بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق درعملیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی برای انتخاب سبدسهام فازی

نگارنده: حسین فیض

استادان راهنما

دکتر مهرداد غزنوی
دکتر مریم قرآنی

استاد مشاور

دکتر سمیه مغاری

دی۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **آقای حسین فیض** با شماره دانشجویی **۹۴۰۵۸۳۴** رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **تحقیق در عملیات** تحت عنوان: **الگوریتم های بهینه سازی چند هدفه تکاملی برای انتخاب سبد سهام فازی** که در تاریخ **۱۳۹۶/۱۰/۲۷** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: بسیار خوب) ☑ **مردود ☐**

نوع تحقیق: نظری ☐ **عملی ☐**

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر مهرداد غزنوی	استادیار	غزنوی
۲- استادراهنمای دوم	دکتر مریم قرآنی	استادیار	
۳- استاد مشاور	دکتر سمیه مغاری	استادیار	مغاری
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر احمد معتمدنژاد	دانشیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر محمدهادی نوری اسکندری	استادیار	نوری اسکندری
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر جعفر فتحعلی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

آنان که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوند بي همتایی که جزء او کسي شایسته‌ی پرستش نیست.
به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای **دکتر مهرداد غزنوی** و سرکار خانم **دکتر مریم قرآنی** که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند؛ تقدیر و تشکر نمایم.

حسین فیض
دی۹۶

تعهد نامه

اینجانب **حسین فیض** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی برای انتخاب سبدسهام فازی** ، تحت راهنمایی **مهرداد غزنوی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حسین فیض
دی۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه برخی الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه برای انتخاب سبدسهام فازی را ارائه می‌دهیم. در ابتدا یک مدل انتخاب سبدسهام جدید تحت عنوان مدل میانگین، ریسک نامطلوب و چولگی $MDRS$ را بررسی می‌کنیم. در این مدل خاصیت چندبعدی انتخاب سبدسهام و الزامات مورد نظر سرمایه‌گذار به‌طور هم‌زمان مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این مدل، بازده مورد انتظار، ریسک نامطلوب و چولگی یک سبدسهام با درنظر گرفتن محدودیت‌های بودجه، کران‌ها و کاردینالی بهینه می‌شوند. هدف اصلی، حل مدل انتخاب سبدسهام $MDRS$ به‌عنوان یک مسأله بهینه‌سازی سه‌هدفه است. در این مسأله بازده مورد انتظار و چولگی باید ماکزیمم شوند و ریسک نامطلوب باید مینیمم شود. برای این منظور سه عمل جدید جهش، تقاطع و ترمیم برای بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی پیشنهاد می‌شود. عملگرهای پیشنهاد شده را برای سه الگوریتم معروف بهینه‌سازی تکاملی $NSGAII$ و $MOEA/D$ و $GWSAF-GA$ به‌کار می‌بریم و عملکرد این الگوریتم‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. با مقایسه نتایج حاصل شده با عملگرهای دیگر ژنتیک، پتانسیل عمل‌های تعریف شده نشان داده می‌شود و نتایجی راجع به توازن بین سه هدف ذکر شده می‌آوریم.

کلمات کلیدی: سبدسهام، ریسک نامطلوب، بازده مورد انتظار، چولگی، الگوریتم ژنتیک، بهینه سازی چندهدفه.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مقدمه‌ای بر سبدسهام و بهینه‌سازی چندهدفه (فازی)

۱.۱ مقدمه

در دنیایی که امروزه ما در آن زندگی می‌کنیم، اصلی‌ترین دغدغه‌ی سرمایه‌گذاران برای مشارکت در توسعه اقتصادی، سرمایه‌گذاری در بورس اوراق‌بهادار و بازارهای سهام از طریق ایجاد سبد سهام است. هدف اصلی سرمایه‌گذاران از ایجاد سبد سهام، تقسیم نمودن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است، به‌طوری که سود یک سهم، زیان و ضرر حاصل از سهم دیگر را پوشش دهد. در واقع ما با این کار به دنبال سود یا بازده بیش‌تر و به حداقل رساندن ریسک هستیم. سرمایه‌گذاران متناسب با دارایی‌هایی که دارند از قبیل پول نقد، ملک، طلا و...در شرایط عدم اطمینان اقدام به ایجاد سبدسهام و سرمایه‌گذاری می‌کنند. همیشه همه افراد دوست دارند در بورس، ببیش‌ترین سود را کسب کنند و سرمایه‌گذاری مطمئنی انجام دهند. اما اغلب این اتفاق نمی‌افتد و تنها ۷۰ درصد از معامله‌گران بازار سرمایه موفق به کسب سود مناسب از سرمایه‌گذاری در سهام‌شان می‌شوند. یکی از راهکارهای مهم و اساسی جهت مدیریت سرمایه و کاهش قابل توجه ریسک در بازار بورس، افزایش تنوع سهام موجود در یک

سبد و در نهایت تشکیل سبد سهام یا پرتفولیو[1] است. به گونه‌ای که در هر برهه‌ی زمانی از بازار بتوانیم سود مناسبی را چه در بازار صعودی و چه در بازار نزولی و چه در بازار خنثی کسب کنیم. تشکیل سبدسهام بهینه یکی از تصمیم‌گیري‌هاي مهم براي شرکت‌ها می‌باشد. به همین دلیل، انتخاب یک سبد سهام با نرخ بازدهی بالا و ریسک کنترل شده یکی ازموضوعاتی است که مورد توجه محققان قرار گرفته‌است. هدف از این پژوهش، استفاده از الگوریتم‌هاي فرابتکاري براي انتخاب سبدسهام است.

۱.۱.۱ گام‌های سرمایه‌گذاری در بورس

برای تشکیل یک سبد سهام اطلاعات و گام‌هایی لازم است که به‌طور خلاصه ما به سه گام مهم آن می‌پردازیم:
گام اول، مطالعه، مشورت و توجه به اصول سرمایه‌گذاری در بورس
مرحله اول برای سرمایه‌گذاری در بورس، مطالعه و شناخت کافی درباره این بازار، مشورت با افراد حرفه‌ای و تعیین هدف از سرمایه‌گذاری در بورس است. برای سرمایه‌گذاری باید به اصول زیر توجه داشته باشید:

۱. با نگاه بلند مدت سرمایه‌گذاری کنید.

۲. توجه داشته باشید که ذات بورس با نوسان همراه است، بنابراین در مواجه با افت و خیزهای مقطعی بازار، هیچ‌گاه به‌صورت شتاب‌زده و هیجانی اقدام به خرید یا فروش سهام نکنید.

۳. برای شروع کار، از سرمایه‌های مازاد خود استفاده کنید و سرمایه‌های ضروری خود را وارد بورس نکنید.

۴. حتما برای سرمایه‌گذاری در بورس، با افراد متخصص مشورت کنید. کارگزاران رسمی بورس که مجوز مشاوره دارند، یکی از مناسب‌ترین گزینه‌ها برای مشورت در سرمایه‌گذاری هستند.

گام دوم: دریافت کد معاملاتی
حتما شما هم در یک یا چند بانک، دارای حساب بانکی هستید. همان‌طور که برای پس انداز و سرمایه‌گذاری در بانک، نیازمند دریافت شماره حساب بانکی هستید، برای سرمایه‌گذاری در بورس هم باید در اولین گام، کد معاملاتی دریافت کنید. برای دریافت کد معاملاتی، می‌توانید با در دست داشتن مدارک شناسایی شامل شناسنامه و کارت ملی، به یکی از کارگزاران رسمی بورس مراجعه کنید.

[1] Portfolio

گام سوم،خرید و فروش سهام
برای خرید و فروش سهام، نیازی نیست به تالار بورس مراجعه کنید. خرید و فروش سهام صرفاً از طریق شرکت‌های کارگزاری و به یکی از روش‌های زیر انجام می‌گیرد:

- مراجعه حضوری به کارگزاری و ارائه سفارش خرید یا فروش
- سفارش تلفنی به کارگزاری برای خرید یا فروش سهام
- سفارش اینترنتی به کارگزاری، برای خرید یا فروش سهام
- خرید یا فروش مستقیم سهام توسط خود فرد، از طریق سامانه معاملات آنلاین

تفاوت سفارش اینترنتی و معاملات آنلاین این است که در سفارش اینترنتی، شما به جای مراجعه حضوری به دفتر کارگزاری و تکمیل فرم سفارش خرید یا فروش سهام، به پایگاه اینترنتی کارگزاری مراجعه کرده و فرم سفارش خرید یا فروش سهام را از طریق اینترنت تکمیل کرده و در اختیار کارگزار قرار می‌دهید، اما در نهایت، این کارگزار است که عملیات خرید یا فروش سهام را براساس سفارش شما انجام می‌دهد. اما در معاملات آنلاین، شما پس از دریافت گذر واژه و رمز عبور از کارگزاری، می‌توانید شخصاً نسبت به خرید و فروش سهام از طریق اینترنت اقدام کنید. افزایش سرعت، سهولت و عدالت در دسترسی به بورس و خرید و فروش سهام، مهم‌ترین مزیت معاملات آنلاین است. یکی از قدیمی‌ترین مدل‌های کاربردی که به‌منظور تشکیل سبدسهام جهت یاری سرمایه‌گذاران مورد استفاده قرارمی‌گیرد مدل مارکوویتز می‌باشد. پارامترهای اصلی در این مدل، بازده مورد انتظار و ریسک می‌باشند که از توزیع نرمال[۲] پیروی می‌کنند.

۲.۱.۱ ماهیت اصلی سرمایه‌گذاری

چرا سرمایه‌گذاری می‌کنیم؟ به‌عبارت ساده می‌توان گفت که سرمایه‌گذاران از پول و سرمایه خود، سود کسب می‌نمایند. وجه نقد یک فرصت از دست رفته است، در صورتی که وجه نقد را نگه‌داری کنیم فرصت کسب سود از طریق آن وجه نقد را از دست خواهیم داد. علاوه بر این به علت فضای تورمی که وجود دارد، قدرت خرید پول کاهش می‌یابد. به عبارت ساده‌تر، اگر نرخ تورم بالا باشد قدرت خرید به سرعت کاهش می‌یابد.
سرمایه‌گذاران دوست دارند بازده آن‌ها تا جایی که امکان دارد زیاد باشد، ولی باید به این نکته توجه داشت که میزان بازده با ریسک رابطه مستقیم دارد و در قبال بازده بیش‌تر باید ریسک بیش‌تری را متحمل شویم. به‌عنوان مثال در سال ۱۹۸۲ در ایالات متحده، سال خوبی برای بازار سهام بود. به‌طوری‌که بازده کلی اوراق مربوط به سهام از ۲۰ درصد بالا رفت، با این وجود برخی از صندوق‌هایی که حتی به‌صورت حرفه‌ای اداره می‌شدند در همین سال با زیان روبه‌رو شدند. همان‌طور که مشاهده شد اوراق‌بهادار قابل معامله دارای ریسک، بازده‌های گوناگون

[۲] Normal Distribution

و متفاوتی دارند. بنابراین سرمایه‌گذاری حتما و همیشه باید براساس ریسک و بازده صورت گیرد و این دو عامل هیچ‌گاه از هم جدا نیستند.
ریسک دارای انواع مختلفی است و به همین دلیل تعاریف متعددی دارد. در این‌جا، ریسک میزان اختلاف بازده واقعی یک سرمایه‌گذار از بازده مورد انتظار آن می‌باشد.
حال این سوال مطرح می‌شود که آیا سرمایه‌گذاران از ریسک تنفر دارند؟ معمولا در اقتصاد و سرمایه‌گذاری فرض بر این است که سرمایه‌گذاران منطقی عمل می‌کنند. بنابراین سرمایه‌گذاران منطقی، اطمینان را به عدم اطمینان ترجیح می‌دهند در این حالت می‌توان گفت سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک علاقه‌ای ندارند. به‌عبارت دیگر می‌توان گفت سرمایه‌گذاران ریسک‌گریزند.
یک سرمایه‌گذار ریسک‌گریز کسی است که در ازای قبول ریسک، انتظار دریافت بازده بیش‌تری را دارد. توجه داشته باشید پذیرفتن ریسک یک کار غیر منطقی نیست، چون در این حالت انتظار بازده بالایی نیز وجود دارد. در واقع سرمایه‌گذاران به‌طور منطقی نمی‌توانند انتظار کسب بازده بالایی را بدون قبول ریسک داشته باشند.
همان‌طور که مشاهده می‌شود سرمایه‌گذارن به دنبال حداکثر کردن بازده سرمایه خود هستند. با این حال آیا می‌توان گفت سرمایه‌گذاران به دنبال حداقل کردن ریسک خود هستند؟ جواب منفی است! زیرا حداقل کردن میزان ریسک، مخصوصاً نرخ بازده پایین، دارای هزینه‌هایی است. حداقل کردن ریسک به نگه‌داری دارایی‌های بدون ریسک مثل پس‌انداز و اوراق خزانه منجر می‌شود. با این حال کسانی که سرمایه‌گذاری می‌کنند علاقه‌مند هستند تا رابطه‌ای منطقی بین ریسک و بازده سرمایه‌گذاری خود ایجاد کنند.

۳.۱.۱ تعاریف و مفاهیم اقتصادی

تعریف ۱.۱.۱. هر فردی که پول یا سرمایه‌اش را در جایی یا به کسی می‌سپارد و انتظار دارد بازده مالی به‌دست آورد، **سرمایه‌گذار** گفته می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. سرمایه‌گذاری عبارت است از تبدیل وجوه مالی به یک یا چند دارایی و سهم که برای مدتی نگهداری خواهد شد.

تعریف ۳.۱.۱. **سهم**، یک نوع اوراق‌بهادار است که نشان‌دهنده مالکیت و ادعای دارنده آن بر بخشی از یک شرکت و درآمدها و دارایی‌های آن است.

تعریف ۴.۱.۱. **سبدسهام**، ترکیب یا مجموعه‌ای مناسب از سهام‌ها یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آن‌ها را خریداری (انتخاب) کرده است.

تعریف ۵.۱.۱. **بازده**، درآمد حاصل از سرمایه‌گذاري است. این مفهوم در بازار سهام بسیار کاربردی است، با وجود بازده است که سرمایه‌گذاری‌های خاص در بازده‌های کوتاه مدت، میان مدت و بلند مدت در بازار سهام شکل گرفته است. در اوراق مشارکت نرخ سود سالانه در بهترین حالت تا۲۵ درصد در سال می‌تواند باشد که اگر پیش از موعد آن‌را نقد کنید این سود

تا ۲۱ درصد هم کاهش می‌یابد. همان‌طور در سرمایه‌گذاری در بانک‌ها که طبق مصوبه جدید شورای پول در یک سال بیش از ۲۲ درصد نمی‌توانند به سرمایه‌گذاران حساب‌های سپرده سود بدهند. پس باید دانست، بازار سهام ایران به نسبت بازارهای مالی رقیب از امنیت و سود بالاتری برخوردار است. امنیت بالا و سود مطلوب دو خواسته همه سرمایه‌گذاران است، که هر دو این مولفه‌های سرمایه‌گذاری را می‌توان در بازار سهام ایران به‌دست آورد.

تعریف ۶.۱.۱. بازده واقعی، میزان سودی می‌باشد که درگذشته کسب شده یا به‌وقوع پیوسته است.

تعریف ۷.۱.۱. بازده مورد انتظار[۳]، تخمین سودی است که سرمایه‌گذار انتظار دارد طی یک دوره در آینده کسب کند.

تعریف ۸.۱.۱. میزان اخلاف میان بازده مورد انتظار سرمایه‌گذاری با بازده واقعی، **ریسک**[۴] نامیده می‌شود.
یک سرمایه‌گذار زمانی با ریسک روبه‌رو می‌شود که نسبت به بازده ارزیابی شده در زمان آینده اطمینان کافی را نداشته باشد. نبود اطمینان نسبت به بازده‌های آینده یک طرح سرمایه‌گذاری ریسک را در آن وارد می‌نماید. یکی از مهم‌ترین ریسک‌ها در بازار سهام، ریسک نقدشوندگی می‌باشد. درجه سهولت نقدشوندگی یک سهم یکی از مهم‌ترین شاخص‌ها در خرید سهام یک شرکت می‌باشد. هرقدر سهام یک شرکت سریع‌تر و نزدیک‌تر به قیمت واقعی نقد شود، ریسک نقدینگی آن کم‌تر می‌باشد. می‌توان گفت که ریسک نقدشوندگی در بازار سهام از بانک‌ها کم‌تر و از سرمایه‌گذاری در املاک به نسبت بالاتر است.

تعریف ۹.۱.۱. به مجموعه پول (سپرده‌های سرمایه‌گذاری شده در بخش غیردولتی نزد بانک‌ها و اسکناس و مسکوک در دست اشخاص) و شبه پول (سپرده‌های سرمایه‌گذاری مدت‌دار، سپرده‌های قرض‌الحسنه پس‌انداز و سپرده‌های متفرقه) نقدینگی[۵] گفته می‌شود. به عبارت ساده‌تر، مجموع اسکناس و مسکوکات و منابع اعتبارات بانکی، مهم‌ترین اجزای تشکیل دهنده نقدینگی هستند.

تعریف ۱۰.۱.۱. بهینه‌سازی سبدسهام سرمایه‌گذاری عبارت است از تعیین نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی‌هایی که قرار است در سبد نگهداری شود، به‌شکلی که سبد انتخابی بهتر از هر سبد دیگری باشد. این بهتر بودن بر اساس معیارهایی مشخص می‌شود. معیارهایی که به‌صورت مستقیم یا غیرمستقیم ترکیبی از ملاحظات بازده مورد انتظار سبد، پراکندگی بازده‌ها و سایر پارامترهای ریسک مالی است.

[۳] Expected return
[۴] Risk
[۵] Liquidity

تعریف ۱.۱.۱۱. مرزکارا، منحنی پیوسته‌ای است که توازن بین بازده و ریسک سبدسهام را نشان می‌دهد. در واقع بهترین ترکیب بازده و ریسک را مشخص می‌کند، به‌طوری که به‌ازای یک ریسک ثابت بیش‌ترین بازده و به‌ازای یک بازده مشخص کم‌ترین ریسک را داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۱۲. نقدشوندگی به این موضوع اشاره دارد که با چه سرعتی می‌توان یک دارایی یا سهام را به قیمت واقعی در بازار فروخت. هر قدر میزان معاملات یک سهم در بازار بیش‌تر باشد و خریداران و فروشندگان بیش‌تری آن سهم را معامله کنند، نقدشوندگی آن بیش‌تراست. به‌عبارت دیگر اگر بتوان یک دارایی را با سرعت بالایی و بدون دردسر به وجه نقد تبدیل کرد، نقدشوندگی آن دارایی و قابلیت عرضه و فروش آن در بازار بیش‌تر است.
نقدشوندگی این امکان را فراهم می‌کند که دارندگان برخی دارایی‌ها نظیر سهام، بدون نگرانی از وجود خریدار برای دارایی خود آن‌را بخرند، نگه دارند و در زمان مناسب بفروشند. پول نقد به عنوان استاندارد نقدشوندگی(نقدشونده‌ترین دارایی) درنظر گرفته می‌شود زیرا می‌تواند به‌سرعت و به‌راحتی به دارایی‌های دیگر تبدیل شود، در حالی‌که برخی دارایی‌های دیگر نظیر املاک مسکونی، خودرو، تابلو فرش‌های نفیس و کلکسیون‌های کمیاب نقدشوندگی نسبتاً کم‌تری دارند. باید توجه داشت که هیچ فرمول به‌خصوصی برای اندازه‌گیری نقدشوندگی وجود ندارد. با این حال سرمایه‌گذاران معمولاً از نسبت‌های نقدشوندگی برای مقایسه نقدشوندگی دو سهم استفاده می‌کنند.

تعریف ۱.۱.۱۳. اگر هیچ تزریق و یا خروجی پولی وجود نداشته باشد گوییم **سبدسهام خودتامین**[۶]، می‌باشد.(خرید یک دارایی جدید با فروش یکی از دارایی‌های همان سبد انجام می‌گیرد.)

تعریف ۱.۱.۱۴. **اوراق‌بهادار با سود ثابت،** اوراقی هستند که تاریخ پرداخت و مبلغ پرداخت آن‌ها مشخص است. در بیش‌تر موارد مقدار و زمان هر پرداخت از قبل مشخص شده است. معروف‌ترین آن‌ها، اوراق‌بهادار (قرضه‌ای) است که در آن وام‌دهنده قبول می‌کند اصل بدهی را در تاریخ سر رسید مشخص بازپرداخت نماید و همچنین بهره و سود تعیین شده در فواصل زمانی مشخص تعیین شده را پرداخت کند.

تعریف ۱.۱.۱۵. **بازده سود سهام،** عبارت است از سود تقسیمی سالانه تقسیم بر قیمت جاری هر سهم، که به‌صورت درصد نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۶. **مدیریت ریسک** ، فرآیندی است که یک سازمان با بهترین و بهینه‌ترین روش در مقابل انواع ریسک‌ها از خود نشان می‌دهد.
یکی از بخش‌های اصلی مدیریت ریسک در بورس ، انتخاب سهام مناسب است. برای انتخاب سهام مناسب آیتم‌های زیادی باید مورد بررسی قرار گیرد اما مهم‌ترین آیتم بحث نقدشوندگی سهام یا سهم است. چنان‌چه سهم دارای نقد شوندگی مناسب نباشد ریسک معاملات را

[۶] Stock supply portfolio

بالا برده و سرمایه ما را به خطر می‌اندازد. چنان‌چه میانگین ارزش معاملات روزانه سهم در حد مناسبی نباشد نه از مسیر صعودی می‌توان سود گرفت نه اینکه در مسیر نزولی می‌توان سود کسب‌شده را ذخیره نمود. در عین اینکه درصورت عدم نقدشوندگی مناسب، سرمایه‌گذار نمی‌تواند تعداد سهام درخواستی خود را بخرد یا بفروشد.
یکی از بخش‌های مهم مدیریت ریسک در بورس، تشکیل سبدسهام است. یک سرمایه‌گذار حرفه‌ای آگاه است یک سبد سهام با شرایط مشخص، ریسک موجود را تا حد ممکن کاهش دهد و تسلط شما صرفاً بر روی سبد سهام انتخاب‌شده قرار می‌گیرد. در رابطه با سبدسهام ذکر این نکته ضروری است که از انتخاب سبد با تعداد زیادی سهم متمرکز ریسک شما را کاهش می‌دهد. انتخاب تعداد سهام داخل یک سبد رابطه مستقیمی با سرمایه شما دارد.

۲.۱ مفهوم ساده سبدسهام

سبدسهام در مفهوم بسیار ساده به این معنی است که سرمایه خود را به چند قسمت مختلف تقسیم کنیم و متناسب با آن، سهام شرکت‌های مختلف از صنایع مختلف را انتخاب کنیم و در کنار هم بچینیم که در هر زمانی بتواند سود معقول و مناسبی را نصیب ما کند و به این‌صورت، هیچ‌گاه فقط سهم یک شرکت را نخواهید داشت، و با این روش، ریسک سرمایه‌گذاری شما بسیار پایین خواهد آمد و کارایی بسیار بالاتر خواهد رفت. یعنی اگر یک شرکت پس از مدتی زیانده شناسایی شد، فقط بخشی از دارایی شما با کاهش قیمت مواجه می‌شود. این تقسیم‌بندی، می‌تواند بر اساس بازدهی‌های سهام در زمان‌های مختلف باشد. مثلاً اگر بازدهی در کوتاه‌مدت مد نظرمان است باید بیش‌تر سبد سهام، کوتاه مدت باشد.

۱.۲.۱ بهترین سبدسهام

احتمالا این دو اصطلاح را شنیده‌اید که همه‌ی تخم‌مرغ‌های خود را در یک سبد نگذارید و اگر عمق رودخانه‌ای را نمی‌دانید با هر دو پا آن را آزمایش نکنید وگرنه احتمال غرق شدن شما زیاد است. در بازار بورس هم، نمونه‌ی همین موارد وجود دارد. اگر تمام سرمایه‌تان را در خرید سهام یک شرکت سرمایه‌گذاری کنید ممکن است سهم‌تان در کوتاه‌مدت برخلاف نظر شما کاهش قیمت داشته باشد و در بهترین حالت، قیمت سهم تغییر زیادی نکند و سرمایه شما در یک سهم بلوکه شده و احتیاج به زمان طولانی‌تری برای بازدهی مورد نظر داشته باشد، به همین خاطر همیشه توصیه می‌شود سبد سهام یا پرتفلیو تشکیل دهید و تحت هیچ شرایطی تک سهم نشوید. کسانی که تک سهم می‌شوند ریسک و استرس بسیار بالایی را متحمل خواهند شد. همان‌طور که وقتی می‌خواهیم غذایی طبخ کنیم مثلا قرمه‌سبزی درست کنیم اولا فقط یک ماده غذایی بکار نمی‌بریم یعنی قرمه‌سبزی ما فقط سبزی یا فقط گوشت یا لوبیا یا لیموعمانی نخواهد بود بلکه ترکیبی از آن‌هاست و دوما بهترین نوع هر ماده متناسب با غذا

را استفاده می‌کنیم مثلا برای گوشت قرمه‌سبزی هم گوشت گوسفندی نمی‌ریزیم هم گوشت مرغ بلکه فقط گوشت گوسفند استفاده می‌کنیم.

۲.۲.۱ فروش استقراضی

فروش استقراضی، فروش نوعی اوراق‌بهادار به‌وسیله‌ی کسی است که چنین اوراق‌بهاداری را ندارد. بنابراین باید آن‌ها را قرض بگیرد و به خریدار تحویل دهد. فروش این نوع اوراق باعث می‌شود که فروشنده از کاهش قیمت این اوراق‌بهادار در آینده سود ببرد. فروشنده باید در آینده اوراق‌بهادار ذکر شده را خریداری و بدهی خود را بپردازد. توجه داشته باشید فروش استقراضی بخشی از بازار معاملات محسوب می‌شود.
به‌عنوان مثال فرض کنید شخصی به نام محمد معتقد است که قیمت سهام یک شرکت (مثلا سهام پتروشیمی) در چند ماه آینده کاهش خواهد یافت او می‌خواهد درصورتی که ارزیابی‌اش درست باشد از این وضعیت سودی(منفعتی) به‌دست آورد. او از کارگزار خود می‌خواهد که ۱۰۰ سهم را به‌صورت استقراضی و به قیمت بازار حال حاضر هر سهم ۵۰هزارتومان بفروشد(در نظر داشته باشید او مالک سهام پتروشیمی نیست). کارگزار۱۰۰سهم پتروشیمی را از حساب شخصی که در شرکت کارگزاری، حساب کارگزاری دارد و سهام پتروشیمی را به‌صورت بلند مدت دارد قرض کند. کارگزار ۱۰۰ سهم را باقیمت ۵۰ هزار تومان می‌فروشد و ۵ملیون تومان به حساب اعتباری محمد واریز می‌شود(کارمزد آنقدر کم است که از آن چشم پوشی می‌کنیم).
همان‌طور که محمد پیش‌بینی کرده بود۶ ماه بعد قیمت سهام پتروشیمی کاهش یافت و به هرسهم ۳۸ هزارتومان رسید. محمد از این وضعیت راضی است و به کارگزار خود دستور می‌دهد ۱۰۰ سهم پتروشیمی را خرید کند و به حساب شخصی که قرض گرفته بود برگرداند. سود محمد در این معامله یک ملیون و ۲۰۰ هزارتومان (۵۰۰۰۰ − ۳۸۰۰۰) می‌باشد و معامله فروش استقراضی به پایان می‌رسد. توجه داشته باشید شخصی که از حساب او۱۰۰ سهم پتروشیمی برداشته شده بود از این معامله هیچ اطلاعی نخواهد داشت و تاثیری در وضعیت او ندارد. زیرا این شخص صورت حساب ماهانه‌اش را از کارگزار دریافت می‌کند که نشان دهنده‌ی مالکیت او به‌۱۰۰ سهام است. از طرفی این معاملات ونقل و انتقالات به‌صورت دفتری است و شامل هیچ گواهی سهام واقعی نمی‌شود.

۳.۱ بازده تحقق یافته در مقابل بازده مورد انتظار

تعیین تفاوت میان بازده موردانتظار و بازده تحقق یافته از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این دو بحث در مسائل و مباحث سرمایه‌گذاری به‌طور وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. بازده تحقق یافته، بازده‌ای است که کسب شده است (به‌وقوع پیوسته است).

مثال ۱.۳.۱. ارزش یک سرمایه‌گذاری ۱۰۰ هزار تومان با نرخ بهره‌ی سالانه $۵\frac{۱}{۴}$ درصد در سال

بعد، ۱۰۵.۲۵ هزار تومان خواهد رسید. بازده تحقق یافته یا واقعی سالانه عبارت خواهد بود از $\frac{\text{۵.۲۵تومان}}{\text{۱۰۰تومان}}$ یا ۵.۲۵ درصد است.

۱.۳.۱ اجزای بازده

بازده معمولا از دو جزء تشکیل شده است:

۱. **سود دریافتی:** مهم‌ترین جزء بازده، سودی است که به‌صورت جریانات نقدی در طول دوره‌ی سرمایه‌گذاری بوده و می‌تواند به‌شکل بهره یا سود تقسیمی دریافت شود. این جریانات نقدی با قیمت اوراق‌بهادار نیز در ارتباط است.

۲. **سود(زیان) سرمایه:** دومین جزء مهم بازده، سود(زیان) سرمایه می‌باشد که مخصوص سهام عادی است ولی در مورد سایر اوراق‌بهادار با درآمد ثابت و اوراق قرضه بلند مدت نیز صدق می‌کند. به این جزء که ناشی از افزایش یا کاهش قیمت دارایی می‌باشد سود (زیان) سرمایه گویند. این سود(زیان) سرمایه ناشی از اختلاف بین قیمت خرید و قیمت زمانی است که دارنده‌ی اوراق قصد فروش آن‌را دارد. این اختلاف می‌تواند سود یا زیان باشد.

مجموع این دو جزء، بازده کل اوراق بهادار را تشکیل می‌دهد که برای هر اوراق بهاداری به‌صورت زیر می‌باشد:

کاهش قیمت −افزایش قیمت+ سود دریافتی= بازده کل هر اوراق بهادار (در یک زمان مشخص)

۲.۳.۱ محاسبه بازده مورد انتظار

بازده مورد انتظار عبارت است از میانگین تمامی پیامدهای ممکن بازده که به هر پیامدی با توجه به احتمال وقوع، وزن داده شده است. بازده مورد انتظار برای هر اوراق بهادار به صورت زیر می‌باشد:

$$ER_j = \sum_{j}^{n} X_j P(X_{ij})$$

که در آن

ER_j: بازده مورد انتظار توزیع برای اوراق‌بهادر j

X_j: ارزش پیامد ممکن jام

$P(X_j)$: احتمال پیامد ممکن jام

n: تعداد پیامدهای ممکن

۳.۳.۱ محاسبه بازده کل

محاسبه‌ی صحیح بازده شامل دو جزء بازده یعنی سود دریافتی و تغییرات قیمت آن می‌باشد. که فرمول بازده کل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$TR = \frac{\text{هرگونه دریافت وجه نقد} + \text{تغییرات قیمت در طول دوره}}{\text{قیمت دارایی در زمان خرید}} \tag{۱.۱}$$

تمامی موارد مربوط به معادله (۱.۱) به‌صورت ریالی، تومانی، دلاری و... می‌باشد. تغییرات قیمت در یک دوره مشخص از طریق تفاوت قیمت در زمان خرید و زمان فروش آن سهم تعیین می‌شود و عدد به‌دست آمده از معادله (۱.۱) به‌صورت درصدی بیان می‌شود و نشان‌دهنده‌ی بازده کل آن دارایی است. توجه شود که معادله‌ی کل برای محاسبه بازده کل TR به‌صورت زیر می‌باشد:

$$TR = \frac{CE_t + (P_a - P_b)}{P_b} = \frac{CE_t + PC}{P_b} \tag{۲.۱}$$

که اجزای آن به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:
CE_t: جریانات نقدی در طول دوره‌ی مورد نظر t
P_a: قیمت در پایان دوره t یا قیمت فروش
P_b: قیمت خرید دارایی یا قیمت در شروع دوره
PC: تغییرات قیمت در طول دوره
به‌طور خلاصه، مفهوم بازده کل به‌عنوان معیار بازده، با ارزش می‌باشد. محاسبه بازده کل باعث آسان شدن محاسبه بازده دارایی‌ها در زمان‌هایی مشخص می‌شود.

مثال ۲.۳.۱. همان‌طور که در جدول ۱.۱ مشاهده می‌کنید شاخص ترکیبی ۵۰۰ سهام شرکت استاندارد اندپورز را در سال‌های ۱۹۲۶ تا ۱۹۹۰ نشان می‌دهد. ارقام این جدول مربوط به مقادیر پایان سال می‌باشند و از طریق آن‌ها می‌توان سود و زیان سرمایه را محاسبه کرد. نحوه و چگونگی محاسبه بازده مربوط به هر سال در پایان جدول نشان داده شده است. به‌عنوان مثال بازده کل برای شاخص ترکیبی ۵۰۰ سهم استاندارد در سال ۱۹۸۲، ۲۰.۳۷ درصد بوده در صورتی که بازده کل همین شاخص در سال ۱۹۸۱، ۴.۸۵− درصد بوده است.

بازده نسبی: در بعضی از موارد در انجام برخی از محاسبات نمی‌توان از بازده منفی استفاده کرد. بازده نسبی این مشکل را با افزودن عدد یک به بازده کل برطرف می‌سازد، زیرا درست است که ممکن است این مقدار بازده نسبی کمتر از یک باشد ولی همیشه از صفر بیش‌تر می‌باشد و در نتیجه اعداد منفی در آن وجود نخواهد داشت.
برای محاسبه بازده نسبی از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{بازده نسبی} = \frac{CE_t + P_a}{P_b} \tag{۳.۱}$$

سال	شاخص ارزش	سود سهام	(بازده کل)	سال	شاخص ارزش	سود سهام	(بازده کل)
۱۹۲۶	۱۳.۴۹	۰.۶۹	......				
۱۹۲۷	۱۷.۶۶	۰.۷۷	۳۶.۶۲۰	۱۹۵۷	۳۹.۹۹	۱.۷۹	-۱۰.۴۷۸
۱۹۲۸	۲۴.۳۵	۰.۸۵	۴۲.۶۹۵	۱۹۵۸	۵۵.۲۱	۱.۷۵	۴۲.۴۳۶
۱۹۲۹	۲۱.۴۵	۰.۹۷	-۷.۹۲۶	۱۹۵۹	۵۹.۸۹	۱.۸۳	۱۱.۷۹۱
۱۹۳۰	۱۵.۳۴	۰.۹۸	-۲۳.۹۱۶	۱۹۶۰	۵۸.۱۱	۱.۹۵	۰.۲۸۴
۱۹۳۱	۸.۱۲	۰.۸۲	-۴۱.۷۲۱	۱۹۶۱	۷۱.۵۵	۲.۰۲	۲۶.۶۰۵
۱۹۳۲	۶.۸۹	۰.۵۰	-۸.۶۹۰	۱۹۶۲	۶۳.۱۰	۲.۱۳	-۸.۸۳۳
۱۹۳۳	۱۰.۱۰	۰.۴۴	۵۹.۹۷۵	۱۹۶۳	۷۵.۰۲	۲۲.۲۸	۲.۵۰۴
۱۹۳۴	۹.۵۰	۰.۴۵	-۱.۴۸۵	۱۹۶۴	۸۴.۷۵	۲.۵۰	۱۶.۳۰۲
۱۹۳۵	۱۳.۴۳	۰.۴۷	۴۶.۳۱۶	۱۹۶۵	۹۲.۴۳	۲.۷۲	۱۲.۲۷۱
۱۹۳۶	۱۷.۱۸	۰.۷۲	۳۳.۲۸۴	۱۹۶۶	۸۰.۳۳	۲.۸۷	-۹.۹۸۶
۱۹۳۷	۱۰.۵۵	۰.۸۰	-۳۳.۹۳۵	۱۹۶۷	۹۶.۴۷	۲.۹۲	۲۳.۷۲۷
۱۹۳۸	۱۳.۲۱	۰.۵۱	۳۰.۰۴۷	۱۹۶۸	۱۰۳.۸۶	۳.۰۷	۱۰.۸۴۳
۱۹۳۹	۱۲.۴۹	۰.۶۲	-۰.۷۵۷	۱۹۶۹	۹۲.۶	۳.۱۶	-۸.۳۱۹
۱۹۴۰	۱۰.۵۸	۰.۶۷	-۹.۹۲۸	۱۹۷۰	۹۲.۱۵	۳.۱۴	۳.۵۰۹
۱۹۴۱	۸.۶۹	۰.۷۱	-۱۱.۱۵۳	۱۹۷۱	۱۰۲.۰۹	۳.۰۷	۱۴.۱۱۸
۱۹۴۲	۹.۷۷	۰.۵۹	۱۹.۲۷۱	۱۹۷۲	۱۱۸.۰۵	۳.۱۵	۱۸.۷۱۹
۱۹۴۳	۱۱.۶۷	۰.۶۱	۲۵.۶۹۱	۱۹۷۳	۹۷.۵۵	۳.۳۸	-۱۴.۵۰۲
۱۹۴۴	۱۳.۲۸	۰.۶۴	۱۹.۲۸۰	۱۹۷۴	۶۸.۵۶	۳.۶۰	-۲۶.۰۲۸
۱۹.۴۵	۱۷.۳۶	۰.۶۶	۳۵.۶۹۳	۱۹۷۵	۹۰.۱۹	۳.۶۸	۳۶.۹۱۷
۱۹۴۶	۱۵.۳۰	۰.۷۱	-۷.۷۷۶	۱۹۷۶	۱۰۷.۴۶	۴.۰۵	۲۳.۶۳۹
۱۹۴۷	۱۵.۳۰	۰.۸۴	۵.۴۹۰	۱۹۷۷	۹۵.۱۰	۴.۶۷	-۷.۱۶۵
۱۹۴۸	۱۵.۲۰	۰.۹۳	۵.۴۲۵	۱۹۷۸	۹۶.۱۱	۵.۰۷	۶.۳۹۳
۱۹۴۹	۱۶.۷۶	۱.۱۴	۱۷.۶۳	۱۹۷۹	۱۰۷.۹۴	۵.۷۰	۱۸.۲۴۰
۱۹۵۰	۲۰.۴۱	۱.۴۷	۳۰.۵۴۹	۱۹۸۰	۱۳۵.۶۷	۶.۱۶	۳۱.۴۸۰
۱۹۵۱	۲۶.۷۷	۱۰۴۱	۲۳.۳۷۱	۱۹۸۱	۱۲۲.۵۵	۶.۶۳	-۴.۸۴۷
۱۹۵۲	۲۶.۷۷	۱.۴۱	۱۷.۷۱۱	۱۹۸۲	۱۴۰.۶۴	۶.۸۷	۲۰.۳۶۷
۱۹۵۳	۲۴.۸۱	۱۴۵	-۱.۱۶۷	۱۹۸۳	۱۶۴.۹۳	۷.۰۹	۲۲.۳۱۲
۱۹۵۴	۳۵.۹۸	۱.۵۴	۵۱.۲۲۹	۱۹۸۴	۱۶۷.۲۴	۷.۵۳	۵.۹۶۶
۱۹۵۵	۴۵.۴۸	۱.۶۴	۳۰.۹۶۲	۱۹۸۵	۲۱۱.۲۸	۷.۹۰	۳۱.۰۵۷
۱۹۵۶	۴۶.۶۷	۱.۷۴	۶.۴۴	۱۹۸۶	۲۴۲.۱۷	۸.۲۸	۱۸.۵۳۹
				۱۹۸۷	۲۴۷.۰۸	۸.۸۱	۵.۶۶۵
				۱۹۸۸	۲۷۷.۷۲	۹.۷۳	۱۶.۳۳۹
				۱۹۸۹	۳۵۳.۴۰	۱۱.۰۵	۳۱.۲۲۹
				۱۹۹۰	۳۳۰.۲۲	۱۲.۱۰	-۳.۱۳۵

جدول ۱.۱: شاخص ترکیبی ۵۰۰ سهام استاندارد در سال‌های ۱۹۲۶ تا ۱۹۹۰

همان‌طور که مشاهده می‌شود تفاوت بازده نسبی با بازده کل، در صورت کسر بازده کلی، به جای استفاده از تغییر قیمتی، مستقیماً از قیمت پایان دوره استفاده شده است.

