بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضیات مالی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ارزیابی کارایی پورتفوی با استفاده از مدل‌های DEA و SD

نگارنده: آنه بخت قربان زاده

استادان راهنما

دکتر احمد نزاکتي رضازاده
دکتر مجتبی غیاثی

تیر ۱۳۹۶

شماره
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **خانم انه بخت قربان زاده** با شماره دانشجویی ۹۳۱۳۵۱۴ رشته **ریاضی** گرایش **ریاضی مالی** تحت عنوان **ارزیابی کارایی پورتفوی با استفاده از مدلهای DEA و SD** که در تاریخ **۱۳۹۶/۰۴/۲۸** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با امتیاز ۱۸/۵ درجه بسیار خوب) ☒ **مردود** ☐

نوع تحقیق: نظری ☒ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنمای اول	دکتر احمد نزاکتی رضازاده	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر مجتبی غیاثی	استادیار	-----
۳- استاد مشاور	-----	-----	-----
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهرداد غزنوی	استادیار	غزنوی
۵- استاد ممتحن اول	دکتر علیرضا ناظمی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر الهام دسترنج	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم.

تقدیم به مادرم سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت.

تقدیم به همسرم که در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نائل شدم.

تقدیم به دلبندم امید بخش جانم که آسایش او آرامش من است.

سپاس‌گزاری

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت و سپاس فراوان از اساتید گرانقدرم جناب دکتر نزاکتی و آقای دکتر غیاثی که مرا در به سرانجام رساندن این پایان نامه راهنمابی فرمودند.

آنه بخت قربان زاده
تیر ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **آنه بخت قربان زاده** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **ارزیابی کارایی پورتفوی با استفاده از مدلهای DEA و SD** ، تحت راهنمایی **احمد نزاکتی رضازاده** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

آنه بخت قربان زاده
تیر ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در امور مالی مسئله انتخاب سهام مناسب و پربازده و ارزیابی عملکرد پورتفوی یکی از مهمترین مباحثی است که ذهن سرمایه گذاران را بسیار مشغول کرده است. در این راستا مدلهایی جهت ارزیابی کارائی پورتفوی ارائه شده است، که از جمله آنها تحلیل پوششی داده ها (DEA) و معیار تسلط تصادفی (SD) است. تکنیک DEA یک روش ناپارامتری است ، که برای ارزیابی کارایی و یا محاسبه بهره وری تعداد متناهی از واحدهای تصمیم گیرنده متجانس استوار است. در روش SD از تابع توزیع احتمال برای انتخاب پورتفوی کارا استفاده می شود. با استفاده از این روش ها می توان پورتفوی های کارا و ناکارا را مشخص نمود. در این تحقیق سعی شده تا ضمن بررسی مدل های DEA و SD جهت انتخاب سهام و تشکیل پورتفوی بهینه، کارایی پورتفوی ها با این مدلها ارزیابی شود و با انجام ارزیابی مقایسه ای تکنیک قوی تر جهت ارزیابی کارایی پورتفوی به سرمایه گذاران معرفی گردد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، تسلط تصادفی، کارایی، پورتفوی

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. مقاله اول ارزیابی کارایی و رتبه بندی شرکت های صنعت خودرو با استفاده از تحلیل پوششی داده ها، دهمین کنفرانس بین المللی تحقیق در عملیات، دانشگاه بابلسر، اردیبهشت ۱۳۹۶

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف مورد نیاز در فصل های بعد به طور مختصر آورده شده است.

