه ویک باز ریشه دارد. برای انجام برهان‌ها ما اطلاعات بیشتری روی پایداری توصیف‌های روشن در بستار مولفه‌ی هیپربولیک نیاز داریم. به وضوح یک شرط لازم برای پایداری یک توصیف روشن این است که که نقطه‌ی مختوم یک پرتو دینامیکی در یک زاویه‌ای در توصیف روشن، به طور پیوسته به روی پارامتر وابسته است. این به ما انگیزه اثبات قضیه‌ی زیر را می‌دهد. که منسوب به شلچر است(گزاره‌ی ۵.۲ در [۸] را ببینید) و برهان او از حالت درجه‌ی دوم براحتی به حالت $d \geq ۲$ تعمیم می‌یابد. آن روی لم جداسازی مدار از بخش قبل استوار شده است.

قضیّه ۱.۶ (وابستگی پیوسته‌ی نقاط مختوم روی پارامترها)

فرض کنید$z_\circ$ یک نقطه‌ی متناوب سهموی یا دافع از $f_{c_\circ}$ باشد و برای یک پرتو دینامیکی $R_v^{c_\circ}$ که در $z_\circ$ ختم می‌شود مجموعه‌ی زیر را تعریف می کنیم.

$\Omega(v) := \{c \in \mathbb{C} | \text{مختوم است} R_v^c\}$. در این صورت یک تابع پیوسته $Z : \Omega(v) \longmapsto \mathbb{C}$ وجود دارد طوری‌که $Z(c)$ نقطه‌ی مختوم R_v^c است.

تذکر ۱.۶ در حالت غیرابتدایی دو پرتو $R_{v'}^c, R_v^c$ در یک نقطه‌ی یکسان z از دوره‌ی تناوبk (در یک نقطه‌ی k—متناوب z) ختم می‌شوند اگر وتنها اگر$v = \sigma^{l.k}(v')$ برای یک $l \in \mathbb{N}_\circ$(لم ۳.۲ را ببینید). این به این معنی است که تعریف $\Omega(v)$ در این حالت به یک پرتو خاص وابسته نیست. به هر حال در حالت اساسی ابتدایی دو دور متفاوت از پرتوهاوجود دارند و $\Omega(v)$ به زاویه‌ای که $\Omega(v)$ را برای آن

تعریف می‌کنیم بستگی داشته باشد اگر چه نقطه‌ی مختوم یک پرتو دینامیکی بطور پیوسته به روی پارامترc وابسته است(اگر پرتو مختوم باشد)، توصیف روشن ممکن است جذاب باشد. این بطور قطع در حالتی است که مدارهایی که در نظر می‌گیریم دارای دوره‌ی تناوب متفاوتی باشند. برای مثال ممکن است $Z(c)$ شکافته شود در حالی که دور از یک پارامتر سهموی به چند نقطه‌ی متناوب شکافته شود. از جمله این‌که پرتوهای نقاط سهموی توزیع شده هستند در این صورت توصیف روشن $Z(c)$ آشفته است.

اثبات. برای زیر مجموعه‌ای از $\Omega(v)$ که شامل پارامترهایی‌است که R_v^c در یک نقطه‌ی دافع ختم می‌شود، یک عبارت قوی‌تر را در گزاره‌ی ۱.۳ ثابت شده داریم. از این رو فرض می‌کنیم که $c_\circ$ یک پارامتر سهموی است و $z_\circ$ یک نقطه از مدار سهموی $\mathcal{O}_p$ از $c_\circ$ است و دوره‌ی تناوب دقیق مدار سهموی را با k ودوره‌ی تناوب دقیق پرتو متناظر را با n نمایش دهید. دو حالت را بحث می‌کنیم: حالت اول این که توصیف روشن مدار سهموی غیرابتدایی است،یعنی $k < n$. حال ما یک همسایگی U از $c_\circ$ و یک تابع هولومورفیک $Z_1 : U \longmapsto \mathbb{C}$ را همانند قضیه‌ی ۱.۴ با $Z_1(c_\circ) = z_\circ$ در نظر می‌گیریم. مضرب $\lambda_1(c) := \lambda\left(c, Z_1(c)\right)$از نقطه‌ی k-متناوب $Z_1(c)$ روی U هولومورفیک است.چون $Z_1(c)$ این چنین است. اگر $\mathcal{O}(c)$ مدار n-متناوب باشد که به توی مدار سهموی فرو رود(باآن ترکیب شود) آنگاه مضرب $\lambda_2(c) := \lambda(c, \mathcal{O}(c))$ نیز روی U هولومورفیک است(قضیه‌ی ۱.۴ را ببینید). برای یک پرتو دینامیکی در یک زاویه‌ای که در $z_\circ$ ختم می‌شود مانشان داده‌ایم که‌پرتو دینامیکی از زاویه‌ی یکسان که در $Z_1(c)$ یا در یک نقطه از $\mathcal{O}(c)$ ختم می‌شود، اگر ما دور از $c_\circ$ در امتداد یک قوص کوچک در U که‌c روی آن واقع است حرکت کنیم. بنابراین ما قوس $\gamma{:}I \longmapsto U$ با نقطه‌ی انتهایی در $c_\circ$ را در نظر می‌گیریم،یعنی $\gamma(1) = c_\circ$ طوری‌که $Z_1\left(\gamma(t)\right)$ برای تمام $\gamma(t)$ها یک $t \in [0, 1)$ دافع است. بوسیله‌ی قضیه‌ی ۵.۲ حداقل یک پرتو دینامیکی مانند $R_{v'}^{\gamma(0)}$ در $Z_1(\gamma(0))$ ختم می‌شودو چون برای تمام $t \in [0, 1)$ها واقع هستند، بوسیله‌ی گزاره‌ی ۱.۳ می‌دانیم که $R_{v'}^{\gamma(t)}$ در $Z_1(\gamma(t))$ ختم می‌شوندبرای تمام $t \in [0, 1)$ها.

چون پارامتر $\gamma(1) = c_\circ$ در $\mathcal{M}_d$ است و سهموی نیز است، پرتودینامیکی $R_{v'}^{\gamma(1)}$ هنوز در یک نقطه‌ی

دافع یا سهموی n-متناوب از $K_{c_\circ}$ ختم می‌شود،نقطه‌ی مختوم یک نقطه‌ی دافع است زیرا در غیر این‌صورت پرتو دینامیکی پرتو باید در یک نقطه‌ی متناوب از $Z_1(\gamma(t))$ در صفحه‌ی دینامیکی $t \in [\circ, 1), \gamma(t)$ ختم شود. برای اثبات این‌که پرتو دینامیکی $R_{v'}^{c_\circ}$ در $z_\circ$ ختم خواهد شد، ما جداسازی مدار را بکار خواهیم برد. به وسیله‌ی لم جداسازی مدار۴.۵ برای هر $z \in \mathcal{O}_p - \{z_\circ\}$ یک جفت پرتو دینامیکی در صفحه‌ی دینامیکی $c_\circ$ وجود دارد که z را از $z_\circ$ مجزا می‌کند. ما این زوج پرتو را با $S(z)$ نمایش داده وبرای تمام $z \in \mathcal{O}_p - \{z_\circ\}$ها قرا می‌دهیم $P(c_\circ) := \cup S(z)$. به وسیله‌ی ساختار $P(c_\circ)$ یک مولفه‌ی $V(c_\circ)$ چنان موجود است که $z_\circ$ تنها نقطه‌ی سهموی از $c_\circ$ در $V(c_\circ)$ است. چون نقاط مختوم جفت پرتوها دافع هستند، بوسیله‌ی قضیه‌ی ۲.۳ ما می‌توانیم آن را ادامه دهیم دریک همسایگی U از $c_\circ$ و برای هر $c \in U$ یک افراز جدید $P(c)$ بدست می‌آوریم. این افراز $P(c)$ از پرتوهای دینامیکی در زاویه‌های یکسان همانند $P(c_\circ)$ تشکیل شده است، بوسیله‌ی ساختار، یک پرتو دینامیکی مشمول در یک مولفه از $P(c)$ است اگر وتنها اگر آن مشمول در یک مولفه از $P(c_\circ)$ باشد که به‌وسیله‌ی یک زوج پرتو دینامیکی در زاویه‌های یکسان محدود شده‌است. فرض کنید $V(c)$ مولفه‌ای از $P(c)$ باشد که به‌وسیله‌ی زوچ پرتو دینامیکی در زاویه‌های یکسان همانند$V(c_\circ)$ محدود شده است. چون $Z_1(\gamma(t)) \in V(\gamma(t)$ برای $t \in I$، پرتوهای دینامیکی $R_{v'}^{\gamma(t)}$ زیرمجموعه‌های $V(\gamma(t)$ برای $t \in I$ هستند.چون $z_\circ$ تنها نقطه‌ی سهموی در $V(c_\circ)$ است پرتو دینامیکی $R_{v'}^{c_\circ}$ در $z_\circ$ ختم می‌شود. به‌علاوه اگر ما هر پرتو دینامیکی دیگری مانند $R_v^{c_\circ}$ که در $z_\circ$ ختم می‌شود را در نظر بگیریم آن‌گاه پرتو دینامیکی $R_v^{\gamma(t)}$ در $z_1(\gamma(t))$ برای تمام $t \in I$ ختم خواهد شد، چون $c_\circ$ یک پارامتر سهموی غیرابتدایی است، تمام پرتوهای دینامیکی مختوم در $z_\circ$ در یک دور هستند(لم۳.۳ را ببینید). این به این معنی است که برای یک عدد صحیح $m \geq 1$ داریم $\sigma^{mk}(v') = v$ واز این رو نیز $R_v^{\gamma(t)}$ در $z_1(\gamma(t))$ ختم می‌شود. اگر ما قوس $\gamma : I \longmapsto U$ به نقطه‌ی انتهایی $c_\circ$ را در نظر بگیریم طوری‌که $|\lambda_1(\gamma(t))| < 1$ یعنی $|\lambda_2(\gamma(t))| < 1$ ،آنگاه در این صورت ما برای پارامترهای $U, c \in U$چروک شده، می‌توانیم آرگومان مشابه بالا برای یک نقطه‌ی $z_2(c)$ که به توی نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی فرو می‌رود همگامی‌که