مثال ۱.۳.۳. فرض کنید ۱۰۰ سهم یک شرکت به قیمت هرسهم ۴۰ دلار خریداری شده و یک سال بعد به قیمت هر سهم ۲۸ دلار فروخته شده است. سود تقسیمی هر سهم نیز ۳ دلار می‌باشد. بازده نسبی و بازده کل را بیابید؟

$$\text{بازده نسبی} = \frac{۳ + ۲۸}{۴۰} = ۰.۷۷۵$$

$$\text{بازده کل} = ۰.۷۷۵ - ۱ = -۰.۲۲۵$$

چند نمونه از محاسبه‌ی بازده‌ها را در زیر بیان میکنیم:

۱. بازده کل اوراق قرضه

$$\text{بازده} = \frac{N_t + (P_a - P_b)}{P_b} = \frac{N_t + P_c}{P_b}$$

N_t: پرداخت‌های بهره دریافتی در طول دوره

P_aوP_b: قیمت‌های اول و آخر دوره

P_c: تغییر قیمت در طول دوره

مثال ۱.۳.۴. : فرض کنید اوراق قرضه‌ای با بهره ۱۰ درصد و با قیمت ۹۶۰ دلار خریداری کرده و یک سال بعد آن را به قیمت ۱۰۱۰ دلار می‌فروشید. بازده کل اوراق قرضه و بازده نسبی را بیابید؟

$$\text{بازده کل اوراق قرضه} = \frac{۱۰۰ + (۱۰۱۰ - ۹۶۰)}{۹۶۰} = ۰.۱۵۶۲۵$$

$$\text{بازده نسبی} = \frac{۱۰۰ + ۱۰۱۰}{۹۶۰} = ۱.۱۵۶۲۵$$

۲. بازده کل سهام

$$\text{بازده} = \frac{G_t + (P_a - P_b)}{P_b} = \frac{G_t + P_c}{P_b}$$

G_t: سودهای تقسیمی دریافتی در طول دوره

مثال ۱.۳.۵. ۲۰۰ سهم شرکتی به قیمت ۷۳۰ خریداری شده و ۱۲ ماه بعد به قیمت هر سهم ۶۹۰ فروخته شده است. سود تقسیمی هر سهم ۲۵ می‌باشد. بازده کل سهام و بازده نسبی مسئله را بیابید؟

$$\text{بازده کل سهام} = \frac{۲۵ + (۶۹۰ - ۷۳۰)}{۷۳۰} = -۰.۰۲۰۵۴۷۹۴$$

$$\text{بازده نسبی} = \frac{۲۵ + ۶۹۰}{۷۳۰} = ۰.۹۷۹۴۵۲۰۵$$

نکته ۱. برای تبدیل بازده نسبی به بازده کل، یک واحد از آن کم می‌کنیم، و برعکس برای تبدیل بازده کل به بازده نسبی یک واحد به آن اضافه می‌کنیم.

سال	بازده کل ۵۰۰ سهم استاندارد اند پورز	بازده نسبی شاخص ۵۰۰ سهم استاندارد اند پورز
۲۰۰۰	۸.۵۱	۱.۰۹۵۱
۲۰۰۱	۱۶.۱۲	۱.۱۷۱۲
۲۰۰۲	۱۹.۷۲	۱.۱۴۷۲
۲۰۰۳	−۱۲.۵۰	۰.۷۵۵۰
۲۰۰۴	−۲۳.۰۳	۰.۵۲۹۷
۲۰۰۵	۳۰.۹۲	۱.۸۶۹۲
۲۰۰۶	۲۹.۶۴	۱.۵۳۶۴
۲۰۰۷	−۷.۱۷	۰.۸۲۸۳
۲۰۰۸	۶.۳۹	۱.۰۶۳۹
۲۰۰۹	۱۸.۲۴	۱.۱۸۲۴

جدول ۲.۱: محاسبه میانگین حسابی برای سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۹

۴.۳.۱ میانگین حسابی

یکی از مشهورترین فرمول‌های آماری، میانگین حسابی می‌باشد. برای همین دلیل در اکثر موارد تا حرفی از میانگین می‌شود اولین چیزی که به ذهن افراد می‌رسد میانگین حسابی می‌باشد به جز در مواردی که مشخص شود که منظور کدام میانگین می‌باشد. میانگین حسابی معمولا با علامت $\bar{X}$ نمایش داده می‌شود و فرمول آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i)}{n}$$

که معادل است با مجموع تمام مقادیر مورد بررسی تقسیم بر تعداد کل مقادیر

مثال ۶.۳.۱. با استفاده از داده‌های داده شده در جدول ۲.۱، میانگین حسابی مربوط به سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۹ را محاسبه نمایید؟

$$\bar{X} = \frac{۸.۵۱ + ۱۶.۱۲ + ۱۹.۷۲ + \cdots + ۱۸.۲۴}{۱۰} = ۸.۶۸۴$$

۵.۳.۱ انحراف معیار

ریسک توزیع را می‌توان با یک معیار پراکندگی نشان داد. متداول‌ترین معیار پراکندگی در طول چند دوره، انحراف معیار نام دارد. انحراف معیار عبارت است از:
اندازه‌گیری ریسک کلی یک دارایی با یک پرتفولیو است.
انحراف معیار را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنند:

$$\text{انحراف معیار} = S = [\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}]^{\frac{1}{2}}, i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۴.۱)$$

که در آن داریم:
X: هر یک از مشاهدات در نمونه
$\bar{X}$: میانگین مشاهدات
n: تعداد بازده‌ها در نمونه
توجه داشته باشید با دانستن بازده از نمونه‌ها، انحراف معیار را به‌راحتی می‌توان محاسبه نمود. به‌طور خلاصه می‌توان گفت انحراف معیار بازده، ریسک کلی یک اوراق‌بهادار یا ریسک کلی اوراق‌بهادار یک سبدسهام را اندازه‌گیری می‌کند. انحراف معیار نشان‌دهنده اطلاعات مفیدی در خصوص پراکندگی یا تغییرپذیری بازده است. در توزیع نرمال می‌توان بازده خاصی را که بالاتر یا پایین‌تر از مقدار مشخص است تعیین نمود.

۶.۳.۱ کواریانس

کواریانس معیار مطلق میزان ارتباط میان بازده‌های هر جفت از اوراق‌بهادار است و میزان تغییرات دو سهم در طول زمان را نشان می‌دهد.
در مورد کوواریانس سه حالت ممکن است رخ دهد:

۱. حالت مثبت، که در این حالت بازده‌های دو اوراق‌بهادار هم‌زمان در یک جهت حرکت می‌کنند.

۲. حالت منفی، که در این حالت بازده‌های دو اوراق‌بهادار به‌صورت معکوس عمل می‌کنند.

۳. حالت صفر، که در این حالت بازده‌های دو اوراق‌بهادار کاملاً مستقل از هم عمل می‌کنند.

کواریانس اوراق‌بهادار i و j طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{ij} = cov(R_i, R_j) = E\left[(R_i - r_i)(R_j - r_j)\right] \quad (۵.۱)$$

که در آن: R_i و R_j متغیرهای تصادفی نشان دهنده‌ی سهم‌های i و j هستند. همچنین r_i و r_j بازده مورد انتظار سهم‌های i و j می‌باشند.
با توجه به نرخ بازگشت سرمایه سهم‌های i و j، کوواریانس از رابطه زیر نیز به‌دست خواهد آمد:

$$\sigma_{ij} = \frac{۱}{T}\sum_{t=۱}^{T}(r_{it} - r_i)(r_{jt} - r_j). \quad (۶.۱)$$

۴.۱ گشتاور

rـامین گشتاور حول مبدأ متغیر تصادفی X که با μ_r' نشان داده می‌شود. امید ریاضی X^r است. به صورت نمادی برای $r = ۰, ۱, ...$،

وقتی X گسسته است:

$$\mu_r' = E(X^r) = \sum_x x^r f(x)$$

وقتی X پیوسته است:

$$\mu_r' = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) \mathrm{d}x$$

تعریف ۱.۴.۱. μ_1'، میانگین توزیع X، یا صرفاً میانگین X نامیده می‌شود. و آن‌را با μ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۴.۱. گشتاور rـام حول میانگین متغیر تصادفی X، که آن‌را با μ_r نشان می‌دهیم، مقدار امید $(X-\mu)^r$ است. به‌صورت نمادی برای $r = 0, 1, \dots$، وقتی X گسسته است:

$$\mu_r = [(X-\mu)^r] = \sum_x (x-\mu)^r f(x)$$

وقتی X پیوسته است:

$$\mu_r = [(X-\mu)^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x) \mathrm{d}x$$

توجه شود که برای متغیر تصادفی که با μ برای آن وجود دارد $\mu_0 = 1$ و $\mu_1 = 0$ است. دومین گشتاور حول میانگین در آمار اهمیت خاصی دارد زیرا نشان دهنده‌ی پراکندگی توزیع متغیر تصادفی است لذا به آن نماد خاص و نماد خاصی داده شده است.

تعریف ۳.۴.۱. μ_2 را واریانس توزیع X، یا صرفاً واریانس X نامند و با δ^2، $Var(X)$ یا $V(X)$ نشان می‌دهند، δ ریشه دوم مثبت واریانس را انحراف معیار می‌نامند.

۱.۴.۱ تابع مولد گشتاور

گرچه گشتاور بیش‌تر توزیع‌ها را می‌توان مستقیماً با محاسبه انتگرال‌ها یا مجموعه‌های لازم معین کرد. ولی شیوه‌ی دیگری نیز وجود دارد که اغلب تسهیلات قابل ملاحظه‌ای را در اختیار می‌گذارد.
در این شیوه، از تابع مولد گشتاورها استفاده می‌شود.

تعریف ۴.۴.۱. تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X در صورت وجود عبارت است از:
وقتی X گسسته باشد:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tX} f(x)$$

وقتی X پیوسته باشد:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} f(x) \mathrm{d}x$$

مثال ۱.۴.۱. اگر $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$، مطلوب است $M_X(t)$.

حل ۱.۴.۱.

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{tx} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda - t)} e^{tx} \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad t < \lambda$$

مثال ۲.۴.۱. تابع مولد گشتاور را برای $x = 0, 1, \ldots$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

بیابید؟

حل ۲.۴.۱.

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x e^{tx}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

چون

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \ldots, \frac{t^r x^r}{r!} + \ldots$$

برای حالت گسسته

$$\begin{aligned} M_X(t) =& \sum_{x=0}^{\infty} [1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \ldots, \frac{t^r x^r}{r!} + \ldots] f(x) \\ =& \sum_{x=0}^{\infty} f(x) + t \sum x f(x) + \frac{t^2}{2!} \sum x^2 f(x) + \cdots + \frac{x^r}{r!} \sum x^r f(x) + \ldots \\ =& 1 + \mu t + \mu_2' \frac{t^2}{2!} + \cdots + \mu_r' \frac{t^r}{r!} \end{aligned}$$

۵.۱ چولگی

ضریب چولگی[۷]: عددی است که میزان عدم تقارن شکل داده‌ها را نشان می‌دهد. فرمول‌های زیادی برای محاسبه پیشنهاد شده که بسته به اطلاعات مسأله می‌توان از یکی از آن‌ها استفاده کرد.

۱. فرمول اول یا بهترین فرمول:

$$SK = \frac{r_3}{s^3}$$

که در آن r_3 گشتاور مرتبه سوم حول میانگین نامیده و به‌صورت $r_3 = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^3}{n}$ تعریف می‌کنیم S همان انحراف معیار است که در مخرج به توان ۳ رسیده است.

[۷] Skewness Coefficient

۲. فرمول اول پیرسن[۸]

$$SK_۱ = \frac{\bar{x} - M}{S}$$

که در آن ($M =$ مد) است.

۳. فرمول دوم پیرسن

$$SK_۲ = \frac{۳(\bar{x} - Md)}{S}$$

که در آن ($Md =$ میانه) است.

مثال ۱.۵.۱. در مثال زیر که قد ۱۰ جوان ۲۰ ساله است ضریب چولگی را بیابید؟

$$۱۷۱, ۱۶۷, ۱۷۹, ۱۷۰, ۱۶۹, ۱۷۳, ۱۶۶, ۱۸۵, ۱۶۹, ۱۷۲$$

$$\bar{X} = \frac{۱۷۲۱}{۱۰} = ۱۷۲/۱$$

$$S^۲ = \frac{(۱۷۱ - ۱۷۲/۱)^۲ + (۱۶۷ - ۱۷۲/۱)^۲ + (۱۷۹ - ۱۷۲/۱)^۲ + (۱۷۰ - ۱۷۲/۱)^۲}{۱۰}$$
$$+ \frac{(۱۶۶ - ۱۷۲.۱)^۲ + (۱۸۵ - ۱۷۲.۱)^۲ + (۱۶۹ - ۱۷۲.۱)^۲ + (۱۶۹ - ۱۷۲/۱)۲ + (۱۷۳ - ۱۷۲/۱)^۲}{۱۰}$$
$$= \frac{۳۰۳/۰۲۱}{۱۰} = ۳۰.۳۰۲۱$$

$M = ۱۶۹$ و $Md = ۱۷۰.۵$ لذا داریم:

$$\frac{(\bar{X} - M)}{S} = ۰.۵۶۳۱$$

تغیر ضریب چولگی: اگر ضریب چولگی نزدیک صفر باشد حدوداً $|SK| < ۰.۱$ در این صورت داده‌ها تقریباً زنگی شکل (نرمال) هستند ((۱.۱(ب)) . اگر $۰.۱ < |SK| < ۰.۵$ شکل داده‌ها با نرمال تفاوت فاخشی ندارد و اگر $|SK| > ۰.۵$ شکل داده‌ها تفاوت زیادی با شکل نرمال دارد . به‌طور کلی اگر SK منفی باشد داده‌ها چوله به چپ ((۱.۱(ج)) و اگر مثبت باشد داده‌ها چوله به راست ((۱.۱(آ)) هستند.

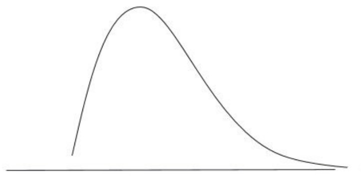
۶.۱ ریسک

براساس تعاریف مختلف ریسک، دو نظریه متفاوت برای سبدسهام وجود دارد که به بیان آن‌ها می‌پردازیم:

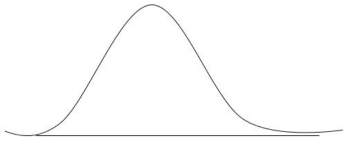
۱. نظریه مدرن

۲. نظریه فرامدرن

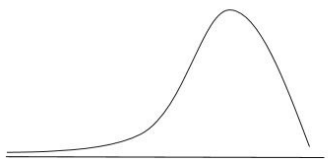
[۸] Pearson



(آ) چوله به راست



(ب) نرمال



(ج) چوله به چپ

نظریه مدرن سبد سهام: اختصاص بهینه دارایی‌ها بر اساس بهینه‌سازی مبتنی بر میانگین و واریانس صورت می‌پذیرد که این تئوری در مدل مارکویتز ظاهر می‌شود و تنها برای توزیع‌های دو پارامتری نرمال امکان‌پذیر می‌باشد.

نظریه فرامدرن سبدسهام: اختصاص بهینه دارایی‌ها براساس رابطه بازده و ریسک نامطلوب انجام می‌گیرد. یعنی ریسکی که باید با اهداف سرمایه‌گذاری مرتبط باشد را شناسایی کرده و هر نتیجه‌ای بالاتر و بهتر از این هدف را به‌عنوان ریسک درنظر نمی‌گیرد این نظریه طبقه وسیعی از توزیع‌ها شامل توزیع‌های غیر نرمال را مورد استفاده قرار می‌دهد.

کل ریسک بازار را می‌توان به دو دسته کلی ریسک سیستماتیک و ریسک غیر سیستماتیک تقسیم نمود.

ریسک سیستماتیک ناشی از تحولات کلی بازار و اقتصاد بوده و تنها مختص به شرکت خاصی نمی‌باشد به بیان دیگر ریسک سیستماتیک در اثر حرکت‌های کلی بازار به وجود می‌آید. در این ریسک، تغییرپذیری در بازده کل اوراق‌بهادار مستقیما با تغییرات کلی در بازار یا اقتصاد عمومی مرتبط است. ریسک غیر سیستماتیک ریسکی است که ناشی از خصوصیات خاص شرکت از جمله نوع محصول ساختار سرمایه سهام‌داران عمده و غیره می‌باشد. این نوع ریسک منحصربه اوراق‌بهادار خاصی است و به تغییرپذیری کل بازار ارتباطی ندارد. با تشکیل سبدسهام،سرمایه‌گذاران می‌توانند ریسک غیرسیستماتیک را کاهش دهند. اما ریسک سیستماتیک غیر قابل کاهش است و اگر بازار سهام دچار افت شود بیش‌تر سهم‌ها را تحت تاثیر قرار می‌دهد و برعکس. در واقع، هرچه تنوع در سهام بیش‌تر باشد میزان ریسک غیر سیستماتیک کوچک و کوچک‌تر می‌شود و ریسک کل سبد سهام به ریسک سیستماتیک نزدیک‌تر می‌شود. توجه شود برای این‌که کاهش ریسک در سبد سهام داشته باشید باید به‌جای تنوع سازی ساده و یا

تصادفی از تنوع سازی کارا (یعنی علاوه بر ریسک تک تک سهام‌ها به همبستگی میان سهام‌ها نیز توجه داشته باشیم) استفاده کنیم.
توجه شود ریسک کل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

ریسک غیر سیستیماتیک + ریسک سیستیماتیک = ریسک کل

در جدول ۳.۱ به انواع ریسک‌ها و دلایل آن به‌صورت خلاصه می‌پردازیم:

نوع ریسک	دلایل(منابع) ایجاد آن
ریسک نرخ بهره	احتمال اختلاف نرخ بازده ناشی از ریسک نرخ بهره
ریسک تغیر نرخ ارز	احتمال تغییر در نرخ بازده ناشی از تغییر پول ملی یک کشور نسبت به پول خارجی
ریسک تورم	نشات گرفته از تغییرات در قیمت‌ها می‌باشد.
ریسک سیاسی	تغییرات سیاسی، قوانین متنوع واردات و صادرات در کشور (نام دیگر این ریسک ریسک کشوری می‌باشد).
ریسک نقدینگی	احتمال انحراف از بازده مورد انتظار به‌علت عملی نشدن تعهدات به دلیل کمبود نقدینگی
ریسک قوانین و مقررات	ریسکی است که به‌دلیل عدم وجود ثبات در قوانین و مقررات به‌وجود می‌آید.
ریسک نقد شوندگی	این ریسک زمانی صورت می‌گیرد که دارایی‌های مالی ما به نقدینگی تبدیل نشوند.

جدول ۳.۱: انواع ریسک‌ها

هفت نکته برای کاهش ریسک

معامله در هر بازاری اعم از ملک، طلا، ارز و...با ریسک‌های متفاوتی همراه است. هر فرد تمایل دارد در بخشی سرمایه‌گذاری کند که امکان مدیریت ریسک معاملات در آن وجود داشته باشد، تا با دید منطقی بتواند ریسک خود را به حداقل رسانده و با خیالی آسوده‌تر اقدام به سرمایه‌گذاری کند. بورس اوراق‌بهادار یکی از بازارهایی است که به دلیل امکان مدیریت زیان‌های احتمالی و برآورد علمی بازده، تمایل به سرمایه گذاری در آن، در سال‌های اخیر توانسته توجه سرمایه‌گذاران بسیاری را به خود جلب کند. قبل از آن‌که نکات لازم را در مورد بورس بیان کنیم باید به این نکته همیشه توجه کنیم که: ”همواره پول مازاد خود را به سرمایه‌گذاری اختصاص دهیم“.
برای کاهش ریسک نکات زیادی وجود دارد که ما در زیر به هفت نکته اشاره می‌کنیم:

۱. **شناسایی و کنترل ریسک**

۲. **احتمال محقق نشدن پیش‌بینی‌ها**

۳. **مطالعه و تحقیق دقیق و درست قبل از خرید سهام**

۴. **فریب نوسانات روزانه و کوتاه مدت را نخوریم (سریع تصمیم‌گیری نکنیم)**

۵. **خرید و فروش به‌موقع**

۶. **نگاه به جریان اقتصادی کشور**

۷. **تشکیل سبدسهام**

۷.۱ فرمول‌سازی یک مسئله چندهدفه

مسائل بهینه‌سازی چندهدفه و مسائل برنامه‌ریزی ریاضی با تابع هدف برداری که معمولاً توسط $f(x) = (f_۱(x), f_۲(x), \dots, f_n(x))^T$ برای یک بردار تصمیم $x = (x_۱, x_۲, \dots, x_N)^T$ نشان داده می‌شود که در آن $f_j(x)$ یک تابع حقیقی‑ مقدار تعریف شده روی $S \subset \mathbb{R}^N$ برای هر $j = ۱, ۲, \dots, n$ می‌باشد. بنابراین فضای تصمیم به $\mathbb{R}^N$ متعلق است درحالی‌که فضای معیار به $\mathbb{R}^n$ تعلق دارد، ومسئله بهینه‌سازی چندهدفه را به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\text{بهینه‌سازی} \quad \{f_۱(x), f_۲(x), \dots, f_n(x)\}$$
$$s.t. \quad x \in S.$$

تعریف ۱.۷.۱. مسئله $\min(f_۱(x), f_۲(x), \dots, f_n(x))$ را درنظر بگیرید:
نقطه $\hat{x} \in R^n$ را یک نقطه کارا یا **نقطه پارتو**[۹] گویند، هرگاه هیچ $x \in X$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $f(x) \leq f(\hat{x})$، یا به عبارت دیگر هیچ $x \in X$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که

$$f_i(x) \leq f_i(\hat{x}) \qquad \forall i = ۱, ۲, \dots, n$$

و برای حداقل یک $k \in \{۱, ۲, \dots, n\}$، $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ مجموعه نقاط کارا را با X_E نشان می‌دهند.

[۹] Pareto points

تعریف ۲.۷.۱. نقطه $Y^l = (Y_1^l, Y_2^l, \dots, Y_n^l)$ **ایده‌آل**[۱۰] نامیده می‌شود، هرگاه

$$Y_k^l = \min_{x\in X} f_k(x) = \min_{y\in Y} Y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

نکته ۲. اگر Y به‌صورت مستطیل یا مربع باشد گوشه سمت چپ پایین نقطه ایده‌آل است. در اکثر مواقع پیدا کردن نقطه ایده‌آل با حل n مسئله به‌دست می‌آید.

تعریف ۳.۷.۱. **نقطه ندیر**[۱۱] که با $Y^N = (Y_1^l, Y_2^l, \dots, Y_n^l)$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y_k^N = \max_{x\in X_E} f_k(x) = \max_{y\in Y_N} Y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

نقطه ندیر یک نقطه اوج نیز نامیده می‌شود.
استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی (EMO) برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه در دو دهه‌ی اخیر بسیار رایج شده است و در حال حاضر یکی از زمینه‌های تحقیقاتی را ایجاد می‌کند.

۸.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه مجموعه‌های فازی

فازی درمورد شدت وقوع یک چیز صحبت می‌کند و در لغت به‌معنای مبهم و نادقیق می‌باشد. نظریه مجموعه‌های فازی در شرایط عدم اطمینان مورد استفاده قرار می‌گیرد و می‌تواند بسیاری از مفاهیم و متغیرهای نادقیق را به‌صورت ریاضی مدل‌سازی کند. برای درک بهتره مفهوم فازی دو مثال را بیان می‌کنیم:

مثال ۱.۸.۱. مجموعه اعداد اول تک رقمی را درنظر بگیرید:

$$A = (2, 3, 5, 7)$$

به‌وضوح می‌توان دید که $3 \in A$ و $5 \in A$ است ولی $4 \notin A$ نمی‌باشد. این مجموعه یا هر مجموعه دلخواه دیگر دارای یک ویژگی مشخص می‌باشند. در واقع معیار عضویت هر عنصر در مجموعه، همین ویژگی مشخص می‌باشد. اگر عنصری دارای این ویژگی باشد عضو مجموعه می‌باشد و در غیر این صورت عضو آن مجموعه نمی‌باشد. حال اگر ویژگی‌های بزرگ‌تری را مد نظر بگیریم دیگر نمی‌توان از این مثال استفاده کرد.

مثال ۲.۸.۱. فرض کنید می‌خواهیم مجموعه افراد چاق را از افراد لاغر متمایز کنیم. به‌صورت قطعی اگر چاق بودن را به‌عنوان نمونه ۱۰۰ کیلوگرم درنظر بگیریم، فردی که وزن آن ۹۹ یا ۹۸

[۱۰] Ideal
[۱۱] Nadir points

کیلوگرم باشد جزء افراد چاق محسوب نمی‌شود ولی طبق تئوری مجموعه‌های فازی، تفاوت فاحشی بین فرد ۱۰۰ کیلوگرم با افراد ۹۹ و ۹۸ کیلوگرم موجود ندارد.

مثال‌های فراوانی مانند نوع هوا (گرمی، سردی، خیلی سرد و...) ، حقوق بالا و ...وجود دارد که نمی‌توان آن‌را به‌صورت قطعی بیان کرد که هیچ کمیت خاصی برای اندازه‌گیری آن مطرح نیست و هر فرد با توجه به معیارها و فاکتورهای مختلف آنرا تعریف و ارزش‌گذاری می‌کند. مجموعه‌های فازی ابزارهای مناسبی برای بیان این‌گونه مفاهیم هستند. در این قسمت ما برخی از مفاهیم و تعاریف اولیه مجموعه‌های فازی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۸.۱. اگر A زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع X باشد تابع مشخصه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

حال اگر برد تابع مشخصه را از مجموعه دو عضوی $\{۰,۱\}$ به بازه‌ی $[۰,۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر $x \in X$ عددی از $[۰,۱]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامند و با $\mu_A(x)$ نشان می‌دهند. این عدد بیانگر درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A است. به‌طورکلی **مجموعه‌ی فازی**[۱۲] توسط یک زوج مرتب به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

تعریف ۲.۸.۱. اگر $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی و A یک بازه کران‌دار در $\mathbb{R}$ باشد، **عدد بازه‌ای** a به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a = [\underline{a}, \bar{a}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}$$

که در آن $\underline{a}$ کران پایین یا اینفیمم a، و $\bar{a}$ کران بالا یا سوپریمم a نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۸.۱. دو مجموعه فازی را با هم برابر گویند هرگاه تابع عضویت آن‌ها در تمام نقاط مرجع با هم برابر باشند. به‌عبارت دیگر

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

تعریف ۴.۸.۱. مجموعه **تکیه‌گاه یا پشتیبان** که با نماد $S(A)$ نشان داده می‌شود، مجموعه عناصری از A است که درجه عضویت آن‌ها بزرگ‌تر از صفر باشد:

$$S(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > ۰\}$$

[۱۲] Fuzzy set

تعریف ۵.۸.۱. **ارتفاع** مجموعه فازی به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$height(A) = \max_{x \in X} \mu_A(x)$$

تعریف ۶.۸.۱. اگر درجه عضویت حداقل یکی از اعضای مجموعه فازی مانند x_i برابر یک باشد به آن مجموعه، **مجموعه نرمال** گویند به‌عبارت دیگر اگر $\{\exists x \in X : \mu_A(X) = ۱\}$ آن‌گاه A را مجموعه نرمال گویند. اگر $height(A) < ۱$ باشد A را غیر نرمال گوییم.

تعریف ۷.۸.۱. **نقطه تقاطع یا گذر** یک مجموعه فازی نقطه‌ای است که مقدار تابع عضویت آن برابر نیم باشد.

تعریف ۸.۸.۱. مجموعه αـ**برش** که با a_α یا A_α نمایش می‌دهند به‌صورت زیر بیان می‌شود:

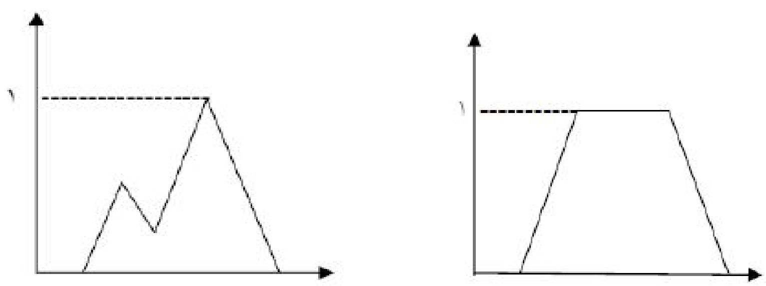
$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

همچنین αـ برش قوی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) > \alpha\}$$

تعریف ۹.۸.۱. مجموعه فازی A را **محدب**[۱۳] گویند هرگاه همه‌ی مجموعه αـ برش‌های آن از نظر کلاسیک محدب باشند به‌عبارت دیگر یک مجموعه فازی محدب است اگر نمودار تابع عضویت آن تنها یک قله داشته باشد.

در شکل ۱.۱ محدب و غیر محدب بودن یک مجموعه فازی نمایش داده شده است.



شکل ۱.۱: مجموعه‌های فازی محدب (سمت راست) و غیر محدب (سمت چپ)

تعریف ۱۰.۸.۱. عدد فازی A یک مجموعه‌ی فازی نرمال محدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ است به‌طوری که

۱. حداقل یک $x_\circ \in \mathbb{R}$ باشد که $\mu_A(x_\circ) = ۱$

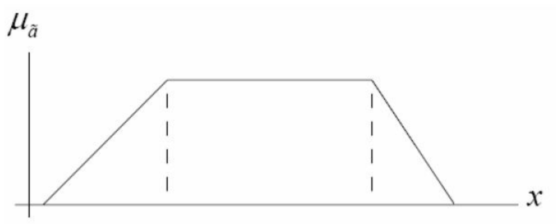
[۱۳] Convex

۲. $\mu_A(x)$ قطعه قطعه پیوسته باشد.

در عمل هر عدد فازی به‌وسیله‌ی تابع عضویت آن تعیین می‌شود حال فرض کنید تابع عضویت یک عدد فازی A به‌صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^L - x}{\alpha} & a^L - \alpha \leq x \leq a^L \\ 1 & a^L \leq x \leq a^U \\ 1 - \frac{x - a_U}{\beta} & a^U \leq x \leq a^U + \beta \\ 0 & o.w. \end{cases} \tag{۷.۱}$$

هر عدد فازی با تابع عضویت (۷.۱)، که در شکل (۲.۱) نشان داده شده است، یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است.



شکل ۲.۱: عدد فازی ذوزنقه‌ای

هر عدد فازی ذوزنقه‌ای را با $A = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۸.۱. عدد فازی مثلثی A روی $\mathbb{R}$ به‌صورت $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ نشان داده و تابع عضویت آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x \leq \beta, \\ \frac{x-\beta}{\alpha-\beta} & if \quad \beta < x < \alpha, \\ 1 & if \quad x = \alpha, \\ \frac{\gamma - x}{\gamma - \alpha} & if \quad \alpha < x < \gamma, \\ 0 & if \quad x \geq \gamma \end{cases} \tag{۸.۱}$$

تعریف ۱۲.۸.۱. توابع $L, R : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ **توابع مرجع**[۱۴] عدد فازی $\widetilde{A} = (X, \mu_{\widetilde{A}}(x))$ هستند اگر در شرایط زیر صدق کنند:

[۱۴] reference functions

۱. $L(1) = R(1) = 0, L(0) = R(0) = 1$،

۲. $L(x)$ و $R(x)$ توابعی اکیدا نزولی و نیمه پیوسته بالایی باشند.

تعریف ۱۳.۸.۱. یک عدد فازی را عدد فازی LR گوییم و با $\widetilde{P}_X = (p_l, p_u, c, d)_{L_\pi R_\rho}$ نشان داده می‌شود، اگر تابع عضویت آن به‌صورت زیر باشد:

$$\mu_{\widetilde{P}_X}(x) = \begin{cases} L_\pi(\frac{p_l - x}{c}), & p_l - c \leq x \leq p_l \\ 1, & p_l \leq x \leq p_u \\ R_\rho(\frac{x - p_u}{d}), & p_u \leq x \leq p_u + c \\ 0, & o.w. \end{cases} \tag{9.1}$$

که در آن c و d به‌ترتیب گسترده چپ و راست می‌باشند و L_π و R_ρ توابع مرجع است که به‌ترتیب شکل‌های راست و چپ $\widetilde{P}_X$ را تعریف می‌کنند.

نکته ۳. یکی از روش‌ها برای مقایسه دو عدد فازی، روش میانگین توسط لی می‌باشد که مبتنی‌بر انحراف معیار و میانگین است. در مقایسه دو عدد فازی هر کدام که میانگین بزرگ‌تری داشته باشد بزرگ‌تر است و در صورتی که میانگین‌ها با هم برابر باشند هر کدام که انحراف معیار کم‌تری داشته باشد بزرگ‌تر می‌باشد.

برای عدد مثلثی $A = (m.\alpha, \beta)$ میانگین و انحراف معیار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{میانگین} = \frac{m + \alpha + \beta}{3}$$

$$\text{انحراف معیار} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + m^2 - m\beta - m\alpha - \alpha\beta)}{18}$$

مثال ۳.۸.۱. دو عدد $A = (2, 3, 5)$ و $B = (2, 4, 4)$ را با هم مقایسه کنید:

$$A\text{میانگین} = \frac{5 + 3 + 2}{3} \simeq 3.3$$

$$B\text{میانگین} = \frac{4 + 2 + 4}{3} \simeq 3.3$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید میانگین A و B با هم برابرند پس نمی‌توان عدد فازی آن‌را مقایسه کرد. پس انحراف معیار آن‌ها را محاسبه کرده تا بتوان این دو را باهم مقایسه کرد حال داریم:

$$A \text{ انحراف معیار} = \frac{(25 + 9 + 4 - 6 - 10 - 15)}{18} \simeq 0.39$$

$$B \text{ انحراف معیار} = \frac{(4 + 16 + 16 - 8 - 8 - 16)}{18} \simeq 0.22$$

در نتیجه $A < B$.

فصل ۲

مدل مارکوویتز و تعمیم‌های آن

۱.۲ مقدمه

در سال ۱۹۵۰ مارکوویتز [۱] مدل اساسی پرتفولیو را ارائه کرد که مبنایی برای تئوری مدرن پرتفولیو گردید. قبل از او سرمایه‌گذاران با مفاهیم ریسک و بازده آشنا بودند. اگرچه آن‌ها با مفهوم ریسک آشنا بودند ولی معمولاً نمی‌توانستند آنرا اندازه‌گیری کنند. با این حال مارکوویتز اولین نفری بود که مفهوم پرتفولیو (سبدسهام) و ایجاد تنوع را به‌صورت روش رسمی بیان نمود. او به‌صورت کمی نشان داد که چرا و چگونه تنوع‌سازی سبدسهام باعث کاهش ریسک سبدسهام یک سرمایه‌گذار می‌شود.