۱.۱ مقدمه

استفاده بهینه از منابع در دسترس بشر و ارزیابی عملکرد و کارایی واحدهای کاری، یکی از موضوعاتی است که از سالیان بسیار قبل مورد توجه انسانها بوده تا با ایجاد راهکارهای مناسب از منابع موجود، حداکثر استفاده را ببرد. ارزیابی کارایی، یکی از شاخه های بسیار پر اهمیت در مدیریت است. ریاضیات بعنوان شاخه ای قدرتمند در توسعه مدیریت مورد استفاده قرار گرفته است. با وارد شدن ریاضیات و شاخه های مختلف آن در مدیریت و خصوصاً ارزیابی عملکرد تکنیک های مختلفی ارائه شده است که می توان آنها را به دو دسته مهم روش های پارامتری و غیر پارامتری تقسیم کرد. تحلیل پوششی داده ها و تسلط تصادفی دو روش ناپارامتریک برای ارزیابی کارایی واحدهای کاری و سازمانها و بنگاهها می باشند که در سالهای اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته اند. برای اندازه گیری با روش های پارامتری و غیر پارامتری شناختن تابع تولید مهمترین قسمت است.

روش ناپارامتری: به روش های آماری گفته می شود که سعی می کنند کمترین فرض ها را در تحلیل داده ها انجام دهند.

۲.۱ تابع تولید

مطالب این بخش از منبع [۴] آورده شده است.

تابع تولید تابعی است که بیشترین خروجی ممکن را از ترکیب ورودی ها ممکن می کند. بنابراین اگر مقدار خروجی ها را با y و ورودی ها را با $x_1, x_2, ..., x_n$ نشان دهیم، شکل ریاضی تابع تولید را می توان بصورت زیر نوشت.

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

که y میزان خروجی (محصول) و $x_1, x_2, ..., x_n$ ورودی ها (میزان منابع و عوامل تولید) را نشان می دهند.

موسسه تولیدی می تواند با افزایش یا کاهش میزان منابع تولیدی مورد استفاده میزان محصول را افزایش یا کاهش دهد و یا با ترکیب های مختلف منابع تولیدی با یکدیگر کالاهای بخصوصی تولید کند. بنابراین با افزایش مقدار یکی از منابع تولیدی و ثابت نگه داشتن میزان سایر منابع، امکان افزایش میزان محصول تا حد معینی فراهم می شود.

تعریف ۱.۲.۱. منظور از یک واحد تصمیم گیرنده (DMU)[۱] عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ بردار خروجی مانند $Y = (y_1, y_2, ..., y_s)$ را تولید کند.

تعریف ۲.۲.۱. واحدهای تصمیم گیرنده متجانس[۲] عبارتند از واحدهایی که عملی مشابه دارند که با دریافت ورودی های مشابه خروجی های مشابه تولید می کنند. مانند شعب یک بانک، بیمارستان ها و از این قبیل.

مدیران این واحدها را تصمیم گیرنده گویند.

۳.۱ کارایی

تعاریف این بخش بجز جاهایی که به منبع دیگر اشاره شده است از منبع [۳] می باشد.

کارایی [۳]بیانگر میزان بهره وری یک سازمان از منابع خود در عرصه ی تولید نسبت به بهترین عملکرد در مقطعی از زمان است[۲۸] . و در مسائل تصمیم گیری کارایی یعنی خوب کار کردن، که حاصل مقایسه شاخص های درون سازمانی است که به صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می شود.

$$\text{کارایی} = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}}, \qquad (۱.۱)$$

[۱] Decision Making Unit

[۲] Homological

[۳] Efficiency

تعریف ۱.۳.۱. ورودی عاملی است که با کاهش آن و ثابت نگه داشتن بقیه عوامل، کارایی افزایش پیدا می کند و با افزایش آن و ثابت ماندن بقیه عوامل کارایی آن کاهش می یابد.

تعریف ۲.۳.۱. خروجی عاملی است که با کاهش آن و ثابت نگه داشتن بقیه عوامل، کارایی کاهش می یابد و با افزایش آن و ثابت نگه داشتن بقیه عوامل کارایی افزایش می یابد.