$c \longmapsto c_\circ$ بکار بریم.ما بدست می آوریم که اگر پرتو دینامیکی مانند $R_v^{\gamma(t)}$ در $z_{\mathsf{r}}(c)$ ختم شود آنگاه $R_v^{c_\circ}$ در نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی ختم می‌شود. دیگر پرتوهای دینامیکی که در مدار سهموی ختم می‌شوند در بین دیگر نقاط مدار $z_{\mathsf{r}}(c)$ توزیع می‌شوند. این برهان را درحالت غیرابتدایی پایان می‌دهد. در حالت ابتدایی ما می‌توانیم ادعای مشابهی برای یک پرتو مختوم در $z_\circ$ ثابت کنیم. به هر حال بوسیله‌ی این روش مانباید قادر به لمس کردن پرتو دینامیکی دیگر مختوم در $z_\circ$ در حالت اساسی باشیم، چون آن در یک دور مشابه نیست. ما می‌توانیم با استفاده از لم جداسازی مدار ۵.۵ برای یک نقطه‌ی سهموی و دافع، که فقط در حالت ابتدایی برقرار است، بر این مشکل فائق آییم. ما مجموعه‌ی تمام نقاط دافع از $f_{c_\circ}$ با دوره‌ی تناوب مدارn که روی مرز مولفه‌ی فاتوی مشخصه واقع نیستند را با $\mathcal{O}_r$ نمایش دهیم. حال ما جداسازی را شروع می‌کنیم: بوسیله‌ی لم‌های جداسازی مدار۴.۵ و۵.۵ ما می‌دانیم که برای هر $z \in \mathcal{O}_p \cup \mathcal{O}_r - \{z_\circ\}$ یک زوج پرتو$S(z)$ وجود دارد که z را از $z_\circ$ مجزا می‌کند. بنابراین افراز $P(c_\circ) := \cup S(z)$ برای تمام $z \in \mathcal{O}_p \cup \mathcal{O}_r - \{z_\circ\}$ها از $\mathbb{C}$ دارای این ویژگی‌است که نقاط واقع روی مرز مولفه‌ی فاتوی مشخصه ، تنها نقاط سهموی و دافع از دوره‌ی تناوب n در مولفه‌ی $V(c_\circ)$ شامل $z_\circ$ هستند. فرض کنید $R_v^{c_\circ}$ یک پرتو دینامیکی مختوم در $z_\circ$ باشد و اگر $c_\circ$ اساسی باشد، فرض کنید که $R_{v'}^{c_\circ}$ دومین پرتو دینامیکی مختوم در $z_\circ$ باشد، به‌وسیله‌ی ساختار $P(c_\circ)$ این پرتوها کاملاً مشمول در $V(c_\circ)$ هستند. چون $P(c_\circ)$ مشکل از زوج‌های پرتو مختوم در نقاط دافع است، بوسیله‌ی قضیه‌ی ۲.۳ یک همسایگی U از $c_\circ$ وجود دارد طوری‌که برای هر $c \in U$ هنوزبرای $c_\circ$ در صفحه‌ی دینامیکی z از $z_\circ$ زوج پرتو مجزا کننده‌ی $z \in \mathcal{O}_p \cup \mathcal{O}_r - \{z_\circ\}$ نقاط مختوم دافع دارد. این جداسازی در صفحه‌ی دینامیکی c یک افراز $P(c)$ با مولفه‌ی $V(c)$ تعریف می‌کند که بوسیله‌ی زوج پرتو در زاویه‌های یکسان همانند $V(c_\circ)$ محدود شده است. به‌علاوه برای تمام $c \in U - \{z_\circ\}$ مولفه‌ی $V(c)$ به‌جز $z_\circ$ و نقاط دافع روی مرز مولفه‌ی فاتوی مشخصه شامل ادامه‌های نقاط سهموی و دافع n–متناوب از $c_\circ$ نیست. همانند قبل ما نتایج قضیه‌ی ۱.۴ را بکار می‌بریم. وجود دارد یک پوشش دولایه $\pi : U' \longmapsto U$ با تنها نقطه‌ی شاخه‌ای $(ramification)$

$c_\circ = \pi(c')$ از(در صورت لزوم چروک شده) همسایگی Uاز$c_\circ$ hc و یک تابع تحلیلی $z : U' \longmapsto \mathbb{C}$ طوری که $z(c')$ یک نقطه از دوره‌ی تناوب n نسبت به $f_\pi(c')$ است و $z(c'_\circ) = z_\circ$. دوباره نتیجه می‌شود که مضرب $\lambda(c') := \lambda\left(\pi(c'), z(c')\right)$ روی U' هولومورفیک است، چون z چنین است، و از این رو بوسیله‌ی اصل نگاشت باز λ یک همسایگی از$c'_\circ$ را بروی یک همسایگی از یک ۱ می‌نگارد. این ایجاب می‌کند که اگر$\gamma{:}I \longmapsto U'$ یک قوس با نقطه‌ی انتهایی $c'_\circ$ باشد، یعنی $\gamma(1) = c'_\circ$ ، که بسته نیست آنگاه شاخه‌های $z_1, z_2 : \pi \circ \gamma(I) \longmapsto \mathbb{C}$ از z وجود دارند. به‌ویژه برای هر$t \in I$ تنها نقاط سهموی یا دافع در $V(\pi \circ \gamma(t))$ با دوره‌ی تناوب n عبارتند از $z_1(\pi \circ \gamma(t))$ و $z_2(\pi \circ \gamma(t))$ و ادامه‌های نقاط n–متناوب روی مرز مولفه‌ی فاتوی مشخصه. نشان می‌دهیم که $R_v^{\pi\circ\gamma(t)}$ و در صورتی که $c_\circ$ اساسی باشد$R_{v'}^{\pi\circ\gamma(t)}$ در ادامه‌های نقاط n–متناوب روی مرز مولفه‌های فاتوی مشخصه شامل مقدار بحرانی، ختم نمی‌شوند، چون این پرتوها در نقاط متناوب سهموی یا دافع ختم می‌شوند و مشمول در $V(\pi \circ \gamma(t))$ هستند دراین صورت نتیجه می‌شود که آنها در$z_1(\pi \circ \gamma(t))$ یا $z_2(\pi \circ \gamma(t))$ ختم می‌شوند و برهان به پایان می‌رسد. در حالت غیراساسی همانند برهان حالت غیرابتدای می‌توانیم ببنیم که $R_v^{\pi\circ\gamma(t)}$ نمی‌تواند در نقطه‌ای غیر از$z_1(\pi \circ \gamma(t))$ و $z_2(\pi \circ \gamma(t))$ ختم شود به هر حال در حالت اساسی از قضیه‌ی ۴.۳ می‌دانیم که $R_v^{\pi\circ\gamma(t)}$ و $R_{v'}^{\pi\circ\gamma(t)}$ در یک نقطه‌ی مشترک برای$t \in [0, 1)$ ختم می‌شوند. چون یکی از آن‌ها باید در $z_1(\pi \circ \gamma(t))$ یا $z_2(\pi \circ \gamma(t))$ ختم شود، قضیه نتیجه می‌شود. □

همانطور که قبلاً در برهان وابستگی پیوسته‌ی نقاط مختوم اشاره کردیم، بکاربردن پایداری توصیف‌های روشن لزومی ندارد، به هر حال ماگزاره‌ی زیر را داریم:

گزاره ۱.٦ (پایداری توصیف‌های روشن در یک مولفه‌ی هیپربولیک و بازریشه‌هاآن)
فرض کنید $\mathcal{H}$ یک مولفه‌ی هیپربولیک باشد و E مجموعه‌ی تمام بازریشه‌های$\mathcal{H}$ باشد دراین‌صورت برای هر پارامتر $c_\circ \in \mathcal{H} \cup E$ نقطه‌ی متناوب سهموی یا دافع $z_\circ$ مرتبط با آن، یک نگاشت پیوسته $z : \mathcal{H} \cup E \longmapsto \mathbb{C}$ چنان موجوداست که $z(c_\circ) = z_\circ$ و توصیف روشن مدار $z(c)$ برای تمام $c \in \mathcal{H} \cup E$ها یکسان است.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که برای تمام $c \in \mathcal{H} \cup E$ها تمام پرتوهای دینامیکی متناوب در صفحه‌ی دینامیکی c ختم می‌شوند. از این رو نقاط مختوم آن‌ها،$z(c)$، بطور پیوسته روی پارامتر وابسته است، از قضیه‌ی ۱.۶ این این باقی می‌ماند که ثابت کنیم توصیف‌های روشن اساسی حفظ شده هستند، اگر برای $c_\circ \in \mathcal{H} \cup E$ پرتوهای دینامیکی، $R^{c_\circ}_{v'}, R^{c_\circ}_{v}$ در $z_\circ$ ختم شوند آن‌گاه $z(c)$ نقطه‌ی مختوم $R^{c}_{v'}, R^{c}_{v}$ برای تمام $c \in \mathcal{H} \cup E$ است. فرض کنیدn, k به ترتیب دوره‌ی تناوب مدار و دوره‌ی تناوب پرتوی $z_\circ$ باشند اگر $z_\circ$ و $z(c)$ دافع باشند، به‌وسیله‌ی گزاره‌ی ۱.۳ عبارت نتیجه می‌شود. به هر حال اگر $z_\circ$ سهموی باشد آن‌گاه بوسیله‌ی قضیه‌ی۱.۴ نقاط یک مدار n−متناوب و k−متناوب در $z_\circ$ به هم می‌پیوندند. چون یکی از آن‌ها جاذب است ، درحالت غیرابتدایی آن‌را مدار n−متناوب می‌گیریم، $z(c)$ نقطه‌ی مختوم پرتوهای دینامیکی در زاویه‌های v', v برای تمام $c \in \mathcal{H} \cup E$ است. □

لم و قضیه‌ی بعدی عبارت درباره‌ی ریشه‌ها و بازریشه‌هاو مرکز مولفه‌های هیپربولیک به مامی‌دهند.