مارکوویتز بر این تلاش بود تا روش‌ها و ایده‌های موجود را در یک چارچوب رسمی سازماندهی کند و به این سوال پاسخ دهد، آیا ریسک پرتفولیو با مجموع ریسک اوراق بهادار منفرد که روی هم پرتفولیو را تشکیل می‌دهند برابر است؟ او با ارائه روش اندازه‌گیری ریسک پرتفولیو به محاسبه ریسک و بازده موردانتظار پرتفولیو پرداخت. مدل او بر مبنای بازده موردانتظار و ویژگی‌های ریسک اوراق‌بهادار می‌باشد که چارچوب تئوری برای تجزیه و تحلیل گزینه‌های ریسک و بازده است. او همچنین مفهوم سبدسهام کارا را مطرح کرد. سبدسهام کارا بدان معناست که در ازای نرخ بازده‌ی معین، ریسک سبدسهام را به حداقل برسانیم. سرمایه‌گذاران با مشخص کردن نرخ بازده مورد انتظار سبدسهام و حداقل کردن ریسک سبدسهام در این

[۱] Markowitz

سطح بازده، سبدسهام کارا را مشخص کنند.
سرمایه‌گذاران منطقی به دنبال سبدسهام کارا می‌باشند زیرا این نوع سبدسهام باعث به حداکثر رساندن بازده مورد انتظار با ریسک معین یا حداقل رساندن ریسک برای بازده موردانتظار معین می‌شود. برای تعیین یک پرتفولیو کارا لازم است بازده موردانتظار و انحراف معیار بازده برای هر پرتفلیو را مشخص کنیم. به‌همین منظور و برای محاسبه بازده مورد انتظار انحراف معیار آن باید از مدل مارکوویتز استفاده کنیم. مفروضات اساسی مارکوویتز، مبنای مدل او را شکل می‌دهد.

۱.۱.۲ بازار کارا

بازاری که در آن اطلاعات موجود بلافاصله بر قیمت اوراق‌بهادار تاثیر می‌گذارد بازار کارا نامیده می‌شود. مفهوم این نوع بازار بر این فرض استوار شده است که سرمایه‌گذار تمامی اطلاعات مربوط به قیمت خرید و فروش سهام را در نظر گرفته است (به‌عبارت دیگر اطلاعات به‌محض آشکار شدن به‌سرعت بر قیمت اوراق‌بهادار تاثیر می‌گذارد). بنابراین قیمت فعلی سهام شامل تمامی اطلاعات گذشته (مانند سود مربوط به چند ماه اخیر یا سال گذشته) و اطلاعات فعلی است. به‌عنوان مثال، اگر در بین سرمایه‌گذاران شایعه شود که نرخ بهره به‌زودی قرار است کاهش یابد، این شایعه، باعث می‌شود که قبل از آن‌که این اتفاق رخ دهد آن سهم تحت تاثیر قرار گیرد.
برای این‌که یک بازار کارا را بوجود بیاوریم باید اتفاقات زیر به‌وقوع بپیوندد:

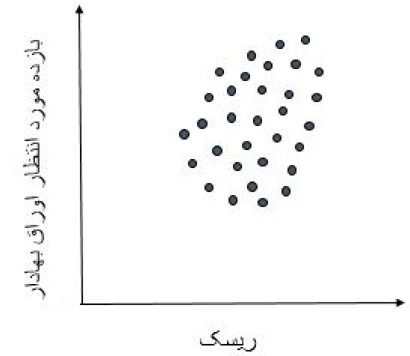
- اطلاعات به‌صورت تصادفی رخ دهد و مستقل از اعلان سایر اطلاعات باشد.
- سرمایه‌گذاران با دریافت اطلاعات جدید به سرعت عکس‌العمل نشان دهند، البته توجه شود این کار باعث تغییرات قیمت در سهام می‌شود.
- اطلاعاتی که دریافت می‌شود بدون هزینه باشد و در اسرع وقت به‌صورت گسترده‌ای در اختیار بقیه سهام‌داران (همه‌ی افراد دیگر) قرار گیرد.

به‌علاوه، تغییرات قیمت مستقل از یک‌دیگرند و به‌صورت تصادفی اتفاق می‌افتند. توجه داشته باشید که تغییرات قیمت امروز مستقل از تغییرات قیمت دیروز می‌باشد، زیرا این تغییرات، براساس واکنش سرمایه‌گذاران نسبت به اطلاعات جدید و مستقل روزانه در بازار می‌باشد.

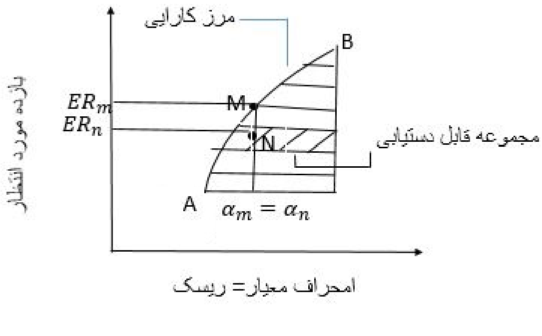
۲.۲ تعیین پرتفولیو کارا

با داشتن اطلاعات و جزئیات بازده مورد انتظار و ریسک سبدسهام می‌توانیم به پرتفولیوهای کارای مدل مارکوویتز بپردازیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود در شکل ۱.۲ محور عمودی،

بازده مورد انتظار و محور افقی، ریسک می‌باشد که توسط انحراف معیار نشان داده شده است. به این نکته توجه شود که تئوری پرتفولیو با بازده‌های مورد انتظار که به آینده مرتبط می‌شود سروکار دارند.
در صورتی که این اوراق‌بهادار را در ترکیب‌های مختلف ترکیب کنیم تعداد خیلی زیادی از پرتفولیوهای ممکن ایجاد خواهد شد. همان‌طور که مشاهده می‌کنید این ترکیب‌های خیلی زیاد در شکل ۲.۲ نشان داده شده است و شامل تمامی قسمت‌های سایه‌دار است و نشان‌دهنده ترکیبات زیادی از بازده مورد انتظار و ریسکی می‌باشد که از طریق تشکیل پرتفولیو قابل دسترسی است.



شکل ۱.۲: بازده مورد انتظار و ریسک گروهی از اوراق‌بهادار



شکل ۲.۲: مجموعه پرتفولیوهای کارا

منحنی AB مرز کارای پرتفولیو را نشان می‌دهد، که به تمامی پرتفولیوهای داخل منحنی اولویت دارد، زیرا نقاط روی این منحنی با توجه به ریسک معین، دارای بازده مورد انتظار بیش‌تری می‌باشند و یا ریسک آن‌ها با توجه به بازده مورد انتظار کم‌ترین می‌باشد. به‌عنوان مثال پرتفولیو M بر روی منحنی AB و پرتفلیو N که در داخل منحنی AB می‌باشد را درنظر بگیرید. هر دو دارای ریسک یکسان می‌باشند، ولی بازده مورد انتظار پرتفولیو M بیش‌تر

می‌باشد پس در نتیجه پرتفولیو M از N بهتر است وسرمایه‌گذار پرتفولیو M را ترجیح می‌دهد. مدل اصلی مارکوویتز با استفاده از تکنیک‌های پیچیده‌ای که برنامه‌ریزی معادلات درجه دوم نامیده می‌شود حل می‌شود. به‌دلیل آن‌که این مدل از طریق کامپیوتر به‌راحتی قابل حل است به جزئیات آن نمی‌پردازیم.

ملاحظه ۱.۲.۲. در عمل، سرمایه‌گذاران محافظه‌کار، بر روی منحنی کارا، AB، پرتفولیوهای سمت چپ را با این‌که بازده مورد انتظار آن‌ها کم‌تر است ولی چون ریسک کم‌تری دارند را انتخاب می‌کنند. برعکس سرمایه‌گذاران جسور، پرتفولیوهایی را که به سمت نقطه B هستند را با توجه به ریسک زیادتر آن‌ها به‌دلیل بازده مورد انتظار بیش‌تر این پرتفولیو آن‌ها انتخاب می‌کنند.

۳.۲ بهینه‌سازی چندهدفه سبدسهام و نظریه فازی

بسیاری از مسائل بهینه‌سازی که تا کنون با آن برخورد داشته‌ایم، تک‌هدفه درنظر گرفته می‌شد (مثلا فقط سود یا زیان مسئله مورد نظر بوده است). اما باید توجه داشت که معمولا یک نتیجه‌گیری زمانی مطلوب و مورد رضایت تصمیم‌گیرنده می‌باشد که بر اساس چندین هدف بررسی و تجزیه وتحلیل شده باشد. به‌عنوان مثال در مسئله بهینه‌سازی سبدسهام زمانی یک مسئله از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که اهدافی مانند کاهش ریسک، افزایش بازده، سود بیش‌تر و ... به‌طور هم‌زمان به بهترین نحو بهینه شود که این عمل منجربه ایجاد مسائل بهینه‌سازی چندهدفه می‌شود.

به‌طور کلی در یک مساله بهینه‌سازی چند هدفه، هدف بهینه‌سازی چند تابع هدف که معمولا با هم در تضاد هستند، می‌باشد. این‌گونه از مسائل معمولا دارای چندین جواب بهینه هستند. این جواب‌ها که تعداد آن‌ها مشخص نیست (تعدادشان می‌تواند تا بی‌نهایت تغییر کند)، می‌توانند کاملا متفاوت باشند، که فرد تصمیم‌گیرنده می‌تواند به‌صورت دلخواه یا سیستماتیک جواب‌های مد نظر خود را انتخاب کند.

در مسائل بهینه‌سازی معمولا تمام ضرایب در تابع هدف به‌صورت قطعی می‌باشند. اما به‌دلیل این‌که برای حل مسائلی همچون مسائل سبدسهام ما اطلاعات دقیقی در دست نداریم یا نمی‌توانیم آن اطلاعات را به‌صورت قطعی بیان کنیم این مسائل را به‌صورت فازی بیان می‌کنیم.

۲.۴ مدل‌های انتخاب سبد سهام

۲.۴.۱ مدل میانگین ـ واریانس

یکی از مشهورترین و متداول‌ترین مدل‌های انتخاب سبدسهام، مدل میانگین‌ـ‌واریانس [۲] مارکوویتز است. مارکویتز [۲۸] اولین بار در سال ۱۹۵۲ مدل انتخاب سبدسهام را به‌صورت ریاضی بیان نمود و دو عنصر نرخ بازده و ریسک را به‌عنوان عناصر کلیدی سرمایه‌گذاری برشمرد. وی همچنین، ریسک را کمیت‌پذیر معرفی نمود.
مارکوویتز اولین شخصی بود که مفهوم سبدسهام و ایجاد تنوع در آن‌را بیان نمود. وی نشان داد که با تنوع دادن به سبدسهام، می‌توان ریسک را کاهش داد.
در مدل پیشنهادی مارکوویتز، معیار سنجش ریسک، انحراف معیار و واریانس بازده مورد انتظار است که بر اساس توزیع نرمال محاسبه می‌شود. در این مدل، مسأله انتخاب سبدسهام به دو رویه فرموله می‌شود:

۱. رویه خروجی محور(بازده محور): در این حالت خروجی (بازده) ثابت است و هدف کاهش میزان ریسک می‌باشد. مدل ریاضی این رویه به‌شکل زیر خواهد بود:

$$P(1) = \min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = r_0 \qquad (۲.۱)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (۲.۲)$$

$$x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \dots, n \qquad (۲.۳)$$

که r_0 بازده مورد انتظار مشخص شده توسط سرمایه‌گذار و تابع هدف مسأله مینیمم کردن ریسک سبدسهام است.
x_i: وزن یا درصد وجوه قابل سرمایه‌گذاری سهم iـ‌ام نسبت به سرمایه کل.
r_i: نرخ بازده مورد انتظار سهم iـ‌ام.
σ_{ij}: کوواریانس با توجه به نرخ بازگشت سرمایه سهم‌های i و j می‌باشد.
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$: محدودیت بودجه سرمایه روی سهم‌هاست.
محدودیت (۲.۱) بیان‌گر این مطلب است که نرخ بازده مورد انتظار سبدسهام در پایان دوره باید معادل با نرخ بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار باشد.
محدودیت (۲.۲) نشان‌دهنده‌ی محدودیت بودجه سرمایه روی سهم‌هاست و محدودیت (۲.۳) فروش قبل از خرید (فروش استقراضی) را تضمین نمی‌کند.

[۲] Mean-Variance Model

مسأله $P(۱)$ یک مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم است.
توجه شود که مقدار $r_۰$ نباید خیلی بالا باشد زیرا ممکن است مسأله $P(۱)$ نشدنی شود. مقدار بازده دست یافتنی سبدسهام $r_۰$ باید همیشه بین $r_{\max}$ و $r_{\min}$ باشد. $r_{\min}$ مقدار $r_۰$ متناظر با سبدسهام با کم‌ترین واریانس و $r_{\max}$، بیش‌ترین بازده از میان نرخ بازده سهم‌ها است.

۲. رویه ورودی محور(ریسک محور): در این حالت ورودی (ریسک) ثابت است و هدف افزایش بازده مورد انتظار می‌باشد. این رویه به‌شکل زیر فرموله خواهد شد:

$$P(۲):=\max\sum_{i=۱}^{n} r_i x_i \tag{۴.۲}$$

$$s.t. \sum_{i=۱}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j = v_۰ \tag{۵.۲}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ \tag{۶.۲}$$

$$x_i \geqslant ۰, i = ۱,۲,\ldots,n. \tag{۷.۲}$$

که $v_۰$ ریسک (واریانس) سبدسهام است که توسط سرمایه‌گذار مشخص می‌شود. پیداکردن مقدار $v_۰$ کار ساده‌ای نیست، اما ممکن است کران بالایی به نام $v_{\max}$ برای آن پیدا شود، که برابر است با سبدسهامی با بیش‌ترین نرخ بازده، یعنی باید $v_۰ \leq v\max$. همچنین $v_۰$ نباید بسیار کوچک باشد، زیرا ممکن است مسأله $P(۲)$ نشدنی شود.
البته می‌توان ترکیبی از دو روش فوق را درنظر گرفت و آن‌را به‌صورت ریاضی فرموله نمود، که در آن بازده و ریسک هر دو متغیرند و باید به‌طور هم‌زمان بازده را افزایش و ریسک را کاهش دهیم. این مسأله، یک مسأله دوهدفه است و اگر معیارهای دیگر نظیر نقدشوندگی، زمان‌های اجرا و ...را هم درنظر بگیریم، تبدیل به یک مسأله چندهدفه خواهد شد.

ایرادات مدل مارکوویتز

۱. در این مدل تعداد سهم‌ها و محدودیت مربوط به کران بالا و پایین نسبت سرمایه‌گذاری در هر سهم، درنظر گرفته نشده است.

۲. این مدل هیچ پاسخی برای توزیع‌های غیر نرمال ندارد، چون واریانس یا انحراف معیار تنها برای یک سهم با توزیع نرمال و در بازار کارا قابل قبول است. البته این ایراد در معیارهای جدید ریسک مانند نیمه‌واریانس حل شده است.

۳. این مدل تنها بر پایه دو معیار ریسک و بازده است و ویژگی چند معیاره بودن اهداف تصمیم‌گیرندگان را مدنظر قرار نمی‌دهد.

۴. با افزایش تعداد سهم‌ها، حجم محاسبات سنگین و دشوار می‌شود.

۲.۴.۲ مدل میانگین ـ نیم‌واریانس

یکی از محدودیت‌های اصلی مدل مارکوویتز، درنظر گرفتن جریمه بالاترین و پایین‌ترین انحراف از بازده مورد انتظار است. در مواقعی که توزیع احتمالات بازده سهم‌ها نامتقارن باشند، واریانس معیار مناسبی برای ریسک سبدسهام نیست. بهتر است در این موارد، واریانس با یک معیار ریسک رو به پایین جایگزین شود، معیاری که فقط انحرافات منفی یک سطح بازده مرجع را در نظر می‌گیرد.

نیم‌واریانس یکی از بهترین معیارهای ریسک رو به پایین است که در اصل بر اساس مدل مارکوویتز ساخته شده و در مدل‌های انتخاب سبدسهام میانگین ـ نیم‌واریانس استفاده می‌شود[۱۸].

برتری نیم‌واریانس بر واریانس آن است که نیم‌واریانس مقادیر فراتر از مقدار بحرانی (سودها) را به‌عنوان ریسک درنظر نمی‌گیرد. در واقع نیم‌واریانس، مقدار مورد انتظار، (امید ریاضی) مربع انحرافات منفی نتایج ممکن بازده مورد انتظار است.

ریسک سبدسهام سنجیده شده با نیم‌واریانس توسط $S(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ نشان داده می‌شود و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید. که R_i متغیر تصادفی نمایش‌دهنده‌ی نرخ بازده‌ی سهم L_i است.

$$S(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = E\left[\underbrace{\Big[\sum_{i=۱}^{n} R_i x_i - E\Big[\sum_{i=۱}^{n} R_i x_i\Big]\Big]^{-}}_{A}\right]^{۲} \qquad (۸.۲)$$

که

$$A = \begin{cases} \sum_{i=۱}^{n} R_i x_i - E\left[\sum_{i=۱}^{n} R_i x_i\right] & \text{اگر} \quad \sum_{i=۱}^{n} R_i x_i - E\left[\sum_{i=۱}^{n} R_i x_i\right] < ۰ \\ ۰ & \text{اگر} \quad \sum_{i=۱}^{n} R_i x_i - E\left[\sum_{i=۱}^{n} R_i x_i\right] \geqslant ۰ \end{cases} \qquad (۹.۲)$$

توجه کنید که اگر همه توزیع بازده‌ها متقارن باشد یا درجه نامتقارنی یکسان داشته باشند، واریانس و نیم‌واریانس هر دو، سبدسهام‌های کارای یکسان تولید می‌کنند.

مدل بهینه‌سازی سبدسهام برای مینیمم نیم‌واریانس با بازده مورد انتظار ثابت به‌صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min E\left[\Big[\sum_{i=۱}^{n} R_i x_i - E\Big[\sum_{i=۱}^{n} R_i x_i\Big]\Big]^{-}\right]^{۲} \\ &s.t. \sum_{i=۱}^{n} r_i x_i = r_۰ \\ &\quad \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ \\ &\quad x_i \geq ۰, i = ۱, ۲, \dots, n. \end{aligned} \qquad (۱۰.۲)$$

طبق گفته‌های قبل، بازده مورد انتظار r_0 بین $r_{\max}$ و $r_{\min}$ قرار دارد. $r_{\min}$، مقدار r_0 سبدسهام با کم‌ترین نیم‌واریانس است.
از آنجا که مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی می‌تواند با متوسط سود داده‌های قبلی تخمین زده شود، بنابراین با استفاده از :

$$r_i = E(R_i) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} r_{it}$$

نیم‌واریانس $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به‌شکل زیر تقریب زده می‌شود:

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, \dots, x_n) &= E\left[\Big[\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E\Big[\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\Big]\Big]^{-}\right]^{2} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(r_{it}-r_i)x_i\right]^{-}\right\}^{2} \end{aligned}$$

که

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(r_{it}-r_i)x_i\right]^{-} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(r_{it}-r_i)x_i & \text{اگر} \quad \sum_{i=1}^{n}(r_{it}-r_i)x_i < 0 \\ 0 & \text{اگر} \quad \sum_{i=1}^{n}(r_{it}-r_i)x_i \geq 0, \qquad t = 1, 2, \dots, T \end{cases}$$

حال مسأله (۱۰.۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(r_{it}-r_i)x_i\right]^{-}\right\}^{2} \\ &s.t. \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = r_0 \\ &\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ &\quad x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

۵.۲ مدل انتخاب سبدسهام چندمعیاره

سرمایه‌گذاران در اکثر مدل‌های انتخاب سبدسهام، بازده و ریسک را به‌عنوان دو فاکتور اساسی درنظر می‌گیرند. اما معمولاً مشاهده می‌کنیم که همه اطلاعات مربوط به انتخاب سبدسهام نمی‌تواند فقط در دوره‌هایی از بازده و ریسک خلاصه شود. بلکه معیارهای دیگر هم به همان اندازه می‌تواند برای سرمایه‌گذاران اهمیت داشته باشد. به‌همین دلیل در دوره‌های اخیر به مدل‌های انتخاب سبدسهام چندمعیاره توجه بیش‌تری شده است.
مسأله انتخاب سبدسهام را به‌عنوان یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه با فرض اینکه سرمایه‌گذار سرمایه‌اش را از بین n سهم که نرخ‌های تصادفی بازده را ارائه می‌کنند اختصاص می‌دهد،

فرموله می‌کنیم.
با در نظر گرفتن نشانه‌گذاری‌های زیر به بیان توابع هدف و محدودیت‌ها می‌پردازیم.

سود سالیانه سهم iـ ام : b_i

سود مطلوب نقدشوندگی سبدسهام : M

نرخ بازده (گردش مالی) فازی سهم iـ ام : $\widetilde{M}_i$

توابع هدف

بازده کوتاه‌مدت سبدسهام برابر است با:

$$f_۱(x) = \sum_{i=۱}^{n} r_i^{۱۲} x_i$$

که $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $r_i^{۱۲} = \frac{۱}{۱۲}\sum_{t=۱}^{۱۲} r_{it}$ که در آن r_{it} کوچک‌ترین سطح دلخواه بازده طولانی مدت مشخص شده توسط سرمایه‌گذار است که از داده‌های تاریخی محاسبه می‌شود.
$r_i^{۱۲}$: متوسط کارایی سهم iـ ام در طول دوره ۱۲ ماهه.
بازده بلندمدت سبدسهام برابر است با:

$$f_۲(x) = \sum_{i=۱}^{n} r_i^{۳۶} x_i$$

که $i = ۱, ۲, \ldots, n$ و $r_i^{۳۶} = \frac{۱}{۳۶}\sum_{t=۱}^{۳۶} r_{it}$.
$r_i^{۳۶}$: متوسط کارایی سهم iـ ام در طول دوره ۳۶ ماهه.
سود سهام سالیانه نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_۳(x) = \sum_{i=۱}^{n} b_i x_i$$

انحراف نیمه‌مطلق مورد انتظار بازده سبدسهام زیر بازده مورد انتظار به‌عنوان ریسک محسوب شده و به‌شکل زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$f_۴(x) = w(x) = \frac{۱}{T}\sum_{t=۱}^{T} w_t(x) = \sum_{t=۱}^{T} \frac{\left|\sum_{t=۱}^{T}(r_{it} - r_i)x_i\right| + \sum_{t=۱}^{T}(r_{it} - r_i)x_i}{۲T}$$

محدودیت‌ها

در این بخش نقدشوندگی را به‌عنوان محدودیت درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که نرخ بازده مورد استفاده برای تعیین نقدشوندگی سهم‌ها برآوردهایی مبهم هستند و از توزیع احتمال ذوزنقه‌ای پیروی می‌کنند. با توجه به تعریف عدد فازی ذوزنقه‌ای، فرض می‌کنیم عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{M}_i = (M_{a_i}, M_{b_i}, M_{\alpha_i}, M_{\beta_i})$ نشان‌دهنده‌ی نرخ بازده سهم iـ ام است.
بنابراین نرخ بازده سبدسهام به‌عنوان $\sum_{i=۱}^{n} \widetilde{M}_i x_i$ در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از اصل

گسترش فازی [۳۸]، مقدار متوسط قطعی از نرخ بازده فازی سهم iـام به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$E(\widetilde{M}_i) = \int_{\circ}^{۱} \gamma(M_{a_i} - (۱-\gamma)M_{\alpha_i} + M_{b_i} + (۱-\gamma)M_{\beta_i})\mathrm{d}\gamma$$
$$= \frac{M_{a_i} + M_{b_i}}{۲} + \frac{M_{\beta_i} - M_{\alpha_i}}{۶}$$

لذا، مقدار متوسط قطعی از نقدشوندگی سبدسهام به‌صورت زیر خواهد بود:

$$E(\widetilde{M}(x)) = E(\sum_{i=۱}^{n} \widetilde{M}_i x_i) = \sum_{i=۱}^{n} (\frac{M_{a_i} + M_{b_i}}{۲} + \frac{M_{\beta_i} - M_{\alpha_i}}{۶}) x_i$$

در نتیجه، برای اینکه نقدشوندگی سبدسهام در یک سطح مشخص M که توسط سرمایه‌گذار داده شده است برقرار شود، از محدودیت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=۱}^{n} (\frac{M_{a_i} + M_{b_i}}{۲} + \frac{M_{\beta_i} - M_{\alpha_i}}{۶}) x_i \geq M$$

.

۱.۵.۲ مسأله تصمیم

$$\begin{aligned}
&\max f_۱(x) = \sum_{i=۱}^{n} r_i^{۱۲} x_i \\
&\max f_۲(x) = \sum_{i=۱}^{n} r_i^{۳۶} x_i \\
&\max f_۳(x) = \sum_{i=۱}^{n} b_i x_i \\
&\max f_۴(x) = w(x) = \frac{۱}{T}\sum_{t=۱}^{T} w_t(x) = \sum_{t=۱}^{T} \frac{\left|\sum_{t=۱}^{T}(r_{it} - r_i)x_i\right| + \sum_{t=۱}^{T}(r_{it} -)x_i}{۲T} \\
&s.t. \sum_{i=۱}^{n} (\frac{M_{a_i} + M_{b_i}}{۲} + \frac{M_{\beta_i} - M_{\alpha_i}}{۶}) x_i \geq M \\
&\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ \\
&\sum_{i=۱}^{n} y_i = h \\
&x_i \leq u_i y_i; \quad i = ۱, ۲, \dots, n \\
&x_i \geq l_i y_i; \quad i = ۱, ۲, \dots, n \\
&x_i \geq \circ; \quad i = ۱, ۲, \dots, n \\
&y_i \in \{\circ, ۱\}; \quad i = ۱, ۲, \dots, n
\end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

توجه شود که نقدشوندگی سبدسهام می‌تواند هم‌چنین به‌عنوان توابع هدف مسأله (۱۲.۲) در نظر گرفته شود. با حذف تابع قدر مطلق در مسأله (۱۲.۲) آن‌را به مسأله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح آمیخته چندهدفه تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&\max f_1(x)=\sum_{i=1}^{n} r_i^{12} x_i\\
&\max f_2(x)=\sum_{i=1}^{n} r_i^{36} x_i\\
&\max f_3(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\\
&\max f_4(x)=w(P)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} P_t\\
&s.t. \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_{a_i}+M_{b_i}}{2}+\frac{M_{\beta_i}-M_{\alpha_i}}{6}\right)x_i \geq M\\
&P_t+\sum_{i=1}^{n}(r_{it}-r_i)x_i \geq 0 \quad t=1,2,\ldots,T\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i = h\\
&x_i \leq u_i y_i; \quad i=1,2,\ldots,n\\
&x_i \geq l_i y_i; \quad i=1,2,\ldots,n\\
&x_i \geq 0; \quad i=1,2,\ldots,n\\
&P_t \geq 0; \quad t=1,2,\ldots,T\\
&y_i \in \{0,1\}; \quad i=1,2,\ldots,n
\end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

۲.۵.۲ مدل‌های انتخاب سبدسهام چندهدفه فازی

مسأله انتخاب سبدسهام چندهدفه فازی را بر اساس سطوح مورد نظر مبهم سرمایه‌گذار برای تعیین یک استراتژی انتخاب سبدسهام رضایت‌بخش شرح می‌دهیم. سرمایه‌گذار سطوح مورد نظر را بر پایه تجربه قبلی و دانش خود نشان می‌دهد. ما یک تابع عضویت Sـ شکل غیرخطی برای بیان سطوح مورد نظر مبهم سرمایه‌گذار به کار می‌بریم. این تابع عضویت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(x)=\frac{1}{1+exp(-\alpha x)}$$

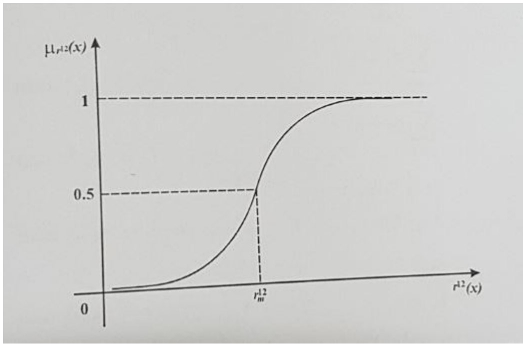
که $0<\alpha<\infty$ یک پارامتر فازی است که درجه ابهام را اندازه می‌گیرد.

ملاحظه ۱.۵.۲. تابع عضویت منطقی Sـ شکل بسیار شبیه تانژانت هایپربولیک است، اما بسیار ساده‌تر از آن رفتار می‌کند.این تابع خطی بودن را هر گاه زمانی‌که عملگر ضرب به‌جای عملگر min برای جلب رضایت سراسری برای رسیدن به مجموعه تصمیم فازی استفاده می‌شود حفظ می‌کند. تابع عضویت ذوزنقه‌ای، یک تخمین برای تابع Sـ شکل است.

فرض کنید چهار تابع هدف (بازگشت کوتاه‌مدت، بازگشت بلندمدت، سود سهام و ریسک) و همچنین محدودیت نقد شوندگی سبدسهام، مبهم و نامعلوم هستند و در این سطوح صورت مورد نظر مبهم سرمایه‌گذار را به‌شکل زیر تعیین می‌کنیم.
تابع عضویت هدف بازگشت کوتاه‌مدت مورد انتظار به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\mu_r^{۱۲}(x) = \frac{۱}{۱ + exp(-\alpha_r^{۱۲}(\sum_{i=۱}^{n} {r_i}^{۱۲} x_i - {r_m}^{۱۲}))}$$

که ${r_m}^{۱۲}$ نقطه میانی است که مقدار تابع عضویت در آن ۰.۵ است و $\alpha_r^{۱۲}$ توسط سرمایه‌گذار بر اساس درجه رضایتمندی هدف ارائه می‌شود (شکل (۳.۲).)



شکل ۳.۲: تابع عضویت هدف بازگشت کوتاه‌مدت مورد انتظار

تابع عضویت هدف بازگشت بلندمدت مورد انتظار از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu_r^{۳۶}(x) = \frac{۱}{۱ + exp(-\alpha_r^{۳۶}(\sum_{i=۱}^{n} {r_i}^{۳۶} x_i - {r_m}^{۳۶}))}$$

که نموداری شبیه نمودار بازگشت کوتاه‌مدت موردانتظار دارد و ${r_m}^{۱۲}$ نقطه میانی آن با مقدار تابع عضویت ۰.۵ و $\alpha_r^{۳۶}$ نیز توسط سرمایه‌گذار ارائه می‌شود. تابع عضویت هدف سود سهام سالیانه از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

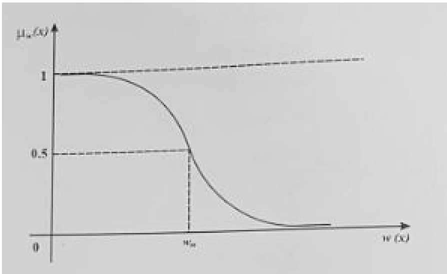
$$\mu_b(x) = \frac{۱}{۱ + exp(-\alpha_r d(\sum_{i=۱}^{n} b_i x_i - b_m))}$$

در این‌جا نیز b_m نقطه میانی با مقدار تابع عضویت ۰.۵ و α_b بر پایه درجه رضایتمندی هدف توسط سرمایه‌گذار ارائه می‌شود و نموداری شبیه بازگشت کوتاه‌مدت دارد.

تابع عضویت هدف ریسک برابر است با:

$$\mu_w(x) = \frac{1}{1 + exp(\alpha_w(w(x) - w_m))}$$

که w_m نقطه میانی با مقدار تابع عضویت ۰.۵ و α_w توسط سرمایه‌گذار بر پایه درجه رضایتمندی هدف ارائه می‌شود شکل (۴.۲).



شکل ۴.۲: تابع عضویت هدف ریسک

تابع عضویت نقدشوندگی سبدسهام برابر است با

$$\mu_{\widetilde{M}}(x) = \frac{1}{1 + exp(-\alpha_M(E(\widetilde{M}(x)) - M_m))}$$

که نموداری شبیه بازگشت کوتاه‌مدت دارد و M_m نقطه میانی با مقدار تابع عضویت ۰.۵ α_M بر اساس درجه رضایتمندی توسط سرمایه‌گذار ارائه می‌شود.

ملاحظه ۲.۵.۲. پارامترهای α_r^{12} و α_r^{36} و α_b و α_w و α_M شکل‌های تابع عضویت μ_r^{12} و μ_r^{36} و μ_b و μ_w و μ_M را به‌ترتیب تعیین می‌کنند و در بازه $(0, \infty)$ انتخاب شده‌اند. هر چه مقدار این پارامترها بزرگ‌تر باشد مقدار ابهام کم‌تر خواهد بود.

ملاحظه ۳.۵.۲. نقاط میانی r_m^{12}، r_m^{36}، b_m، w_m و M_m به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$r_m^{12} = \frac{r_N^{12} + r_S^{12}}{2}$$
$$r_m^{36} = \frac{r_N^{36} + r_S^{36}}{2}$$
$$b_m = \frac{b_N + b_S}{2}$$
$$w_m = \frac{w_N + w_S}{2}$$
$$M_m = \frac{M_N + M_S}{2}$$

که r_N^{12}، r_N^{36}، b_N، w_N و M_N سطوح ضرورت (نیاز) r_S^{12}، r_S^{36}، b_S، w_S و M_S سطوح کفایت نشان داده شده توسط سرمایه‌گذار هستند. توجه شود که، توابع عضویت خطی مانند

توابع ذوزنقه‌ای و مثلثی، یک سطح ضرورت در نقطه ۰ و یک سطح کفایت در نقطه ۱ نشان می‌دهند. از طرف دیگر یک سطوح ضرورت(نیاز)[۳] و یا سطوح کفایت[۴] ممکن است برای توابع عضویت S ـ شکل تخمین زده می‌شود.
مسأله چندهدفه سبدسهام به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\max \min(\mu_r^{12}(x), \mu_r^{36}(x), \mu_b(x), \mu_w(x), \mu_{\widetilde{M}}(x)) \\
s.t.\quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{محدودیت بودجه سرمایه روی سهم‌هاست} \\
& \sum_{i=1}^{n} y_i = h \quad \text{تعداد سهم‌های نگه داشته شده در سبدسهام} \\
& x_i \leq u_i y_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{حداکثر بخشی از سرمایه که می‌تواند در یک سهم به تنهایی سرمایه‌گذاری شود} \\
& x_i \geq l_i y_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{حداقل بخشی از سرمایه که می‌تواند در یک سهم به تنهایی سرمایه‌گذاری شود} \\
& y_i \in \{0, 1\}; \quad i = 1, 2, \dots, n \\
& x_i \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \\
& 0 \leq \eta \leq 1.
\end{aligned} \tag{14.2}$$

---
[۳] Necessity levels
[۴] Sufficiency levels

حال با استفاده از اصل بیشینه‌سازی بلمان‐ زاده [۴]، مسأله انتخاب سبدسهام چندهدفه فازی به‌شکل مسئله تک هدفه‌ی زیر فرموله می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& \max \eta \\
s.t. \quad & \eta \le \mu_r^{12}(x) \\
& \eta \le \mu_r^{36}(x) \\
& \eta \le \mu_b(x) \\
& \eta \le \mu_w(x) \\
& \eta \le \mu_{\widetilde{M}}(x) \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{محدودیت بودجه سرمایه روی سهم‌هاست} \\
& \sum_{i=1}^{n} y_i = h \quad \text{تعداد سهم‌های نگه داشته شده در سبدسهام} \\
& x_i \le u_i y_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{حداکثر بخشی از سرمایه که می‌تواند در یک سهم به تنهایی سرمایه‌گذاری شود} \\
& x_i \ge l_i y_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{حداقل بخشی از سرمایه که می‌تواند در یک سهم به تنهایی سرمایه‌گذاری شود} \\
& y_i \in \{0, 1\}; \quad i = 1, 2, \dots, n \\
& x_i \ge 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \\
& 0 \le \eta \le 1.
\end{aligned}
\tag{15.2}
$$

که در آن

r_i: نرخ بازده مورد انتظار سهم i ـ ام

x_i: وزن یا درصد وجوه قابل سرمایه‌گذاری سهم i ـ ام نسبت به سرمایه کل.

y_i: یک متغیر صفر‐ یک که وجود یا عدم وجود سهم i ـ ام در سبدسهام را نشان می‌دهد یعنی:

$$
y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر سهم } i \text{ ـ ام در سبدسهام موجود باشد.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}
$$

u_i: ماکزیمم بخشی از سرمایه اختصاص داده شده به سهم i ـ ام.

l_i: مینیمم بخشی از سرمایه اختصاص داده شده به سهم i ـ ام.

برای فرموله کردن یک مسأله سبدسهام، ابتدا باید برآوردی از بازده سهم‌های مختلف داشته باشیم و سپس میانگین حسابی بازده‌های تاریخی به‌عنوان بازده موردانتظار یک سهم درنظر گرفته شود و به‌عنوان یک مقدار قطعی به‌دست آید.

محدودیت‌های متناظر با کران‌های L_i و U_i روی سرمایه‌گذاری در تک‌تک سهم‌ها ($0 \le L_i, U_i \le 1, L_i \le U_i, i = 1, 2, \dots, n$) درنظر گرفته می‌شود. از تعداد زیادی سرمایه‌گذاری‌های

خیلی کوچک جلوگیری شود و تنوع کافی در سرمایه‌گذاری به‌وجود آید. کران‌های بالا و پایین باید با دقت انتخاب شوند، به‌طوری که مسأله انتخاب سبدسهام شدنی باشد.

فصل ۳

الگوریتم ژنتیک

۱.۳ مقدمه

مفاهیم این بخش از مراجع [۳۶] و [۱۰] و [۲۱] گرفته شده است.
قانون حاکم بر طبیعت بدین صورت است که تنها گونه‌هایی از یک جمعیت ادامه نسل می‌دهند و تداوم دارند که بهترین خصوصیات را داشته باشند و آن‌هایی که این خصوصیات را نداشته باشند به تدریج در طول زمان از بین رفته و نسل‌شان منقرض می‌شود.
به‌عنوان مثال گونه‌ای از افراد که از هوش بسیار بالایی بهره‌مند هستند را درنظر بگیرید. در شرایط کاملا طبیعی این افراد پیشرفت بهتری و در نتیجه رفاه نسبتاً بالاتری نسبت به بقیه افراد خواهند داشت و این رفاه باعث عمرطولانی و باروری بهتر خواهد شد. حال اگر این خصوصیت(هوش) ارثی باشد به طبع در نسل بعدی همان جامعه به‌دلیل زاد و ولد بیش‌تر این گونه از افراد بیش‌تر می‌شوند. اگر همین روند را ادامه دهیم مشاهده می‌کنیم جامعه‌ی ما در طی نسل‌های بعد باهوش و باهوش‌تر می‌شود وتعدادشان افزایش می‌یابد. بدین ترتیب یک مکانیزم ساده طبیعی توانسته است در طی چند نسل متوالی افراد کم هوش جامعه را کم و کم‌تر کرده و افراد باهوش را افزایش دهد. در طی سال‌های اخیر، الگوریتم ژنتیک توجه و نظر افراد را برای حل مسائل بهینه سازی ترکیبی و بهینه چندگانه به خود کرده است.