تعریف ۳.۳.۱. کارایی مطلق[۴] به سنجش کارایی یک واحد با توجه به استانداردهای موجود گفته می شود. فرض کنید برای یک واحد تصمیم گیرنده خاصی استاندارد جهانی برای یک واحد ورودی، خروجی برابر با y^* باشد. اگر واحد تصمیم گیرنده با مصرف یک واحد ورودی، خروجی $y_\circ$ را تولید کند، در این صورت کارایی مطلق از رابطه زیر بدست می آید:

$$\text{کارایی مطلق} = \frac{y_\circ}{y^*}, \tag{۲.۱}$$

یعنی از نسبت خروجی $y_\circ$ به خروجی استاندارد y^* به عنوان نسبت کارایی استاندارد استفاده می شود. بنابراین، هر چه خروجی واحد مورد نظر به خروجی استاندارد نزدیکتر باشد، کارایی آن واحد بالاتر است.

یکی از بزرگترین فایده های کارایی مطلق در این است که جایگاه واقعی واحدها را نشان می دهد. اما با توجه به عدم در دسترس بودن استانداردهای کلی یا فاصله بسیار زیاد جامعه تحت ارزیابی با استانداردهای موجود، از کارایی مطلق استفاده نمی شود و به جای آن، معمولا از کارایی نسبی در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده استفاده می شود.

تعریف ۴.۳.۱. کارایی نسبی سنجش عملکرد یک واحد تصمیم گیرنده نسبت به واحدهای دیگر آن مجموعه است. کارایی نسبی، از تقسیم اندازه کارایی هر واحد به بزرگترین کارایی آن ها بدست می آید. بنابراین اندازه کارایی هر واحد، همواره کوچکتر یا مساوی یک است و حداقل یک واحد، کارایی نسبی برابر یک دارد.

کارایی نسبی واحد تصمیم گیرنده o ی که به ازای ورودی x_o، خروجی y_o را تولید کرده است (یعنی یک ورودی و یک خروجی داشته باشد) به صورت زیر بدست می آید.

$$RE_o = \frac{E_o}{max\left\{E_j : j = ۱, ۲, ..., n\right\}} = \frac{\frac{y_o}{x_o}}{max\left\{\frac{y_j}{x_j} : j = ۱, ۲, ..., n\right\}}, \tag{۳.۱}$$

این جا، از هیچ استاندارد خارجی استفاده نشده است و استانداردها از میان واحدهای موجود برگزیده می شوند.

تعریف ۵.۳.۱. کارایی اقتصادی[۵]

اگر واحد تصمیم گیرنده مورد نظر با مصرف بردار ورودی $(x_۱, x_۲, ..., x_m)$ بردار خروجی $(y_۱, y_۲, ..., y_s)$ را تولید کند (یعنی دارای چند ورودی و چند خروجی باشد) و قیمت همه

[۴] Absolute efficiency

[۵] Economic Efficiency

خروجی ها مشخص و هزینه همه ورودی های آن واحد معلوم باشد، آنگاه کارایی آن از رابطه زیر بدست می آید:

$$E_o = \frac{u_1 y_1 + ... + u_s y_s}{v_1 x_1 + ... + v_m x_m}, \tag{4.1}$$

که در آن، u_r قیمت خروجی rام، یعنی y_r $(r = 1, 2, .., s)$، و v_r هزینه ورودی iام یعنی، x_i $(i = 1, 2, .., s)$ است.

این کارایی به کارایی اقتصادی معروف است. سؤالی که در این جا مطرح می شود این است که اگر واحد تصمیم گیرنده به گونه ای باشد که نتوان قیمت خروجی و هزینه ورودی را مشخص کرد در این وضعیت چگونه u_rها و v_iها مشخص می شوند و چگونه کارایی تعریف می شود. مبحث تحلیل پوششی داده ها از جمله مباحثی است که پاسخگوی این مسئله است. قابل ذکر است که وزن های مناسب ورودی ها و خروجی ها، نقش تعیین کننده ای در اندازه کارایی دارند.

۴.۱ بازده

مطالب این بخش ازمنابع [۲] و [۴] آورده شده است.

بازده در فرایند سرمایه گذاری نیروی محرکی است که ایجاد انگیزه می کند و پاداش برای سرمایه گذاری محسوب می شود چرا که تمام هدف سرمایه گذاری کسب بازده مطلوب است.