لم ۱.٦ (روی مرز مولفه‌ی فاتوی مشخصه)

فرض کنید $c_\circ$ یک پارامتر با مدار جاذب قوی ازدوره‌ی تناوب دقیق n بوده و $\mathcal{H}$ یک مولفه‌ی هیپربولیک باشد که $c_\circ$ مرکز آن‌است. در این صورت مولفه‌ی فاتوی $f_{c_\circ}$ که شامل مقدار بحرانی $c_\circ$ است، دارای دقیقاً $d - ۱$ نقطه از دوره‌ی تناوب n روی مرز خوداست که آن‌هارا با $z^{(۱)}_\circ, \dots, z^{(d-۱)}_\circ$ نمایش می‌دهیم. در یکی از آن‌ها می‌توانیم فرض کنیم در$z^{(۱)}_\circ$ دو پرتو دینامیکی ختم می‌شوند. بعلاوه فرض کنیدE مجموعه‌ی ریشه‌ها و بازریشه‌های$\mathcal{H}$ باشد. در این صورت توابع پیوسته‌ی $z^{(۱)}, \dots, z^{(d-۱)}, z^*$ روی $\mathcal{H} \cup E$ چنان موجودند که $z^{(i)}(c_\circ) = z^{(i)}_\circ$ برای هر $۱ \leq i \leq d - ۱$ و $z^*(c_\circ) = c_\circ$ ، علاوه بر این، برای هر $c \in E$ ، $z^*(c)$ ویکی از $z^i(c)$ها برابر با نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی c هستند.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که مولفه‌ی فاتوی $U_۱$ از $f_{c_\circ}$ که شامل مقدار بحرانی است، دقیقاً $d - ۱$ نقطه از دوره‌ی تناوب دقیق n روی مرز خویش دارد، چون $c_\circ$ یک نقطه از مدار جاذب قوی است،

یک تابع بوخر ϕ روی $\bar{U}_1$ چنان موجود است که $\phi^{-1}\circ f^n_{c_0}\circ\phi(z)=z^d$. این نتیجه می‌دهد که روی ∂U_1 ، $d-1$ نقطه‌ی ثابت از $f^n_{c_0}$ وجود دارد. چون آن‌ها روی تنها مدار متناوب غیردافع c_0 نیستند لذا آن‌ها دافع هستند. علاوه‌براین همانند برهان لم۴.۵ می‌بینیم که اگر $n\neq 1$ یکی از این نقاط $z_0^{(1)}$ روی درحت هوباردΓ از c_0 واقع است و بوسیله‌ی لم ۲.۵ z_0^1 تنها نقطه در $\Gamma\cup\bar{U}_1$ است. اگر $n=1$ آنگاه به‌وضوح تنها یک پارامتر با مدار جاذب قوی وجود دارد و پرتوهای دینامیکی در زاویه‌های صفر ویک ۱ که مادر این حالت آن‌ها را دو پرتو متفاوت درنظر می‌گیریم ، به‌وضوح در یک نقطه‌ی مشترک ختم می‌شوند. بنابراین $\partial K_c, z_0^{(1)}$ را ناهمبند می‌کند واین بوسیله‌ی قضیه‌ی ۵.۲ به این معنی است که حداقل دو پرتو دینامیکی در $z_0^{(1)}$ ختم می‌شوند.به وسیله‌ی لم ۱.۴ یک تابع پیوسته $z^*:\mathcal{H}\longmapsto\mathbb{C}$ چنان موجود است که $z^*(c_0)=c_0$ و همانند برهان لم ۲.۴ این نگاشت می‌تواند به یک تابع پیوسته روی تمام $\mathcal{H}\cup E$ توسیع یابد. چون نگاشت مضرب $\lambda_{\bar{\mathcal{H}}}$ روی $\bar{H}$ پیوسته است، $z^*(c)$ برای هر $c\in E$ یک نقطه‌ی مشخصه از مدار سهموی است.چون $z_0^{(i)}$ها دافع هستند بوسیله‌ی گزاره‌ی ۱.۳ توابع پیوسته‌ی $z^{(i)}$ روی $\mathcal{H}$ وجود دارند طوری‌که برای هر $1\le i\le d-1$ ، $z^{(i)}(c_0)=z_0^{(i)}$ و تمام $z^{(i)}(c)$ها دافع هستند که در آن $c\in\mathcal{H}$. دوباره توابع $z^{(i)}$ می‌توانند بطور پیوسته به $\mathcal{H}\cup E$ توسیع یابند، بعلاوه چون $z^*(c)$ نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی c برای $c\in E$ است و بنابراین روی مرز مولفه‌ی فاتوی مشخصه واقع است و دوره‌ی تناوب دقیق آن n است لذا $z^*(c)$ باید با یکی از نقاط $z^i(c)$ برابر باشد. □

حال ما نشان خواهیم داد که نگاشت درجه از $\lambda_{\bar{\mathcal{H}}}$ عبارت است از $d-1$ و با انجام این کار خواهیم دید هر مولفه‌ی هیپربولیک یک مرکز یکتا و حداقل یک ریشه دارد.توجه کنیم که بکار بردن یک برهان یکسان برای حالت $d\ge 2$ همانند برهان داده شده در گزاره‌ی ۵.۴ در [۸] برای $d=2$ ، امکان‌پذیر است.دلیل: در حالت درجه‌ی دوم کافی‌است ببینیم که حداقل یک ریشه وجود دارد ،که واضح است چون هیچ باز ریشه وجود ندارد و $\lambda_{\mathcal{H}}$ یک نگاشت هولومورفیک *proper* است. در این صورت نشان دادن این که ریشه‌ی یکتاست امکان‌پذیر است و از آن نتیجه می‌شود که $\lambda_{\mathcal{H}}$ درجه‌ی نگاشت برابر با یک۱ دارد و علاوه بر این یک ایزومورفیسم همدیس از $\mathcal{H}$ به‌روی D است. میلنور در

[٦] همچنین نشان داده است. بابه‌کاربردن چند روش کلی $\lambda_{\mathcal{H}}$ یک ایزومورفیسم‌همدیس است، به هر حال امکان‌های دیگری نیز وجود دارد که ما اثبات پیشنهادی شلچر را بیان می‌کنیم.

قضیّه ٢.٦ (نگاشت درجه $\lambda_{\mathcal{H}}$):

نگاشت مضرب یک مولفه‌ی هیپربولیک، نگاشت درجه‌ی $d-1$ دارد، بعلاوه هر مولفه‌ی هیپربولیک یک مرکز یکتا و حداقل یک ریشه دارد.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک مولفه‌ی هیپربولیک از دوره‌ی تناوب n باشد. جهت نشان دادن این مطلب که نگاشت درجه‌ی $\lambda_{\bar{\mathcal{H}}}$ عبارت است از $d-1$ ، یک پارامتر $c_0 \in \lambda_{\bar{\mathcal{H}}}^{-1}(0)$ را در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی بحرانی روی مدار جاذب قوی است و دوره‌ی تناوب دقیق آن برابر n است. باتوجه به لم ۱.۴ یک تابع هولومورفیک $z(c)$ چنان موجود است که $z(c_0) = c_0$ ، چون ما می‌توانیم بطور موضعی بنویسیم $\lambda_{\bar{\mathcal{H}}}(c) = d^n.f_c^{n-1}(z(c))^{d-1} \cdots f_c(z(c))^{d-1}.(z(c))^{d-1}$ وتنها صفر $z(c)$ عبارت است از c_0، که نتیجه می‌شود که برای یک تابع هولومورفیک g نزدیک c_0 داریم: $\lambda_{\bar{\mathcal{H}}}(c) = d^n(c-c_0)^{d-1}.g(c)^{d-1}$. از این رو $\lambda_{\bar{\mathcal{H}}}$ نگاشت درجه حداقل $d-1$ دارد بعلاوه نتیجه می‌شود که c_0 تنها پارامتر با خاصیت $\lambda_{\bar{\mathcal{H}}}(c_0) = 0$ است. یعنی مرکز یکتاست. اگر c_1 مرکز دیگری از $\mathcal{H}$ باشد، یکی از نقاط $z(c_1), \cdots, f_{c_1}^{n-1}(z(c_1))$ باید صفر باشد که در تناقض است. با این حقیقت که دوره‌تناوب مدار دقیق برابر n است و $z(c) = 0$ اگر و تنها اگر $c = c_0$. حال ما نشان می‌دهیم که نگاشت درجه حداکثر $d-1$ است:

باتوجه به قضیه‌ی ۱.۵ می‌دانیم که اگر یک پرتو پارامتری در یک پارامتر c ختم شود آن‌گاه پرتو دینامیکی با زاویه‌ی یکسان، در نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی c ختم خواهد شد. اما از لم ۱.٦ می‌دانیم که فقط $d-1$ نامزد برای نقاط مشخصه‌ی پارامترهای سهموی با دوره‌ی پرتوی n وجود دارد، یعنی حداکثر $d-1$ ریشه و باز ریشه از $\mathcal{H}$ وجود دارد، این به این معنی است که نگاشت درجه‌ی $\lambda_{\bar{\mathcal{H}}}$ حداکثر $d-1$ است واز این رو دقیقاً برابر $d-1$ است. بعلاوه این نشان می‌دهد که تمام نامزدها برای نقاط مشخصه حقیقی هستند. چون با توجه به گزاره‌ی ۱.٦ توصیف‌های روشن برای تمام

پارامترهای $\mathcal{H}$ و تمام ریشه و ریشه‌های مشترکش، پایدار هستند، بوسیله‌ی لم ١.٦ نتیجه می‌گیریم که حداقل یک پارامتر، مدار سهموی با نقطه‌ی مشخصه‌ای دارد که حداقل دو پرتو در آن ختم می‌شوند. از این رو حداقل یک ریشه وجود دارد. □

برهان یکتایی برای ریشه‌های مولفه‌های هیپربولیک می‌تواند همانند حالت درجه‌ی دوم انجام شود(دوباره گزاره‌ی ۵.۴ در [٨] را ببینید).