۲.۳ الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک، به‌عنوان یکی از روش‌های یافتن جواب مسئله با استفاده از علم رایانه در بین روش‌های مرسوم در هوش مصنوعی می‌باشد. در حقیقت با این روش می‌توانیم در فضای حالت مسئله حرکتی سریع‌تر برای یافتن جواب‌های احتمالی داشته باشیم و سریع‌تر و راحت‌تر به جواب مورد نظر برسیم. الگوریتم ژنتیک نوع خاصی از الگوریتم‌های تکاملی است که از تکنیک‌های زیست‌شناسی مانند وراثت و جهش استفاده می‌کند. این الگوریتم که بر اساس نظریه تکاملی داروین[۱] می‌باشد و از تکنیک‌های زیست‌شناسی استفاده می‌کند یکی از الگوریتم‌های جست و جو تصادفی می‌باشد که ایده‌ی آن برگرفته از طبیعت می‌باشد.
این الگوریتم در حل مسائل بهینه‌سازی کاربرد فراوانی دارد. در طبیعت از ترکیب کروموزوم‌های بهتر، نسل‌های بهتری پدید می‌آیند، در این بین گاهی جهش‌هایی در کروموزوم‌ها رخ می‌دهد که باعث بهتر شدن نسل بعدی می‌شود. الگوریتم ژنتیک با استفاده از این ایده اقدام به حل مسائل می‌کند.

۳.۳ تاریخچه الگوریتم ژنتیک

از سال ۱۹۶۰ علاقه‌مندی زیادی برای توسعه دادن الگوریتم‌های قدرتمند برای حل مسائل بهینه‌سازی دشوار بوجود آمد، که سرانجام در اواخر سال‌های ۱۹۶۹ و اوایل ۱۹۷۰ با تلاش‌های بسیار زیاد، توسط دانشمندی به نام جان‌هلند و شاگردانش [۲] [۲۰] از دانشگاه میشگان پا به عرصه وجود گذاشت، و در سال ۱۹۷۵ کتابی در این زمینه نوشت. جان‌هلند و همکارانش در تحقیقاتی که انجام می‌دادند دو هدف اصلی زیر را دنبال می‌کردند:

۱. ارائه شرح دقیق و خلاصه‌ای از عملکرد قابل قبول سیستم‌های طبیعی

۲. طراحی نرم‌افزارهای سیستم‌های ساختگی که ساز و کار اصلی آن‌ها بر پایه سیستم‌های طبیعی باشد.

سرانجام در سال ۱۹۹۲ جان کوزا [۳] [۲۲] از الگوریتم ژنتیک در برنامه‌های استنتاجی خود استفاده کرد، که کارهای مشخصی را انجام می‌داد، او این روش را GP نام‌گذاری کرد.

[۱] Darwin
[۲] John Holland
[۳] John Koza

۴.۳ تعاریفی در زمینه‌ی ژنتیک

تعریف ۱.۴.۳. به بلوک‌های DNA که یک ویژگی (مثل رنگ چشم) را کد گذاری می‌کنند. **ژن** می‌گویند. به ژن، ترکیب و نشان نیز می‌گویند.

تعریف ۲.۴.۳. یک رشته طولانی و به هم‌پیچیده از رشته‌های DNA که اطلاعات ساختاری و رفتاری موجودات را در خود به‌صورت کدگذاری شده دارد **کروموزوم** گویند.(کد شده یک جواب یا قسمتی از جواب را **کروموزوم** گویند.)

تعریف ۳.۴.۳. مجموعه‌ای از کروموزوم‌ها را **جمعیت** می‌نامند.

۵.۳ ژنتیک در موجودات زنده

الگوریتم ژنتیک همان‌گونه که از اسمش هم پیدا است، از نحوه‌ی تکامل و تولید مثل در بدن موجودات زنده الهام گرفته‌است. همان‌طور که می‌دانید بدن موجودات زنده از بخش‌های بسیار کوچکی به نام سلول تشکیل شده است که مهم‌ترین قسمت آن هسته است. هسته‌ی یک سلول چون شامل کروموزوم‌ها می‌باشد برای ما از اهمیت بالایی برخوردار است. کروموزوم‌ها عمدتاً از DNA تشکیل می‌شوند. مولکول DNA تقریبا شبیه یک نردبان طنابی بسیار بلند مارپیچی است که هر پله از این نردبان از یک جفت ماده‌ی شیمیایی تشکیل شده است. بر هر جفت از این مواد شمیایی که به آن‌ها به اصطلاح باز می‌گویند دو رشته مارپیچ دوتایی را به‌هم وصل می‌کنند. بخش‌های مختلف این نردبان، شاید با چندین هزار جفت باز، هر ژن را تشکیل می‌دهند. ژن‌ها باعث ارث بردن می‌شوند. ترکیب ژن‌های (آرایش ژنتیکی) یک موجود زنده باهم، تعیین کننده‌ی مشخصات آن، شامل رنگ چشم‌های یک جاندار یا عطر و بوی گل یک گیاه می‌باشد.
هنگام جفت شدن سلول‌های جنسی رشته‌های کروموزوم‌ها نیز با هم‌دیگر جفت می‌شوند که گاهی این مکانیزم اشتباه صورت می‌گیرد. در این حالت گوییم جهش ژنتیکی رخ داده است که این عمل ژنتیکی گاهی مخرب و گاهی نیز بسیار مثبت است. مثلا ممکن است فرزندی با ضریب هوشی بسیار بالا یا ضریب هوشی بسیار پایین متولد شود.

۱.۵.۳ انواع الگوریتم‌های ژنتیک

الگوریتم‌های ژنتیک، تکامل طبیعی را در سطح ژن و کروموزوم شبیه‌سازی می‌کنند. عملکرد غالب آن‌ها تولید نسل جدید (پیوند) کروموزوم‌هاست، اگرچه جهش در ژن‌ها نیز به‌عنوان عملکرد ثانویه به‌کار می‌رود. در جدول ۱.۳ مقایسه الگوریتم‌های ژنتیک سیستم‌های طبیعی

آمده است.

سیستم‌های طبیعی	الگوریتم ژنتیک
کروموزوم بسته‌های ژنی هستند که اطلاعات وراثتی را عیناً از نسلی به نسل دیگر منتقل می‌کنند.	پاسخ‌های ممکن یک مسأله به صورت رشته‌های عددی رمزگذاری شده است
شرایط محیطی که جمعیت در آن قرار دارد	تابع برارزش مساله به صورت یک رابطه ریاضی درآمده است که تابع برازش نامیده می‌شود.
برای بقای موجود زنده و تکثیر آن، باید با محیط سازش کرد.	متناسب با مقدار تابع برازش، رشته‌های جمعیت جدید انتخاب می‌شود. توجه شود هر رشته از جمعیت را متغیر تابع برازش درنظر گرفته و مقدار تابع برازش هر رشته محاسبه می‌شود.
تقاطع یا تبادل. بخشی از کروموزوم‌ها با مبادله ژن‌های پیوسته صورت می‌گیرد.	تقاطع: رشته‌های جمعیت به‌صورت دو به دو ترکیب می‌شوند. توجه کنید زوج رشته‌ها از یک نقطه قطع می‌شوند.
جهش: جایگزین شدن یک ژن به جای ژن دیگر در طول زنجیره DNA با تغییرات ایجاد شده در ژن امکان‌پذیر می‌باشد.	جهش: یک بیت از رشته عددی به‌صورت تصادفی انتخاب می‌شود و تغییراتی را ایجاد می‌کند.

جدول ۱.۳: مقایسه الگوریتم‌های ژنتیک با سیستم‌های طبیعی

الگوریتم ژنتیک انواع بسیار زیادی دارد که تا به‌حال شناخته شده‌اند ما در زیر به نام چند تا از این الگوریتم‌ها اشاره می‌کنیم:

۱. الگوریتم ژنتیک سری[۴]

۲. الگوریتم ژنتیک موازی[۵]

۳. الگوریتم ژنتیک آشفته[۶]

۴. الگوریتم ژنتیک هیبرید[۷]

۵. الگوریتم ژنتیک خودسازمان[۸]

۶. الگوریتم ژنتیک زایشی[۹]

[۴] Sequential GA
[۵] Parallel GA
[۶] Messy GA
[۷] Hybrid GA
[۸] Adaptive GA
[۹] Generational GA

۷. الگوریتم ژنتیک حالت دائمی[۱۰]

در زیر به توضیح دو نمونه از آن‌ها می‌پردازیم:

۲.۵.۳ الگوریتم ژنتیک سری

الگوریتم ژنتیک سری همان الگوریتم ژنتیک معمولی است که در مقابل الگوریتم موازی سری نام گرفته‌است. این الگوریتم از تکامل یک پروسه بهینه‌سازی براساس تغییرات تصادفی تدریجی نمونه‌های مختلف یک جامعه و انتخاب بهترین‌های آن جامعه به‌دست می‌آید. با مدل‌سازی این نمونه می‌توان یک تکنیک بهینه‌سازی را به‌دست آورد که امروزه در مسائل گوناگون و پیچیده همچون مسائل طراحی، کارایی دارد. در این الگوریتم نمونه‌هایی که در پروسه تکاملی قرار می‌گیرند، جواب‌های گوناگون در فضاهای جواب هستند. متناظر با هر جواب یک نمونه ژنتیکی به‌صورت یک رشته از کاراکترها(ژن‌ها) نسبت داده می‌شود.
الگوریتم ژنتیک در هر تکرار روی جمعیتی از رشته‌ها عمل کرده و نسل جدیدی را تولید می‌کند. تغییرات تصادفی انجام شده روی مجموعه‌ای از نمونه‌ها از طریق اعمال مدل‌های ایده‌آل فرآیندهای ژنتیکی روی رشته‌ها انجام می‌شود، اما انتخاب طبیعی براساس رشد و نمود رفتاری هر رشته صورت می‌گیرد. بدین معنا که رشته‌ها رمزگشایی شده و جواب‌های مختلف از نظر عملکرد براساس تابع هدف ارزیابی شده و انتخاب آن بر مبنای این ارزیابی و تصادف صورت می‌گیرد.

۳.۵.۳ الگوریتم ژنتیک موازی

تا کنون دو مدل اصلی در الگوریتم ژنتیک موازی مطرح شده است، که در زیر به بیان آن دو مدل می‌پردازیم:

۱. **مدل جزیره‌ای**[۱۱]: در این مدل چندین زیر جمعیت مجزا مطابق با اصول الگوریتم ژنتیک معمولی تکامل می‌یابد و هر از گاهی با زیر جمعیت‌های همسایه، بهترین کروموزوم‌های خود را تعویض می‌کنند.

۲. **مدل همسایگی**[۱۲]: در مدل همسایگی یک مدل به‌صورت تنها (منفرد) تکامل می‌یابد. هر کروموزوم از این جمعیت در یک سلول از یک شبکه قرار دارد و الگوریتم ژنتیک سری، به‌صورت مجزا به هر سلول و همسایگان آن که برحسب شعاع همسایگی آن مشخص می‌شوند، اعمال می‌گردد.

[۱۰] Steady State GA
[۱۱] Island Model
[۱۲] Find Grained Model

مقایسه‌ی بین رفتارهای این الگوریتم با الگوریتم‌های معمولی نشان‌دهنده‌ی آن است که به‌دلیل مکانیزم انتخاب محلی (همسایگی) از فشار انتخاب کاسته می‌شود و کاوش دقیق‌تر و بهتری را برای انتخاب مهیا می‌کند. از این‌رو در مسائل ساده‌تر بدون بهبود در عملکرد آن فقط بار محاسباتی آن‌را افزایش می‌دهد ولی در مسائل پیچیده و مشکل باعث بهبود شده و سودمند خواهد بود. توجه داشته باشید شعاع همسایگی مناسب به مساله مورد بررسی، بستگی دارد.

۶.۳ نحوه عمل و عملگرهای یک الگوریتم ژنتیک

بهینه‌سازی در الگوریتم ژنتیک براساس یک روند تصادفی هدایت شده می‌باشد. این روند، بر مبنای نظریه تکامل تدریجی و ایده‌های بنیادین داروین پایه‌گذاری شده است. قبل از هر چیز برای یافتن پاسخ برای یک مسئله با استفاد از الگوریتم ژنتیک به دو عنصر نیاز است:

۱. اول روشی برای ارائه یک جواب به طوری‌که الگوریتم ژنتیک روی آن عمل کند (مثلا به‌صورت یک رشته از اعداد یا بیت‌ها نمایش داده شوند).

۲. دومین جزء اساسی الگوریتم ژنتیک روشی است که بتواند کیفیت هر جواب پیشنهاد شده را با استفاده از توابع مناسب محاسبه نماید.

به‌طور خلاصه روند الگوریتم ژنتیک به‌صورت زیر می‌باشد:
ابتدا به‌طور تصادفی، چندین جواب برای مسئله را در نظر می‌گیریم. این مجموعه جواب را جمعیت اولیه می‌نامیم و هر جواب را یک کروموزوم می‌نامیم. سپس با استفاده از عملگرهای الگوریتم ژنتیک پس از انتخاب کروموزوم‌های بهتر آن‌ها را باهم ترکیب کرده و جهشی در آن‌ها ایجاد می‌کنیم. جمعیت فعلی را با جمعیت جدیدی که از ترکیب و جهش در کروموزوم‌ها حاصل می‌شود ترکیب می‌کنیم و این روند را ادامه می‌دهیم تا به بهترین و نزدیک‌ترین جواب و ترکیبی که مد نظر است برسیم.

۷.۳ چهار عملگر الگوریتم ژنتیک

چهار عملگر الگوریتم ژنتیک به‌صورت زیر می‌باشد که در ادامه آن‌ها را معرفی می‌کنیم:

۱. تناسب یا برازندگی [۱۳]

۲. انتخاب [۱۴]

[۱۳] Fitness
[۱۴] Selection

۳. ترکیب یا ادغام[۱۵]

۴. جهش [۱۶]

- **برازندگی و تناسب**

این تابع خوب بودن یک جواب را تعیین می‌کند و معمولاً بین صفر و یک نرمال می‌شود. با استفاده از این عملگر، میزان بهینگی هر کروموزوم را تعیین می‌کنیم. به عبارت دیگر برای شروع فعالیت الگوریتم ژنتیک به جمعیتی تصادفی از کروموزوم‌ها نیازمندیم. یعنی در ابتدا تعدادی کروموزوم به‌صورت تصادفی ایجاد می‌کنیم. فرض کنید M کروموزوم و این تعداد را جمعیت آغازین می‌نامیم.
در ادامه تابعی به نام تابع برازندگی تشکیل می‌دهیم که این تابع به‌عنوان ورودی یک جواب مسئله (یک کروموزوم) را دریافت می‌کند و به‌عنوان خروجی عددی را مبتنی بر میزان خوب بودن جواب مشخص می‌کنیم. این مقدار برازندگی(تناسب) را برای تمام نمونه‌های جمعیت حساب می‌کنید.

- **انتخاب**

عملگر انتخاب از مقادیر تولید شده برای هر کروموزوم توسط عملگر تناسب در مرحله‌ی قبل و از میان جمعیت فعلی، کروموزوم‌هایی را برای ترکیب شدن انتخاب می‌کند. کروموزوم‌ها با برازندگی بیش‌تر شانس بیش‌تری برای انتخاب خواهند داشت. درصورتی که تعداد جمعیت n کروموزوم باشد، جمعیت میانی حاصل از اعمال عملگر انتخاب نیز باید n کروموزوم داشته باشد، این بدان معنی است که کروموزوم‌های بهتر در جمعیت میانی ممکن است چند بار تکرار شوند (محصول نهایی عملگر انتخاب جمعیت میانی می‌باشد).

- **ادغام یا ترکیب**[۱۷]

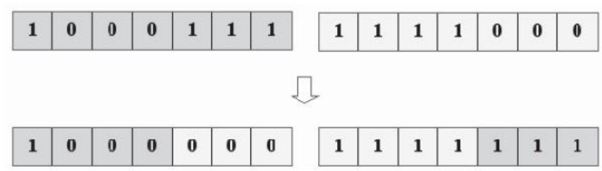
این عملگر از کروموزوم‌های جمعیت میانی استفاده کرده و آن‌ها را باهم ترکیب می‌کند. این عملگر با این امید دست به این ترکیب می‌زند که شاید کروموزوم‌های فرزند که حاصل ترکیب دو یا چند کروموزوم پدر می‌باشد بهتر باشد. ادغام کردن کروموزوم‌ها روش‌های متفاوتی دارد که چند نمونه از این ادغام‌ها را نام می‌بریم:

۱. ادغام (ترکیب) تک نقطه‌ای: ترکیب تک نقطه‌ای، دو کروموزم را با انتخاب تصادفی موقعیتی مانند P ترکیب می‌کند، P مقداری کم‌تر یا مساوی طول کروموزوم‌ها است، اگر تعداد طول ژن‌ها در کرموزوم‌ها N باشد، از دو کروموزوم والد، دو فرزند به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

[۱۵] Crossover
[۱۶] Mutation
[۱۷] Crossover

یک فرزند با کپی کردن ژن‌های $۱, ۲, \dots, (P-۱)$ از کروموزوم والد اول و ژن‌های $p, \dots, N$ از کروموزوم والد دوم، ساخته می‌شود و فرزند دیگر به‌طور مشابه، این‌بار با کپی کردن ژن‌های $۱, ۲, \dots, (P-۱)$ از والد دوم و ژن‌های $p, \dots, N$ از والد اول به‌وجود می‌آید. در این نوع ترکیب از دو والد، دو فرزند به‌وجود می‌آید. به‌عنوان مثال، این نوع ترکیب در شکل ۱.۳ نشان داده شده است. در این مثال $P = ۴$ است.

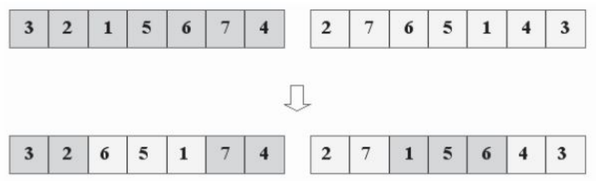
لازم به‌ذکر است که اگر $P = ۱$ یا برابر طول کروموزوم‌ها باشد، آن‌گاه دو والد



شکل ۱.۳: ترکیب تک نقطه‌ای

بدون تغییر وارد جمعیت بعدی می‌شوند.

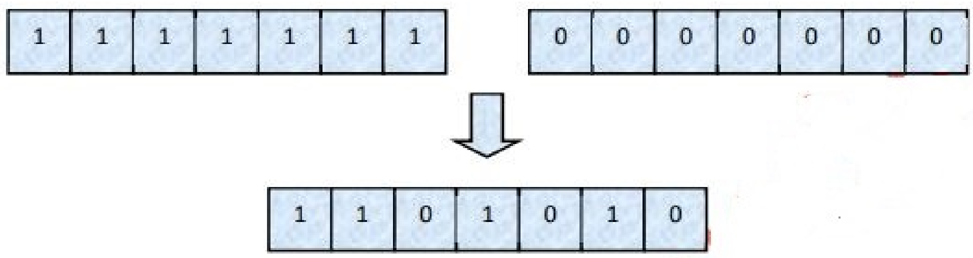
۲. ادغام (ترکیب) دو نقطه‌ای: در ترکیب دو نقطه‌ای دو موقعیت $P_۱$ و $P_۲$ به‌عنوان موقعیت‌های ترکیب، به‌طور تصادفی بین ۱ و طول کروموزوم‌ها N انتخاب می‌شود. روش ایجاد فرزندان مانند ترکیب تک نقطه‌ای است.
فرزند اول، ژن‌های $۱, \dots, (P_۱ - ۱)$ را از والد اول، ژن‌های $P_۱, \dots, (P_۲ - ۱)$ را از والد دوم و ژن‌های $P_۲, \dots, N$ را مجدداً از والد اول، به ارث می‌برد.
فرزند دوم، ژن‌های $۱, \dots, (P_۱ - ۱)$ را از والد دوم، ژن‌های $P_۱, \dots, (P_۲ - ۱)$ را از والد اول و ژن‌های $P_۲, \dots, N$ را مجدداً از والد دوم به‌دست می‌آورد.
در این روش نیز، از یک جفت، دو فرزند به‌وجود می‌آید. در این روش احتمال اینکه والدها بدون تغییر به جمعیت بعد منتقل شوند، کم‌تر است. در شکل ۲.۳ نمونه‌هایی از این ترکیب با موقعیت‌های ترکیب $P_۱ = ۲$ و $P_۲ = ۵$ نشان داده شده است.



شکل ۲.۳: ترکیب دو نقطه‌ای

۳. ادغام (ترکیب) چند نقطه‌ای: این روش که توسعه یافته روش دو نقطه‌ای است، از ۳ نقطه محوری یا بیش‌تر برای ادغام استفاده می‌کند. با این حال تجربه نشان داده است که ادغام چند نقطه‌ای از کارآیی کم‌تری نسبت به دو روش دیگر برخوردار است.

۴. ادغام (ترکیب) یکنواخت: در ترکیب یکنواخت، هر ژن کروموزوم جدید به‌صورت جداگانه انتخاب می‌شود. هر ژن وابسته به موقعیتش به‌صورت تصادفی از یکی از دو والد انتخاب می‌شود، مثلا ژن اول از والد اول، ژن دوم از والد دوم، ژن سوم از والد اول تا ژن آخر، برخلاف ترکیب‌هایی که قبلا ذکر شد، این نوع ترکیب، یک فرزند به‌وجود می‌آورد.
جمعیت جدیدی که با ترکیب یکنواخت به‌وجود می‌آید، دارای تنوع ژنتیکی بیش‌تری نسبت به ترکیب‌های تک نقطه‌ای و دو نقطه‌ای می‌باشد به‌همین دلیل این نوع ترکیب در جمعیت‌هایی که اعضای کمی دارند اثر بهتری دارد تا جمعیت‌هایی که تعداد اعضای زیادی دارند. در شکل ۳.۳ نمونه‌ای از ترکیب یکنواخت مشاهده می‌شود.



شکل ۳.۳: ترکیب یکنواخت

جهش[۱۸]
این عملگر زمانی‌که بر روی کروموزومی اعمال می‌شود باعث بروز تغییر در آن کروموزوم می‌شود. این عملگرد روشی برای تغییر دادن یک یا چند ژن کروموزوم به‌طور تصادفی می‌باشد. عمل جهش باید با احتمال پایین رخ دهد و در اکثر مواقع نباید دارای جهش باشیم. بنابراین اگر کروموزوم به‌دست آمده از عملگر ترکیب دچار جهش شود، باید یکی از بیت‌های آن که متناظر با ژن‌های آن هستند، به‌صورت تصادفی انتخاب شود و سپس مقدار آن تغییر کند. الگوریتم به‌کار برده شده برای جهش کروموزوم‌ها، ضامن عملی

[۱۸] Mutation

بودن و ساده نمودن نسل‌های بعدی (جواب‌های بعدی) باید باشند و به‌سوی بهینگی ما را سوق دهند.

مواردی که در این عملگر مهم هستند عبارت‌اند از:

۱. نحوه‌ی انتخاب محل‌ها

۲. تعداد محل‌هایی که قرار است تغییر صورت گیرد.

۳. نحوه‌ی تعیین عملیات تغییر

در زیر به معرفی چند نمونه از عملگرهای جهشی اشاره می‌کنیم:

- **جابه‌جایی**
در این روش دو ژن به صورت تصادفی انتخاب شده و با یک‌دیگر جابه‌جا می‌شوند.

مثال ۱.۷.۳.

$$A : ۳۴\underline{۷}۶\underline{۴}۹۳۷$$

دو عدد تصادفی ۴ و ۷ باشند، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$B : ۳۴\underline{۴}۳\underline{۷}۹۶۷$$

- **یکنواخت**
در این روش، یک ژن از کروموزوم‌ها به‌صورت تصادفی انتخاب شده و مقدار آن به مقدارتصادفی دیگری تغییر می‌کند، یعنی یک عدد تصادفی در بازه‌ی $[۱, k]$ که k طول کروموزوم می‌باشد، انتخاب شده و ژن موجود در آن مکان از کروموزوم تغییر می‌کند.

مثال ۲.۷.۳.

$$A : ۰۰۱۰۱۰۱۱$$

فرض کنید یک کروموزوم و عدد تصادفی تولید شده ۳ باشد، بنابراین کروموزوم موجود در محل ۳ عوض می‌شود (یعنی عدد یک به صفر تبدیل می‌شود) و به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$B : ۰۰۰۰۱۰۱۱$$

- **جای‌گذاری**
در این روش یک ژن به‌صورت تصادفی انتخاب شده و جای آن عوض می‌شود.

مثال ۳.۷.۳.

A : ۴۵۳۶۲$\underline{۸}$۱۷

فرض کنید عدد تصادفی به‌دست آمده برای تعیین کردن ژن برای جابه‌جایی برابر ۶ باشد و محل قرارگیری جدید آن بین ۳ و ۴ انتخاب شده باشد، در این صورت داریم:

B : ۴۵۳$\underline{۸}$۶۲۱۷

- **وارونگی**

در این روش ابتدا دو عدد تصادفی را بین $[1, k]$ که k طول کروموزوم می‌باشد را انتخاب کرده و کروموزوم را به سه بخش تقسیم می‌کند و قسمت وسط برعکس می‌شود.

مثال ۴.۷.۳.

A : ۵۶/۳۴۵/۶۲۸

فرض کنید دو عدد تصادفی،۲ و ۵ باشند، پس داریم:

B : ۵۶/۵۴۳/۶۲۸

- **ابتکاری**

این روش کاملا ابتکاری بوده و روش کار بدین صورت می‌باشد که در ابتدا چند ژن (توجه شود که تعداد آن از قبل مشخص است) به‌صورت تصادفی انتخاب شده و تمام جایگشت‌های ممکن آن به‌عنوان حالت جدید درنظر گرفته می‌شود، سپس از بین کروموزوم‌های تولید شده بهترین آن به‌عنوان فرزند انتخاب می‌شود.

مثال ۵.۷.۳.

A : ۹۸۷۴۵۶۳۲۱

فرض کنید سه ژن به‌دست آمده ۸ و ۵ و ۳ باشند، حال داریم:

B۱ : ۹۸۷۴۳۶۵۲۱

B۲ : ۹۵۷۴۸۶۳۲۱

B۳ : ۹۵۷۴۳۶۸۲۱

B۴ : ۹۳۷۴۸۶۵۲۱

B۵ : ۹۳۷۴۵۶۸۲۱

اکنون تابع برازش را برای هر کروموزوم به‌دست آورده و بهترین نتیجه انتخاب می‌شود.

۸.۳ کدگذاری الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک به‌جای این‌که بر روی متغیرهای مسئله کار کنند، با کروموزوم‌ها (شکل کدگذاری مسئله) سروکار دارند. در واقع یکی از اصلی‌ترین کارها در پیاده‌سازی الگوریتم ژنتیک بر روی مسائل گوناگون کدگذاری جواب مسئله می‌باشد. حال این سوال مطرح است بهترین کدگذاری برای حل یک مسئله خاص چیست؟!
به طور کلی کدگذاری الگوریتم ژنتیک به دو صورت می‌باشد:

۱. **کدگذاری مستقیم:** در این روش کل جواب یک مسئله به‌عنوان یک کروموزوم در نظر گرفته می‌شود. توجه شود برای مسائل پیچیده کروموزوم‌هایی که بدین صورت ساخته می‌شوند عملگرهای ژنتیکی روی آن‌ها به خوبی عمل نمی‌کنند.

۲. **کدگذاری غیر مستقیم:** در این روش قسمتی از جواب یک مسئله به‌صورت کروموزوم، درنظر گرفته می‌شود.

۱.۸.۳ روش‌های کدگذاری

۱. کدگذاری دودویی[۱۹]

۲. کدگذاری ترتیبی[۲۰]

۳. کدگذاری درختی[۲۱]

۴. کدگذاری حقیقی[۲۲]

حال به توضیح مختصری از این کدگذاری‌ها می‌پردازیم:

- **کدگذاری دودویی**
در این نوع کدگذاری هرکروموزوم رشته‌ای از صفر و یک می‌باشند، این کدگذاری می‌تواند حالت‌های زیادی را پوشش دهد و به راحتی با عملگرهای بیتی در زبان‌های مختلف برنامه نویسی، پیاده‌سازی می‌شوند.

- **کدگذاری ترتیبی**
این نوع کدگذاری معمولاً برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی و غیره به‌کار برده می‌شود. توجه شود که در این روش هر کروموزوم شامل اعدادی می‌باشد که معمولا ترتیب خاصی را بیان می‌کنند.

---
[۱۹] Binary Coding
[۲۰] Permutation Coding
[۲۱] Tree Coding
[۲۲] Value Coding

- **کدگذاری درختی**

این نوع کدگذاری در برنامه‌ریزی ژنتیکی به‌کار می‌رود. در این کدگذاری، هر کروموزوم یک درخت از اشیاء نظیر توابع یا دستورها در زبان برنامه‌نویسی می‌باشد.

- **کدگذاری حقیقی**

این نوع کدگذاری برای مسائلی که در آن‌ها مقادیر پیچیده به‌کار می‌روند، استفاده می‌شود. این روش معمولا به‌صورت یک مجموعه، رشته و یا غیره از اجزا بیان می‌شود. هر جزء ارزش خاصی دارد که این ارزش می‌تواند شامل عدد، کلمه یا حرف باشد. در این نوع کدگذاری به توسعه و گسترش روش‌های خاصی برای ایجاد همسایگی و غیره در الگوریتم‌ها می‌پردازیم.

۲.۸.۳ چارت الگوریتم ژنتیک

چارت الگوریتم ژنتیک در شکل ۴.۳ آمده است.

۹.۳ محدودیت‌های الگوریتم ژنتیک (GAها)

یکی از مشکلات اصلی الگوریتم ژنتیک چگونه نوشتن عملگر ارزیابی است که منجربه بهترین جواب برای مساله می‌شود. زیرا اگر این برازش به‌خوبی و قوی انتخاب نشود ممکن است جوابی برای مساله پیدا نکنیم یا مساله‌ای دیگر را به اشتباه حل کنیم. به‌علاوه باید توجه شود که علاوه‌بر انتخاب تابع مناسب برای ارزیابی باید به پارامترهای دیگری همچون اندازه جمعیت، نرخ ترکیب، نوع انتخاب و ...نیز توجه کرد.
مشکل دیگری که وجود دارد این است که اگر یک ژن خیلی بهتر از سایر ژن‌های دیگر موجود باشد زودتر دیده می‌شود و ممکن است محدودیت ایجاد کند و راه‌حل را به سوی جواب بهینه محلی سوق دهد (توجه شود که این اتفاق معمولا در جمعیت‌های کم اتفاق می‌افتد).

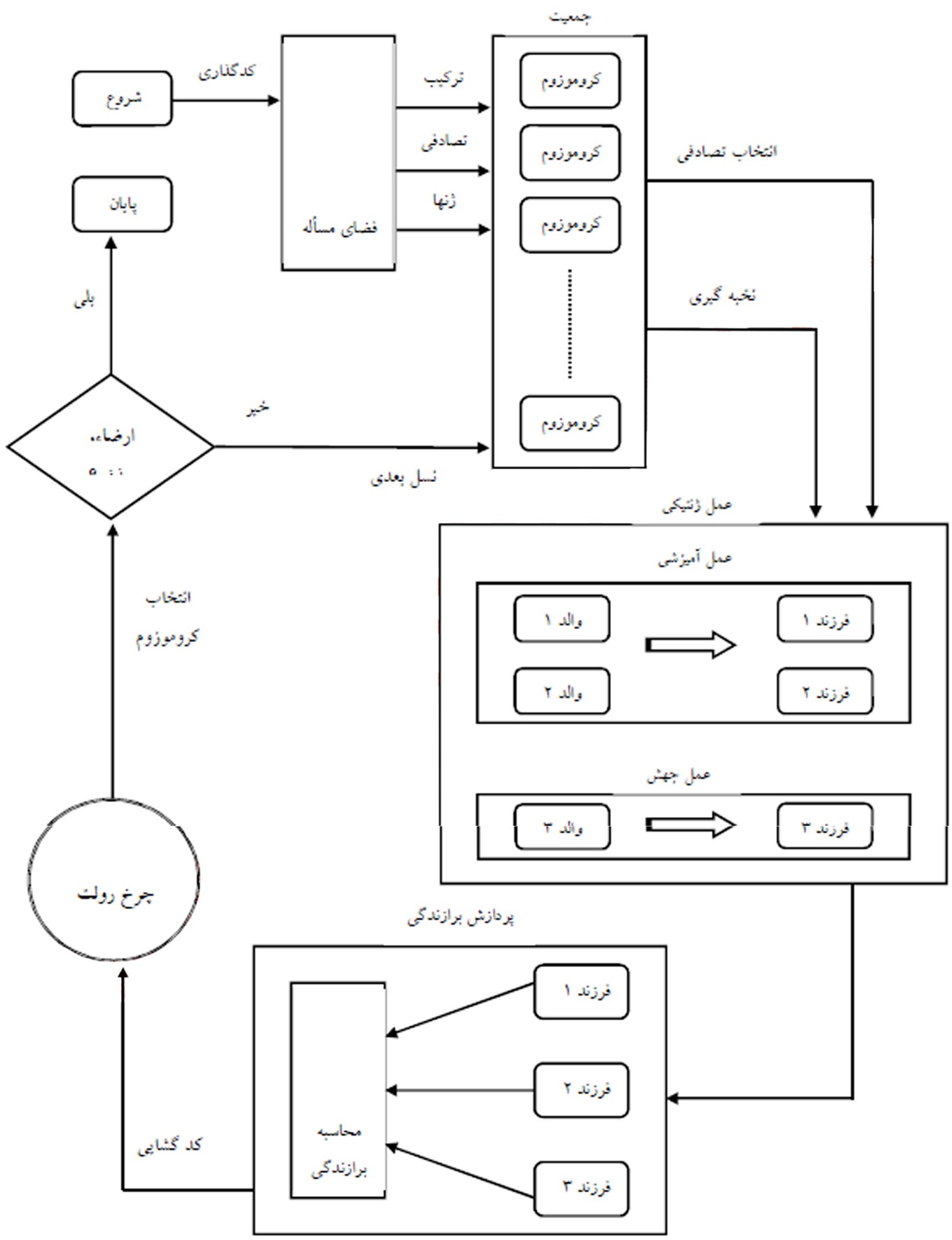
۱.۹.۳ راه‌حل‌های مناسب برخورد با محدودیت‌ها

از آن‌جایی که عملگرهاي ژنتیک مورد استفاده در الگوریتم باعث تولید کروموزوم‌هاي غیرموجه می‌شود ما به این مساله می‌پردازیم که چگونه در اجرای الگوریتم ژنتیک با محدودیت‌های مساله برخورد کنیم. ''میکالویچ'' [۲۳]چند تکنیک (استراتژی) معمول برای مواجه شدن با محدودیت‌ها تقسیم‌بندی کرده است که ما به چند نمونه از آن‌ها می‌پردازیم:

۱. **استراتژی رَدی**

در این روش پس از تولید کروموزوم آنرا از نظر موجه بودن تست کرده و در صورت غیر

[۲۳] Mikalovich



شکل ۴.۳: چارت الگوریتم ژنتیک

موجه بودن آنرا حذف می‌کنند. این روش، روشی بسیار ساده و کارا می‌باشد.

۲. استراتژی اصلاح عملگرهای ژنتیک

در این روش برای جلوگیری از تولید کروموزوم‌های غیر موجه عملگر ژنتیکی طوری تعریف می‌شود که پس از اعمالی که بر روی کروموزوم‌ها صورت می‌گیرد، کروموزوم تولید شده موجه باشد. در این روش مشکلات زیادی وجود دارد مهم‌ترین مشکل آن

پیدا کردن عملگری که دارای این شرایط باشد بسیار دشوار می‌باشد.

۳. **استراتژی اصلاحی**
در این روش به‌جای حذف کروموزوم غیرموجه آن کروموزوم را به یک کروموزوم موجه تبدیل می‌کند (توجه شود این روش مانند روش بالا به مساله وابسته می‌باشد و یافتن فرآیند اصلاح در مواقعی بسیار پیچیده و دشوار می‌باشد).

۴. **استراتژی جریمه‌ای**
در این روش برخلاف ۳ روش قبلی که از ورود جواب‌های غیرموجه جلوگیری می‌کردند، جواب‌های غیر موجه با احتمال کم حضور می‌یابند. در سه روش قبلی این مشکل وجود داشت که به هیچ نقطه‌ای بیرون از فضای موجه توجه نمی‌کردند، اما در بعضی مسائل بهینه‌سازی، جواب‌های غیر موجه درصد زیادی از جمعیت را اشغال می‌کنند. در چنین وضعیتی اگر جست‌وجو فقط در ناحیه موجه صورت گیرد شاید یافتن جواب موجه خیلی وقت‌گیر و دشوار باشد.

توجه شود که از متداول‌ترین تکنیک‌های مورد استفاده برای سروکار داشتن با جواب‌های غیرموجه استراتژی جریمه‌ای می‌باشد که در آن ابتدا محدودیت‌های مسأله در نظر گرفته نمی‌شوند پس برای هر تخلف از محدودیت‌ها یک جریمه اختصاص داده می‌شود که این جریمه در تابع هدف قرار می‌گیرد. نکته‌ی قابل توجه در این روش این است که جواب غیر موجه به سادگی حذف نمی‌شود زیرا ممکن است در ژن‌های آن اطلاعات مفید و خوبی وجود داشته باشد که با اندکی تغییر به جواب بهینه تبدیل شود.