تعریف ۱.۴.۱. بازده تحقق یافته، بازده ای است که واقع شده است، یا بازده ای است که کسب شده است. در واقع بازده تحقق یافته بازده ای است که به وقوع پیوسته و واقع شده است.

تعریف ۲.۴.۱. بازده مورد انتظار، عبارتست از بازده تخمینی یک دارایی که سرمایه گذاران انتظار دارند در یک دوره آینده بدست آورند. بازده مورد انتظار با عدم اطمینان همراه است، احتمال دارد برآورده شود و یا اینکه برآورده نشود.

تعریف ۳.۴.۱. بازده مورد انتظار هر سهم، با معلوم بودن توزیع احتمال برای بازده بالقوه سهام بازده مورد انتظار با $E(R)$ نشان داده شده و بصورت زیر بدست می آید:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^{m} (p_k) PR_k,$$

که در آن R_i نشان دهنده دارایی iام و PR_k بازده بالقوه یک سهم و P_k احتمال وقوع آن است.

تعریف ۴.۴.۱. سبد سرمایه (پورتفوی):

بطور عام همان سبد سرمایه گذاری و بطور خاص سبد سهام است. به معنی ترکیب دارایی های سرمایه گذاری شده توسط یک سرمایه گذار اعم از فرد یا موسسه می باشد. به لحاظ فنی یک سبد سرمایه مجموعه کامل دارایی های حقیقی و مالی سرمایه گذار را در بر می گیرد.

تعریف ۱.۴.۵. بازده مورد انتظار پورتفوی:
در صورتیکه سبد سرمایه با N دارایی داشته باشیم که وزن دارایی iام در آن x_i باشد، بازده مورد انتظار پورتفوی با $E(R_p)$ نشان می دهیم و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i E(R_i),$$

تعریف ۱.۴.۶. نرخ بازده از محاسبه درصد نسبت ''سود پس از کسر استهلاک''به ''میانگین سرمایه به کار رفته''بدست می آید. نرخ بازده، یکی از نسبت های مالی برای سنجش کارایی بنگاههای اقتصادی یا طرح های سرمایه گذاری است.

۱.۴.۱ بازده به مقیاس

بازده به مقیاس، مفهومی است بلندمدت که منعکس کننده نسبت افزایش در خروجی به ازای افزایش در میزان ورودی هاست. این نسبت می تواند ثابت، متغییر (افزایشی یا کاهشی) باشد.

تعریف ۱.۴.۷. بازده به مقیاس ثابت:
نسبت بازده ثابت به مقیاس وقتی صادق است که افزایش ورودی به همان نسبت موجب افزایش خروجی شود، بطور مثال اگر نیروی کار و سرمایه دوبرابر شود، میزان محصول نیز دو برابر شود. رابطه ریاضی بازده به مقیاس ثابت بصورت زیر است:

$$f(ax_1, ax_2, ...) = af(x_1, x_2, ...),$$

تعریف ۱.۴.۸. بازده به مقیاس متغییر:
بازده افزایشی نسبت به مقیاس آن است که میزان خروجی به نسبتی بیش از میزان ورودی ها، افزایش یابد و در صورتی که خروجی ها کمتر از نسبتی باشد که ورودی ها افزایش داده شوند، بازده کاهشی نسبت به مقیاس ایجاد شده است.

رابطه ریاضی بازده به مقیاس افزایشی $$f(ax_1, ax_2, ...) > af(x_1, x_2, ...),$$

رابطه ریاضی بازده به مقیاس کاهشی $$f(ax_1, ax_2, ...) < af(x_1, x_2, ...),$$

۱.۵ برخی تعاریف مورد نیاز

تعریف ۱.۵.۱. گشتاور اول، همان میانگین است.
برای گشتاورهای مراتب بالاتر معمولا گشتاور را حول میانگین حساب می کنند.