قضیّه ٣.٦ (وجود ریشه‌ها و یکتایی آن‌ها): هر مولفه‌ی هیپربولیک دقیقاً یک ریشه دارد.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{H}$ مولفه‌ی هیپربولیک از دوره‌ی تناوب n باشد باتوجه به قضیه‌ی قبل حداقل یک ریشه وجود دارد. حال فرض کنید $\mathcal{H}$ دارای دو ریشه‌ی c_1, c_0 باشد. در این صورت بوسیله‌ی گزاره‌ی ١.٦ مجموعه‌های توصیف‌های روشن تمام مدارهای متناوب سهموی و دافع برای c_1, c_0 برابر هستند. این به این معنی است که برای هر مدار از c_0 با یک توصیف روشن $\mathcal{P}$، یک مدار از c_1 با توصیف روشن $\mathcal{P}$ وجود دارد و بالعکس. از این رو آن‌ها زوایای یکسان دارند v_+, v_-، با این ویژگی ٥ نقطه‌ی بحرانی و مقدار بحرانی بوسیله‌ی زوج پرتو در این زاویه‌ها مجزا می‌شوند و این که تمام زوج پرتوها که صفر و مقدار بحرانی را مجزا می‌کنند در مولفه‌ی شامل صفر واقعند. این نتیجه می‌دهد که زوایای مشخصه‌ی توصیف‌های روشن مدار سهموی برابر هستند. چون بوسیله‌ی گزاره‌ی ٢.٥ هر پارامتر سهموی اساسی نقطه‌ی مختوم پرتوهای پارامتری در زاویه‌های مشخصه‌ی توصیف‌های روشن مدار سهموی است، این قضیه را ثابت می‌کند. □

حال تعیین کردن تعداد بازریشه‌های مولفه‌ی هیپربولیک کاملاً ساده است.

گزاره ٢.٦ هرمولفه‌ی هیپربولیک دقیقاً $d-2$ باز ریشه دارد.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک مولفه‌ی هیپربولیک از دوره‌ی تناوب n باشد. از تعریف $\lambda_{\mathcal{H}}$ و قضیه‌ی ١.۴ نتیجه می‌شود که دقیقاً پارامترهایی که یک مدار سهموی با دوره‌ی پرتوی دقیق n دارند، بوسیله‌ی $\lambda_{\mathcal{H}}$ به یک ١ تصویر می‌شوند. تعداد این پارامترها دقیقاً $d-1$ است، چون بوسیله‌ی قضیه‌ی ٢.٦ نگاشت درجه‌ی $\lambda_{\mathcal{H}}$ برابر $d-1$ است.بوسیله‌ی قضیه‌ی ٣.٦ هر مولفه‌هیپربولیک دقیقاً یک ریشه دارد،

بنابراین $d-1$ پارامتر دیگر باید باز ریشه باشند. □

دو عبارت قبل قضیه‌ی ۳.۶ و گزاره‌ی ۲.۶ بیان دیگر ادعای آخر قضیه‌ی ساختار هستند. تا این‌جا می‌دانیم که در هر مولفه‌ی هیپربولیک حداقل d پرتو پارامتری ختم می‌شوند. هدف بعدی ما این است که نشان دهیم حداکثر d پرتو پارامتری در هر مولفه‌ی هیپربولیک ختم می‌شوند. در آن صورت برهان قضیه‌ی ساختار برای پرتوهای متناوب پایان می‌پذیرد. در بخش بعد ما به اصطلاح پرتوهای درونی یک مولفه‌ی هیپربولیک را برای متصل کردن نقاط مختوم پرتوهای پارامتری مختوم در آن‌جا، بکار خواهیم برد. اینجا یک تعریف داریم.

تعریف ۱.۶ (پرتوهای داخلی و زاویه‌های یک پرتو هیپربولیک):

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک مولفه‌ی هیپربولیک بوده و $\gamma: I \longmapsto \bar{\mathcal{H}}$ یک قوس با نقطه‌ی شروع در مرکز $\mathcal{H}$ باشد که زاویه‌ی v وجود داشته‌باشد که‌برای هر $t \in I$ داشته باشیم $\lambda_{\bar{\mathcal{H}}}(\gamma(t)) = t.e^{2\pi i v}$. دراین صورت $\gamma(I)$ را یک پرتو درونی از $\mathcal{H}$ با زاویه‌ی v می‌نامیم و می‌نویسیم $R_v^{\mathcal{H}}$ برای $\gamma(I)$.

برای یک پارامتر $c \in \mathcal{H}$ غیر از مرکز $\mathcal{H}$ که روی یک پارامتر داخلی با زاویه‌ی v از $\mathcal{H}$ واقع است، v را زاویه‌ی درونی c نسبت به $\mathcal{H}$ می‌نامیم. ◇

تذکر ۲.۶ با توجه به این که $\lambda_{\mathcal{H}}$ یک نگاشت «$d-1$ به یک۱»است یک پرتو درونی $\mathcal{H}$ با یک زاویه‌ی داده شده، بطور یکتاتعریف نمی‌شود. برعکس برای هر زاویه‌ی v یک مولفه‌ی هیپربولیک $d-1$ پرتو درونی با این زاویه‌ی v دارد.

فصل ۷

دنباله‌های ورزیده

۷–۱ مقدمه

در این فصل همانطور که قبلاً تذکر دادیم با نشان دادن این مطلب که در هر مولفه‌ی هیپربولیک حداکثر d پرتو پارامتری ختم می‌شوند، برهان قضیه را تمام می‌کنیم. این کار را با اثبات کردن یک شرط لازم برای ختم شدن پرتوهای پارامتری در یک نقطه‌ی مشترک، انجام می‌دهیم. (قضیه‌های ۱.۷ و ۳.۷ را ببینید). برای این هدف ما دنباله‌های ورزیده از زاویه‌ها را معرفی می‌کنیم. برهان‌های این بخش کمابیش شبیه برهان‌های شلچر در بخش ۳ از [۸] هستند(بویژه لم‌های ۳.۹ و ۳.۱۰ را ببینید). به هر حال برای استفاده از این روش‌ها ، یعنی افرازِ در قضیه‌ی ۱.۷ ، برای حالت $d \geq 2$ ، اطلاعاتی درباره‌ی مولفه‌های هیپربولیک داریم. این اطلاعات را در بخش‌های قبل جمع‌آوری کرده‌ایم و اکنون می‌توانیم از آن‌ها استفاده کنیم.

تعریف ۱.۷ برای یک زاویه‌ی $v \in \mathbb{S}^1$ ، $\mathbb{S}^1$ را بوسیله‌ی وارون نگاشت d–لایه‌ی σ تقسیم کرده و مولفه‌ها را به صورت زیر طبقه‌بندی می‌کنیم:

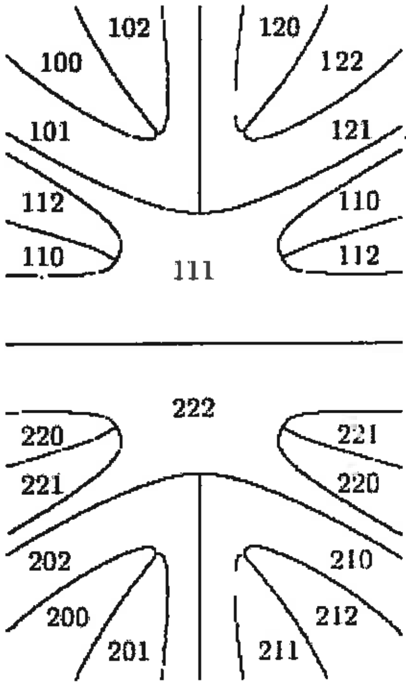
$$l_v(\eta) := \begin{cases} m & \eta \in \left(\frac{v+(m-1)}{d}, \frac{v+m}{d}\right) \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{m_2}{m_1} & \eta = \frac{v+(m_2-1)}{d} = \frac{v+m_1}{d} \end{cases} \qquad (۷–۱)$$

دنباله‌ی نامتناهی $I_v(\eta) := l_v(\eta), l_v(d\eta), l_v(d^2\eta), \cdots$ ، v–خط سیر η نسبت به نگاشت d–لایه نامیده می‌شود. برای خط سیر خاص $I_v(v)$ می‌نویسیم $K(v) := I_v(v) = l_v(\eta), l_v(d\eta), l_v(d^2\eta), \cdots$ و $K(v)$ را دنباله‌ی ورزیده‌ی v نسبت به نگاشت d–لایه می‌نامیم.
نمادهای $\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{0}, \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}, \ldots, \genfrac{}{}{0pt}{}{d-1}{d-2}, \genfrac{}{}{0pt}{}{0}{d-1}$ نمادهای مرزی نامیده می‌شوند و اگر موضوعی که ما از نمادهای مرزی می‌دانیم نباشد، آن‌ها رابایک نشان $(*)$ جایگزین می‌کنیم. ∘

تذکر ۱.۷ ما می‌توانیم دنباله‌ی ورزیده را به عنوان یک نگاشت $K : S^1 \longmapsto KS$ در نظر بگیریم که $KS := \{(a_n)_{\mathbb{N}}$: a_n یکی از نمادهای $0, 1, \cdots, d-1, \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{0}, \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}, \ldots, \genfrac{}{}{0pt}{}{d-1}{d-2}, \genfrac{}{}{0pt}{}{0}{d-1}$ است$\}$

اگر هر زاویه‌ی $v_۲, v_۱$ دارای نمادهای مضرب در ورودی‌های یکسان باشند و بقیه‌ی نمادهابرهم منطبق باشند مناسب است که بنویسیم $K(v_۱) = K(v_۲)$.

تصویر۷: در شکل زیرافراز $P_۳$ از دنباله‌ی ورزیده‌ی آغازی برای $\mathcal{M}_۳$ نشان داده شده است، که ما در برهان قضیه‌ی زیر بکار می‌بریم، آن از پرتوهای پارامتری در زاویه‌هایی که دارای دوره‌ی تناوب کمتریامساوی ۳ هستند، نقاط مختومشان و پرتوهای درونی از زاویه‌ی صفر از مولفه‌های هیپربولیک متناظر تشکیل شده است(برای متصل کردن نقاط انتهایی گوناگون). سه ورودی اول دنباله‌ی ورزیده‌ی زاویه‌ی هر پرتو پارامتری که مشمول در یکی از این مولفه‌هاست همانند نشان داده شده در شکل هستند.ماباید به عبارت زیر توجه کنیم:



لم ۱.۷ (تعویض ورودی‌های یک دنباله‌ی ورزیده):

دنباله‌ی ورزیده‌ی $KS \longmapsto K : \mathbb{S}^۱$ را در نظر بگیرید. در این صورت k–امین ورودی $K(v)$ تغییر می‌کند اگر وتنها اگر $l_v(d^{k-۱}v)$ یک نماد مرزی باشد، می‌توانیم با جزئیات بیشتر بگوییم: اگر v در جهت مثبت حرکت کند، افزایش می‌یابد همان‌طور که بوسیله‌ی نمادهای مرزی $^{m+۱}_{m}$ تعیین شده است، یعنی، آن از m به $m + ۱$ تغییر می‌کند(دوباره $d \equiv ۰$)

اثبات. ادعا فوراً از تعریف نتیجه می‌شود: k-امین ورودی $K(v)$ به صورت $l_v(d^{k-1}v)$ تعریف می‌شود. $\square$

در قضیه‌ی زیر ما یک افراز از دنباله‌ی ورزیده‌ی آغازی تعریف می‌کنیم که بیشتر برهان گام استقراء از قضیه‌ی ۳.۷ را انجام می‌دهیم.