۱۰.۳ شرایط خاتمه الگوریتم ژنتیک

چون الگوریتم‌های ژنتیک بر پایه تولید و تست می‌باشند، جواب مساله مشخص نیست و نمی‌دانیم که کدام‌یک از جواب‌های تولید شده جواب بهینه است تا شرط خاتمه‌ی مشخصی را برای پیدا شدن جواب در جمعیت تعریف کنیم. به‌همین دلیل معیارهایی را برای شرط خاتمه الگوریتم در نظر می‌گیریم. در زیر به چند نمونه از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- تعداد مشخصی از نسل، یعنی می‌توانیم شرط خاتمه را مثلاً ۱۰۵ دور چرخش حلقه‌ی اصلی برنامه قرار دهیم.
- عدم بهبود در بهترین شایستگی جمعیت در طی چند نسل متوالی، یعنی اگر روند الگوریتم ژنتیک را ادامه دهیم در نسل‌های بعدی تغییر خاصی دیده نشود.
- بهترین شایستگی جمعیت از یک حد خاصی کم‌تر باشد.
- یک فرزند تولید شود که بهینه‌ی ملاکی که در نظر گرفته‌ایم را برآورده کند.

- بازرسی دستی یا چک کردن بهترین کروموزوم هر نسل.
- بودجه اختصاص داده شده تمام شود(مثل زمان محاسبه یا پول)
- بیش‌ترین درجه برازندگی فرزندان حاصل شود یا نتایج بهتر دیگری حاصل نشود.
- تعداد تولید نسل (تعداد تکرار دفعات الگوریتم) یا زمان آن از قبل تعیین شده باشد.

ملاحظه ۱.۱۰.۳. شرایط دیگری نیز می‌توانیم تعریف کنیم و هم‌چنین می‌توانیم ترکیبی از موارد فوق را به عنوان شرط خاتمه در نظر بگیریم.

۱۱.۳ نکات قابل توجه و مهم در الگوریتم ژنتیک

۱. شرایط جمعیت اولیه می‌تواند در سرعت رسیدن به جواب بسیار تأثیرگذار باشد. یعنی اگر جمعیت اولیه بهتر و مناسب‌تر باشد سریع‌تر به جواب می‌رسیم.

۲. در الگوریتم‌های ژنتیکی، نحوه تکامل ژنتیکی شبیه موجودات زنده شبیه‌سازی می‌شود. این الگوریتم‌ها با الهام از روند تکاملی طبیعت مسائل را حل می‌نمایند.

۳. با توجه به پارامترهای تصادفی در الگوریتم، حتی در صورت استفاده از جمعیت اولیه یکسان ممکن است در اجراهای مختلف الزاماً جواب‌های یکسان به‌دست نیاید.

۴. الگوریتم ژنتیک، الهامی از علم ژنتیک و نظریه تکاملی داروین است و براساس بقای برترین‌ها یا انتخاب طبیعی استوار است. یکی از کاربردهای این الگوریتم، استفاده‌ی آن به‌عنوان تابع بهینه‌کننده است، و نیز ابزار سودمندی در بازشناسی الگو، انتخاب ویژگی، درک تصویر و یادگیری ماشین است.

۵. تابع برازندگی در این‌گونه از الگوریتم‌ها از اهمیت به‌سزایی برخوردار است، زیرا در اکثر مسائل در اثر ترکیب، حالت‌هایی رخ می‌دهد که منطبق بر شرایط مسئله نیست. بنابراین تابع ارزش باید به گونه‌ای طراحی شود که برای رسیدن به هدف تخمین بسیار خوبی باشد.

۶. با توجه به خصوصیات خاص این الگوریتم‌ها به خوبی از عهده‌ی حل مسائلی که نیاز به بهینه‌سازی دارند برمی‌آیند.

۱۲.۳ بازنمایی مدل‌سازی مسئله

برای اینکه بتوانیم یک مساله را به وسیله الگوریتم‌های ژنتیک حل کنیم، بایستی آنرا به فرم مخصوص مورد نیاز این الگوریتم‌ها تبدیل کنیم.

در این روند، ما بایستی جواب مورد نیاز مساله را به‌گونه‌ای تعریف کنیم که قابل نمایش به وسیله یک کروموزوم باشد. این‌که چه نوع بازنمایی برای مسأله استفاده شود، به شخص طراح و فرم مساله بستگی دارد.
چند نمونه از بازنمائی‌هایی را که معمولاً استفاده می‌شوند به صورت زیر می‌باشند:

- اعداد صحیح
- رشته‌های بیتی
- اعداد حقیقی در فرم نقطه شناور
- اعداد حقیقی به فرم رشته‌های بیتی
- یک مجموعه از اعداد حقیقی یا صحیح
- ماشین‌های حالت محدود
- هر فرم دیگری که بتوانیم عملگرهای ژنتیک را بر روی آن‌ها تعریف کنیم.

والدین: در هر نسل تعدادی از عناصر جمعیت این فرصت را پیدا می‌کنند که تولید مثل کنند. به این عناصر که از میان جمعیت انتخاب می‌شوند، والدین می‌گویند.
روش‌های مختلفی برای انتخاب والدین وجود دارند در زیر به چند مورد از این روش‌ها اشاره می‌کنیم:
انتخاب تمام جمعیت به‌عنوان والدین: در واقع هیچ‌گونه انتخابی انجام نمی‌دهیم (همه عناصر انتخاب می‌شوند).
انتخاب تصادفی: به‌صورت تصادفی تعدادی از موجودات جمعیت را به‌عنوان والدین انتخاب می‌کنیم، این انتخاب می‌تواند با جایگذاری یا بدون جایگذاری باشد.
در این روش‌ها عناصر با شایستگی بیش‌تر شانس بیشتری برای انتخاب شدن به عنوان والدین را دارند.
سایر روش‌ها: این روش‌ها با استفاده از تکنیک‌هایی سعی می‌کنند که انتخاب‌هایی را ارائه دهند، که هم رسیدن به جواب نهایی را تسریع کنند و هم این‌که کمک می‌کنند که جواب بهینه‌تری پیدا شود.

۱.۱۲.۳ معمول‌ترین روش‌های انتخاب

- **نخبه‌گرایی**[۲۴]: مناسب‌ترین عضو هر اجتماع انتخاب می‌شود.

[۲۴] Elitist Selection

- **روش انتخاب چرخ رولت**[۲۵]: یک روش انتخاب است که در آن عنصری که عدد برازش (تناسب) بیش‌تری داشته باشد، انتخاب می‌شود.

- **انتخاب مقیاس**[۲۶]: به موازات افزایش متوسط عدد برازش جامعه، سنگینی انتخاب هم بیش‌تر و هم جزئی‌تر می‌شود. این روش وقتی کاربرد دارد که مجموعه دارای عناصری باشد که عدد برازش بزرگی دارند و فقط تفاوت‌های کوچکی آن‌ها را از هم تفکیک می‌کند.

- **انتخاب تورنومنت**[۲۷]: یک زیر مجموعه از صفات یک جامعه انتخاب می‌شوند و اعضای آن مجموعه با هم رقابت می‌کنند و سرانجام فقط یک صفت از هر زیرگروه برای تولید انتخاب می‌شوند.

۱۳.۳ نقاط قوت الگوریتم‌های ژنتیک

- اولین و مهم‌ترین نقطه قوت این الگوریتم‌ها این است که الگوریتم‌هاي ژنتیک ذاتاً موازي‌اند. اکثر الگوریتم‌هاي دیگر موازي نیستند و فقط می‌توانند فضاي مسأله مورد نظر را در یک جهت در یک لحظه جست وجو کنند و اگر جواب پیدا شده یک جواب بهینه محلی باشد و یا زیر مجموعه‌اي از جواب اصلی باشد باید تمام کارهایی که تا به حال انجام شده را کنار گذاشت و دوباره از اول شروع کرد.
از آن‌جایی که الگوریتم‌های ژنتیک چندین نقطه‌ی شروع دارند در یک لحظه می‌تواند فضاي مسأله را از چند جهت مختلف جست‌جو کنند. اگر یکی به نتیجه نرسید سایر راه‌ها ادامه می‌یابند و منابع بیش‌تری را در اختیارشان قرار می‌گیرد و در یک لحظه می‌توانند فضای مسئله را از چند جهت مختلف کاوش نمایند.

- الگوریتم‌های ژنتیک توانایی پشتیبانی از بهینه‌سازی‌های چندمنظوره را دارا می‌باشند و می‌توانند چندین پارامتر را هم‌زمان تغییر دهند.

- الگوریتم ژنتیک برای مسائلی که فضای راه‌حل بزرگی دارند و غیرخطی هستند به‌دلیل خصلت موازی بودن و ارزیابی چند زمانه (هم‌زمان) بسیار مفید هستند.

- الگوریتم ژنتیک توانایی تلفیق شدن با سایر روش‌های بهینه‌سازی را دارند.

- یکی از نکات قابل توجه درمورد الگوریتم‌های ژنتیک این است که این الگوریتم هیچ چیزی درمورد مسئله‌ای که حل می‌کند نمی‌داند، به‌همین دلیل اصطلاحا به آن الگوریتم کور گفته می‌شود. به‌دلیل اینکه فقط به مقادیر تابع هدف توجه دارند و دانسته‌های از

[۲۵] Election Roulette
[۲۶] Scaling Selection
[۲۷] Tournament Selection

پیش تعیین شده را نادیده گرفته و نیز به مشتقات و دیگر اطلاعات کاری ندارند، شامل پیچیدگی‌های محاسباتی یا محاسبات اضافی نمی‌شوند.

- الگوریتم ژنتیک به‌جای خود متغیرها از متغیرهای کدگذاری شده استفاده می‌کنند، که این کار برای استفاده از متغیرهای گسسته بسیار مناسب می‌باشد.
- الگوریتم‌های ژنتیک از قواعد آماری به‌جای قواعد صریح استفاده می‌کنند که این عمل بر قدرت و توانایی این الگوریتم می‌افزاید.
- قادر است چند جواب بهینه را به‌طور همزمان بدست آورد نه فقط یک جواب را بیابد. این الگوریتم بر روی یک راه حل خاص اعمال نمی‌شود بلکه بر روی مجموعه‌ای از راه‌حل‌ها اعمال می‌شود.
- الگوریتم ژنتیک از قوانین انتقالی احتمالی به‌جای قوانین انتقالی قطعی استفاده می‌کنند، این بدان معنی می‌باشد که حرکت آن در هر نقطه از الگوریتم کاملاً احتمالی بوده و براساس قطعیت صورت نمی‌پذیرد.
- تنها ملاک ارزشیابی و سنجش میزان شایستگی هر جواب توسط الگوریتم‌های ژنتیک، مقدار تابع شایستگی آن در فضای کروموزوم‌ها می‌باشد.
- الگوریتم ژنتیک با مجموعه‌ای از جواب‌ها شروع به حل یک مسئله می‌کند. بدین صورت که به‌جای یافتن یک نقطه‌ی مناسب، محدوده‌های مناسبی در فضای مسئله شناسایی می‌کند. در نتیجه به‌طور هم‌زمان شانس بیش‌تری برای متغیرهای شایسته‌تر برای بقا و تولید نسل بوجود می‌آورد. در این الگوریتم احتمال پیدا کردن نقطه بهینه سراسری زیاد می‌باشد و برای توابع با تغییرات ناگهانی و دارای چندین نقطه بهینه موضعی مناسب می‌باشد.
- الگوریتم ژنتیک دارای انعطاف‌پذیری بسیار بالایی می‌باشد، این بدین معنا می‌باشد که این الگوریتم را روی هر مسئله (مقید یا نامقید) و با هر فضای جواب (گسسته، پیوسته، نامحدب و ...) می‌توان پیاده‌سازی کرد.
- برای حل مسائل $NP-Hard$ نیز استفاده می‌شود.

۱۴.۳ محدودیت‌های الگوریتم ژنتیک (نقاط ضعف الگوریتم ژنتیک)

- مشکل اصلی الگوریتم‌های ژنتیک علی‌رغم سادگی پیاده‌سازی، هزینه و زمان زیاد آن می‌باشد. اغلب برای حل یک مسأله به تولید چندین هزار نسل از کروموزوم‌ها می‌پردازیم

و این مسئله زمان زیادی را به خود اختصاص می‌دهد، مخصوصاً اگر تعداد جمعیت اولیه زیاد باشد و یا تابع هدف تابعی پیچیده باشد.

- الگوریتم ژنتیک چگونگی نوشته شدن تابع هدف را مشخص می‌کند، به‌گونه‌ای که منجر به بهترین جواب برای حل مسئله می‌گردد. اگر مشکلی در انتخاب این مورد پیش آید و این مورد با قدرت و به‌خوبی انتخاب نشود ممکن است راه‌حلی برای مسئله پیدا نکنیم یا اشتباه منجر به حل مسئله‌ی دیگری شود.

- الگوریتم ژنتیک یک روش غیر جبری می‌باشد، بنابراین نمی‌توان به پاسخ دقیق مسئله رسید و حتی ممکن است برای یک مسئله مشخص با هر بار به‌کارگیری، به پاسخی متفاوت رسید ولی باید به این نکته توجه داشت که تمامی این پاسخ‌ها می‌توانند پاسخ‌هایی باشند که دقت مورد نیاز مسئله را برآورده می‌کنند و تمامی پاسخ‌ها در یک راستا و در جهت بهترین پاسخ برای حل مسئله می‌باشند.

- از الگوریتم ژنتیک برای حل تمامی مسائل بهینه‌سازی می‌توان استفاده کرد اما باید توجه داشت که در برخی از مسائل این روش نسبت به سایر روش‌ها بسیار کندتر می‌باشد. بنابراین الگوریتم ژنتیک روشی مناسب برای حل تمام مسائل بهینه‌سازی نمی‌باشد. در حقیقت این الگوریتم برای مسائلی که برای حل آن‌ها روش‌های شناخته شده‌است وجود دارد مناسب نمی‌باشد.

۱۵.۳ مقایسه الگوریتم ژنتیک و دیگر شیوه هاي مرسوم بهینه سازي

با توجه به توضیحات داده شده مشخص است که بین الگوریتم ژنتیک و اکثر شیوه‌هاي مرسوم جست‌جو و بهینه‌سازي تفاوت قابل توجهي وجود دارد. در زیر به چهار تفاوت عمده‌ای که بین روش الگوریتم ژنتیک و سایر روش‌ها وجود دارد اشاره شده است:

۱. الگوریتم ژنتیک با یک نقطه تنها جست‌جو نمی‌کند بلکه همزمان، با یک مجموعه از نقاط جست‌جو می‌کند.

۲. الگوریتم ژنتیک از قوانین قطعی پیروی نمی‌کند بلکه از قوانین احتمالي پیروي می‌کند.

۳. الگوریتم ژنتیک بر روي مقادیر اصلی یک مجموعه کار نمی‌کند بلکه بر روی یک مجموعه از خواص کدگذاری شده عمل می‌کند (به‌جزء در مواردي که از نمایش حقیقي در رشته‌ها استفاده مي‌شود).

۴. الگوریتم ژنتیک به مشتق‌گیري و یا هر گونه اطلاعات کمکي نیازي ندارد و تنها تابع هدف و شیوه تعیین برازش از اطلاعات خام، جهت جست‌جو را مشخص می‌کنند.

این نکته مهم است که الگوریتم ژنتیک یک مجموعه از جواب‌های بالقوه را ارائه می‌دهد و انتخاب جواب نهايي برعهده کاربر است. در مواردي که مساله جواب واحد ندارد مثل بهینه‌سازي چندهدفه، الگوریتم ژنتیک براي مشخص کردن هم‌زمان جواب‌ها بسیار مفید است.

۱۶.۳ الگوریتم ژنتیک رتبه‌بندی نامغلوب $NSGA-II$

الگوریتم فراابتکاری $NSGAII$ یکی از پرکاربردترین و قدرتمندترین الگوریتم‌های موجود برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه است و کارایی آن در حل مسائل مختلف، به اثبات رسیده است. اسرینیباس [۲۸]و دِب در سال ۱۹۹۵ روش بهینه‌سازی $NSGA$ را برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه معرفی نمودند. نکات برجسته‌ای که در مورد این روش بهینه‌سازی وجود دارند، عبارتند از:

- جوابی که هیچ جواب دیگری، به‌طور قطع بهتر از آن نباشد، دارای امتیاز بیش‌تری است. جواب‌ها بر اساس این‌که چند جواب بهتر از آن‌ها وجود داشته باشند، رتبه‌بندی و مرتب می‌شوند.
- شایستگی (برازندگی) برای جواب‌ها، برحسب رتبه آن‌ها و عدم غلبه سایر جواب‌ها، اختصاص می‌یابد.
- از شیوه اشتراک برازندگی برای جواب‌های نزدیک استفاده می‌شود تا به این ترتیب پراکندگی جواب‌ها به‌نحو مطلوبی تنظیم شود و جواب‌ها به‌طور یکنواخت در فضای جست‌جو پخش شوند.

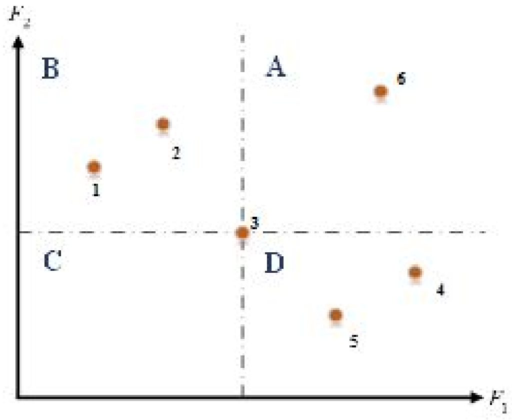
با توجه به حساسیت نسبتا زیادی که نحوه عملکرد و کیفیت جواب‌های الگوریتم $NSGA$ به پارامترهای اشتراک برازندگی و سایر پارامترها دارند، نسخه دوم الگوریتم $NSGA$ با نام الگوریتم فراابتکاری $NSGAII$ توسط دِب و همکارانش در سال ۲۰۰۰ معرفی گردید. در کنار تمام کارایی‌هایی که الگوریتم فراابتکاری $NSGA-II$ دارد، می‌توان آن‌را الگوی شکل‌گیری بسیاری از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه دانست. این الگوریتم و شیوه منحصربه‌فرد آن در برخورد با مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، بارها و بارها توسط افراد مختلف برای ایجاد الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه جدیدتر، مورد استفاده قرار گرفته است. بدون شک این الگوریتم یکی از اساسی‌ترین اعضای کلکسیون الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی است که می‌توان آن‌ها را نسل دوم این‌گونه روش‌ها نامید.

[۲۸] Srinibus

تعریف ۱.۱۶.۳. جوابی بر جواب دیگر **غلبه** می‌کند اگر دارای شرایط زیر باشد:

- جواب انتخابی در هر یک از توابع هدف از دیگری بدتر نباشد.
- جواب انتخابی حداقل در یکی از توابع هدف مطلقاً از جواب دیگر بهتر باشد.

نقاط بهینه سراسری: برداری به‌صورت سراسری بهینه درنظر گرفته می‌شود، هرگاه در کل فضای جواب نتوان برداری پیدا کرد، به‌طوری که این بردار بتواند بر بردار مورد انتظار غلبه کند. در این حالت بردار را به‌صورت سراسری، جواب غیر مغلوب می‌نامند. همچنین مجموعه این نقاط، مرز پارتو نامیده می‌شود.
مرتب سازی نامغلوب: زمانی که بحث از یک الگوریتم تک هدفه مطرح است، معیار برتری جواب‌ها نسبت به یکدیگر ساده است، زیرا تنها یک تابع هدف مدنظر می‌باشد. به‌طور مثال در صورتی که مسلله مورد بحث یک مسأله کمینه‌ـ سازی باشد، جوابی که کم‌ترین مقدار تابع هدف را دارا باشد، بر سایر جواب‌ها برتری دارد. اما زمانی‌که برای حل مسأله‌ای از یک الگوریتم چندهدفه استفاده می‌شود که حداقل دو تابع هدف مدنظر باشد و دیگر به آسانی نمی‌توان در مورد برتری بعضی از جواب‌ها نظر قطعی دارد، زیرا در اکثر موارد نقاطی یافت می‌شود که هیچ کدام بر دیگری برتری کامل ندارد.
در این الگوریتم به هر جواب یک رتبه اختصاص داده می‌شود. که براساس تعداد مغلوب شدن آن‌ها نسبت به سایر نقاط مغلوب می‌گردد (بدین صورت که نقاطی که در جبهه اول قرار دارند و توسط هیچ کدام از جواب‌ها مغلوب نشده‌اند. دارای رتبه یک و بقیه و جواب‌هایی که فقط توسط حداقل یکی از جبهه اول مغلوب می‌شوند، در جبهه دوم و رتبه دوم قرار می‌گیرند و به همین روند ادامه پیدا می‌کند و رتبه‌های بعدی مشخص می‌شود) . در پایان الگوریتم، نقاطی که بهترین رتبه یعنی رتبه یک را دارا باشند. به عنوان مجموعه جواب یا نقاط جبهه پارتو انتخاب می‌شوند. این موضوع با توجه به شکل ۵.۳ که مثالی برای یک مسأله کمینه‌سازی با دو تابع هدف می‌باشد، شرح داده می‌شود. همان‌طور که در شکل ۵.۳ مشاهده می‌شود، تعدادی نقطه در فضای مربوط به کلیه جواب‌های ممکن مسأله مشخص شده‌اند که هر کدام دارای دو مقدار از توابع هدف هستند. نقطه سه بر تمامی نقاط موجود در فضای A برتری دارد، بدین صورت که مقدار توابع هدف برای این نقطه نسبت به تمامی نقاط موجود در فضای A کم‌تر می‌باشند. لذا این نقاط بر نقاط موجود در صفحه A همیشه غلبه می‌کند. همچنین می‌توان نشان داد که نقطه سه همیشه توسط نقاط موجود در فضای C، مغلوب می‌شود. به‌عنوان نمونه، نقطه سه، نقطه شش را مغلوب می‌کند. اما در مورد وضعیت برتری یا عدم برتری نقاط موجود در فضای B و D نسبت به نقطه سه نمی‌توان مستقیماً قضاوت کرد. چون نقاط موجود در صفحه B در مورد تابع F_1 نسبت به نقطه سه بهتر و در مورد تابع F_2 بدتر هستند. ودر فضای D بالعکس می‌باشد. پس با این مقایسه مستقیم، نمی‌توان گفت کدام نقطه بر دیگری غلبه می‌کند. در چنین مواردی، از حضور سایر حضور سایر اعضای جمعیت برای قضاوت استفاده می‌شود. در ابتدا فرض می‌شود نقطه‌ای در فضای C وجود ندارد، برای



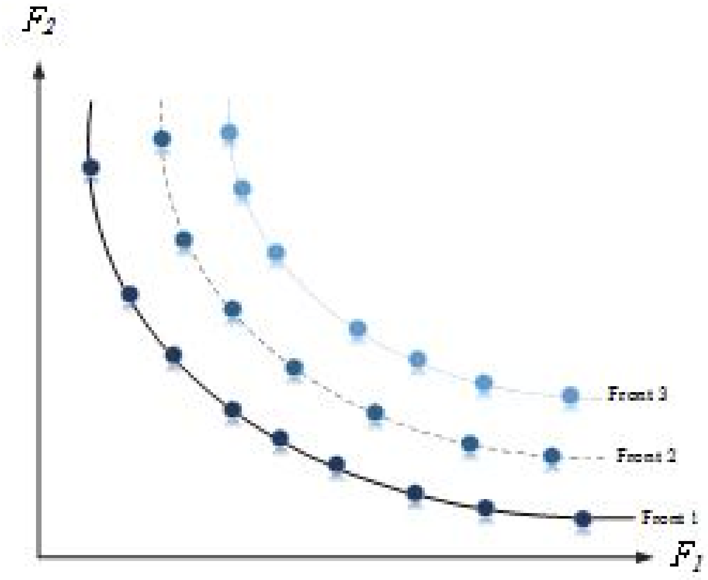
شکل ۵.۳: جواب‌های به‌دست آمده برای یک مسئله کمینه سازی دو هدفه

مقایسه نقاط بین دو و سه همان‌طور که اشاره شد هر کدام در یکی از توابع هدف از دیگری بهتر و در دیگری بدتر می‌باشند در این شرایط باید بررسی کرد که آیا نقطه‌ی دیگری وجود دارد که از هر دو نظر از نقطه سه بهتر باشد. بنابراین چون نقطه دو توسط سایر اعضای جمعیت یکبار مغلوب شده و نقطه سه هرگز مغلوب نشده است، نقطه سه بهتر از نقطه دو می‌باشد.در مورد نقطه چهار و نقطه سه نیز وضع همینطور می‌باشد. از آنجا که نقطه چهار توسط نقطه پنج مغلوب می‌شود ولی نقطه سه توسط هیچ نقطه‌ای مغلوب نمی‌شود. پس نقطه سه در مورد نقطه چهار وضعیت بهتر دارد. اما در مورد نقطه یک و پنج نسبت به سه نمی‌توان اظهار نظر کرد، زیرا این نقاط توسط هیچ نقطه‌ای مغلوب نشده‌اند و هر کدام نسبت به هم یک برتری و یک عدم برتری دارند. لذا نقاط یک و سه و پنج که هرگز مغلوب نشده‌اندو رتبه یک را دارند، جزء نقاط بهینه پارتو می‌باشند.

شکل ۶.۳ ابتدا دسته‌ای از اعضای جمعیت که هرگز مغلوب نشده‌اند مشخص شده و به آن‌ها رتبه یک اختصاص داده شده است. سپس برای سایر اعضاء با نادیده گرفتن اثر اعضا با رتبه یک بر جمعیت، مجدداً مرتب سازی نامغلوب انجام می‌شود. و اعضایی که در این مرحله هر گز مغلوب نشده‌اند با رتبه دوم مشخص می‌شوند. برای بقیه اعضاء با نادیده گرفتن اثر اعضا با رتبه یک و دو بر جمعیت، بار دیگر مرتب سازی نامغلوب را انجام داده و اعضایی که در این مرحله هرگز مغلوب نشده‌اند با رتبه سه مشخص می‌شوند. و این روند تا جایی ادامه می‌یابد که رتبه همه اعضای جمعیت مشخص شود.

حفظ تنوع جواب‌ها (فاصله ازدحامی): مقدار عددی که از محاسبه‌ی مسائل دوهدفه با به‌کار بردن نزدیک‌ترین همسایه‌های آن به‌دست می‌آید فاصله ازدحامی نامیده می‌شود و از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$d_j = \sum_{i=۱}^{n} \frac{f_i(j-۱) - f_i(j+۱)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}$$



شکل ۶.۳: جبهه‌بندی جواب‌ها

به‌طور کلی فاصله ازدحامی جواب‌ها در فضای جواب مسائل چندهدفه به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.
مرحله اول: در هر جبهه، جواب‌ها بر اساس یکی از توابع هدف دلخواه به‌صورت نزولی مرتب می‌شوند (فرض می‌شود که تعداد توابع هدف مسأله و تعداد جواب‌ها در هر جبهه برابر باشد).
مرحله دوم: فاصله ازدحامی نقاط اول و آخر لیست برابر بی نهایت می‌شود (دلیل این امر آن است که در کنار این نقاط، نقاط دیگری وجود ندارد که آن‌ها را پوشش دهد).
مرحله سوم، برای نقاط، دو فاصله ازدحامی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$CD_i = d_i^1 + d_i^2 + \cdots + d_i^m$$

$$d_i^i = \frac{|f_m^{i+1} - f_m^{i-1}|}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}$$

در رابطه بالا منظور از فاصله ازدحامی در تابع هدف، m می‌باشد و به‌منظور فاصله ازدحامی کل، باید برای تمامی توابع هدف محاسبه و سپس جمع شود. ویژگی‌های عمده الگوریتم $NSGA-II$ عبارتند از:

- تعریف فاصله تراکمی به‌عنوان ویژگی جایگزین برای شیوه‌هایی مانند اشتراک برازندگی
- استفاده از عملگر انتخاب تورنومنت دو–دویی
- ذخیره و آرشیو کردن جواب‌های نامغلوب که در مراحل قبلی الگوریتم به‌دست آمده‌اند.

روش کار و الگوریتم کلی $NSGA-II$ که یکی از حالت‌های چندهدفه الگوریتم ژنتیک می‌باشد، به شرح ذیل است:

۱. ایجاد جمعیت اولیه

۲. محاسبه‌ی معیارهای برازندگی

۳. مرتب کردن جمعیت بر اساس شرط‌های غلبه کردن محاسبه فاصله ازدحامی[۲۹]

۴. انتخاب: به محض این‌که جمعیت اولیه بر اساس شرط‌های غلبه کردن مرتب شد، مقدار فاصله ازدحامی در آن محاسبه خواهد شد و انتخاب از میان جمعیت اولیه آغاز می‌شود. این انتخاب بر اساس دو المان صورت می‌پذیرد.

- رتبه جمعیت: جمعیت‌ها در رتبه‌های پایین‌تر انتخاب می‌شوند.
- محاسبه فاصله: با فرض این که p و q دو عضو از یک رتبه باشند، عضوی انتخاب می‌شود که فاصله ازدحامی بیش‌تری دارد. گفتنی است که اولویت انتخاب، ابتدا با رتبه و سپس بر اساس فاصله ازدحامی است.

۵. انجام تقاطع و جهش برای تولید فرزندان جدید

۶. تلفیق جمعیت اولیه و جمعیت به‌دست آمده از تقاطع و جهش

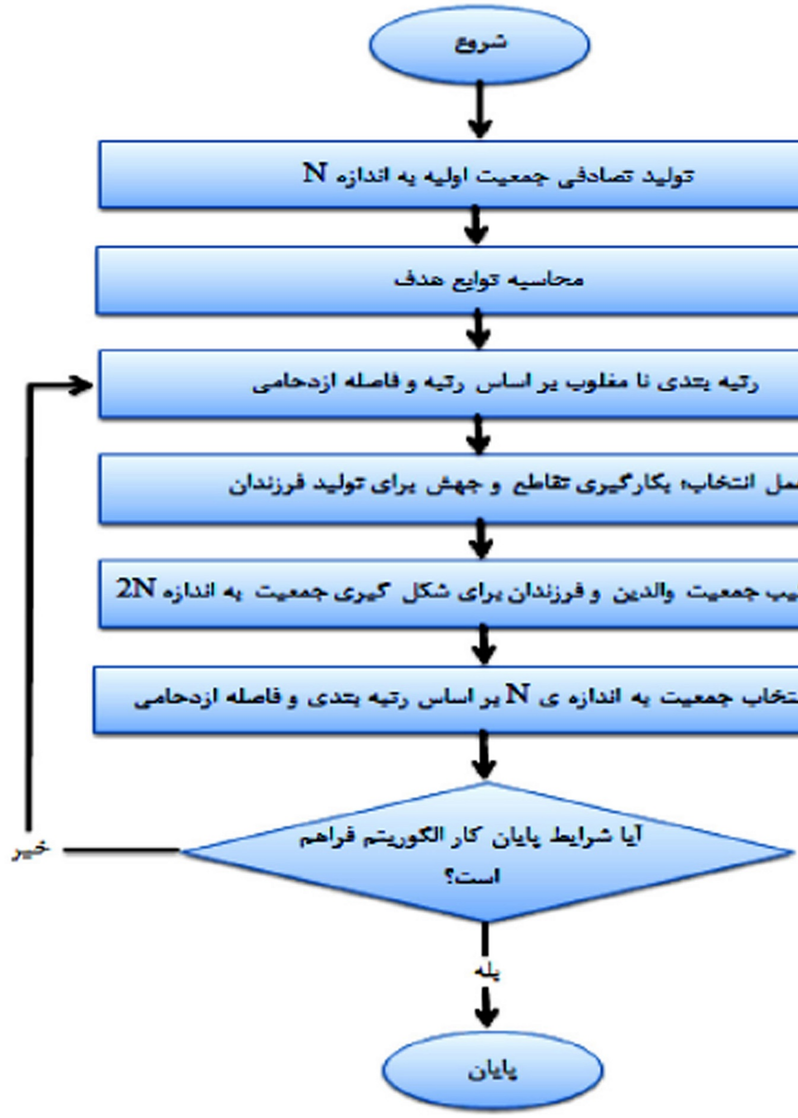
۷. جایگزین کردن جمعیت والدین با بهترین اعضای جمعیت تلفیق شده در مراحل قبل. در مرحله نخست، اعضای رتبه‌های پایین‌تر جایگزین والدهای قبل می‌شوند و سپس بر اساس فاصله ازدحامی مرتب می‌شوند. جمعیت اولیه و جمعیت ناشی از تقاطع و جهش، ابتدا برحسب رتبه دسته‌بندی می‌شوند قسمتی از آن‌ها که دارای رتبه پایین‌تری هستند، حذف می‌گردند. در مرحله بعد، جمعیت باقی مانده بر اساس فاصله ازدحامی مرتب می‌شوند. در این‌جا مرتب‌سازی داخل یک جبهه انجام می‌شود.

۸. تمام مراحل تا نسل (یا شرایط بهینگی) مورد نظر تکرار می‌شوند.
نحوه‌ی کار الگوریتم ژنتیک $NSGA-II$ در شکل (۷.۳) آمده است.

۱.۱۶.۳ دلایل انتخاب الگوریتم $NSGA-II$ نسبت به سایر الگوریتم‌های تکاملی

این الگوریتم برخی از مشکلات الگوریتم‌های پیشین را حل کرده است. برخی از تفاوت‌های این الگوریتم با سایر الگوریتم‌ها به شرح ذیل است:

[۲۹] Crowding Distance



شکل ۷.۳: نحوه‌ی کار الگوریتم ژنتیک رتبه‌بندی نامغلوب $NSGA-II$

- راه‌حل سریع‌تری در مقایسه با سایر روش‌ها در رتبه‌بندی دارد و پیچیدگی الگوریتم‌های قبلی در آن از بین رفته است.

- از فاصله ازدحامی برای به‌دست آوردن جبهه جواب یکنواخت‌تری از سایر الگوریتم‌ها و تخمین دانسته نقاط حول جواب‌ها استفاده می‌کند. گفتنی است که فاصله ازدحامی، فاکتوری است که برای انتخاب بهتر جواب‌ها از نظر پراکندگی بر روی یک جبهه استفاده می‌گردد.

۱۷.۳ الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی مبتنی‌بر تجزیه $MOEA/D$

الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی مبتنی‌بر تجزیه $MOEA/D$ که در سال ۲۰۰۷ توسط ژانگ و لی[۳۰] توسعه داده شد، مسأله چندهدفه را به تعدادی زیر مسأله بهینه‌سازی اسکالر تجزیه می‌کند و آن‌ها را هم‌زمان بهینه می‌نماید. در این روش یک بردار وزن برای هر زیر مسأله تعریف می‌شود و توابع هدف با استفاده از این بردار وزن به یک تابع هدف تجمیع می‌یابند. تعداد زیر مسأله‌ها معمولاً برابر اندازه جمعیت درنظر گرفته می‌شود. و لذا هر عضو جمعیت نماینده یک جواب تولید شده با یک بردار تجمیع می‌باشد. هر زیر مسأله به‌طور تئوریک در نهایت یک جواب از جبهه پارتو را در پایان جست‌جو ارائه می‌دهد. در هر نسل، جمعیت از بهترین جواب‌های یافت شده برای هر زیر مسأله تشکیل می‌شود. روابط همسایگی بین زیر مسأله‌ها بر اساس فاصله بین بردارهای تجمیع دریافت می‌شود. در طی جست‌جو، جواب هر زیر مسأله با همکاری اعضای همسایگی تولید می‌شود. این مرحله، مرحله همکاری[۳۱] نامیده می‌شود. علاوه‌بر این، جواب زیر مسأله‌هایی که در همسایگی زیر مسأله جاری قرار دارند. به آن زیر مسأله، ولی با بردار وزنی تجمیع مربوط به خودش ارائه می‌شود. اگر یک جواب زیر مسأله همسایه، از جواب خود زیر مسأله بهتر باشد، آن جواب جایگزین جواب جاری زیر مسأله می‌شود. در این مرحله، مرحله رقابت[۳۲] نامیده می‌شود. مرحله همکاری و رقابت برای تمامی زیر مسأله‌ها اجرا می‌شود. بنابراین همواره تبادل اطلاعات بین همسایگی‌ها در الگوریتم $MOEA/D$ وجود دارد. هر زیر مسأله فقط با استفاده از اطلاعات زیر مسأله‌های قرار گرفته در همسایگی آن بهینه می‌شود.