تعریف ۲.۵.۱. گشتاور دوم ، همان واریانس است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma^{2} = E(X - \bar{X})^{2},$$

تعریف ۳.۵.۱. گشتاور مرکزی سوم که همان چولگی می باشد و بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{3} = E(X - \bar{X})^{3},$$

تعریف ۴.۵.۱. متغییر تصادفی (X) تابعی است که از فضای نمونه (Ω) یک آزمایش به مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ تعریف میشود.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

تعریف ۵.۵.۱. متغیر تصادفی(X) را گسسته گویند، هرگاه تعداد مقادیری که می تواند اختیار کند متناهی یا نامتناهی شمارش پذیر باشد.

تعریف ۶.۵.۱. متغیر تصادفی (X) را پیوسته گویند، هرگاه مقادیری که می تواند اختیار کند از یک مجموعه نامتناهی (زمان، مکان و ...)باشد به عبارت دیگر مقادیر متغیر تصادفی پیوسته (X)در یک فاصله یا بازه قرار دارد.

تعریف ۷.۵.۱. تابع توزیع احتمال[۶]، تابعی است که احتمال آنکه متغییر تصادفی X برابر، کوچک تر یا مساوی x شود، نشان می دهد که به آن تابع توزیع تجمعی[۷] نیز می گویند. و بصورت زیر تعریف می شود:

$$F(x) = p(X \leq x),$$

تعریف ۸.۵.۱. تابع چگالی احتمال [۸]، تابعی است که احتمال آنکه متغییر تصادفی X مساوی با x گردد را نشان می دهد.

$$f(x) = p(X = x),$$

تابع چگالی احتمال در واقع مشتق تابع توزیع بصورت زیر است:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x),$$

تعریف ۹.۵.۱. بردار تصادفی[۹]: فرض کنیم Ω یک فضای نمونه باشد بردار تصادفی χ تابعی از فضای نمونه Ω به مجموعه K بعدی از بردار حقیقی $\mathbb{R}^{K}$ را یک بردار تصادفی می گویند.

$$\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{K},$$

[۶] Probability distribution function

[۷] Cumulative distribution function

[۸] Probability density function

[۹] Random Vector

تعریف ۱۰.۵.۱. بردار تصادفی χ گسسته است اگر:
۱-مجموعه شمارا $\mathbb{R}_\chi$ از مقادیر متناهی یا نامتناهی وجود داشته باشد.
۲-تابع$p_\chi : \mathbb{R}^K \to [0, 1]$ از χ وجود دارد بطوریکه برای هر $x \in \mathbb{R}^K$:

$$p_\chi(x) = \begin{cases} p(\chi = x) & \text{if} x \in \mathbb{R}_\chi, \\ 0 & \text{if} x \notin \mathbb{R}_\chi, \end{cases} \tag{۵.۱}$$

تعریف ۱۱.۵.۱. فرض کنیم $-\infty \leq a < b \leq +\infty$، تابع $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ را محدب[۱۰] گوئیم، در صورتیکه داشته باشیم:

$$\forall x_1, x_2 \in (a.b), \qquad t \in [0, 1] : \qquad f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \tag{۶.۱}$$

تعریف ۱۲.۵.۱. فرض کنیم $-\infty \leq a < b \leq +\infty$، تابع $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ را مقعر[۱۱] گوئیم، در صورتیکه داشته باشیم:

$$\forall x_1, x_2 \in (a.b), \qquad t \in [0, 1] : \qquad f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \tag{۷.۱}$$