قضیّه ۱.۷ (یک افراز از دنباله‌ی ورزیده‌ی آغازی):

فرض کنید $n \geq 2$ یک عدد صحیح باشد. اگر در ریشه‌ی هر مولفه‌ی هیپربولیک با دوره‌ی تناوب کمتر یامساوی $n-1$ دقیقاً دو پرتو پارامتری متناوب ختم شوند، آن‌گاه هر دو پرتو پارامتری با زاویه‌های v_2, v_1 از دوره‌ی پرتوی دقیق n می‌توانند در یک پارامتر یکسان ختم شوند فقط در صورتی که $K(v_1) = K(v_2)$.

اثبات. برای اثبات مطلب، یک افراز P_{n-r} از $\mathbb{C}$ می‌سازیم طوری‌که هر پرتو پارامتری با دوره‌ی تناوب پرتوی دقیق n همراه با نقطه‌ی مختومش کاملاً مشمول دریک مولفه‌ی باز از P_{n-1} باشد، بعلاوه نیاز داریم که برای هر دو پرتو پارامتری $R^{\mathcal{M}}_{v_2}, R^{\mathcal{M}}_{v_1}$ که هردو در یک مولفه‌ی باز یکسان از P_{n-1} هستند دنباله‌های ورزیده‌ی v_2, v_1 در $n-1$ ورودی اول منطبق هستند. این قضیه را ثابت می‌کند، چون هر پرتو پارامتری بازاویه‌ی از دوره‌ی تناوب دقیق n ، دنباله‌ی ورزیده از دوره‌ی تناوب n دارد و n-امین ورودی دنباله‌ی ورزیده‌ی $(*)$ است. باقی می‌ماند اثبات این مطلب که چنین افرازی وجود دارد.

فرض کنید Θ_k مجموعه‌ی تمام زاویه‌ها از دوره‌ی تناوب دقیق k باشد و Λ_k مجموعه‌ی نگاشت‌های مضرب از مولفه‌های هیپربولیک k-متناوب باشد. تعریف می‌کنیم: $P_{n-1} := \bigcup_{k=1}^{n-1} \left(\bigcup_{v \in \Theta_k} R^{\mathcal{M}}_v \cup \bigcup_{\lambda \bar{\mathcal{H}} \in \Lambda_k} \lambda^{-1}_{\bar{\mathcal{H}}}(I) \right)$ و ادعا می‌کنیم که P_{n-1} یک افراز با ویژگی‌های خواسته شده است. با توجه به ساختار، P_{n-1} یک افراز از $\mathbb{C}$ است. با توجه به قضیه‌ی ۳.۳ تمام پرتوها با دوره‌ی تناوب پرتوی دقیق k در یک پارامتر ختم می‌شوند که مدار سهموی با دوره‌ی تناوب پرتوی دقیق k داردو بعلاوه برای یک مولفه‌ی هیپربولیک $\mathcal{H}$ تصویر وارون $\lambda^{-1}_{\bar{\mathcal{H}}}(I)$ دقیقاً مجموعه‌ی تمام پرتوهای درونی با زاویه‌ی صفر است.هر یک از این $d-1$ پرتو داخلی در یک ریشه یا ریشه‌ی مشترک

از $\mathcal{H}$ یک نقطه‌ی مختوم یکی از این پرتوهای داخلی است. چون پرتوهای پارامتری هیچ نقطه‌ی تقاطعی ندارند، با توجه به این مفروضات بدست می‌آوریم که هر پرتو پارامتری از دوره‌ی تناوب n همراه نقطه‌ی مختومش کاملاً مشمول در یکی از مولفه‌های باز $P_{n-۱}$ است.حال فرض کنید دو پرتو پارامتری $R^{\mathcal{M}}_{v_۲}, R^{\mathcal{M}}_{v_۱}$ هر دو مشمول در یک مولفه‌ی باز یکسان از $P_{n-۱}$ هستند. چون هر مولفه‌ی هیپربولیک دقیقاً $d - ۲$ ریشه‌ی مشترک و دقیقاً یک ریشه دارد(گزاره‌ی ۲.۶ و قضیه‌ی ۳.۶) و با توجه به مفروضات در هر ریشه دقیقاً دو پرتو پارامتری ختم می‌شوند، می بینیم که در مرز هر مولفه‌ی هیپربولیک از دوره‌ی تناوب k دقیقاً d پرتو پارامتری از دوره‌ی تناوب k برای $k \in \{۱, ۲, \cdots, n - ۱\}$ ختم می‌شوند. بنابراین برای هر $k \in \{۱, ۲, \cdots, n - ۱\}$ تعداد زاویه‌هایی که در Θ_k $(v_۱, v_۲)$ واقعند برابر با $m.d$ برای $m \in \mathbb{N}$ است. با بکاربردن لم ۱.۷ دوباره برای هر $k \in \{۱, ۲, \cdots, n - ۱\}$ ، k–امین ورودی $K(v)$ ، $m.d$ بار افزایش پیدا می‌کند همانطور که v از $v_۱$ تا $v_۲$ حرکت می‌کند، یعنی آن برای $v_۲, v_۱$ یکسان است. □

در گام بعدی می‌بینیم که برای یک ریشه‌ی مفروض دنباله‌ی ورزیده‌ی تمام زاویه‌ها، بجزبرای احتمالاً زاویه‌های مشخصه ، از پرتوهای دینامیکی مختوم در نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی ریشه، متفاوت هستند.

قضیّه ۲.۷ (دنباله‌های ورزیده‌ی مختلف):

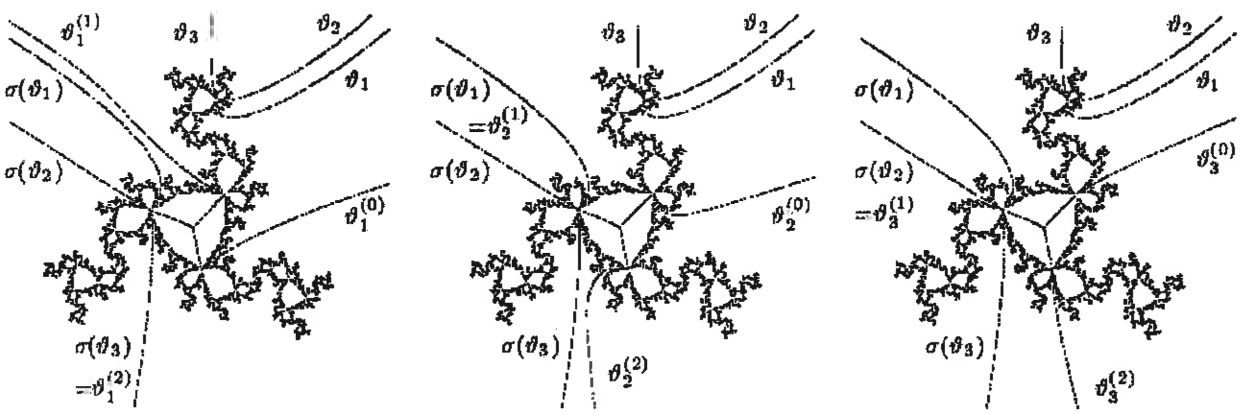
فرض کنید $c_۰$ یک ریشه باشد. در این صورت زاویه‌های پرتوهای دینامیکی که در نقطه‌ی مشخصه‌ی مربوطه ختم می‌شوند، برای احتمالاً دو زاویه‌ی مشخصه ، دنباله‌های ورزیده‌ی دوبه‌دو متفاوت دارند.

اثبات. ابتدا چند نماد معرفی می‌کنیم: فرض کنید $z_۱$ نقطه‌ی مشخصه‌ی مدار سهموی باشد، و $R^{c_۰}_{v_۱}, \cdots, R^{c_۰}_{v_s}$ تمام پرتوهای دینامیکی مختوم در $z_۱$ باشند. برای $s = ۲$ چیزی برای اثبات وجود ندارد، بنابراین فرض کنیم $s \geq ۳$. اگر دوره‌ی تناوب دقیق زاویه‌های $v_۱, \cdots, v_s$ برابر n باشدآن‌گاه بوسیله لم ۱.۳ دوره‌ی تناوبمدار سهموی عبارت است از$k := \frac{n}{s}$. فرض می‌کنیم که $n \geq ۲$ زیرا گزاره برای $n = ۱$ بدیهی است. برای $i \in \{۱, \cdots, s\}$ ما d تصویر وارون v_i نسبت به نگاشت d–لایه