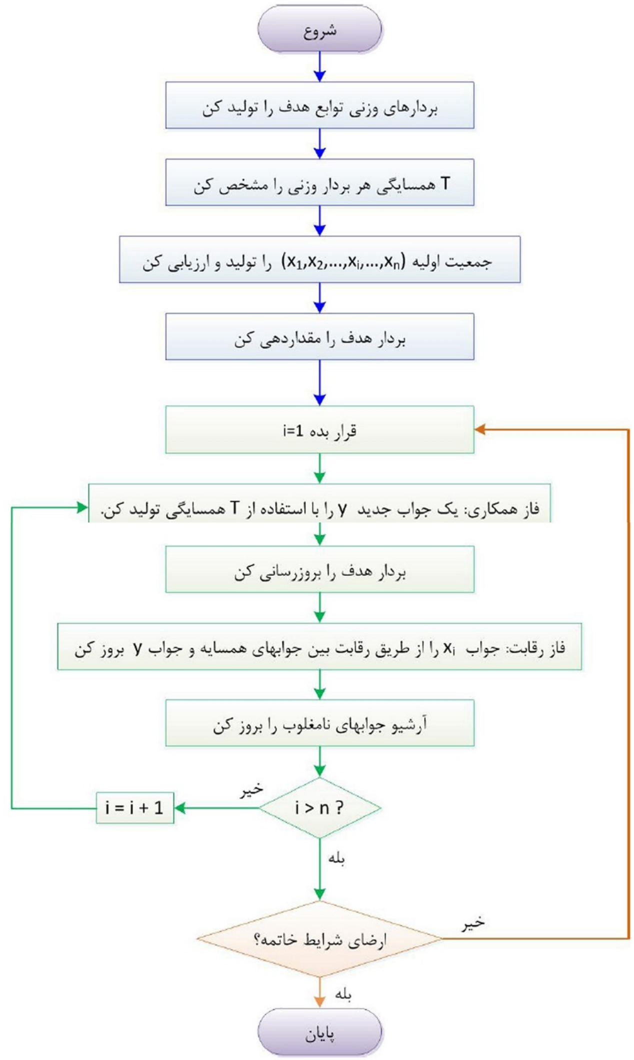
لی و ژنگ (۲۰۰۷) بر اساس چند آزمون شناخته شده و استاندارد بهینه‌سازي با توابع هدف ریاضی صریح گزارش کردند که $MOEA/D$ پیچیدگی محاسباتی کم‌تر و عملکرد بهتري نسبت به الگوریتم $NSGA-II$ دارد. به‌طور خلاصه مزایای روش $MOEA/D$ را می‌توان ۱. حفظ تنوع در جمعیت (به‌ویژه در مسائل بزرگ مقیاس) ۲. یک‌نواختی جواب‌ها در گستره جبهه پارتو ۳. تبادل بهتر اطلاعات و همکاری جواب‌های مختلف در تکامل نسل ۴. پیچیدگی محاسباتی کم‌تر آن نسبت به روش‌های مبتنی‌بر رتبه‌بندی غیر پست ذکر نمود و در مقابل ضعف عمده این روش لزوم تنظیم جواب ایده‌آل و بردارهای وزن است که بر کارایی این روش تأثیر گذار بوده و باید با سعی و خطا تعیین شود.

---

[۳۰] Zhang and Li

[۳۱] Co-operation

[۳۲] Competition



شکل ۸.۳: مراحل مختلف الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی‌بر تجزیه، $MOEA/D$

۱.۱۷.۳ مراحل و زیر مراحل الگوریتم $MOEA/D$

۱. آماده‌سازی

(آ) آرشیو پارتو تقریبی برابر با تهی فرض می‌شود. $Ep = \emptyset$ (یک فضای خالی ایجاد می‌کند).

(ب) مجموعه ضرایب وزنی (بردارهای وزنی) تولید می‌شوند. سپس فاصله اقلیدسی بین هر دو بردار وزنی محاسبه می‌شود و T بردار وزنی نزدیک به هر بردار محاسبه می‌شود.) برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, N$ قرار دهید $(B(i) = \{i_۱, i_۲, \ldots, i_N\}$

(ج) یک جمعیت اولیه $x^1, x^2, \dots, x^N$ به طور تصادفی تولید می‌شود و مقادیر تابع هدف مربوط به آن‌ها محاسبه می‌گردد. $FV^i = F(x^i)$

(د) به‌روزآوری آرمان(نقطه آرمانی_آرمان اولیه)

۲. به‌روز رسانی (حلقه اصلی)

(آ) تولید مثل (تولید فرزندان). دو اندیس دلخواه K و L را انتخاب کنید و یک جواب جدید با استفاده از عملگرّهای ژنتیک تولید کنید.

(ب) یک جواب روش ترمیم برای تولید یک جواب بهتر به‌کار می‌بریم.

(ج) به‌روز رسانی آرمان $\forall j = 1, 2, \dots, m$ (یعنی اگر این پاسخ‌های جدید بهتر از آرمان شدند آرمان را به‌روز رسانی می‌کنیم).

(د) به‌روز رسانی جواب‌های همسایه، برای هر اندیس $j \in B(i)$ اگر $g^{te}(y^{'}|\lambda^j, Z) \leq g^{te}(x^j|\lambda^j, Z)$ قرار دهید $x^j = y^{'}$ و $FV^j = F(y^{'})$. که در آن $g^{te}(x|\lambda^j, Z^*) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i^j f_i(x) - Z_i^*\}$

(ه) به روز رسانی کنید Ep

۳. اگر معیار توقف برقرار بود پایان .در غیر این صورت به مرحله ۲ برگردید.

فصل ۴

بهینه‌سازی چندهدفه‌ی تکاملی برای انتخاب پرتفلیوی فازی

۱.۴ مروری بر کارهای قبل

در حالی‌که مسائل بهینه‌سازی سبدسهام می‌توانند به‌وسیله‌ی به‌کارگیری تکنیک‌های بهینه‌سازی کلاسیک به‌طور موثری حل شوند، اما اگر شرایط اضافی مانند تنوع‌سازی و محدودیت‌های کاردینالیتی وارد شوند، اشکالاتی به‌وجود می‌آید که مهمترین آن‌ها تولید سبدسهام شدنی است که تقاضاهای تصمیم گیرنده را برآورده کند. علاوه بر این، در روش‌های کلاسیک فرآیند یافتن مجموعه‌ای از سبدسهام کارا واضح نمی‌باشد.

باید اشاره کرد که مدیریت جواب‌های غیرمغلوب از نظر محاسباتی در مورد بهینه‌سازی دوهدفه آسان است اما زمانی‌که چندهدفه می‌شود بسیار پیچیده‌تر می‌شود.

در این مورد، کارایی بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی برای حل مسئله انتخاب سبدسهام چندهدفه ثابت شده است، که این امر به‌خاطر توانایی آن در بررسی معیارهای چندگانه و محدودیت در یک زمان می‌باشد [۲۴]. دلیل این موفقیت آن است که آن‌ها با مسئله به صورت جعبه سیاه عمل می‌کنند، یعنی فقط به ورودی‌ها و خروجی‌ها توجه دارند بدون آن‌که نیازمند اطلاعات اضافی مانند مشتقات یا ویژگی‌های خاص تابع هدف باشند. به‌عنوان مثال چانگ و همکاران [۷] این نوع از الگوریتم‌ها را برای مدل میانگین_واریانس بکار برده‌اند. آن‌ها نشان دادند که محدود

کردن میزان دارایی‌ها در یک سبدسهام (یعنی وارد کردن محدودیت‌های کاردینالیتی) و درنظر گرفتن کران بالا و پایین برای بودجه سرمایه‌گذاری شده در هر دارایی، شکل منحنی بهینه پارتو را اصلاح می‌کند، و نیز نشان دادند که در حضور این محدودیت‌ها، تقریب زدن مرز پارتو مدل MV (میانگین_واریانس) بسیار دشوار می‌باشد زیرا این مدل ممکن است گسسته باشد.
به منظور بررسی محدودیت‌های کاردینالیتی در مدل بهینه‌سازی دوهدفه MV چند استراتژی ترکیبی محدود استفاده شده است. در [۲۷] ترکیبی از روش شبیه‌سازی شده تبریزی[۱] و فرآیند بهینه سازی تکاملی پیشنهاد شده است در حالی‌که حورال_اسکادرو [۲]و همکارانش [۲۹] از یک استراتژی ترکیبی استفاده کرده‌اند، که از الگوریتم‌های ژنتیک و برنامه‌ریزی درجه دوم برای انتخاب زیر مجموعه بهینه شده دارایی‌ها استفاده می‌کند. در [۳۱] یک الگوریتم معرفی شده با منطق فازی به‌منظور بررسی توازن توابع هدف ارائه شده است. در این مقاله همچنین عملکرد چندین الگوریتم EMO[۳] برای حل مسئله بهینه‌سازی مقید سبدسهام MV تجزیه و تحلیل شده است. برای مدل MV دارای محدودیت کاردینالیتی، جیم و همکاران [۹] یک مدل مبتنی‌بر عملگرهای متنوع مناسب و برخی تکنیک‌ها برای مدیریت محدودیت‌ها را پیشنهاد می‌کنند. اخیراً در [۲] سه الگوریتم EMO به منظور بررسی مرز بهینه پارتو که در آن‌ها کاردینالیتی در مدل MV به‌عنوان یک هدف اضافی وارد شده است که باید بهینه شود، ارائه شده است. همچنین در [۳] نتایجی ارائه شده است که در آن‌ها ۵ روش EMO برای مدل MV با محدودیت‌های کاردینالیتی با تعداد زیادی دارایی به کار رفته است، که برتری واضح الگوریتم‌های تکاملی $SPEA$۲ و $NSGAII$ را نشان می‌دهد.
اخیراً در [۲] یک عملگر جهشی جدید برای حل مدل MV دارای محدودیت کاردینالیتی، پیشنهاد شده است که با عملگر جهشی چند جمله‌ای کلاسیک و همچنین با $NSGAII$ و با $SPEA$۲ مقایسه شده است.
محققان دیگر مدل‌های انتخاب سبد سهام را با روش‌های جایگزین اندازه‌گیری ریسک و یا محدودیت‌های اضافی دیگر را به وسیله‌ی الگوریتم‌های EMO حل کرده‌اند. برای مثال در [۵] برای حل مسائل انتخاب سبدسهام بهینه دوهدفه با اندازه‌گیری‌های متفاوت ریسک (واریانس، نیم_واریانس، انحراف مطلق) از یک الگوریتم ژنتیک استفاده شده است که شامل چولگی به عنوان یک محدودیت می‌باشد. این محققان این حقیقت را بیان کردند که سرمایه‌گذاران نباید اندازه‌های سبدسهام را بیش از یک سوم کل میزان دارایی‌ها در نظر بگیرند زیرا آن‌ها به وسیله‌ی دیگر سبدسهام‌ها با عناصر مثبت کم‌تر، مغلوب می‌شوند.
قابل ذکر است که اکثر روش‌های تکاملی که بیان شده است برای حل توسعه‌هایی از مدل MV به‌کار برده می‌شوند که در آن‌ها بازده مورد انتظار و ریسک دارایی‌ها به عنوان پارامترهای مشخص و معلوم در نظر گرفته می‌شوند. اما رویکرد انتخاب فازی سبدسهام امکان استفاده

[۱] Testimonial
[۲] Hural Scador
[۳] Evolvtionary Multi-Objective

از اعداد فازی را برای ارائه و نمایش انتظارات سرمایه‌گذار برای بازده مورد انتظار و ریسک یا برای کمی‌سازی عدم قطعیت بازده‌های آینده دارایی‌ها با استفاده از اعتبار یا توزیع‌های احتمالی فراهم می‌کند. به‌عنوان مثال [۶] یک مدل فازی میانگین ـ واریانس ـ چولگی را با کاردینالیتی و محدودیت‌ها در نظر می‌گیرد که با استفاده از شبیه‌سازی فازی و الگوریتم ژنتیک (نخبه‌گرا) حل می‌شود.

در این پایان‌نامه یک الگوریتم ژنتیک دوهدفه برای حل ریسک میانگین نزولی با محدودیت‌های کاردینالیتی مسئله انتخاب سبدسهام به‌کار رفته است که در آن برآورد بازده‌های نامعلوم از طریق اعداد فازی ذوزنقه‌ای انجام شده است.

در [۱۹] یک مدل انتخاب سبد سهام اعتباری [۴] چند معیاره پیشنهاد شده است که بازده‌های کوتاه و دراز مدت و نقدینگی را به حداکثر می‌رساند و ریسک سبدسهام را به‌عنوان یک محدودیت شانس (احتمال) فازی مبتنی بر اعتبار در نظر گرفته شده است.

به طور کلی برآورد فازی توزیع احتمال ذوزنقه‌ای به صورت تابعی به‌دست می‌آید. این مدل که شامل بودجه، کران و محدودیت‌های کاردینالیتی می‌باشد، با استفاده از الگوریتم ترکیبی حل شده است که در آن شبیه‌سازی فازی با یک الگوریتم ژنتیک کدگذاری شده است.

۲.۴ مدل میانگین، ریسک نامطلوب و چولگی احتمالی $(MDRS)$

در این بخش ما به توضیح مدل $MDRS$ [۵] که در [۳۴] پیشنهاد شده است می‌پردازیم و سپس با استفاده از الگوریتم‌های جدیدی که در ادامه معرفی می‌کنیم آن‌را حل می‌کنیم. مدل MVS که در آن عدم قطعیت بازده تک‌تک دارایی‌ها توسط مقادیر فازی تقریب می‌شد، قبلا با استفاده از تحلیل بازه‌ای یا اندازه‌گیری اعتباری بررسی شده است [۲۶] و [۶]. اما این‌کار برای مدل فازی $MDRS$ انجام شده است. مدل $MDRS$ احتمالی را با استفاده از یک رویکرد بهینه‌سازی چندهدفه معرفی می‌کنیم که در آن توابع هدف توسط مقادیر حقیقی $S(\widetilde{P}_X)$، $W(\widetilde{P}_X)$ و $\bar{E}(\widetilde{P}_X)$ که در بخش قبلی معرفی شدند، بیان می‌شوند. توجه شود که این توابع هدف غیرخطی هستند زیرا به دهک‌های بازده‌های سبدسهام X وابسته هستند. طبق معمول برای انتخاب سبدهای سهام کارا، گشتاورهای فرد را ماکزیمم می‌کنیم و مقدار ریسک نامطلوب را مینیمم می‌کنیم.

یک بازار سهام با N دارایی مالی که دارای نرخ بازده نامشخص است درنظر بگیرید. سرمایه‌گذار می‌خواهد بداند بهترین تخصیص سرمایه‌اش بین N دارایی چگونه است به‌طوری که بتواند حداکثر بازده سرمایه‌گذاری را در پایان دوره داشته باشد.

---
[۴] credibilistic

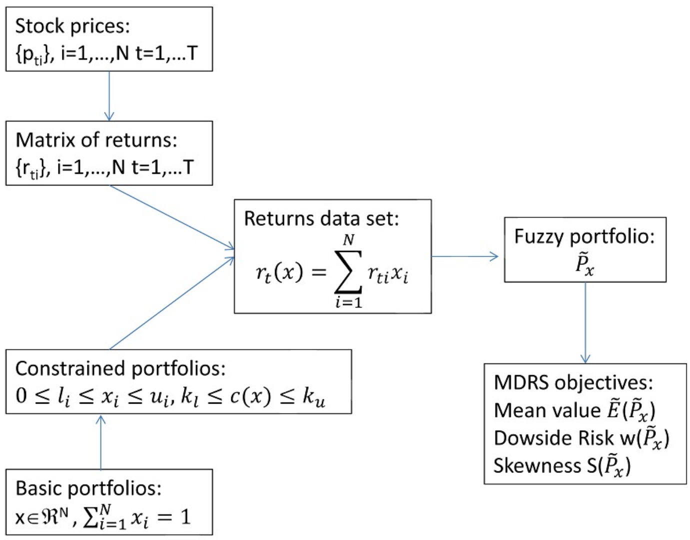
[۵] Mean-Downside Risk-Skewness

سبدسهام $X = (x_۱, x_۲, \dots, N)^T$ را در نظر بگیرید که در آن، کل سرمایه اختصاص داده شده است و x_i کسری از کل سرمایه‌گذاری باشد که به دارایی iـ ام برای $i = ۱, ۲, \dots, N$ اختصاص داده شده است. سبدسهام باید در شرط $\sum_{i=۱}^{N} x_i = ۱$ صدق کند. به‌علاوه شرط غیر منفی بودن هر سهم، یعنی $x_i \geq ۰ \quad \forall(i = ۱, ۲, \dots, N)$، هنگامی که فروش استقراضی نداشته باشیم نیز باید برقرار باشد.

در مدل $MDRS$، بازده مورد انتظار دارایی‌های i و گشتاورهای احتمالی آن به‌عنوان پارامترهای معلوم مسئله درنظر گرفته نمی‌شوند.

در مرجع [۳۴] برای یک سبدسهام فرض می‌کنند که ترکیب‌بندی سبدسهام X مشخص است و بازده‌های تاریخی آن‌را برای کمی‌سازی عدم قطعیت بازده آینده سرمایه‌گذاری درنظر گرفته‌اند. در واقع توزیع احتمالی سبدسهام داده شده به‌جای استفاده از تجمیع توزیعات احتمالی هر یک از دارایی‌ها، به‌صورت مستقیم تقریب‌زده می‌شود. شکل ۱.۴، ساختار کلی روش مدل‌سازی $MDRS$ را نشان می‌دهد. براین اساس، بازده سبد سهام X به‌وسیله‌ی یک عدد فازی LR مدل‌سازی می‌شود که با $\widetilde{P}_X = (p_l, p_u, c, d)_{L_{\Lambda} R_{\rho}}$ نشان داده می‌شود، که در آن هسته و گسترده‌ی آن مستقیماً به‌عنوان توابعی از صدک‌های q_j در حالی‌که پارامترهای شکلی با استفاده از فرآیند رتبه‌بندی معکوس و با استفاده از صدک‌هایی با احتمال ٪۵۰ واقعی بودن، محاسبه می‌شوند.

این روش مدل‌سازی شده قبلاً برای سبدسهام با رتبه‌بندی فازی [۵] و همچنین برای به دست



شکل ۱.۴: ساختار کلی روش مدل‌سازی $MDRS$

آوردن سبدسهام کارا با استفاده از روش‌ها و روندهای بهینه‌سازی دوهدفه استفاده شده‌است [۳۵]. برای ایجاد و ساخت سبدسهام کارا، مدل $MDRS$، بازده مورد انتظار احتمالی، نیم انحراف مطلق زیر میانگین(یعنی ریسک نزولی) و چولگی هر سبدسهام X را که به‌وسیله‌ی

عدد فازی $\widetilde{P}_X$ مدل‌سازی شده‌است را درنظر می‌گیرد.
به‌علاوه، مدل $MDRS$ روی بودجه‌ای که در هر سهم i باید سرمایه‌گذاری شود با استفاده از کران‌های پایین و بالای l_i و u_i برای هر $i = ۱, ۲, \dots, N$ محدودیت‌هایی ایجاد می‌کند. علاوه‌بر این، به منظور کنترل تعداد سرمایه‌های هر سبدسهام، یک محدودیت اضافی اعمال می‌شود تا اطمینان حاصل شود که تعداد مؤلفه‌های غیر منفی در هر سبدسهام در یک بازده $[k_l, k_u]$ برای مقادیر داده شده k_l و k_u قرار دارند. در این محدودیت ما از تابع $C(X) = rank(diag(x))$ (رتبه ماتریس قطری که عناصر روی قطر آن عناصر بردار X هستند) استفاده می‌کنیم که تعداد سهام مثبت در سبدسهام x را نشان می‌دهند. در ادامه به توضیح توابع هدف مدل $MDRS$ می‌پردازیم.

۳.۴ توابع هدف مدل $(MDRS)$

۱.۳.۴ مقدار میانگین احتمالی

ما امید ریاضی بازه‌ای_ مقدار عدد فازی $\widetilde{P}_\alpha = (P_l, P_u, c, d)$ که مبتنی‌بر α _برش سطح است و با $[\widetilde{P}_X]^\alpha = [\inf \widetilde{P}_\alpha, \sup \widetilde{P}_\alpha]$ برای $۰ \leq \alpha \leq ۱$، نشان داده می‌شود را محاسبه می‌کنیم. می‌توان دید که برای اعداد فازی LR توانی $\widetilde{P}_\alpha = (P_l, P_u, c, d)$ به‌ترتیب داریم: $\inf \widetilde{P}_\alpha = p_l - c(۱-\alpha)^{\frac{۱}{\Lambda}}$ و $\sup \widetilde{P}_\alpha = p_u + d(۱-\alpha)^{\frac{۱}{\Lambda}}$. امید ریاضی بازه‌ای_ مقدار سبدسهام $\widetilde{P}_X$ که در زیر تعریف شده در [۱۵] معرفی شده است.

$$E(\widetilde{P}_X) = \left[\int_۰^۱ \inf \widetilde{P}_\alpha \mathrm{d}\alpha, \sup \int_۰^۱ \widetilde{P}_\alpha \mathrm{d}\alpha\right]$$
$$= [p_l - c\frac{\Lambda}{\Lambda+۱}, p_u + d\frac{\rho}{\rho+۱}]$$

ما نقطه میانی بازه ذکر شده که مقدار میانگین احتمالی $\widetilde{P}_X$ است را به‌عنوان بازده موردانتظار قطعی سبدسهام درنظر می‌گیریم یعنی:

$$E(\widetilde{P}_X) = \frac{p_l + p_u}{۲} + \frac{d}{۲}\frac{\rho}{\rho+۱} - \frac{c}{۲}\frac{\Lambda}{\Lambda+۱}$$

تعاریف دیگری از میانگین بازه‌ای وزن‌دار که بر اساس α_ برش می‌باشند می‌توانند مورد استفاده قرار گیرد. به عنوان مثال با استفاده از تعاریفی که در [۱۷] آورده شده است می‌توان اهمیت مجموعه‌های α_ سطح را در مسئله دخیل کرد. در [۳۵] روابط بین دو امید بازه‌ای_ مقدار را مشاهده می‌کنیم. برای این‌که مقدار بازده مورد انتظار یک سبدسهام را مشخص کنیم ما از امیدریاضی بازه‌ای_ مقدار معرفی شده در [۱۵] استفاده می‌کنیم. برخی محققان بر این باور هستند که اطلاعات نادقیق درباره‌ی میانگین و واریانس را می‌توان با استفاده از بازه‌ها بهتر نشان داد. از این‌رو، مسئله انتخاب سبدسهام را به عنوان یک مدل برنامه‌ریزی بازه‌ای

مدل کرده‌اند (برای نمونه [۲۳] و [۱۶] و [۶] را ببینید).
با این حال، ما با روش غیر فازی‌سازی معمولی که مبتنی‌بر نمایش قطعی گشتاورهای احتمالی است کار می‌کنیم که ارزش و ابهام یک عدد فازی را نشان می‌دهد.

۲.۳.۴ ریسک نامطلوب احتمالی

فرض کنیم سرمایه‌گذاران بازده را دوست دارند و از ریسک خوششان نمی‌آید. بر اساس این مشاهده که سرمایه‌گذاران تنها نگران ریسک به‌دست آوردن یک بازده کم‌تر از بازده مورد انتظار هستند، ریسک کاهشی (نامطلوب) پیشنهاد شد است که این حقیقت را پوشش دهد. چون ریسک کاهشی تنها انحرافات منفی از بازده مورد انتظار را جریمه می‌کند. ما ریسک نامطلوب احتمالی را با استفاده از عدد فازی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\widetilde{D}_X = \max\{۰, E(\widetilde{P}_X) - \widetilde{P}_X\}$$

برای تعیین شاخصه‌های اصلی $\widetilde{D}_X$ ما صفر را یک عدد فازی درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $E(\widetilde{P}_X) = (E_L, E_U, , ۰, ۰)_{L_۱ R_۱}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است که در آن $E_U = p_u + d\frac{\rho}{\rho+۱}$ و $E_L = p_l - c\frac{\Lambda}{\Lambda+۱}$ ([۳۴] را ببینید).
سپس با استفاده از قوانین حسابی مناسب برای مجموعه‌های αـ سطح، نتیجه می‌گیریم که $\widetilde{D}_X$ عدد فازی قطعه‌ـ قطعه می‌باشد.

$$\widetilde{D}_X = (۰, p_u - p_l + d\frac{\rho}{\rho+۱}, ۰, c)$$

و αـ برش آن به‌صورت زیر است:

$$[\widetilde{D}_X]^\alpha = [۰, p_u - p_l + d\frac{\rho}{\rho+۱} + c(۱-\alpha)^{\frac{۱}{\Lambda}}]$$

قابل ذکر است که تابع مرجع سمت راست $\widetilde{D}_X$ با تابع مرجع سمت چپ $\widetilde{P}_X$ یکسان می‌باشد.
امید ریاضی بازه‌ای‌ـ مقدار ریسک نزولی $\widetilde{D}_X$ به‌صورت زیر است:

$$E(\widetilde{D}_X) = (۰, p_u - p_l + d\frac{\rho}{\rho+۱} + c\frac{\Lambda}{\Lambda+۱})$$

که شامل دامنه اندیس‌های هسته $\widetilde{P}_X$ می‌باشد. در این پایان‌نامه ما از

$$w(\widetilde{P}_X) = p_u - p_l + d\frac{\rho}{\rho+۱} + c\frac{\Lambda}{\Lambda+۱}$$

برای اندازه‌گیری ریسک نامطلوب قطعی سرمایه‌گذاری استفاده می‌کنیم که طول امید ریاضی بازه‌ای‌ـ مقدار ریسک نزولی است.

۳.۳.۴ چولگی احتمالی

اگر دلایلی وجود داشته باشد که ما به این اعتقاد برسیم که بازگشت سرمایه به‌طور نامتقارن در اطراف میانگین توزیع شده است از گشتاورهای بزرگ‌تر می‌توان برای اندازه‌گیری عدم اطمینان بازگشت سرمایه استفاده کرد. چولگی، که مبتنی‌بر گشتاور سوم است، یک قید خوب برای اندازه‌گیری عدم تقارن توزیع احتمالی یک متغیر تصادفی است. چولگی منفی در توزیع بازده‌ها نشان می‌دهد که به‌طور یکنواخت در اطراف میانگین توزیع نشده‌اند و کشیدگی سمت راست توزیع کوتاه‌تر از کشیدگی سمت چپ است. یک چولگی مثبت خلاف آن‌را نشان می‌دهند. یعنی کشیدگی سمت چپ کوتاه‌تر از کشیدگی سمت راست می‌باشد. چولگی مثبت سبدسهام برای سرمایه‌گذار جذاب است زیرا احتمال سود بازده‌هایی که از بازده مورد انتظار دورتر هستند از ضرر آن‌ها بیش‌تر است. گشتاور احتمالی سوم حول مقدار_ میانگین احتمالی $\bar{E}(\widetilde{P}_X)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_3(\widetilde{P}_X) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\inf \widetilde{P}_\alpha - \bar{E}(\widetilde{P}_X)]^3 \mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}\int_0^1 [\sup \widetilde{P}_\alpha - \bar{E}(\widetilde{P}_X)]^3 \mathrm{d}\alpha$$

گزاره ۱.۳.۴. فرض کنید $\widetilde{P}_X = (p_l, p_u, c, d)_{L\Lambda R_\rho}$ بازده فازی یک سبدسهام X داده شده باشد سپس گشتاور احتمالی سوم حول مقدار میانگین احتمالی $\bar{E}(\widetilde{P}_X)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\mu_3(\widetilde{P}_X) = &\frac{1}{4}\left(d\frac{\rho}{\rho+1} - c\frac{\Lambda}{\Lambda+1}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(d^3\frac{\rho}{\rho+1} - c^3\frac{\Lambda}{\Lambda+1}\right)\\ &+ \frac{3(p_u-p_l)}{4}\\ &* \left[d^2\left(\frac{\rho}{\rho+2} - \frac{\rho^2}{(\rho+1)^2}\right) - c^2\left(\frac{\Lambda}{\Lambda+2} - \frac{\Lambda^2}{(\Lambda+1)^2}\right)\right]\\ &- \frac{3}{4}\left(d^2\frac{\rho}{\rho+2} + c^2\frac{\Lambda}{\Lambda+2}\right)\left(d\frac{\rho}{\rho+1} - c\frac{\Lambda}{\Lambda+1}\right).\end{aligned}$$

برهان. $\mu_3(\widetilde{P}_X)$ را می‌توان به‌صورت $\mu_3(\widetilde{P}_X) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$ نوشت که در آن

$$I_1 = \int_0^1 [\inf \widetilde{P}\alpha - \bar{E}\widetilde{P}_X]^3 \mathrm{d}\alpha$$
$$\int_0^1 \left[p_l - c(1-\alpha)^{\frac{1}{\Lambda}} - \left(\frac{p_l+p_u}{2} + \frac{d}{2}\frac{\rho}{\rho+1} - \frac{c}{2}\frac{\Lambda}{\Lambda+1}\right)\right]^3 \mathrm{d}\alpha$$

و

$$I_۲ = \int_۰^۱ [\sup \widetilde{P}\alpha - \bar{E}\widetilde{P}_X]^۳ \mathrm{d}\alpha$$
$$\int_۰^۱ \left[p_u + d(۱-\alpha)^{\frac{۱}{\rho}} - \left(\frac{p_l + p_u}{۲} + \frac{d}{۲}\frac{\rho}{\rho+۱} - \frac{c}{۲}\frac{\Lambda}{\Lambda+۱}\right)\right]^۳ \mathrm{d}\alpha$$

برای راحتی کار از نماد زیر استفاده کنیم: $a = c\frac{\Lambda}{\Lambda+۱} - d\frac{\rho}{\rho+۱}$ و $b = p_l - p_u$. با انتگرال‌گیری فرمول زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} I_۱ &= \frac{۱}{۸}(a-b)^۳ - \frac{۳}{۴}(a-b)^۲ c\frac{\Lambda}{\Lambda+۱} \\ &= \frac{۳}{۲}(a-b)c^۲\frac{\Lambda}{\Lambda+۲} - c^۳\frac{\Lambda}{\Lambda+۳} \\ I_۲ &= \frac{۱}{۸}(a+b)^۳ + \frac{۳}{۴}(a+b)^۲ d\frac{\rho}{\rho+۱} \\ &= \frac{۳}{۲}(a+b)d^۲\frac{\rho}{\rho+۲} + d^۳\frac{\rho}{\rho+۳} \end{aligned}$$

بنابراین با اضافه کردن این عبارات ما به فرمول سومین گشتاور احتمالی $\mu_۳(\widetilde{P}_X)$ دست می‌یابیم. □

همچنین به‌سادگی می‌توان نشان داد که برای اعداد فازی متقارن، وقتی‌که $c = d$ و $\rho = \Lambda$ باشد، مقدار سومین گشتاور احتمالی صفر خواهد شد. به‌علاوه این گشتاور احتمالی وابسته به تفاوت بین فواصل سمت چپ و راست است. برای این‌که یک مقدار مناسبی از عدم تقارن بازده در یک سبدسهام به‌دست آوریم، ضریب چولگی احتمالی را به‌شکل $S(\widetilde{P}_X)$ تعریف کنیم.

تعریف ۱.۳.۴. ضریب چولگی احتمالی سبدسهام $\widetilde{P}_X(p_l, p_u, c, d)_{L_\Lambda R_\rho}$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

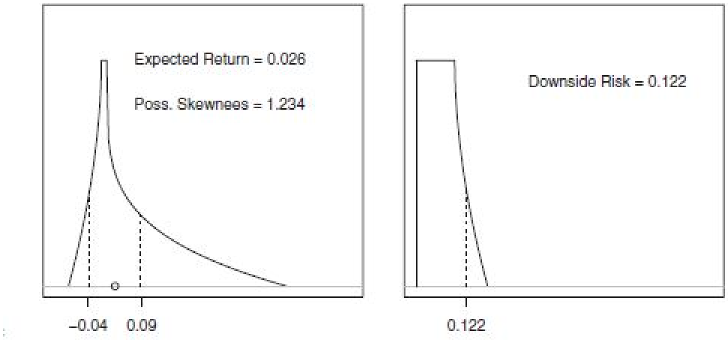
$$S(\widetilde{P}_X) = \frac{\mu_۳(\widetilde{P}_X)}{w(\widetilde{P}_X)^۳}$$

گزاره ۲.۳.۴. فرض کنید $\widetilde{P}_X(p_l, p_u, c, d)_{L_\Lambda R_\rho}$ بازده فازی ذوزنقه‌ای سبدسهام X باشد. پس در این حالت ضریب چولگی احتمالی عبارت است از:

$$S(\widetilde{P}_X) = \frac{۱}{۱۶}\frac{d^۲ - c^۲}{w(\widetilde{P}_X)^۲}$$

برهان. برای اعدادفازی ذوزنقه‌ای، پارامترهای شکلی توابع مرجع عبارت‌اند از $\rho = \Lambda = ۱$. لذا با توجه به گزاره ۱.۳.۴ گشتاور احتمالی سوم به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mu_۳(\widetilde{P}_X) = \frac{۱}{۳۲}(d-c)^۳ + \frac{p_l - p_u}{۱۶}(d^۲ - c^۲) + \frac{۱}{۸}dc(d-c).$$



شکل ۲.۴: .توابع عضویت و انتظارات با بازه زمانی گراف سمت چپ مربوط به $\widetilde{P}_X$ و گراف سمت راست مربوط به $\widetilde{D}_X$. میانگین مقادیر متوسط و ضریب ناپایداری آن‌ها نیز ترسیم شده است.

عبارت فوق را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}\mu_3(\widetilde{P}_X) &= \frac{1}{16}(d-c)\left[\frac{1}{2}(d^2-c^2)+2dc\right]+\frac{p_u-p_l}{16}(d^2-c^2)\\ &= \frac{1}{16}(d^2-c^2)\left[p_u-p_l+\frac{d+c}{2}\right]\end{aligned}$$

از طرفی برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای داریم $w(\widetilde{P}_X)=p_u-p_u-\frac{d+c}{2}$. لذا نتیجه حاصل می‌شود.
□

در شکل ۲.۴ توابع عضویت اعداد فازی توانی نوع LR که ما برای اندازه‌گیری عدم قطعیت بازده‌های X استفاده می‌کنیم نشان داده شده است. در این شکل همچنین مقادیر قطعی بازده مورد انتظار، ریسک رو به پایین و ضریب چولگی احتمالی سبدسهام فازی نشان داده شده است.

۴.۴ مدل $(MDRS)$

بر اساس فرضیات از پیش گفته شده، مدل $MDRS$ به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$MDRS\begin{cases}\max \quad \bar{E}(\widetilde{P}_x)\\ \min \quad w(\widetilde{P}_x)\\ \max \quad S(\widetilde{P}_x)\\ s.t. \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 & \text{(محدودیت بودجه)},\\ k_l \le c(x) \le k_u & \text{(محدودیت کاردینالیتی)},\\ 0 \le l_i \le x_i \le u_i & \text{(محدودیت کران‌ها)},\\ \forall i = 1,2,\dots,N.\end{cases} \tag{۱.۴}$$

به‌منظور محاسبه مقادیر دقیق این توابع هدف، ما نیاز داریم تا مقادیر توزیع احتمالی بازده $\widetilde{P}_x$ را بدانیم. بنابراین مدل $MDRS$ یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی و غیر محدب است. محدودیت کاردینالیتی را می‌توان به گونه‌ای در نظر گرفت که در آن تعداد دارایی‌های یک سبدسهام یک مقدار مشخص باشد.

در ادامه‌ی این فصل ما فرض می‌کنیم که کاردینالیتی سبدسهام در مدل $MDRS$ عدد داده شده $k \in N$ باشد به عبارت دیگر $k_l = k = k_u$ یعنی محدودیت کاردینالیتی در فرمول (۱.۴) از الان به بعد به‌صورت $C(x) = k$ تعریف می‌شود. این بدان معناست که هر سبدسهام شدنی از فرمول (۱.۴) باید دقیقاً شامل K تا از N دارایی‌های موجود باشد.

همچنین توجه داشته باشید که محدودیت‌های کاردینالیتی شامل تابع شبه مقعر $C(X)$ که نشان می‌دهد مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، $NP-hard$ است. این اظهار را می‌توان به وسیله‌ی این واقعیت که پیدا کردن یک زیر مجموعه از دارایی‌ها برای ایجاد کردن یک سبدسهام بسیار دشوار است را در [۲۹] مشاهده نمود. مهم است که اشاره کنیم که تعاریف دیگر میانگین احتمالی مورد انتظار و ریسک در تحقیقات قبلی سبدسهام فازی در دسترس است و این‌که آن انتخاب‌ها در این‌جا تأثیری بر عملگرهای تکاملی پیشنهاد شده در بخش ۵.۴ برای ایجاد سبدسهام‌های کارا و موثر که بتواند برای به‌دست آوردن منحنی بهینه پارتو در مسائل انتخاب سبدسهام محدود شده کاردینالیتی با معیارهای جایگزین به‌کار برود، ندارد.

۵.۴ EMO برای مسئله انتخاب پرتفلیو $MDRS$

تا کنون مسئله $MDRS$ به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی سه‌هدفه حل نشده است. در [۳۴] مرز بهینه پارتو به وسیله‌ی بازسازی فرمول مدل $MDRS$ به دو مسئله بهینه‌سازی دوهدفه تقریب زده شد که دو هدف را روی ناحیه شدنی بهینه می‌کند و هدف سومی را به‌عنوان یک محدودیت در نظر گرفته می‌شود. در اولین مسئله بهینه‌سازی دو هدفه، آن‌ها $S(\widetilde{P}_X)$ و $w(\widetilde{P}_X)$ را با استفاده از محدودیت $\bar{E}(\widetilde{P}x) \geq r_f$ بهینه کردند که در آن r_f نرخ پیشنهاد شده برای سرمایه‌گذاری بدون ریسک یا یک سطح بازده قابل قبول سرمایه‌گذاری برای سرمایه‌گذاران است. دومین مسئله بهینه‌سازی دو هدفه، $\bar{E}(\widetilde{P}x)$ و $w(\widetilde{P}_X)$ را بهینه و محدودیت $S(\widetilde{P}_X) \geq r$ که در آن r کمیتی غیر منفی است را در نظر می‌گیرد. در [۳۴] یک الگوریتم ژنتیک دو هدفه ویژه برای حل این دو مسئله دو هدفه برای به‌دست آوردن سبدسهام‌های غیر مغلوب، ارائه شده است.

از نتایج به‌دست آمده، محققان نشان دادند که قرار دادن چولگی به‌عنوان یک هدف در یک چارچوب بهینه‌سازی مقید دو هدفه محدود شده، زمانی‌که از یک شیوه فازی برای کمی‌سازی عدم قطعیت استفاده می‌شود تغییرات مهمی را در الگوهای سرمایه‌گذاری ایجاد می‌کند. برای جزئیات بیش‌تر به [۳۴]، مراجعه کنید. اگرچه یافته‌های جالبی به‌دست آمد، ولی روش ارائه شده در [۳۴]، برای تخمین زدن مرز بهینه پارتو در مدل $MDRS$ دارای برخی معایب است.