۶.۱ ریسک

مفاهیمی که در این بخش آمده، از منبع [۲۵] است.
در یک بازار سرمایه اگر سرمایه گذار بخواهد بازده مورد انتظارش را افزایش دهد باید در معرض ریسک بیشتری قرار بگیرد. در حالیکه بازده مورد انتظار و سودآوری به خوبی تعریف می شود مفهوم ریسک و اینکه چگونه اندازه گیری می شود مبهم است.
معمولاً در سرمایه گذاریهای مالی گفته می شود که سرمایه گذاری ریسکی است و با تنوع بخشیدن به سرمایه گذاری می توان این ریسک و خطر را کاهش داد. در واقع در سرمایه گذاری قرار دادن همه تخم مرغها در یک سبد می تواند خطر ساز باشد. چنین ادعاهایی به مفهوم ریسک برمی گردد. اما هیچ توافقی در مورد نحوه اندازه گیری ریسک وجود ندارد. سرمایه گذاران ممکن است خطر را احساس کنند ولی در مورد اینکه چگونه آن را اندازه گیری کنند توافق کمی وجود دارد. در میان تعاریفی که از ریسک وجود دارد می توان مفاهیم زیر را یافت:
-''قرار گرفتن در معرض احتمال از دست رفتن''
-''یک خطر یا احتمال خطرناک''
-''خطر یا احتمال از دست دادن''
-''درجه ای از احتمال از دست دادن''
-''مبلغی که شرکت بیمه ممکن است از دست بدهد''

[۱۰] Convex
[۱۱] Concave

تعریف ریسک بسیار دشوار است. زیرا ما بدنبال یک شاخص ریسک که بتوان به یک سرمایه گذاری مشخص اختصاص داد و در آن همه سرمایه گذاران به توافق رسیده باشند هستیم.

تعریف موقعیت ریسکی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

یک دارایی دارای موقعیت ریسکی است که در آن بیش از یک خروجی مالی وجود داشته باشد. فرض کنیم $x_۱, x_۲, ..., x_n$ خروجی های دارایی مورد نظر با احتمال وقوع $p(x_i)$ باشند که $۰ < p(x_i) < ۱$ است. باید توجه داشت که در این موقعیت حداقل یک مشاهده x_j با احتمال $۰ < p(x_i) < ۱$ وجود خواهد داشت. در واقع طبق این تعریف اگر برای یک دارایی سرمایه گذاری شده احتمال وقوع چندین خروجی (بازدهی) وجود داشته باشد، آنگاه این سرمایه گذاری ریسکی است. به بیان دیگر فرض کنیم خروجی یک سرمایه گذاری x و احتمال وقوع آن $p(x)$ باشد و هر سرمایه گذاری بصورت $(x, p(x))$ مشخص شود. اگر یک سرمایه گذاری فقط یک خروجی با احتمال $p(x) = ۱$ داشته باشد، آنگاه آن سرمایه گذاری بدون ریسک است و اگر چندین خروجی x با احتمال $۰ < p(x) < ۱$ برای همه xها باشد، یک سرمایه گذاری ریسکی است.

۱.۶.۱ اندازه هایی از ریسک

در ادامه این بخش چند شاخص برای اندازه گیری ریسک معرفی می کنیم.

شاخصهای ریسک دومار و موسگراو

[۱۲] [۱۳] گاهی اوقات ریسک در شرایط از دست رفتن تعریف می شود. دومار و موسگراو یک شاخص کمی از ریسک را که تمام نتایج منفی یا نسبتاً پایین را ممکن می کند، بدست آوردند. بر این اساس آنها شاخص ریسک زیر را پیشنهاد کردند:

$$RI = -\sum_{x_i \leq ۰} p_i x_i,$$

چون $x_i \leq ۰$، پس RI یک مقدار مثبت است، بنابراین RI بالاتر، سرمایه گذاری با ریسک بیشتر را نشان می دهد. در این مورد RI میانگین کوتاه شده و $x = ۰$ نقطه کوتاه شده است. یعنی ما می توانیم میانگین بازده اعداد منفی را محاسبه کنیم. اگر متغییر تصادفی پیوسته باشد شاخص ریسک (RI) به صورت زیر است:

$$RI = -\int_{-\infty}^{۰} f(x) x dx,$$

دومار و موسگراو متوجه شدند که بسیاری از سرمایه گذاران احساس می کنند که در سرمایه گذاری خود اگر آنها مقدار کمتر از نرخ بهره بدون ریسک را استفاده کنند، شکست