را به‌وسیله‌ی $v_i^{(l)} := \frac{(v_i+l)}{d} \in \mathbb{S}^1$، $(l \in \{0, 1, \cdots, d-1\})$ نمایش دهیم.و نقطه‌ی مختوم $v_i^{(l)}$ را بوسیله‌ی $z_\circ^{(l)}$ برای هر $(l \in \{0, 1, \cdots, d-1\})$. بوضوح $z_\circ^{(l)}$ نقطه‌ی مختوم $v_i^{(l)}$ است اگروتنهااگر نقطه‌ی مختوم $v_j^{(l)}$ باشد. یعنی $z_\circ^{(0)}, \cdots, z_\circ^{(d-1)}$ وابسته به انتخاب یک زاویه‌ی خاص v_i برای $i, j \in \{1, \cdots, d-1\}$ نیست. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک مولفه‌ی هیپربولیک باشد که برای آن $c_\circ$ یک ریشه باشد و فرض کنید c_1 مرکز متناظر باشد. بوسیله‌ی گزاره‌ی ۱.۶ و لم ۱.۶ می‌بینیم که نگاشت‌های پیوسته‌ی $z^{(0)}, \cdots, z^{(d-1)}$ روی $\mathcal{H} \cup \{c_\circ\}$ وجود دارند طوری‌که $z_{c_\circ}^{(i)} = z_\circ^{(i)}$ برای تمام iها و در $z_c^{(i)}$ پرتوهای دینامیکی در زاویه‌های یکسان ختم می‌شوند همانطور که در $z_\circ^i$ (برای تمام iهاو $c \in \mathcal{H} \cup \{c_\circ\}$ ختم می‌شوند. نقاط $z^{(i)}(c_1)$ روی مرز مولفه‌ی فاتوی $U_\circ$ از f_{c_1} شامل نقطه‌ی بحرانی واقعند. فرض کنید Γ درخت هوبارد c_1 باشد، U_1 مولفه‌ی فاتوی مشخص و $\gamma : I \longmapsto \Gamma$ یک قوس باشد که تنها نقطه‌ی اشتراک $\Gamma \cap \bar{U}_1$ را با مقدار بحرانی c_1 متصل می‌کند. در این صورت $\gamma(I)$، d تصویر وارون دارد. هر یک در $\bar{U}_\circ$ واقعند و نقطه‌ی بحرانی را بایکی از نقاط $z^{(i)}(c_1)$ وصل می‌کنند. بنابراین افراز $P_{v_i} := f_{c_1}^{-1}(\gamma(I)) \cup \bigcup R_{v_i^l}^{c_1}$ دقیقاً d مولفه‌ی باز دارد. اکنون ما مرز P_{v_i} را بوسیله‌ی $(*)$ نشان‌گذاری می‌کنیم و مولفه‌ی شامل مقدار بحرانی c_1را با یک ۱ برچسب می‌زنیم. مولفه‌های بعدی را بوسیله‌ی اعداد در جهت مثبت برچسب می‌زنیم. بوسیله‌ی ساختار شاخه‌ی $\Gamma - \bar{U}_\circ$ که روی آن مقدار بحرانی واقع است همیشه دارای برچسب یک ۱ است. چون f_{c_1} حافظ جهت است ایجاب می‌کند که هر شاخه‌ی $\Gamma - \bar{U}_\circ$ نسبت به هر افراز P_{v_i} برچسب یکسان دارد چون درخت هوبارد مدار بحرانی و هر $z_{c_1}^{(i)}$ که روی مرز یک مولفه که شامل یک نقطه از مدار بحرانی است، را متصل می‌کند، پرتوهای دینامیکی مختوم در یک $z^{(i)}(c_1)$ برای تمام افرازها دارای برچسب یکسانی هستند. از این رو v_{i_1}—خط سیر v_{j_1} برابر با v_{i_2}—خط سیر v_{j_2} است برای تمام $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{0, 1, \cdots, d-1\}$ بجز برای احتمالاً افرازهای $m \in \mathbb{N}, mk - 1$. این به این معنی است که دنباله‌های ورزیده‌ی تمام v_iها می‌توانند تنها در موقعیت $(m \in \mathbb{N})$,$mk - 1$ متفاوت باشند. حال ما ثابت می‌کنیم که دنباله‌های ورزیده‌ی تمام v_iها بجز برای دو زاویه در موقعیت $(mk-1)$—ام مجزا هستند. $(mk-1)$—امین ورودی،دنباله‌ی ورزیده‌ی v_i است فقط برچسب $\sigma^{mk-1}(v_i)$ نسبت به P_{v_i}. بنابراین دو زاویه‌ی v_j, v_i فقط در صورتی

می‌توانند دنباله‌های ورزیده‌ی یکسانی داشته باشند که تعداد پرتوهای دینامیکی در بین $R^c_{v_0}$ها که برچسب معین دارند، نسبت به P_{v_j}, P_{v_i} با هم برابر باشند. به هر حال اگر حداقل دو تا از پرتوهای $R^c_{v_0}$ دارای برچسب متفاوت نسبت به P_{v_i} ، تعداد پرتوهایی که برچسب کوچکتر دارندمتفاوت است نسبت به P_{v_i} و P_{v_j} برای $v_i \neq v_j$. بنابراین تمام این پرتوهای دینامیکی باید برچسب یکسانی داشته باشند. این تنها وقتی امکان‌پذیر است که هیچ یک از آن‌ها در مولفه‌ی $R_{v_i} \cup R_{v_j} \cup z^{\circ}(c_1)$ که شامل $U_{\circ}$ است، واقع نباشد یعنی اگر v_j, v_i زاویه‌های مشخصه باشند. □

تصویر۸:مجموعه‌ی ژولیای چند جمله‌ای درجه‌ی سوم $z \longmapsto z^3+c$ که یک مدار جاذب قوی از دوره‌ی تناوب ۶ دارد.(پارامتر c نزدیک $۰.۲۲۵۳۴۵ + ۰.۹۴۱۴۰۶i$ است.).با نمادگذاری های برهان قبل پرتوهای دینامیکی مختوم در z_1 دارای زوایای $v_1 = ۹۲/۷۲۸, v_2 = ۱۰۰/۷۲۸, v_3 = ۱۷۲/۷۲۸$. مدار v_1 عبارت است از $v_1 \longmapsto \sigma(v_1) \longmapsto v_2 \longmapsto \sigma(v_2) \longmapsto v_3 \longmapsto \sigma(v_3) \longmapsto (v_1)$.



حال نتایج قبل را ترکیب می‌کنیم و برهان ادعای سوم در قضیه‌ی ساختار را با نشان دادن قضیه‌ی زیر پایان می‌دهیم.

قضیّه ۳.۷ **(هر ریشه، نقطه‌ی مختوم دقیقاً دو پرتو پارامتری است)**

هر ریشه‌ی $c_\circ$ نقطه‌ی مختوم دقیقاً دو پرتو پارامتری است. بعلاوه زاویه‌های پرتوهای مختوم در $c_\circ$ زاویه‌های مشخصه توصیف روشن مدار سهموی $c_\circ$ هستند.

اثبات. ما قضیه را به استقراء ثابت می‌کنیم: فرض کنید n دوره‌ی تناوب پرتوی $c_\circ$ باشد. برای $n = ۱$ تنها ریشه، نقطه‌ی مختوم پرتوهای پارامتری زاویه‌های صفرویک ۱ است که مابه عنوان دو پرتو در این حالت در نظر می‌گیریم. فرض کنید که ریشه‌های تمام مولفه‌های هیپربولیک با دوره‌ی تناوی کمتر یا مساوی ۱ − n نقاط مختوم دقیقاً دو پرتو پارامتری باشند. در این صورت بوسیله‌ی قضیه‌ی۱.۷ بدست می آوریم که در ریشه‌ی $c_\circ$ از هر مولفه‌ی هیپربولیک بادوره‌ی تناوب n تنها پرتوهای پارامتری با زاویه‌های n–متناوب که دنباله‌های ورزیده‌ی یکسان دارند، می‌توانند ختم شوند. توجه کنید که یک پرتو پارامتری با زاویه‌ی مفروض می‌تواند تنها در $c_\circ$ ختم شود اگر پرتو دینامیکی بازاویه‌ی مشابه در نقطه‌ی مشخصه‌ی $z_\circ$ از مدار سهموی $c_\circ$ ختم شود(قضیه‌ی۱.۵) و این‌که تمام زاویه‌های پرتو دینامیکی مختوم در$z_\circ$ بجز احتمالاً برای زاویه‌های مشخصه‌ی v_+, v_- دنباله‌های ورزیده‌ی متفاوت دارند. این به ما نشان می‌دهد که حداکثر پرتوهای پارامتری با زاویه‌های v_+, v_- می‌توانند در $c_\circ$ ختم شوند. از گزاره‌ی ۲.۵ می‌دانیم که آن‌ها بوضوح مختوم هستند. که استقراء را به پایان می‌رساند. □

فصل ۸

پرتوهای پارامتری باتکرارمتناوب

۱—۸ مقدمه

برای کامل شدن بحث پرتوهای پارامتری گویا نقاط مختوم پرتوهای پارامتری باتکرارمتناوب را مطالعه می‌کنیم، چون هر زاویه‌ی باتکرارمتناوب بوسیله‌ی یک تکرار بروی یک مدار متناوب نگاشته می‌شود، می‌توانیم نتایج‌مان را برای پرتوهای پارامتری بکار بریم. ایده‌ها مشابه حالت درجه‌ی دوم هستند، ما برهان شلچر از بخش ۴ در [۸] را دنبال می‌کنیم.

تعریف ۱.۸ (نقطه‌ی میسرویکز): یک پارامتر c که برای آن مدار بحرانی باتکرارمتناوب است ولی متناوب نیست، یک نقطه‌ی میسرویکز نامیده می‌شود. ⋄

قضیّه ۱.۸ (پرتوهای پارامتری باتکرارمتناوب مختوم هستند).
هر پرتو پارامتری در یک زاویه باتکرار متناوب v، در یک نقطه‌ی میسرویکز $c_\circ$ ختم می‌شود. پرتو دینامیکی $R_v^{c_\circ}$ در مقدار بحرانی $c_\circ$ ختم می‌شود.

قبل از برهان باید توجه کنیم که بوسیله‌ی گرفتن تصاویر وارون، با توجه به قضیه‌ی ۲.۳ همچنین بدست می‌آوریم که برای هر پرتو پارامتری c با نقطه‌ی دافع باتکرارمتناوب $z_\circ$ که نقطه‌ی مختوم یک پرتو دینامیکی $R_v^{c_\circ}$ است، یک همسایگی U از c ویک تابع هولومورفیک $z : U \longmapsto \mathbb{C}$ چنان وجود دارند که $z(c_\circ) = z_\circ$ و هر $z(c)$ نقطه‌ی مختوم R_v^c است.