از آن‌جایی که سه معیار مسئله $MDRS$ به‌طور هم‌زمان بهینه‌سازی نمی‌شوند، سبدسهام‌های غیرمغلوب به‌دست آمده در [۳۴]، مرزهای بهینه پارتو مسائل دو هدفه را تقریب می‌زنند، که ممکن است به زیر مجموعه‌های مرز بهینه پارتو در مسائل سه هدفه متناظر شوند. به این دلیل ممکن است بخشی از مرز بهینه پارتو مسئله سه هدفه وجود داشته باشد که تخمین زده نشده باشد. علاوه‌بر این ممکن است جواب‌های کارایی برای مسائل بهینه‌سازی دوهدفه وجود داشته باشد که متناظر با جواب‌های مغلوب مسئله $MDRS$ باشد، که این نکته می‌تواند به راحتی اثبات گردد. با در نظر گرفتن این دلایل، انگیزه اصلی این فصل از دو جهت می‌باشد: نه تنها هدف ما حل مدل $MDRS$ به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی سه هدفه به‌وسیله‌ی چندین الگوریتم EMO می‌باشد بلکه تمایل داریم نتایج جالبی درباره‌ی ارتباطات بین اهداف از دیدگاه و منظر چندهدفه‌ی کلی نیز استخراج کنیم. روش‌های EMO بسیاری وجود دارد که می‌تواند در مسائل $MDRS$ سه هدفه به‌کار رود. در ابتدا این الگوریتم‌ها یک مجموعه جواب‌ها را ایجاد می‌کند. به‌عبارت ساده‌تر، در هر نسل، عملگر انتخاب، جواب‌های والد را انتخاب می‌کند، عملگر تقاطع، والدین را ترکیب می‌کند تا جواب‌های فرزند بهتری ایجاد شود، عملگر جهش جواب‌ها را تغییر می‌دهد تا تنوع جمعیت را حفظ کند و عملگر نخبه‌گرایی، از دور انداخته شدن جواب‌های غیرمغلوب در برابر تأثیرات اتفاقی جلوگیری می‌کند.
می‌توان گفت که تخصیص مناسب و انتخاب، به منظور همگرا شدن سریع مرز بهینه پارتو ضروری است و عملگرهای جهش و تقاطع، استخراج جواب‌ها را تضمین می‌کند، در حالی‌که عملگر نخبه‌گرایی بهترین جواب‌ها را در طول نسل‌ها یافته و آن‌ها را حفظ می‌کند. به هر حال، همانطور که در [۲۴] نشان داده شده است، الگوریتم‌های EMO با فرم استانداردشان نمی‌توانند برای حل مسائل بهینه‌سازی سبدسهام مقید، به کار برده شوند و ملاحظات ویژه‌ای برای مدیریت اهداف و محدودیت‌های مسئله باید در نظر گرفته شود. در مدل $MDRS$، لزوماً چنین ملاحظاتی، از این حقیقت گرفته شده است که به علت محدودیت‌های کاردینالیتی معمولا سبدهای سهام به ندرت شامل همه سهام در دسترس نمی‌باشند و تنها یک تعداد محدودی از سهام در سبدسهام قرار می‌گیرند. بنابراین، چندین موضوع باید به دقت تعریف شوند، نظیر نمایش جواب‌های سبدسهام، عملگرهای تکاملی و تکنیک‌های بررسی محدودیت‌ها، که در ادامه توضیح داده خواهند شد.

۱.۵.۴ نمایش جواب‌ها

انتخاب نمایش جواب به‌خاطر تأثیر آن بر اجرا و قابلیت کل الگوریتم EMO دارای اهمیت زیادی می‌باشد. همان‌طور که در [۲۴] بیان شد، معروف‌ترین نمایش‌های سبدسهام، نمایش‌های حقیقی_ مقدار و ترکیبی هستند. نمایش ترکیبی دودویی که در [۲۴] پیشنهاد شده است، سبدسهام را به وسیله‌ی دو بردار تعریف می‌کند که یکی از آن‌ها یک بردار دوتایی برای مشخص کردن این‌که چه دارایی‌هایی در سبدسهام حضور دارند و دیگری یک بردار حقیقی_ مقدار است

که نشان‌دهنده‌ی نسبت‌های بودجه‌ی سرمایه‌گذاری شده در دارایی‌ها هستند. در حقیقت این به معنای به‌کار بردن $2N$ متغیر تصمیم‌گیری برای هر سبدسهام در یک مسئله با N دارایی می‌باشد. علاوه‌بر این، برای مدیریت محدودیت‌های کاردینالیتی و کران، قیدها و محدودیت‌های جدید که هر دو بردار را درنظر بگیرد، باید تحمیل شود. همه این موارد ممکن است هزینه‌های محاسباتی لازم به‌منظور حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفه سبدسهام با یک الگوریتم EMO را افزایش دهد.
در این فصل، ما از نمایش حقیقی_مقدار استاندارد استفاده می‌کنیم زیرا این نمایش شامل تعداد کم‌تری متغیرهای تصمیم‌گیری نسبت به نمایش ترکیبی می‌باشد. یعنی یک سبدسهام X با بردار $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^n$ نمایش داده می‌شود، که در آن هر x_i نسبت سرمایه‌گذاری در هر دارایی i به ازای $i = 1, 2, \dots, N$ را نشان می‌دهد. این بدان معناست که اگر $x_i \neq 0$ ، آن‌گاه سبدسهام X، در دارایی i سرمایه‌گذاری می‌کند و مقدار x_i نسبت به بودجه سرمایه‌ای که به دارایی i اختصاص داده شده است را نشان می‌دهد.
علاوه‌بر این برای هر X، قرار می‌دهیم: $I_X^+ = \{i = 1, 2, \dots, N : x_i > 0\}$. در واقع I_X^+ شامل دارایی‌هایی است که در سبدسهام X شرکت دارند. به وسیله‌ی I_X° مکمل I_X^+ را نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، I_X° شامل دارایی‌هایی است که در X نیستند. از این به بعد، تعداد عناصر مجموعه‌ی A را به‌صورت $\#A$ نشان می‌دهیم و برای عدد حقیقی n، $\lceil n \rceil$ کوچک‌ترین عدد صحیح که کم‌تر از n نیست و $\lfloor n \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح که بیش‌تر از n نیست را نشان می‌دهند. توجه شود که جمعیت اولیه را به‌صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و سپس با استفاده از عملگرهایی که در ادامه به توضیح آن می‌پردازیم جواب را شدنی می‌کنیم.

۲.۵.۴ عملگرهای تکاملی انطباق یافته

چالش اصلی برای یک الگوریتم EMO که بتواند مسئله $MDRS$ را حل کند، ایجاد سبدسهام‌های شدنی است که در محدودیت‌های بودجه، کران و کاردینالیتی صدق کند. معمولاً عملگرهای کلاسیک برای نمایش حقیقی_مقدار برای حل کردن مسائل بهینه‌سازی سبدسهام مقید درنظر گرفته می‌شوند.
به‌عنوان مثال جهش چند جمله‌ای یا گوسی و یکنواخت و یا تقاطع تک نقطه‌ای [۲۴] جزء این عملگرهای کلاسیک می‌باشند. با این حال، مکانیزم ترمیمی برای ترکیب شدن برای هر محدودیت نیاز است تا از موفقیت الگوریتم‌های EMO اطمینان حاصل گردد. در این فصل ما عملگرهای تقاطع و جهش را که به‌طور تک‌کاره و ویژه برای ایجاد سبدسهام‌های شدنی مسئله طراحی شده‌اند را پیشنهاد می‌کنیم. تنها یک عملگر بازیابی برای اطمینان از محدودیت بودجه پیشنهاد می‌شود. لازم به ذکر است که این عملگرها با ایده‌های اصلی عملگرهای کلاسیک انطباق دارند.

عملگر جهش

عملگر جهشی که پیشنهاد شده، یک عملگر یکتایی است که برای یک سبدسهام X داده شده سبدسهام جهش یافته X' را تولید می‌کند. عملگر جهش استفاده شده یک روش ساده برای تعویض نسبت یک دارایی در I_X^+ با یک دارایی دیگر در I_X° است.

هر دو دارایی به‌طور اتفاقی با احتمال جهش $P_m = \frac{1}{k}$ انتخاب می‌شوند که در آن k تعداد دارایی‌هایی است که در سبدسهام شرکت کرده‌اند. جهش یک سبدسهام X با پیروی از الگوریتم ۱ انجام می‌شود. به‌طور اساسی برای هر دارایی $i \in I_X^+$ یک عدد تصادفی یکنواخت r ایجاد می‌شود. اگر $r < P_m$، x_i با x_j عوض می‌شود، که دارایی $j \in I_x^\circ$ به‌طور تصادفی انتخاب شده است، در غیر این صورت اگر $r \geq P_m$، نسبت x_i در دارایی i اصلاح نمی‌شود.

چون عملگر جهش با احتمال جهش $P_m = \frac{1}{k}$ به‌کار برده می‌شود، تنها یکی از k نسبت‌های مثبت X جهش می‌یابد. با این عملگر جهش، ما اطمینان می‌یابیم که اولا سبدسهام جهش یافته در محدودیت‌های کران، بودجه و کاردینالیتی که در مدل $MDRS$ در نظر گرفته شده است صدق می‌کند و ثانیاً از جهش خنثی، پرهیز می‌شود زیرا ما مطمئن هستیم که دارایی انتخاب شده برای جهش در داخل سبدسهام می‌باشد.

شکل ۳.۴ یک مثال را نشان می‌دهد که اجرای عملگر جهش ارائه شده را شبیه‌سازی می‌کند.

الگوریتم ۱ جهش تک نقطه‌ای

ورودی: یک سبدسهام $X = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$

خروجی: یک سبدسهام جهش یافته $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_N)^T$.

قرار دهید $P_m = \frac{1}{k}$.

برای هر $i \in I_x^+$ **قرار دهید**

  یک عدد $r \in (0, 1)$ را به‌طور یکنواخت انتخاب کنید.

  اگر $r < P_m$ **سپس**

    اندیس $j \in I_x^\circ$ را به‌طور تصادفی انتخاب کنید.

    قرار دهید $x'_i = x_j$ و $x'_j = x_i$.

    به‌روز رسانی کنید $I_x^+ = I_{x'}^+ \cup \{j\}$ و $I_x^\circ = I_{x'}^\circ \cup \{i\}$.

    موقتاً j را از I_x° حذف کنید.

  در غیر این صورت

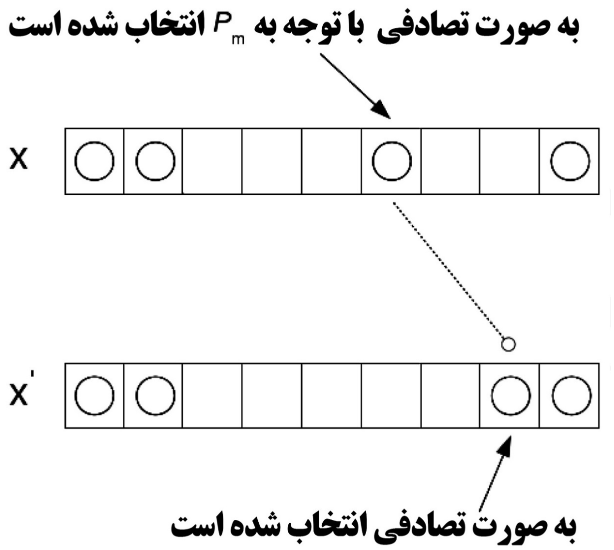
    قرار دهید $x'_i = x_i$.

    به‌روز سانی کنید $I_{x'}^+ = I_{x'}^+ \cup \{i\}$.

  پایان شرط

پایان حلقه

در این تصویر جواب‌های X و X' به وسیله‌ی ردیف‌هایی از مربع نشان داده شده‌اند که هر مربع یک دارایی از سبدسهام است. در هر مربع نماد O نشان می‌دهد که یک کسر مثبت در دارایی متناظر سرمایه‌گذاری شده است. این بدان معناست که، برای هر جواب X، این نماد در مربع‌هایی متناظر با دارایی‌های $i \in I_X^+$ ظاهر شده است.
در این مثال، $N = ۹$ (سبدسهام‌های مسئله از ۹ دارایی مالی تشکیل شده‌اند) و $K = ۴$ (تمام سبدسهام‌ها باید دقیقاً در ۴ دارایی سرمایه‌گذاری شوند). همانطور که مشاهده می‌شود، عملگر جهش در این حالت فقط یک سهم مثبت را اصلاح می‌کند.



شکل ۳.۴: عملگر جهش، قابل اجرا با احتمال $P_m = \frac{1}{k}$، که در آن k اندازه‌ی سبد سهام است. به‌طور میانگین فقط یک دارایی مثبت از X جهش یافته است.

عملگر تقاطع

نقش عملگر تقاطع به ارث بردن برخی از خصوصیات دو والد برای تولید جواب فرزند می‌باشد. بر اساس [۲۴] رایج‌ترین و پر استفاده‌ترین عملگرهای تقاطع در مسائل انتخاب سبدسهام، تقاطع یکنواخت و تقاطع تک نقطه‌ای می‌باشد. اما فرزندان ایجاد شده با این عملگرها ممکن است در محدودیت کاردینالیتی مدل ما، که اندازه‌ی سبدسهام را به‌اندازه‌ی ثابت k درنظر می‌گیرد، صدق نکنند.
بنابراین بعد از به کارگیری این عملگرها ممکن است نیاز به اصلاح سبدسهام‌هایی باشد که جدیداً ایجاد شده‌اند. به‌منظور پرهیز از چنین موقعیتی و همچنین برای ایجاد سبدسهام‌های مناسب با محدودیت کاردینالیتی، ما عملگر تقاطع زیر را پیشنهاد می‌کنیم که ایده‌ها و ساختار اصلی را از عملگرهای رایج قرض گرفته است.

تقاطع ما یک عملگر باینری (دودویی) است که برای ۲ سبدسهام والد داده شده است، که با $X^۱$ و $X^۲$ نشان داده می‌شود، دو سبدسهام فرزند را تولید می‌کند که با $Y^۱$ و $Y^۲$ نام‌گذاری می‌شوند. اول فرزندان $Y^۱$ و $Y^۲$ به‌عنوان یک سبدسهام خالی درنظر گرفته می‌شوند و بعداً دارایی‌ها اضافه می‌شوند که K سهم مثبت را از هر دو والد به‌صورت زیر به ارث می‌برند. بسته به دارایی‌هایی که در سبد سهام‌های والد وجود دارند(با نسبت‌های مثبت) ما می‌توانیم ۳ حالت را در نظر بگیریم:

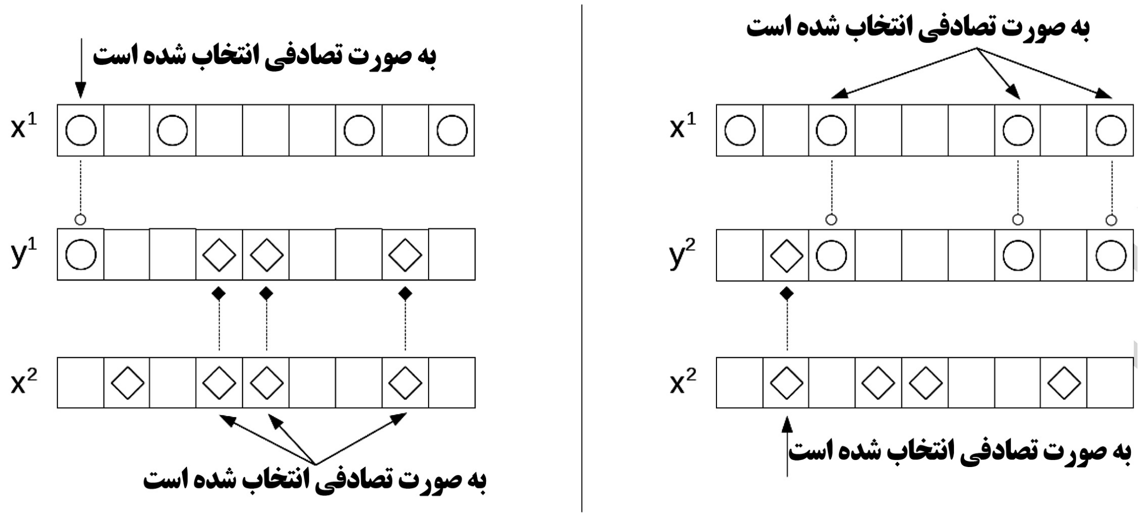
حالت اول : $I^+_{X^۱} \cap I^+_{X^۲} = \emptyset$ در این حالت سبدسهام‌های $X^۱$ و $X^۲$ در دارایی‌های متفاوت سرمایه‌گذاری می‌کنند و فرزند، همان‌طور که در الگوریتم ۲ توضیح داده شده است دارایی‌هایی را از آن‌ها به ارث می‌برند. اگر $k(mod۲) = ۰$ فرزند $Y^۱$، $\frac{k}{۲} - ۱$ دارایی را با نسبت‌های مثبت از $X^۱$ و $\frac{k}{۲} + ۱$ دارایی را از $X^۲$ به ارث می‌برند و فرزند $Y^۲$، $\frac{k}{۲} + ۱$ دارایی را با نسبت مثبت از $X^۱$ و $\frac{k}{۲} - ۱$ دارایی را از $X^۲$ به ارث می‌برد. در غیر این صورت اگر $k(mod۲) \neq ۰$، $Y^۱$، $\lfloor \frac{k}{۲} \rfloor$ دارایی را با نسبت مثبت از $X^۱$ و $\lceil \frac{k}{۲} \rceil$ دارایی را از $X^۲$ و فرزند $Y^۲$، $\lceil \frac{k}{۲} \rceil$ دارایی را با نسبت مثبت از $X^۱$ و $\lfloor \frac{k}{۲} \rfloor$ دارایی را از $X^۲$ به ارث می‌برد. در هر حالت دارایی‌های به ارث برده شده به‌صورت اتفاقی انتخاب می‌شود.

الگوریتم ۲ عملگر تقاطع،حالت اول

ورودی: دو والد از سبدسهام‌های x^1 و x^2 با $I^+_{x^1} \cap I^+_{x^2} = \emptyset$.
خروجی: دو فرزند از سبدسهام‌های y^1 و y^2

اگر $k(mod 2) = 0$ **سپس**
  قرار دهید $N_1 = \frac{k}{2} - 1$ و $N_1 = \frac{k}{2} + 1$.
در غیر این صورت
  قرار دهید $N_1 = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ و $N_2 = \lceil \frac{k}{2} \rceil$.
پایان شرط
N_1 اندیس را به‌طور تصادفی از $I^+_{x^1}$ انتخاب کنید فرض کنید آن‌ها را با $\{i_1, i_2, \dots, i_{N_1}\}$ نشان دهیم.
برای هر $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{N_1}\}$ **قرار دهید**
  $y^1_i = x^1_i$
پایان حلقه
برای هر $i \in I^+_x \backslash i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{N_1}\}$ **قرار دهید**
  $y^2_i = x^2_i$
پایان حلقه
به‌طور تصادفیN_2 اندیس را از $I^+_{x^2}$ انتخاب کنید، آن‌ها را با $\{j_1, j_2, \dots, j_{N_1}\}$ نمایش دهید.
برای هر $j \in j_1, j_2, \dots, j_{N_2}$ **قرار دهید**
  $y^1_j = x^2_j$.
پایان حلقه
برای هر $j \in I^+_{x^2} \backslash j \in \{j_1, j_2, \dots, j_{N_2}\}$ **قرار دهید**
  $y^2_j = x^2_j$.
پایان حلقه

شکل ۴.۴ یک مثال با $N = 9$ و $k = 4$ را نشان می‌دهد که در آن عملگر تقاطع ما، به منظور تولید ۲ فرزند جدید Y^1 و Y^2 از دو والد X^1 و X^2 با $I^+_{X^1} \cap I^+_{X^2} = \emptyset$ به‌کار برده می‌شود. در این مورد $K(mod 2) = 0$ بنابراین Y^1 یک دارایی از X^1 و سه دارایی را از X^2 و Y^2، سه دارایی را از X^1 و یک دارایی را از X^2 به ارث می‌برند.



شکل ۴.۴: عملگر تقاطع حالت ۱. اگر جواب‌های والد، در دارایی‌های متفاوت سرمایه‌گذاری کنند، فرزندان نسبت انتخاب تصادفی از هر جواب والد را به ارث می‌برند.

حالت دوم : $۰ < \#(I^+_{X^۱} \cap I^+_{X^۲}) < k$. در این حالت، سبدسهام‌های $X^۱$ و $X^۲$ در برخی دارایی‌های مشترک سرمایه‌گذاری می‌کنند، آن‌ها همچنین در برخی دیگر از دارایی‌هایی که مشترک نیستند نیز سرمایه‌گذاری می‌کنند. در این حالت، هر فرزند نسبت‌های مثبت از دارایی‌های مشترک از یک والد را به‌همراه دارایی‌های باقی مانده از والد دیگر را همان‌طور که در الگوریتم ۳ توضیح داده شده است به ارث می‌برد.

به‌طور مشخص، فرزند $Y^۱$ نسبت‌هایی از دارایی‌ها در $I^+_{X^۱} \cap I^+_{X^۲}$ را از $X^۱$ و نسبت‌هایی از دارایی‌های $I^+_{X^۲} \backslash (I^+_{X^۱} \cap I^+_{X^۲})$ را از $X^۲$ به ارث می‌برد. به‌طور مشابه فرزند $Y^۲$ نسبت‌هایی از دارایی $(I^+_{X^۱} \cap I^+_{X^۲})$ را از $X^۲$ و نسبت‌هایی از دارایی‌های $I^+_{X^۲} \backslash (I^+_{X^۱} \cap I^+_{X^۲})$ را از $X^۱$ به ارث می‌برد. شکل ۵.۴ یک مثال با $N = ۹$ و $k = ۴$ را نشان می‌دهد که در آن ۲ فرزند جدید $Y^۱$ و $Y^۲$ از دو والد $X^۱$ و $X^۲$ با $۰ < (I^+_{X^۱} \cap I^+_{X^۲}) = ۲ < k$، تولید می‌شوند. مربع‌های خاکستری دارایی‌های مشترک بین $X^۱$ و $X^۲$ را نشان می‌دهند. در این‌جا $Y^۱$ نسبت‌های دارایی‌های ۴ و ۸ را از $X^۱$ و باقی دارایی‌ها را با نسبت‌های مثبت (دارایی‌های ۱ و ۶) از $X^۲$ به ارث می‌برند. فرزند $Y^۲$ نسبت‌های دارایی‌های ۴ و ۸ را از $X^۲$ و باقی دارایی‌ها با نسبت‌های مثبت (دارایی ۹ و ۲) را از $X^۱$ به ارث می‌برد.

حالت سوم : $\#(I^+_{X^۱} \cap I^+_{X^۲}) = k$. در این حالت، سبدسهام‌های $X^۱$ و $X^۲$ دقیقاً در دارایی‌های مشابه سرمایه‌گذاری می‌کنند و عملگر تقاطع به صورت زیر به‌کار برده می‌شوند:

حالت ۳.۱ : اگر $X^۱ \neq X^۲$، این بدان معناست که حداقل یکی از نسبت‌های $X^۱$ متفاوت از $X^۲$ می‌باشد. در این مورد تقاطع مانند آن‌چه که در الگوریتم ۴ توضیح داده شده است عمل می‌کند. اگر $k(mod ۲) = ۰$ آن‌گاه فرزند $Y^۱$، $\frac{k}{۲} - ۱$ دارایی با نسبت‌های

الگوریتم ۳ عملگر تقاطع،حالت دوم

ورودی: دو والد از سبدسهام‌های $x^۱$ و $x^۲$ با $k> \#(I^+_{x^۱} \cap I^+_{x^۲}) > ۰$.

خروجی: دو فرزند از سبدسهام‌های $y^۱$ و $y^۲$.

۱: **برای هر** $i \in (I^+_{x^۱} \cap I^+_{x^۲})$ **قرار دهید**

۲: $y^۱_i = x^۱_i$.

۳: $y^۲_i = x^۲_i$.

۴: **پایان حلقه**

۵: **برای هر** $i \in I^+_{x^۱} \backslash (I^+_{x^۱} \cap I^+_{x^۲})$ **قرار دهید**

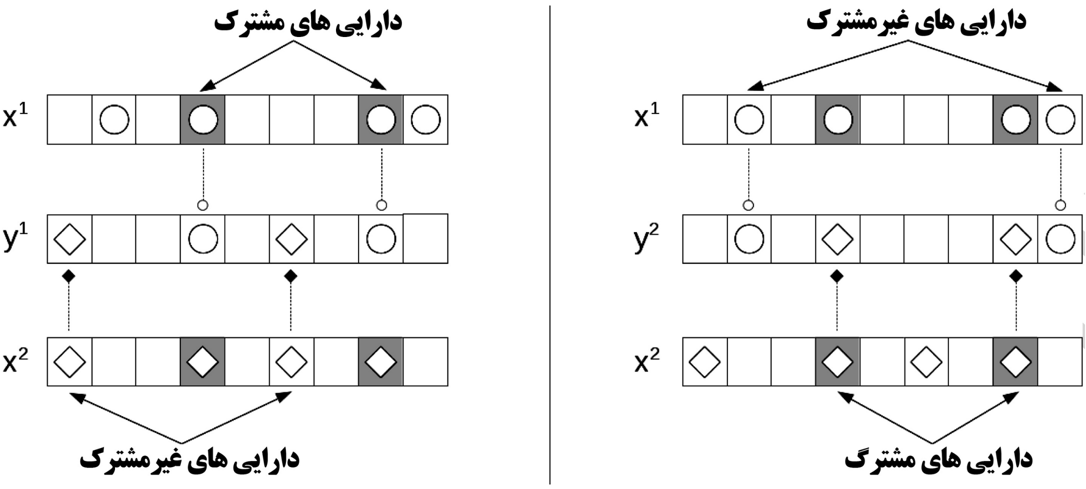
۶: $y^۲_i = x^۱_i$.

۷: **پایان حلقه**

۸: **برای هر** $i \in I^+_{x^۲} \backslash (I^+_{x^۱} \cap I^+_{x^۲})$ **قرار دهید**

۹: $y^۱_i = x^۲_i$.

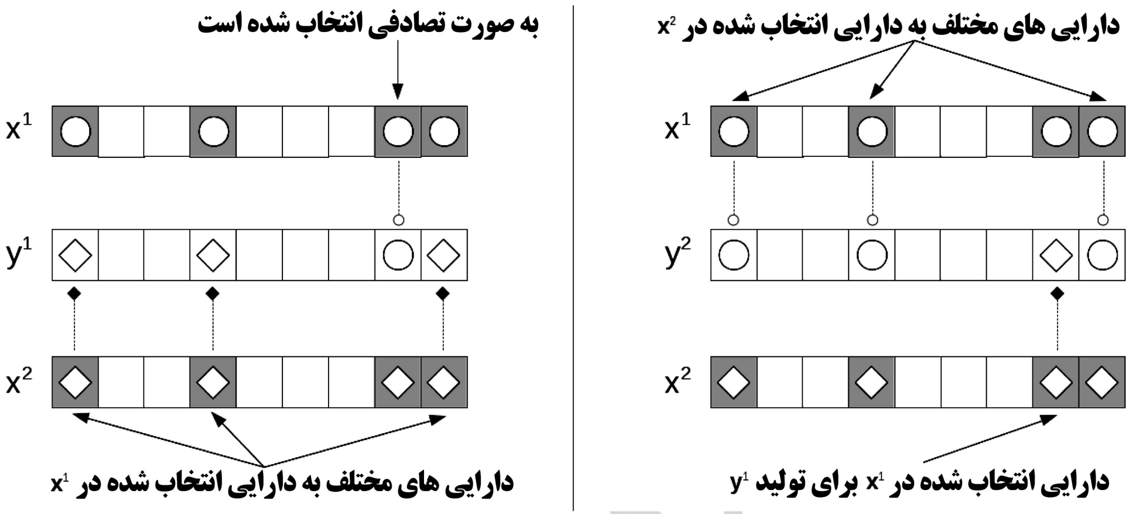
۱۰: **پایان حلقه**



شکل ۵.۴: عملگر تقاطع حالت دوم. اگر جواب‌های والد در بعضی از دارایی‌های مشترک سرمایه‌گذاری شده، باشند و در عین حال در برخی دیگر که مشترک نیستند نیز سرمایه‌گذاری شوند، هر جواب فرزند بخشی از دارایی‌های مشترک را از یک جواب والد و باقی‌مانده دارایی‌ها را از جواب والد دیگر به ارث می‌برد.

مثبت انتخاب شده را از $X^۱$ و باقی $\frac{k}{۲}+۱$ دارایی را از $X^۲$ به ارث می‌برد و فرزند $Y^۲$، $\frac{k}{۲}+۱$ دارایی با نسبت‌های مثبت انتخاب شده و به صورت تصادفی از $X^۱$ و $\frac{k}{۲}-۱$ دارایی را از $X^۲$ به ارث می‌برد. در غیر این صورت اگر $k(mod ۲) \neq ۰$ باشد، آن‌گاه $Y^۱$، $\lfloor \frac{k}{۲} \rfloor$ دارایی‌ها را با نسبت‌های مثبت انتخاب شده به‌صورت تصادفی، از

$X^۱$ و باقی $\lceil \frac{k}{۲} \rceil$ دارایی را از $X^۲$ به ارث می‌برد و $Y^۲$، $\lceil \frac{k}{۲} \rceil$ دارایی را با نسبت‌های مثبت انتخاب شده به صورت تصادفی، را از $X^۱$ و باقی $\lfloor \frac{k}{۲} \rfloor$ دارایی از $X^۲$ به ارث می‌برد.
شکل ۶.۴ یک مثال با $N = ۹$ و $k = ۴$ را نشان می‌دهد که در آن ۲ فرزند جدید $Y^۱$ و $Y^۲$ از دو والد $X^۱$ و $X^۲$ با $\#(I^+_{X^۱} \cap I^+_{X^۲}) = k = ۴$ و $X^۱ \neq X^۲$ به دست می‌آید. از آن‌جایی که $K(mod ۲) = ۰$، فرزند $Y^۱$ یک سهم از $X^۱$ (دارایی ۸) و ۳ سهم از $X^۲$ (دارایی ۱،۴،۹) را به ارث می‌برد و فرزند $Y^۲$ سه سهم از $X^۱$ (دارایی ۱،۴،۹) و یک سهم از $X^۲$ (دارایی ۸) را به ارث می‌برد.



شکل ۶.۴: عملگر تقاطع حالت ۳.۰۱. اگر جواب‌های والد دقیقا در دارایی‌های یکسان اما نه با نسبت یکسان سرمایه‌گذاری کنند، جواب‌های فرزند سهم‌هایی به‌صورت تصادفی از هر والد به ارث می‌برد.

حالت ۳.۰۲ : اگر $X^۲ = X^۱$. این بدان معناست که هر دو سبدسهام‌های $X^۱$ و $X^۲$ یک کسر مساوی از ثروت را در k دارایی مشترک سرمایه‌گذاری کرده‌اند. در این مورد بر اساس الگوریتم ۵، هر دو فرزند $Y^۱$ و $Y^۲$ نسبت‌هایی از دارایی‌ها در $I^+_{X^۱}$ را از والد $X^۱$ به ارث می‌برند.
در نتیجه برای هر $i \in I^+_{X^۱}$، $y^۱_i$ به‌اندازه‌ی یک مقدار v_i که به‌صورت تصادفی از $[x_i, u_i]$ انتخاب می‌شود، افزایش می‌یابد و برای هر $i \in I^+_{X^۱}$، $y^۲_i$ به‌اندازه‌ی یک مقدار w_i که به‌صورت تصادفی از $[l_i, x_i]$ انتخاب شده، کاهش می‌یابد.
تصویر ۷.۴ یک مثال با $N = ۹$ و $K = ۴$ را نشان می‌دهد که در آن ۲ فرزند $Y^۱$ و $Y^۲$ از دو والد $X^۱$ و $X^۲$ با $\#(I^+_{X^۱} \cap I^+_{X^۲}) = k = ۴$ به‌دست آمده‌اند. هر دو فرزند نسبت‌های مثبت از والدین را به ارث می‌برند. نسبت‌های $Y^۱$ با مقادیر انتخاب شده به‌صورت تصادفی افزایش می‌یابد و نسبت‌های $Y^۲$ به‌طور مشابه کاهش می‌یابد.

الگوریتم ۴ عملگر تقاطع،حالت ۳.۱

ورودی: دو والد از سبدسهام‌های x^1 و x^2 با $I^+_{x^1} \cap I^+_{x^2} = k$ و $x^1 \neq x^2$.

خروجی: دو فرزند با سبدسهام‌های y^1 و y^2.

اگر $k(mod 2) = 0$ **سپس**

قرار دهید $N_1 = \frac{k}{2} - 1$ و $N_2 = \frac{k}{2} + 1$.

در غیر این صورت

قرار دهید $N_1 = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ و $N_2 = \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

پایان شرط

قرار دهید $I = I^+_{x^1} \cap I^+_{x^2}$.

به‌طور تصادفی N_1 اندیس را از I انتخاب کنید ، سپس با $\{i_1, i_2, \dots, i_{N_1}\}$ نمایش دهید.

برای هر $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{N_1}\}$ **قرار دهید**

$y^1_i = x^1_i$.

پایان حلقه

برای هر $i \in I^+_x \backslash i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{N_1}\}$ **قرار دهید**

$y^1_i = x^2_i$

پایان حلقه

به‌طور تصادفی N_2 اندیس را از $I^+_{x^2}$ انتخاب کنید ، سپس با $\{j_1, j_2, \dots, j_{N_2}\}$ نمایش دهید.

برای هر $j \in \{j_1, j_2, \dots, j_{N_2}\}$ **قرار دهید**

$y^2_j = x^2_j$

پایان حلقه

برای هر $j \in I^+_x \backslash j \in \{j_1, j_2, \dots, j_{N_1}\}$ **قرار دهید**

$y^2_j = x^1_j$.

پایان حلقه

عملگر ترمیم (اصلاح)

قبل از آن‌که مقادیر هدف محاسبه شوند، یک عملگر ترمیم اجرا می‌شود. قابل ذکر است سبدهای سهام جدید تولید شده توسط عملگر تقاطع پیشنهادی در محدودیت‌های کاردینالیتی و کران صدق می‌کند، اما ممکن است در محدودیت بودجه مسئله $MDRS$ صدق نکنند. برای برآورده کردن این محدودیت، ساده‌ترین استراتژی نرمال کردن نسبت‌های دارایی‌هایی هستند

الگوریتم ۵ عملگر تقاطع،حالت ۳.۲

ورودی: دو والد با سبدسهام‌های $x^{۱}$ و $x^{۲}$ با $\#(I^+_{x^۱} \cap I^+_{x^۲}) = k$.

خروجی: دو فرزند با سبدسهام‌های $y^{۱}$ و $y^{۲}$.

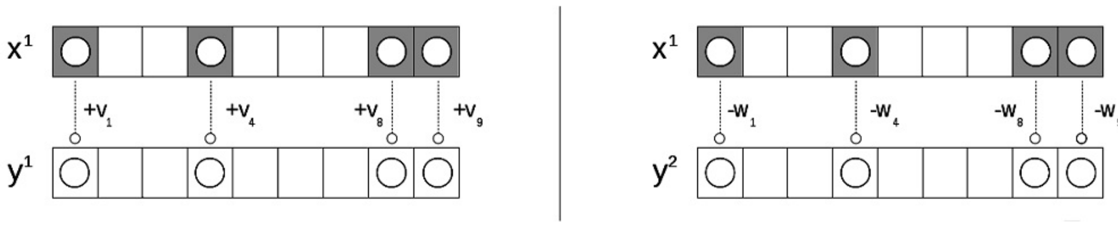
برای هر $i \in (I^+_{x^۱})$ **قرار دهید**

  به‌طور تصادفی $v_i \in [x_i, u_i]$ و $w_i \in [l_i, x_i]$ را انتخاب کنید.

  قرار دهید $y^۱_i = x^۱_i + v_i$.

  قرار دهید $y^۱_i = x^۱_i - w_i$.

پایان حلقه



شکل ۷.۴: عملگر تقاطع حالت ۳.۲. اگر جواب‌های والد با سهم یکسانی از سرمایه در دارایی‌های یکسان سرمایه‌گذاری کنند، هر فرزند نسبت مثبتی از هر والد را به ارث می‌برد که در ادامه به‌صورت تصادفی اصلاح می‌شود.

که در سبدسهام حضور دارند.

بنابراین اگر یک سبدسهام $X = (x_۱, x_۲, \dots, x_N)^T$ در محدودیت $\sum_{i=۱}^{N} x_i = ۱$ صدق نکند، عملگر ترمیم طبق الگوریتم ۶ به‌کار برده می‌شود. در ابتدا این عملگر یک نرمال‌سازی به‌صورت زیر اجرا می‌کند:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{\sum_{i \in I^+_X} x_i}, \quad \forall i \in I^+_X$$

که در آن $\bar{X} = (\bar{x}_۱, \bar{x}_۲, \dots, \bar{x}_N)^T$ به سبدسهام نرمال شده اشاره می‌کند. برای $i \in I^\circ_X$ قرار می‌دهیم $\bar{X} = ۰$. متأسفانه، ممکن است عناصر $\bar{X}$ درون محدوده‌ای از محدودیت‌های کران نباشد و با توجه به این $\bar{x}_i$ ممکن است بیش‌تر از کران بالا u_i و یا کوچک‌تر از کران پایین l_i برای هر $i \in I^+_X$ باشند. بنابراین، اگر $\bar{x}_i \notin [l_i, x_i]$ نسبت $\bar{x}_i$ از دارایی i مانند آن‌چه در الگوریتم ۶ توضیح داده شده است، ترمیم می‌شود.

به‌طور کلی اگر $\bar{x}_i > u_i$ مقدار اضافی از $\bar{x}_i$ کم می‌شد و به‌صورت تصادفی بین دارایی‌هایی در $I^+_X \backslash \{i\}$ توزیع می‌شود. علاوه‌بر این، اگر $\bar{x}_i < l_i$ ، مقدار پیش فرض به $\bar{x}_i$ اضافه می‌شود و به‌صورت تصادفی از دارایی‌های $I^+_X \backslash \{i\}$ کم می‌شود.