اثبات. فرض کنید $c_\circ \in \mathcal{M}_d$ یک پارامتر در مجموعه‌ی حدی $R_v^{\mathcal{M}}$ باشد. با بکار بردن نتایج مربوط به دنباله‌های ورزیده، به‌راحتی دیده می‌شود $c_\circ$ نمی‌تواندیک پارامتر سهموی باشد، به کمک قضایای ۳.۷ و ۱.۷ می‌دانیم که دو پرتو پارامتری می‌توانند در یک پارامتر یکسان ختم شوند فقط در صورتی که دنباله‌های ورزیده‌ی زوایای آن‌ها برابر باشند. چون هر پارامتر سهموی نقطه‌ی مختوم حداقل یک پرتو پارامتری سهموی است و دنباله‌ی ورزیده‌ی زوایای سهموی، دوباره سهموی است، تنهاپرتوهای پارامتری در زاویه‌های با یک دنباله‌ی ورزیده‌ی متناوب می‌توانند در یک پارامتر سهموی ختم شوند،

ولی دنباله‌ی ورزیده‌ی یک زاویه باتکرارمتناوب نمی‌تواند شامل هیچ نماد مرزی باشد واز این‌رو $c_\circ$ نمی‌تواند یک پارامتر باتکرارمتناوب باشد.

می خواهیم نشان دهیم که پرتو دینامیکی $R_v^{c_\circ}$ در مقدار بحرانی $c_\circ$ ختم می‌شود. در این صورت از لم ۳.۲ نتیجه می‌شود که مدار بحرانی باتکرارمتناوب است واز این رو $c_\circ$ یک نقطه‌ی میسرویکز است. چون مجموعه‌های حدی همبند هستند(برای مثال ، تذکر بعد از تعریف ۲.۴ در [۱۰] را ببینید) و مجموعه نقاط میسرویکز $\mathcal{M}_d$ شماراست (توجه کنید که هر نقطه‌ی میسرویکز c باید در معادله‌ی $f_c^p(c) = f_c^{p+k}(c)$ برای اعداد صحیح $p, k \geq ۱$ صدق کند.)قضیه، پس از آن نتیجه می‌شود.

حال برهان این مطلب که $R_v^{c_\circ}$ در$c_\circ$ ختم می‌شود: چون $c_\circ$ یک پارامتر سهموی نیست، $R_v^{c_\circ}$ در یک نقطه‌ی دافع باتکرارمتناوب $z_\circ$ ختم می‌شود(به کمک قضیه‌ی ۴.۲). اگر $z_\circ$ توسط هیچ تکراری از $f_{c_\circ}$ به نقطه‌ی بحرانی صفرختم نشودآن‌گاه یک همسایگی U از $c_\circ$ و یک تابع هولومورفیک z روی U چنان موجودند که $z(c_\circ) = z_\circ$ و $z(c)$ نقطه‌ی مختوم R_v^c برای تمام $c \in U$هااست. (به کمک قضیه۲.۳)، علاوه براین به‌وسیله‌ی لم ۵.۲ برای هر پارامتر $c \in U \bigcap R_v^{\mathcal{M}}$ مقدار بحرانی c روی پرتو دینامیکی R_v^c واقع است. چون $R_v^{c_\circ}$ مختوم است و z این‌جا پیوسته است، ایجاب می‌کند که $z(c_\circ) = c_\circ$.

به هر حال اگر $z_\circ$ روی مدار پسروی مقدار بحرانی $c_\circ$ واقع باشد آن‌گاه یک عدد صحیح $l \geq ۱$ موجود است طوری‌که $f^l(z_\circ) = c_\circ$ و دوباره بوسیله‌ی قضیه‌ی ۲.۳ یک همسایگی U از $c_\circ$ و یک تابع هولومورفیک z روی U وجود دارد طوری‌که $z(c_\circ) = c_\circ$ و$z(c)$ نقطه‌ی مختوم $R_{\sigma^l(v)}^c$ است. حال ما نمی‌توانیم به‌طور یکتا به عقب برگردیم چون نقطه‌ی بحرانی روی مدار واقع است. اما در این صورت d شاخه‌ی $f_c^{-l} \circ z(c)$ نقاط مختوم شاخه‌های R_v^c هستند که در آن $R_{\sigma^l(v)}^c$ به توی آن شکافته می‌شود. دوباره این نقاط مختوم بطور هولومورفیک روی c وابسته‌اند و همانندبالا نتیجه می‌شود که شاخه‌ی $R_v^{c_\circ}$ در $c_\circ$ ختم می‌شود. □

باید توجه کنیم که حالت آخر در برهان قبل می‌تواند هرگز اتفاق نیفتد: باید نتیجه شود که $c_\circ$ متناوب است و این باید باباتکرارمتناوب بودن v و با این فرض که $R_v^{c_\circ}$ در مدار پسروی $c_\circ$ ختم شود در تناقض باشد.

اکنون برهان چهارمین ادعا از قضیه‌ی ساختار را تمام شده داریم و پنجمین ادعا را نشان خواهیم داد:

قضیّه ۲.۸ (هر نقطه‌ی میسرویکز یک نقطه‌ی مختوم است):
در هر نقطه‌ی میسرویکز یک پرتو پارامتری باتکرارمتناوب ختم می‌شود.

اثبات. فرض کنید $c_\circ$ یک نقطه‌ی میسرویکز باشد. در برهان قضیه‌ی قبل فراهم شده داریم که $c_\circ$ سهموی نیست. به کمک قضیه‌ی ۵.۲ مقدار بحرانی $c_\circ$ نقطه‌ی مختوم یک پرتو دینامیکی مانند $R^{c_\circ}_{\psi}$ است. بعلاوه به‌کمک قضیه‌ی ۲.۳ یک همسایگی U از $c_\circ$ و یک تابع هولومورفیک z روی U چنان موجود است که $z(c_\circ) = c_\circ$ و $z(c)$ نقطه‌ی مختوم R^c_ψ برای تما $c \in U$ها است. چون تعداد نقاط میسرویکز با یک باتکرارمتناوب و دوره تناوب مفروض متناهی است، می‌توانیم فرض کنیم که U شامل نقطه‌ی میسرویکز دیگری نیست. برای $c \in U$ اکنون فرض کنید ϕ_c نگاشت بوخر باشد که متمم مجموعه‌ی ژولیای کامل K_c را به‌روی متمم D می‌نگارد و فرض کنید $z(c,t) := \phi_c^{-1}(te^{2\pi i v})$. چون R^c_ψ مختوم است، $z(c,t)$ برای تمام $t \in [1,\infty]$ها خوش تعریف است. ما عدد پیچشی R^c_ψ حول c را به عنوان تغییر کلی $\frac{arg(z(c,t)-c)}{2\pi}$ تعریف می‌کنیم در حالی که t از ∞ به یک ۱ کاهش می‌یابد،اگر R^c_ψ شامل مقدار بحرانی c نباشد و آن‌جا ختم نشود، عدد پیچشی خوش تعریف است، متناهی است و بطور پیوسته به پارامتر بستگی دارد. تحت این مفروضات اگر ما در طول هر قوس بسته‌ی کوچک حول $c_\circ$ حرکت کنیم، تغییر عدد پیچشی، بوسیله‌ی اصل آرگومان عبارت است از چندگانگی صفرِ $c_\circ$ نسبت به $z(c) - c$. اما مقدار عدد پیچشی در نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی از این قوس بسته یکسان است. از این رو یک ناپیوستگی روی قوس بسته حول $c_\circ$ وجود دارد و پارامترهای c وجود دارند که برای آن‌ها مقدار بحرانی در R^c_ψ واقع است. این ایجاب می‌کند که $c_\circ$ یک نقطه‌ی حدی $R^{\mathcal{M}}_\psi$ است و بنابراین بوسیله‌ی قضیه‌ی قبل $R^{\mathcal{M}}_\psi$ در $c_\circ$ ختم می‌شود. □

متفاوت از حالت متناوب در حالت کلی قادر نیستیم بگوییم که چند پرتوپارامتری در یک نقطه‌ی میسرویکز مفروض ختم می‌شوند. به هر حال هنوز می‌توانیم گزاره‌هایی در قضیه‌ی ؟؟ بسازیم. برهان

آن بر لم زیر بستگی دارد:

لم ١.٨ (دنباله‌ی ورزیده‌ی زاویه‌های باتکرارمتناوب):

برای پارامتر $c_\circ$ فرض کنید $R^{c_\circ}_v$ یک پرتو باتکرارمتناوب مختوم در $z_\circ$ با باتکرارمتناوب l و دوره تناوب n باشد در این صورت $K(v)$ نیز باتکرارمتناوب l دارد، و دوره‌ی تناوبش برابر با دوره‌ی تناوب مدار $z_\circ$ است.

اثبات. بوضوح باتکرارمتناوب $K(v)$ نمی‌تواند بزرگتر از l باشد. بطور مشابه با برهان قضیه‌ی ٢.٧ یک افراز برای بکار بردن دنباله‌ی ورزیده از یک زاویه‌ی مفروض، می‌سازیم. بوسیله‌ی قضیه‌ی ١.٨ پرتو دینامیکی $R^{c_\circ}_v$ در مقدار بحرانی $c_\circ$ ختم می‌شود و از این رو d پرتو دینامیکی با تصاویر وارون v به عنوان زاویه‌ها، در نقطه‌ی بحرانی صفر ختم می‌شوند. اگر ما مولفه‌های این افراز متشکل از مقادیر بحرانی را برچسب بزنیم و این پرتو دینامیکی آن‌جا ختم شوند، برچسب‌های $R^{c_\circ}_v, R^{c_\circ}_{\sigma(v)}, \cdots$ دوباره دنباله‌ی ورزیده‌ی v را منعکس می‌کنند. اگر باتکرارمتناوب $K(v)$ کوچکتر از l باشد آن‌گاه پرتوهای دینامیکی در زاویه‌های $\sigma^{l-1+n}, \sigma^{l-1}(v)$ باید برچسب‌های یکسان داشته باشند، اما این نمی‌تواند برقرار باشد چون نقاط مختوم آن‌ها $f^{l-1+n}_{c_\circ}(c_\circ), f^{l-1}_{c_\circ}(c_\circ)$ در مولفه‌های متفاوتی از این افراز واقعند. حال ما نشان می‌دهیم که دوره‌ی تناوب مدار از $f^{l}_{c_\circ}(c)$ دقیقاً عبارت است از دوره‌ی تناوب دنباله‌ی ورزیده‌ی $\sigma^{l}(v)$: بوضوح دوره‌ی تناوب دنباله‌ی ورزیده، دوره‌ی تناوب مدار رابخش(عاد) می‌کند.اگر برچسب‌های $\sigma^{l+k'}(v), \sigma^{l}(v)$ همیشه برابر باشند، یعنی k' دوره‌ی تناوب دنباله‌ی ورزیده باشد، پرتوهای دینامیکی در این زاویه‌ها همیشه در یک افراز یکسان ختم می‌شوند. در این صورت ما می‌توانیم نقاط مختومشان را بوسیله‌ی یک قوس در داخل هر مولفه به هم متصل کنیم. بوسیله‌ی گرفتن تصاویر وارون پیاپی از پرتو دینامیکی، نقاط مختوم و قوس‌ها، می‌بینیم که نقاط مختوم به تنها یک نقطه همگرا هستند، یعنی پرتوهای دینامیکی در زاویه‌های $\sigma^{l+k'}(v), \sigma^{l}(v)$ در نقاط یکسان ختم می‌شوند. □

قضیّه ٣.٨ (تعداد پرتوها در یک نقطه‌ی میسرویکز):

فرض کنید v یک زاویه‌ی باتکرارمتناوب با باتکرارمتناوب l و دوره‌ی تناوب n باشد. بعلاوه فرض کنید

k دوره‌ی تناوب $K(v)$ باشد. نقطه‌ی میسرویکز که پرتو پارامتری در زاویه‌ی v در آن ختم می‌شود رابا $c_{\circ}$ نمایش دهید. اگر $\frac{n}{k} > ۱$ باشد آن‌گاه دقیقاً $\frac{n}{k}$ پرتو پارامتری در $c_{\circ}$ ختم می‌شوند و اگر $\frac{n}{k} = ۱$ آن‌گاه یک ۱ یا دو ۲ پرتو پارامتری در $c_{\circ}$ ختم می‌شوند.

اثبات. با بکار بردن لم‌های ۱.۸ و ۳.۳ ما می‌دانیم اگر $\frac{n}{k} > ۱$باشد $\frac{n}{k}$ پرتو دینامیکی در هر نقطه از مدار $f^{l}_{c_{\circ}}(c_{\circ})$ ختم می‌شوندو واگر $\frac{n}{k} = ۱$باشد حداکثر دو پرتو دینامیکی در هر نقطه ختم می‌شوند. بعلاوه چون $f_{c_{\circ}}$ یک همیومورفیسم موضعی در یک همسایگی از $c_{\circ}, f_{c_{\circ}}(c_{\circ}), \cdots, f^{l-1}_{c_{\circ}}(c_{\circ})$ است، در این نقاط تعداد یکسانی از پرتوهای دینامیکی (همانند مدار متناوب) ختم می‌شوند بوسیله‌ی قضایای ۱.۸ و ۲.۸ تعداد پرتوهای پارامتری مختوم در $c_{\circ}$ دقیقاً تعداد پرتوهای دینامیکی مختوم در هر نقطه‌از مدار $c_{\circ}$ است. این برهان را تمام می‌کند. □

پیوست A

مراجع

کتاب‌نامه

[1] Adrien Douady and John H.Hubbard,", *iteration des polynomes quadratiques Complexes, C.R. Acad .Sci.paris Ser. I Math.*" 294 (1982), 123-126.

[2] Afrien Douady and John H. Hubbard, "*Etude dynamique des polynomes complexes I,II*" ,Publication mathematiques d'Orsay, 1984-1985.

[3] Lisa R. Goldberg and John Milnor",*Fixed point of polynomial mapsII: fixed point portraits.*" Ann. Scient. Ecole Norm.Sup. 4e serie 26(1993), 51-98.

[4] Frances Kirwan,"*Complex Algebraic Curves,*" Cambringe Univesity Press,Cambridge, 1992.

[5] John Milnor, "*Dynamic in one complex variable: Introductory lecturs*" ,Stony Book IMS Preprint 5, institute for Mathematical Scincees, SUNY , Stony Book NY, 1990.

[6] John Milnor, "*Periodic Orbits,External Rays and the Mandelbrot Set and Irreducibility of Polynomials* ", Institute for Mathematical Scinces, SUNY,Stony Brook NY , March 1998.

[7] Direk Schleicher ," *Internal Addresses in the Mandelbrot Set and Irreducibility of Polynomials*", Ph.D . thesis , Cornell Universaity , 1994.

[8] Direk Schleicher ," *Rational Parameter of the Mandelbrot Set*",Stony Book IMS Preprint 13 , Institute for Mathematical Scinces, SUNY , Stony Book NY and Zentrum mathematik, Technische Universitat Munchen , 1997, to appear in Asterisque.

[9] Direk Schleicher ," *The Dynamics of Iterated Polynomials* ", in preparation,1998.

[10] Direk Schleicher ," *On Fibers and Local Connectivity Of Compact Sets in C* " Stony Book IMS Preprint 12, Zentrum Mathematik, Technische Universitate Munchen,1998.

[11] Direk Schleicher ," *On Fibers and Local Connectivity Of Mandelbrot and Multibrot Sets* " Stony Book IMS Preprint 13a, Zentrum Mathematik, Technische Universitate Munchen,1998.

پیوست B

واژه نامه

واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی

مجموعه‌ی مندلبرات .... *Mandelbrot Set*

مجموعه‌ی مولتی‌برات .... *TheMultibrot Set*

مجموعه‌ی ژولیای کامل .... *the field − in julia set*

مجموعه‌ی ژولیا .... *the julia set*

مجموعه‌ی فاتو .... *the fatou set*

صفحه‌ی دینامیکی .... *daiamical plan*

صفحه‌ی پارامتری .... *Parameter ray*

پرتو پارامتری .... *Parameter ray*

نقطه‌ی بحرانی .... *Critical point*

نقطه‌ی مختوم .... *Landing point*

مقدار بحرانی .... *Critical Value*

نقطه‌ی متناوب .... *Periodic point*

باتکرار متناوب (بازمتنناوب) .... *Pre periodic*

دوره‌ی تناوب دقیق مدار .... *exact orbit period*

دوره‌ی تناوب پرتوی دقیق .... *exact ray period*

مضرب .... *Multiplier*

حوضه‌ب جذب .... *basin of attraction*

حوضه‌ی جذب فوری .... *Immediate basin of attraction*

تابع پتانسیل .... *Potential Function*

تابع گرین .... *Green Function*

مجموعه‌ی ژولیا .... *Julia set*

مجموعه‌ی ژولیای کامل .... *The field – in Julia set*

مجموعه‌ی فاتو .... *Fatou set*

مدار پسرو .... *backward orbit*

مدار پیشرو .... *Forward orbit*

موضعاً همبند .... *Locally connected*

نقطه‌ی جاذب .... *Attraction*

نقطه‌ی جاذب قوی .... *Super Attraction*

نقطه‌ی دافع .... *Repelling point*

نقطه‌ی بحرانی .... *Critical point*

نقطه‌ی ثابت .... *Fixed point*

نقطه‌ی ثابت بی‌اثر .... *Indiffrent fixed point*

نقطه‌ی ثابت جاذب .... *Attracting fixed point*

توصیف روشن مدار .... *Orbit Portrait*

اساسی .... *essential*

غیر اساسی .... *non – essential*

ابتدایی .... *Primitative*

بازه‌ی مکمل .... *Complementary Interval*

بازه‌ی مشخصه .... *Characteristic Interval*

توصیف روشن مدار صوری .... *Charactristic Point*

عدد دوران ترکیبات .... *Combinatorial Rotation Number*

هیپربولیک .... *Hyperbolic*

بازریشه .... *co – root*

شاخه .... *Branch*

جداسازی مدار .... *Orbit Seperation*

دنباله‌ی ورزیده .... *Kneading Sequence*

نقطه‌ی میسرویکز .... *Misiurewicz Point*

Abstract

This thesis is divided into the 8 chapters.In Chapter 2 we restate some well known facts about complex dynamics, introduce Multibrot sets and show some of their basic properties.

Then in Chapter 3 we introduce following Milnor orbit portraits and show a few properties in the first subsection, which will be important for most of the further sections.In the second subsection we start the discussion of stability of portraits under perturbation of the parameter, which is the engine for several proofs. Moreover, as in the proofs for the quadratic case, we will use this concept to prove the first statement of the Strucure Theorem(See Theorem 3.2).Then due to the fact that for d>2 some parameter rays land in pairs and others alone, we have to starthandling certain parameters different: in particular we show in theorem 3.2.7 that at every non-essential parameter at least one ray lands and theorem 3.2.5 that some rays land pairwise. Again as a tribute to the fact that in general not all parameter rays land pairwise but alwats a certain number of rays land at one hyperbulic component we have to introduce these objects in Chapter 4. In the proofs os Scheleicher and Milnor the discussion of hyperbolic components starts after finishing the proof of the Structure Theorem.

In Chapter 5 We introduce the so-called Hubbars trees and prove with their help two Orbit Seperation Lemmas. These will be a useful tool to see in more detail that if a parameter ray lands at a parameter, the corresponding dynamic ray must land at the so-

called charactritic point of the parameter.Furthermore , this enbles us to prove that every non-essential parabolic parameter is the landing point of exactly one periodic parameter ray(Collary 5.3.2) and that at every essential parabolic parameter at least two parameter ray land(Collary 5.3.3). Hence, in this subsection the second statement of the Structure Theorem Will be proved.

for the proof of the thired statement we have to show that at most two parameter rays land at any essential parabolic parameter. In Chapter 6 we have to to see further properties of hyperbolic components, especially the number of roots and co-roots a hyperbolic component has. This will also prove the last statement of the last statement of the Structure Theorem.

in This Chapter 7 we can finish the proof of statement (3) by excluding for any essential parabolic parameter all rays, except for two, as canadidates for landing at the parameter. The concept of kneading sequences is the maintool which we use for this.

By reading the case of a preperiodic ray to the case of a periodic ray we can prove in Chapter 8 the fourth and fifth statement of the Structure Theorem as in the quadratic case.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematics

Rational Parameter Ray Of Multibrot Sets

By : Ali Chamani

Supervisors:

Dr. Ahmad Zireh

Dr. Mir Heydar Jafari