۶.۴ نتایج محاسباتی

۱.۶.۴ الگوریتم‌های EMO درنظر گرفته شده

برای مطالعه مسئله انتخاب سبدسهام MDRS با محدودیت کاردینالیتی از دیدگاه چندهدفه و به‌منظور نشان دادن کارایی عملگرهای توضیح داده شده در بخش ۲.۵.۴، ما تقریب‌های مرز بهینه پارتو که با استفاده از NSGAII، MOEA/D و GWASF-GA یک‌بار با عملگرهای پیشنهاد شده (که با زیرپسوند Newop نام‌گذاری می‌شود) و بار دیگر با عملگرهای ژنتیک معمول که قبلا توضیح داده شده است به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. قابل ذکر است که از نسخه‌های اصلی NSGAII، MOEA/D و GWASF-GA استفاده می‌کنیم.

$NSGAII$ و $NSGAII_{NewOp}$

$NSGAII_{NewOp}$ به اجرای NSGAII با عملگرهای تقاطع، اصلاح و عملگر جهش که در بخش ۲.۵.۴ پیشنهاد شده است اشاره دارد. هر نسل NSGAII همانند آن‌چه در الگوریتم ۷ نشان داده شده است اجرا می‌شود. در این‌جا N_p به اندازه‌ی جمعیت و P_t و Q_t به‌ترتیب جمعیت والدین و فرزندان در نسل t می‌باشند. برای مقایسه، ما همچنین NSGAII را با استفاده از عملگر تقاطع SBX (دب و آگاروال و کومار در سال ۱۹۹۵ موفق به توسعه یک عملگر تقاطع باینری (دو-دویی) تقسیم شده SBX شدند که با دو جواب والد کار می‌کرد و دو فرزند را ایجاد می‌کرد. همان‌طور که از نام آن بر می‌آید، اصل کار عملگر SBX تقاطع تک نقطه‌ای را در رشته‌های باینری (دو-دویی) شبیه‌سازی می‌کند). و جهش چند جمله‌ای [۱۳] اجرا می‌کنیم، و آنرا در آزمایش‌های محاسباتی $NASGAII_{NewOp}$ نام‌گذاری می‌کنیم. فرآیند داخلی NSGAII از تکنیک محدودیت در انتخاب رقابت دوتایی والدین استفاده می‌کند (برای جزئیات بیش‌تر [۱۳] را مشاهده کنید). بنابراین شدنی شدن جواب‌ها با این تکنیک در NSGAII کنترل می‌شود.

$MOEA/D$ و $MOEA/D_{Newop}$

در رابطه با $MOEA/D$، ما عملگرهای خود را در هر نسل همان‌طور که در الگوریتم ۸ نشان داده شده است به‌کار برده‌ایم که در آن N_p تعداد زیر مسئله‌ها (یعنی اندازه جمعیت) را نشان می‌دهد و $B(i)$ همسایگی زیر مسئله i برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, N$ است. ما به این مدل $MOEA/D_{Newop}$ گوییم.

در آزمایش‌های محاسباتی، ما مدل $MDRS$ را با استفاده از $MOEA/D$ با تکامل تفاضلی (DE) به‌عنوان عملگر تقاطع و جهش چندجمله‌ای، همان‌طور که در [۲۵] پیشنهاد شده است حل می‌کنیم. این مدل به‌عنوان $MOEA/D$ نام‌گذاری شده است.

الگوریتم ۶ عملگر ترمیم

ورودی: یک سبدسهام نشدنی $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ با $\sum_{i=1}^{N} x_i \neq 1$.

خروجی: یک سبدسهام شدنی $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)^T$

برای هر $i = 1, 2, \dots, N$ **قرار دهید**
  اگر $i \in I_x^+$ **سپس**
    قرار دهید $\bar{x}_i = \frac{x_i}{\sum_{i \in I_x^+} x_i}$.
  در غیر این صورت
    قرار دهید $\bar{x}_i = 0$.
  پایان شرط
پایان حلقه
برای هر $i \in I_{\bar{x}}^+$ **قرار دهید**
  تا زمانی که $\bar{x}_i > u_i$ **قرار دهید**
    تکرار کن
    به‌طور تصادفی یک اندیس j از $I_{\bar{x}}^+ \backslash \{i\}$ انتخاب کنید.
    تا وقتی‌که $\bar{x}_j < u_j$.
    به طور تصادفی $v \in (0, u_j - \bar{x}_j]$ را انتخاب کنید.
    قرار دهید $\bar{x}_j = \bar{x}_j + v$.
    قرار دهید $\bar{x}_i = \bar{x}_i - v$.
  در نهایت
  تا زمانی که $l_i > \bar{x}_i$ **قرار دهید**
    تکرار کن
    به طور تصادفی اندیس j را از $I_{\bar{x}}^+ \backslash \{i\}$ انتخاب کنید.
    تا وقتی‌که $l_j < \bar{x}_j$.
    به‌طور تصادفی $v \in (0, \bar{x}_j - l_j]$ را انتخاب کنید.
    قرار دهید $\bar{x}_j = \bar{x}_j - w$.
    قرار دهید $\bar{x}_i = \bar{x}_i + w$.
  در نهایت
پایان حلقه

$GWASF - GA$ و $GWASF - GA_{NewOp}$

روند کاری GWASF-GA بر اساس طبقه‌بندی والدین و فرزندان به چندین مرز می‌باشد، سپس ما از عملگرهای جهش، ترمیم و تقاطع در GWASF-GA به روش مشابه که در NSGAII به‌کار

الگوریتم ۷ هر نسل t از $NASGAII_{NewOp}$

ورودی: جمعیت P_t در نسل t .

خروجی: جمعیت P_{t+1} برای نسل بعد $t+1$.

۱: قرار دهید $Q_t = \emptyset$، تکرار کنید:

۲: **تا زمانی که** $\#(Q_t) < N_P$ **قرار دهید**

۳: دو والد x^1 و x^2 را از P_t با استفاده از انتخاب تورنست دودویی انتخاب کنید.

۴: تقاطع: دو سبدسهام فرزند y^1 و y^2 را با استفاده از x^1 و x^2 و به‌وسیله‌ی الگوریتم‌های ۲، ۳، ۴یا ۵ تولید کنید.

۵: ترمیم: در صورت نیاز از الگوریتم ۶ برای سبدسهام‌های y^1 و y^2 استفاده کنید.

۶: جهش: با استفاده از الگوریتم ۱ روی y^1 و y^2، دو سبدسهام جهش یافته $\bar{y}^1$ و $\bar{y}^2$ را تولید کنید.

۷: $\bar{y}^1$ و $\bar{y}^2$ را در Q_t قرار دهید.

۸: تا وقتی‌که $\#(Q_t) = N_P$ تکرار کنید.

۹: **در نهایت**

۱۰: P_t و Q_t را برای تشکیل یک جمعیت با سایز $2N_P$ ترکیب کنید. بهترین N_P سبدسهام را از جمعیت ترکیب شده، برای تشکیل جمعیت P_{t+1}، همان‌طور که معمولاً برای $NSGAII$ انجام می‌شد انتخاب کنید.

برده می‌شدند، استفاده می‌کنیم. این نسخه را با $GWASF-GA_{Newop}$ نشان می‌دهیم.
الگوریتم ۹ هر نسل از $GWASF-GA_{Newop}$ را توصیف می‌کند.

الگوریتم ۸ هر نسل t از $MOEA/D_{NewOp}$

ورودی: جمعیت P_t در نسل t.

خروجی: جمعیت P_{t+1} برای نسل بعد $t+1$.

۱: **برای هر** $i = 1, 2, \dots, N_P$ **قرار دهید**

۲: به‌طور تصادفی دو اندیس r و l را از $B(i)$ انتخاب کنید.

۳: تقاطع: دو سبدسهام فرزند y^1 و y^2 را از x^r و x^l به‌وسیله‌ی الگوریتم‌های ۲ ، ۳ ، ۴ یا ۵ تولید کنید.

۴: **اگر** y^2 بر y^1 تسلط یافت **سپس**

۵: قرار دهید $y = y^1$.

۶: **در غیر این صورت**

۷: به‌طور تصادفی یک جواب از y^1 و y^2 انتخاب کنید و آن‌را برابر y قرار دهید.

۸: **پایان شرط**

۹: ترمیم: اگر نیاز است برای سبدسهام y از الگوریتم ۶ استفاده کنید.

۱۰: جهش: با استفاده از الگوریتم ۱ روی y، سبدسهام جهش یافته y' را تولید کنید از y' جواب‌های مجاور و غیره را به‌روز رسانی کنید، همان‌طور که در الگوریتم معمولی $MOEA/D$ انجام می‌شود.

۱۱: **پایان حلقه**

۲.۶.۴ پارامترهای آزمایش

موردی که برای مطالعه درنظر گرفته شده است، شامل یک مجموعه از بازده‌های هفته‌ای دارایی‌ها از شاخص $IBEX35$ اسپانیا است که در $T = 152$ دوره از ژانویه ۲۰۰۷ تا دسامبر ۲۰۰۹ مشاهده شده است. تعداد دارایی‌ها $N = 27$ است.

برای هر $i = 1, 2, \dots, N$ بازده‌های تک‌تک دارایی‌ها، که به‌وسیله‌ی r_{ti} نشان داده می‌شوند، به‌صورت $r_{ti} = \frac{P_{(t+1)i} - P_{ti}}{P_{ti}}$ برای هر $t = 1, 2, \dots, T$ محاسبه می‌شود که در آن P_{ti} قیمت دارایی i در هفته t می‌باشد.با توجه به این امر، بازده هفته‌ای هر سبدسهام X برای هفته t به‌صورت $r_t(x) = \sum_{i=1}^{N} r_{ti}$ به‌دست می‌آید. سرانجام ما تابع عضویت بازده فازی LR را با استفاده از صدک‌های نمونه q_j از مجموعه $\{r_t(x)\}_{t=1}^{T}$ به‌دست می‌آوریم که در آن j ترتیب صدک‌ها می‌باشد.

به‌ویژه هسته و تکیه‌گاه $\widetilde{P}_X = (p_l, p_u, c, d)_{L_\Lambda R_\rho}$ به‌ترتیب به‌وسیله‌ی بازه‌های $[q_{40}, q_{60}]$ و $[q_3, q_{97}]$ نشان داده می‌شود در حالی‌که پارامترهای شکلی با استفاده از فرآیند رتبه‌بندی

الگوریتم ۹ هر نسل t از $GWASF-GA_{NewOp}$

ورودی: جمعیت P_t در نسل t

خروجی: جمعیت P_{t+1} برای نسل بعد $t+1$

۱: قرار دهید $Q_t=\emptyset$

۲: **تا زمانی که** $\#(Q_t)<N_P$ **قرار دهید**

۳: تکرار کن

۴: انتخاب دو والد x^1 و x^2 از P_t با استفاده از انتخاب تورنومنت دو_دویی.

۵: تقاطع: با استفاده از x^1 و x^2 سبدسهام دو فرزند y^1 و y^2 را با استفاده از الگوریتم‌های ۲، ۳، ۴ یا ۵ تولید کنید.

۶: ترمیم: اگر لازم است الگوریتم ۶ را بر روی y^1 و y^2 به‌کار ببرید.

۷: جهش: با استفاده از الگوریتم ۱ بر روی y^1 و y^2 دو سبدسهام جهش یافته y^1 و y^2 را تولید کنید.

۸: قرار دهید y^1 و y^2 را در Q_t

۹: تا وقتی‌که $\#(Q_t)=N_P$.

۱۰: **در نهایت**

۱۱: P_t و Q_t را به فرم یک جمعیت با سایز $۲N_P$ ترکیب کنید. بهترین N_P سبدسهام را از جمعیت ترکیب شده‌ی P_{t+1}، همان‌طور که معمولاً برای $GWASF-GA$ انجام می‌شد انتخاب کنید.

معکوس به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\Lambda=\frac{\ln(۰.۵)}{\ln(\frac{q_{۴۰}-q_{۲۰}}{c})}$$

و

$$\rho=\frac{\ln(۰.۵)}{\ln(\frac{q_{۸۰}-q_{۶۰}}{d})}$$

که در آن فرض می‌شود صدک‌های $q_{۸۰}$ و $q_{۲۰}$، ۵۰٪ احتمال عملی شدن را دارند [۳۵]. در این آزمایش ما، ۵۰ شبیه‌سازی مستقل برای هر الگوریتم به‌منظور ارزیابی عملکردشان انجام داده‌ایم. جدول ۱.۴ پارامترهای مشخص شده که برای آزمایشات مورد استفاده قرار گرفت را خلاصه کرده است. قابل ذکر است برای این پارامترها، چندین بار آزمایش شده است و فقط مواردی که در جدول ۱.۴ آورده شده‌اند بهترین کارایی را داشته‌اند. به‌طور خاص، مشاهده کردیم که با استفاده از نسل‌هایی بیش‌تر از ۵۰۰ یا اندازه جمعیت بیش‌تر از ۲۲۰، پیشرفت‌های قابل توجهی در معیارهای عملکرد ایجاد نشده است که در زیر شرح داده می‌شود:

دو مقدار برای ارزیابی کیفیت جواب‌های به‌دست آمده در ۵۰ اجرا استفاده می‌شود. از یک

طرف از شاخص ابرحجم استفاده می‌کنیم. برای یک جمعیت از جواب‌های P، ابر حجم P که با $HV(P)$ نمایش داده می‌شود به‌صورت ابر حجم بخشی از فضای هدف که توسط جواب‌هایی در P مغلوب می‌شود تعریف می‌شود و با یک نقطه مرجع $r=(r_۱,r_۲,\dots,r_n)$ که توسط همه جواب‌های جمعیت مغلوب می‌شود کران‌دا می‌شود. به‌علاوه از شاخص اجرایی Cـ متریک (پوشش مجموعه) استفاده می‌کنیم. برای دو مجموعه تقریبی A و B روی مرز پارتو یک مسأله چندهدفه، $C(A,B)$ به‌صورت درصد جواب‌هایی در B که توسط حداقل یک جواب در A مغلوب می‌شوند تعریف می‌شود. بنابراین $C(A,B)=۱۰۰$ ایجاب می‌کند که جواب‌های در B توسط حداق یک جواب در A مغلوب می‌شوند و $C(A,B)=۰$ بدین مفهوم است که هیچ جوابی در B توسط جوابی در A مغلوب نمی‌شود.

پارامتر	ارزش
اندازه‌ی جمعیت	۲۲۰
تعداد نسل‌ها	۵۰۰
معیار توقف	حداکثر تعداد نسل‌ها
SBX تقاطع	$P_c=۰.۹ \quad \eta_c=۲۰$
$CR=۱ \quad F=۰.۵$	DE
جهش چند جمله‌ای	$P_m=\frac{۱}{k} \quad \eta_m=۲۰$
برای $MOEA/D_{NewOp}$ و $MOEA/D$	بردارهای وزن تولید شده براساس [۳۹] و رویکرد چیپشف [۳۹] $T=۲۰ \quad \delta=۰.۹ \quad \eta_r=۲$
برای $GWASF-GA_{NewOp}$ و GWASF-GA	بردارهای وزن تولید شده بر اساس [۴۰] و تابع اسکالرسازی پیشنهاد شده در [۳۷] و اندازه‌ی جمعیت $= N_\mu$

جدول ۱.۴: تنظیمات پارامتر

۳.۶.۴ نتایج عددی

جدول ۲.۴، میانگین و انحراف معیار مقادیر HV را که به وسیله‌ی $NSGAII$ و $MOEA/D$ و $SWGAF-GA$ در ۵۰ اجرای مستقل به‌دست آمده‌اند، زمانی‌که عملگردهای پیشنهاد شده را به‌کار می‌برند و زمانی‌که عملگردهای رایج استفاده شده که در بخش ۱.۶.۴ نشان داده شده است را درنظر می‌گیرند، را نشان می‌دهد.

سبدهای سهام غیرمغلوب که توسط $NSGAII_{NewOp}$، $MOEA/D_{NewOp}$، $SWGAF-GA_{NewOp}$ به‌دست آمده‌اند به‌طور میانگین مقدار HV بیش‌تری (که به‌صورت بزرگ‌تر نشان

الگوریتم	میانگین HV (انحراف استاندارد)
$\mathbf{NSGAII_{NewOp}}$	**۰.۵۷۲**(۰.۰**۱۵**)
$NSGAII$	۰.۱۹۸(۰.۱۶)
$\mathbf{MOEA/D_{NewOp}}$	**۰.۵۲۹**(۰.**۲۸**)
$MOEA/D$	۰.۳۶۹(۰.۰۵۶)
$\mathbf{GWASF-GA_{NewOp}}$	**۰.۵۸۸**(۰.۰**۱۵**)
$GWASF-GA$	۰.۱۸۲(۰.۰۱۴)

جدول ۲.۴: میانگین و انحراف استاندارد HV در ۵۰ اجرای مستقل انجام شد.

داده شده است) را نسبت به $NSGAII$ و $MOEA/D$ و $SWGAF-GA$ به‌دست آورده‌اند. بنابراین بر اساس HV، ما می‌توانیم نتیجه بگیریم که به کارگیری این عملگرها موجب تقریب‌زدن مرز بهینه پارتو برای مدل $MDRS$ دارای محدودیت کاردینالیتی با تنوع و همگرایی بیش‌تر نسبت به عملگرهایی که رایج بوده‌اند می‌دهد. این موضوع از کارایی عملگرهای پیشنهادی برای حل مدل $MDRS$ با استفاده از الگوریتم‌های EMD را نشان می‌دهد. به‌علاوه، در بین الگوریتم‌هایی که از این عملگرها استفاده کردند، $SWGAF-GA_{NewOp}$ بهترین مقدار میانگین HV را به‌دست آورده است. بنابراین می‌توان گفت که این الگوریتم عملکرد بهتری نسبت به $NSGALL_{NewOp}$ و $MOEA/D_{NewOp}$ دارد.

جدول ۳.۴ مقادیر میانگین Cـ متریک به‌دست آمده توسط هر الگوریتم را با حضور و بدون حضور عملگرهای ما در ۵۰ اجرای مستقل با هم مقایسه می‌کند. در مورد $NSGAII$ می‌توان دید که هر سبدسهام تولید شده توسط $NSGAII$ حداقل توسط یک جواب به‌دست آمده توسط $NSGAII_{NewOp}$ مغلوب می‌شود، در حالی‌که هیچ سبدسهامی از $NSGAII_{NewOp}$ توسط جواب‌های $NSGAII$ مغلوب نمی‌شود.
تحلیل مشابه همین نتایج را برای الگوریتم $GWASF$ نشان می‌دهد. در مورد $MOEA/D$، ٪۳۹.۱۲۵ از جواب‌های تولید شده در $MOEA/D$ توسط $MOEA/D_{NewOp}$ مغلوب شده‌اند و فقط ٪۴.۳۹۴ از سبدسهام‌های $MOEA/D_{NewOp}$ توسط یکی از سبدسهام‌های $MOEA/D$ مغلوب شده‌اند. بنابراین این نتایج نشان می‌دهد که عملگرهای جدید بهبود قابل ملاحظه‌ای را در جواب‌های به‌دست آمده به‌وجود می‌آورند.
به‌طور خلاصه، این تحلیل‌ها برتری عملگرهای پیشنهاد شده در مقایسه با دیگر عملگرهای ژنتیکی درنظر گرفته شده را نشان می‌دهد. به‌علاوه، بین اجرای الگوریتم‌ها با عمگرهای پیشنهادی، ما می‌توانیم نتیجه بگیریم که نمایش‌های بهتر مرز بهینه پارتو در مدل $MDRS$ به‌وسیله‌ی $GWASF-GA_{NewOp}$ با تفاوت‌های معناداری در مقادیر HV و Cـ متریک

A \ B	$NSGAII$	$NSGAII_{NewOp}$
$NSGAII$	–	100
$NSGAII_{NewOp}$	0	–
A \ B	$MOEA/D$	$MOEA/D_{NewOp}$
$MOEA/D$	–	39.125
$MOEA/D_{NewOp}$	4.394	–
A \ B	$GWASF-GA$	$GWASF-GA_{NewOp}$
$GWASF-GA$	–	100
$GWASF-GA_{NewOp}$	0	–

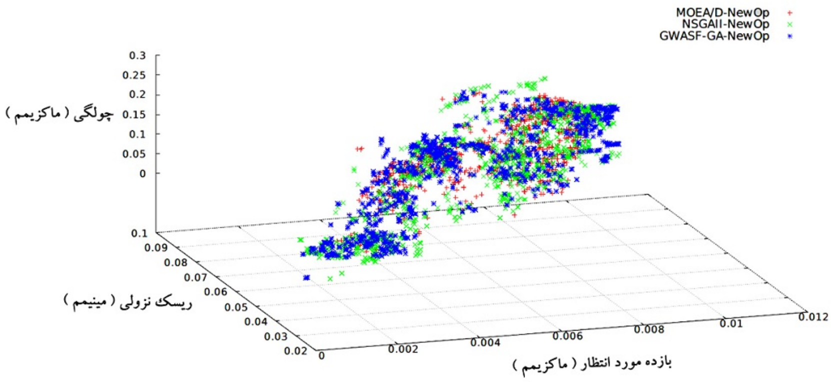
جدول ۳.۴: میانگین مقادیر $C(A,B)$ به‌دست آمده در ۵۰ اجرای مستقل، جایی‌که A و B مجموعه‌ای تقریبی هستند که توسط هر الگوریتم یافت می‌شوند.

ایجاد شده است. جدول ۴.۴ به‌طور متوسط زمان محاسباتی هر الگوریتم، برای حل مسئله برای ۵۰ اجرای مستقل را نشان می‌دهد. می‌توان مشاهده نمود که زمان مورد نیاز برای $NSGAII_{NewOp}$ و $GWASF-GA_{NewOP}$ و $MOEA/D_{NewOp}$ بیش‌تر از زمان مورد نیاز برای $NSGAII$ و $GWASF-GA$ و $MOEA/D$ است. هم‌چنین باید اشاره کرد که تفاوت میان آن‌ها بسیار زیاد نیست. به هرحال، از تحلیل‌های قبلی HV و C_متریک ما می‌توانیم نتیجه بگیریم که کمی زمان زیاد صرف کردن برای عملگرهای جدید به‌منظور به‌دست آوردن نتایج بهتر، ارزشش را دارد. سرانجام شکل ۸.۴ یک نمایش سه_بعدی از

الگوریتم	زمان (ثانیه)
$NSGAII_{NewOp}$	۱۳.۸۱
$NSGAII$	۱۳.۵۵
$MOEA/D_{NewOp}$	۱۳.۵۲
$MOEA/D$	۱۱.۴۳
$GWASF-GA_{NewOp}$	۱۷.۵۳
$GWASF-GA$	۱۷.۲۱

جدول ۴.۴: زمان محاسباتی مورد نیاز برای هر الگوریتم به‌طور متوسط در ۵۰ اجرای مستقل.

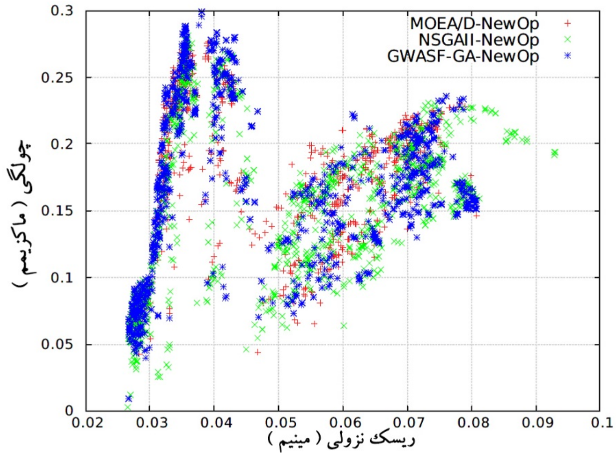
جمعیت‌های نهایی تولید شده در یکی از اجراهای $NSGAII_{NewOp}$ و $GWASF{-}GA_{NewOp}$ و $MOEA/D_{NewOp}$ برای مسأله $MDRS$ را نشان می‌دهد. به‌طور شهودی، می‌توان مشاهده



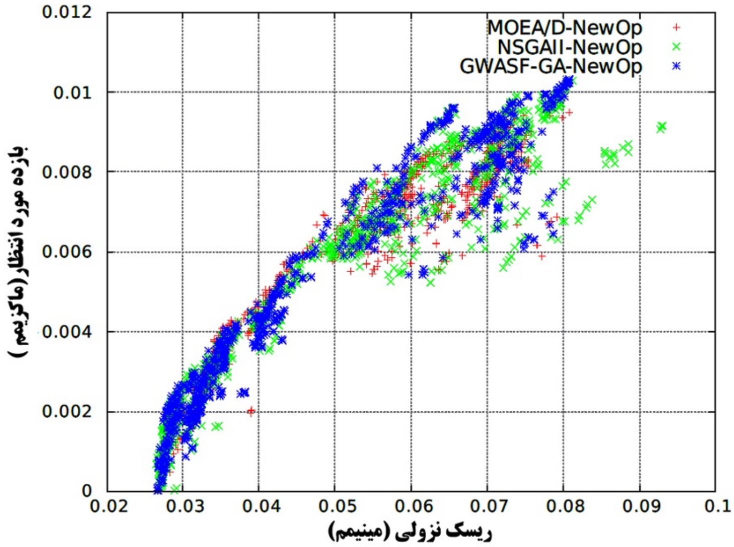
شکل ۸.۴: تقریب‌های مرز بهینه پارتو مدل $MDRS$ که توسط $EMOA/D_{NewOp}$ و $NSGAII_{NewOp}$ و $SWGAF-GA_{NewOp}$ به‌دست آمده است.

کرد که تمام الگوریتم‌ها مجموعه‌هایی از سبدسهام‌های غیر مغلوب را ارائه می‌دهند که به‌طور گسترده‌ای توزیع یافته‌اند. همچنین برای این اجرا هر زوج از توابع در تصاویر دو بعدی در شکل‌های ۹.۴ و ۱۰.۴ و ۱۱.۴ نشان داده شده است که مقادیر ۲ تابع مرتبط برای تمام جواب‌های ایجاد شده، توسط ۳ الگوریتم را نشان می‌دهد. در زمینه‌ی پوشش تصویری دوهدفه‌ی مرز بهینه پارتو، تمام این الگوریتم‌ها عملکردهای مناسبی از خود نشان می‌دهند. قابل ذکر است که ما تقریب‌های به‌دست آمده توسط عملگرهای معمول را به تصویر نکشیده‌ایم زیرا عملگرهای ما عملکرد بهتری نسبت به آن‌ها داشتند.
علاوه‌بر این باید تحلیلی انجام دهیم که نشان دهد کدام نوع از جواب‌ها به‌سیله‌ی این الگوریتم‌ها به‌دست آمده‌اند که این امر به‌خاطر ورود چولگی به‌عنوان یک معیار می‌باشد در شکل‌های ۸.۴ و ۱۰.۴ ما می‌توانیم به‌وضوح دو زیر مجموعه‌ی متفاوت از سبدسهام، از جواب‌های غیرمغلوب را مشاهده کنیم.

باید گفت که برای سرمایه‌گذاران با ریسک‌گریزی کم‌تر، سبدسهام‌های غیرمغلوب با بازده مورد



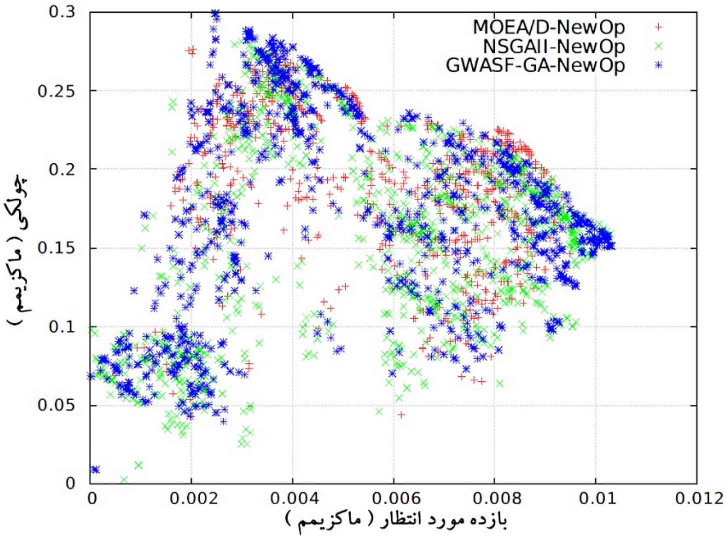
شکل ۹.۴: ریسک نامطلوب در مقابل چولگی



شکل ۱۰.۴: ریسک نامطلوب در مقابل بازده مورد انتظار

انتظار بالاتر به‌دست آمده است اما رفتار این زیر مجموعه از مرز بهینه پارتو به‌وضوح نسبت به سبدسهام مربوط به سرمایه‌گذاران محتاط‌تر پراکنده‌تر است.

علاوه بر این تصاویر ۹.۴ و ۱۱.۴ نشان می‌دهند که سبدسهام‌های غیرمغلوب که مقادیر چولگی بالاتری را دارند، از نظر بازده مورد انتظار و ریسک نامطلوب (در این اجرا به‌ترتیب ۰.۰۰۴ و ۰.۰۴) مقادیر کم‌تری را به‌دست می‌آورند. در حالی‌که سبدسهام‌هایی با بازده مورد انتظار بالاتر و ریسک نامطلوب کم‌تر مقادیر چولگی کم‌تری را به‌دست می‌آورند. این عملکردها منطبق با توصیه‌های داده شده توسط محققان در این باره است که درنظر گرفتن چولگی به‌عنوان یک معیار در مسئله انتخاب سبدسهام چندهدفه باعث تغییرات اساسی در مرز بهینه پارتو می‌شود. اگرچه باید بیان شود که عملکرد الگوریتم‌ها با عملگردهای ما به این معیارها زیاد حساس نیست که یک نتیجه جالب از نقطه نظر مالی می‌باشد.



شکل ۱۱.۴: بازده مورد انتظار در مقابل چولگی

مراجع

[1] A. Ban A. Brandas L. Coroianu C. Negrut iu and O. Nica.(2011), ”Approximations of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the ambiguity and value”, **Comput.Math**. Appl. vol. 61, pp 1379–1401.

[2] Anagnostopoulos K. P. and Mamanis G. (2010),” A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables”, **Computers and Operations Research**, 37(7), pp 1285-1297.

[3] Anagnostopoulos K. P. and Mamanis G. (2011), ”The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms”, **Expert Systems with Applications** 38(11), pp 14208-14217.

[4] Bellman R. E. and Zadeh L. A. (1970),” Decision-making in a fuzzy environment”, **Management Science**, 17(4), pp B-141.

[5] Bermudez J. D. Segura J. V. and Vercher E. (2007, July), ”A fuzzy ranking strategy for portfolio selection applied to the Spanish stock market”, **In Fuzzy Systems Conference**, 2007. FUZZ-IEEE 2007. IEEE International (pp. 1-4). IEEE.

[6] Bhattacharyya R. Kar S. and Majumder D. D. (2011), ”Fuzzy mean–variance–skewness portfolio selection models by interval analysis”, **Computers and Mathematics with Applications**, 61(1), pp 126-137.

[7] Chang T. J. Meade N. Beasley J. E. and Sharaiha Y. M. (2000),” Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation”, **SeriesComputers and Operations Research**, 27(13), pp 1271-1302.

[8] Chang T. J. Yang S. C. and Chang K. J. (2009), ”Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm”, **Expert Systems with Applications**, 36(7), pp 10529-10537.

[9] Chiam S. C. Tan K. C.and Al Mamum A. (2008), ”Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context”, **International Journal of Automation and Computing**, 5(1), pp 67-80.

[10] Cheung S. O. Tong T. K. L. and Tam C. M. (2002), ”Site pre-cast yard layout arrangement through genetic algorithms”,**Automation in Construction**, 11(1), pp 35-46.

[11] Chun Y. D. Wakao S. Kim T. H. Jang K. B. and Lee J. (2004), ”Multiobjective design optimization of brushless permanent magnet motor using 3D equivalent magnetic circuit network method”, **IEEE Transactions on Applied Superconductivity**, pp 14(2), pp 1910-1913.

[12] Konno H. and Yamazaki H. (1991),” Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market”, **Management Science**, 37(5), pp 519-531.

[13] Deb K. (2001),”**Multi-objective optimization using Evolutionary Algorithms**” (Vol. 16). John Wiley and Sons.

[14] Delgado M. Vila M. A. and Voxman W. (1998),” On a canonical representation of fuzzy numbers”, **Fuzzy Sets and Systems**, 93(1), pp 125-135.

[15] Dubois D. and Prade H. (1987), ”The mean value of a fuzzy number”, **Fuzzy Sets and Systems**, 24(3), pp 279-300.

[16] Fang Y. Lai K. K. and Wang S. Y. (2006),” Portfolio rebalancing model with transaction costs based on fuzzy decision theory”, **European Journal of Operational Research**, 175(2), pp 879-893.

[17] Fullér R. and Majlender P. (2003), ”On weighted possibilistic mean and variance of fuzzy numbers”, **Fuzzy Sets and Systems**, 136(3), pp 363-374.

[18] Grootveld H. and Hallerbach W. (1999),” Variance vs downside risk: Is there really that much difference?” ,**European Journal of Operational Research**, 114(2), pp .304-319

[19] Gupta P. Inuiguchi M. Mehlawat M. K. and Mittal G. (2013),” Multiobjective credibilistic portfolio selection model with Fuzzy Chance-constraints”, **Information Sciences**, 229, pp 1-17.

[20] Holland J. L. (1997),”**Making vocational choices: A Theory of Vocational Personalities and Work Environments**”, Psychological Assessment Resources.

[21] Klir G. and Yuan B. (1995), **Fuzzy Sets and Fuzzy logic (Vol. 4). New Jersey: Prentice hall**.

[22] Koza J. R. (1992), ”**Genetic Programming: on the Programming of Computers by Means of Natural Selection**” ,(Vol. 1). MIT press.

[23] Lai K. K. Wang S. Y. Xu J. P. Zhu S. S. and Fang Y. (2002), ”A class of linear interval programming problems and its application to portfolio selection”, **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 10(6), pp 698-704.

[24] Liagkouras K. and MetaxiotisK. (2015), ”Efficient portcitekeyfolio construction with the use of multiobjective evolutionary algorithms: best practices and performance metrics” **International Journal of Information Technology and Decision Making**, 14(03), pp. 535-564

[25] Li H. and Zhang Q. (2009), ”Multiobjective optimization problems with complicated Pareto sets, MOEA/D and NSGA-II”. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, 13(2), pp 284-302.

[26] Li X. Qin Z. and Kar S. (2010),” Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns”, **European Journal of Operational Research**, 202(1), pp 239-247.

[27] Maringer D. and Kellerer H. (2003), ”Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm” **Or Spectrum**, 25(4), pp 481-495.

[28] Markowitz H. (1952), ”Portfolio selection”,**The Journal of Finance**, 7(1), pp 77-91.

[29] Moral-Escudero R. Ruiz-Torrubiano R. and Suárez A. (2006, July),” Selection of optimal investment portfolios with cardinality constraints”, **In Evolutionary Computation**, 2006. CEC 2006. IEEE Congress on (pp. 2382-2388). IEEE.

[30] Saeidifar A. and Pasha E. (2009), ”The possibilistic moments of fuzzy numbers and their applications”, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 223(2), pp 1028-1042.

[31] Skolpadungket P. Dahal K. and Harnpornchai N. (2007, September), ”Portfolio optimization using multi-obj ective genetic algorithms” **In Evolutionary Computation**, 2007. CEC 2007. IEEE Congress on (pp. 516-523). IEEE.

[32] Speranza M. G. (1993), ”**Linear Programming Models for Portfolio Optimization**”.

[33] Streichert F. Ulmer H. and Zell A. (2004, June), ”Evaluating a hybrid encoding and three crossover operators on the constrained portfolio selection problem”, **In Evolutionary Computation, 2004. CEC2004. Congress on** (Vol. 1, pp. 932-939). IEEE. Chicago

[34] Vercher E. and Bermudez J. D. (2013), ”A possibilistic mean-downside risk-skewness model for efficient portfolio selection”, **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 21(3), pp 585-595.

[35] Vercher E. Bermúdez J. D. and Segura J. V. (2007), ”Fuzzy portfolio optimization under downside risk measures”, **Fuzzy Sets and Systems**, 158(7), pp 769-782.

[36] Vose M. D. (1999), ”**The Simple Genetic Algorithm: Foundations and Theory**” (Vol. 12). pp MIT press.

[37] Wierzbicki A. P. Fandel G. and Gal T. (1980), ”Multiple criteria decision making theory and application”, **Lecture Notes in Economics and Mathematicas Systems**, pp 177, pp 468-486.

[38] Zadeh L.A.(1999),”Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility .”**Fuzzy Sets and Systems**,100, pp 9-34.

[39] Zhang Q. and Li H. (2007),” MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition”, **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, 11(6), pp .712-731

[40] Zhang Q. Liu W. and Li H. (2009, May),” The performance of a new version of MOEA/D on CEC09 unconstrained MOP test instances”, **In Evolutionary Computation**, 2009. CEC’09. IEEE Congress on (pp. 203-208). IEEE.

Aabstract

In this thesis, we present some multi-objective evolutionary algorithms for selecting a fuzzy portfolio. At first we consider a new portfolio selection model called the meadian -DownsideRisk-Skewness model. In this model,the multi-dimensional property of portfolio selection and the requirements of the investor are simultaneously examined. In this model,the expected return, downside risk and the skewnessof a portfolio are optimized by considering budget constraint, boundaries and cardinality. The main goal is to solve the MDRS portfolio selection model as a three-objective optimizition problem. For this purpose, three new mutation , intersection and correction operators are proposed for optimization of evolutionary multi-objective.In this problem ,the expected return and skewness are maximized and downside risk is minimized.

Keywords: Portfolio, Dowside Risk, Expected return, Skewness, Genetic Algorithm, Multiobjective Optimizition

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operation Research

Evolutionary Multiobjective Optimization Algorithms for Fuzzy Portfolio Selection

By: Hossein Fize

Supervisors

Dr. Mehrdad Ghaznavi
Dr. Maryam Ghorani

Advisor

Dr. Somaye Moghari

November 2017