[۱۲] Domar

[۱۳] Musgrave

خورده اند. آنها برای رفع این مشکل فرمول زیر از شاخص ریسک را پیشنهاد کردند:

$$RI = -\sum_{x_i \leq r} p_i(x_i)(x_i - r),$$

در اینجا همه انحرافات $(x_i - r)$ فقط برای $(x_i < r)$ با احتمال p_i برای بدست آوردن x_i است (r نرخ بهره بدون ریسک). برای متغییر تصادفی پیوسته RI بصورت زیر است:

$$RI = -\int_{-\infty}^{r} f(x)(x - r)dx,$$

واریانس و انحراف معیار

از آنجایی که ریسک زمانیکه بیش از یک نتیجه ممکن باشد اتفاق می افتد، پس طبیعی است که با یکی از اندازه های پراکندگی اندازه گیری شود. در نظریه پورتفوی مدرن هری مارکویتز[۱۴] اندازه ریسک سرمایه گذاری را با استفاده از واریانس یا انحراف از استاندارد بازده بیان کرد. بویژه هنگامیکه سرمایه گذار داراییهای خود را در یک پورتفوی قرار می دهد از واریانس بعنوان شاخص ریسک استفاده می کند. امروزه واریانس و انحراف معیار بعنوان رایج ترین معیارهای ریسک استفاده می شوند. واریانس برای یک توزیع گسسته به شکل زیر بدست می آید:

$$\sigma_x^۲ = \sum(x_i)(x_i - Ex)^۲,$$

x_i خروجی های ممکن، $p(x_i)$ احتمال x_i و x بازده سرمایه گذاری و $E(x)$ بازده مورد انتظار سرمایه گذاری است و برای یک توزیع پیوسته واریانس بصورت زیر است:

$$\sigma_x^۲ = \int f(x)(x - E(x))^۲ dx$$

که x نشان دهنده بازده و $f(x)$ تابع چگالی است. ریشه مربع $\sigma^۲$، انحراف استاندارد (σ) را نشان می دهد.

نیم واریانس

نیم واریانس بعنوان یک اندازه ریسک برای توزیع گسسته بصورت زیر است:

$$SV = \sum_{x_i \leq A} p(x_i)(x_i - A)^۲,$$

و برای توزیع پیوسته به صورت زیر می باشد:

$$SV = \int_{-\infty}^{A} f(x)(x - A)^۲ dx,$$

که در عبارتهای بالا A یک مقدار ثابت است بطوریکه درآمد کمتر از A بعنوان شکست در نظر گرفته می شود. A انتخاب شده مساوی $E(x)$ است.

[۱۴] Harry Markowitz

ارزش در معرض ریسک

یک شاخص ریسک جدید بسیار رایج به نام ارزش در معرض ریسک[۱۵] (VaR) توسط موسسات مالی استفاده می شود. ارزش در معرض ریسک، نشان دهنده حداکثر ضرر ممکن، هنگامیکه α درصد از سمت چپ دم توزیع نادیده گرفته شود، است. ارزش در معرض خطر بصورت زیر است:

$$VaR = \mu - L$$

، که μ اندازه میانگین توزیع و L مقداری است که به ازای آن $p(X \leq L) = \alpha$ است. بنابراین، ریسک اندازه گیری شده حداکثر انحراف از میانگین زمانیکه دم چپ از توزیع نادیده گرفته می شود.

۷.۱ مطلوبیت مورد انتظار

مفاهیم ارائه شده در این بخش از منبع [۲۵] می باشد.

به تعریف اقتصاددانان مطلوبیت کیفیتی است که کالایی را برای افراد خواستنی می کند. به بیان دیگر، مطلوبیت عبارت است از رضایت مصرف کننده که از مصرف کالا و خدمات حاصل می شود. در واقع کلمه مطلوبیت، رضایت است نه سودمندی.

برای رسیدن به یک تصمیم درست در یک سرمایه گذاری، در مقابل اندازه گیری ریسک سرمایه گذاری که بسیار سخت است، سودآوری سرمایه گذاری نیز اهمیت ویژه ای دارد. بنابراین سودآوری و ریسک باید هر دو در فرآیند سرمایه گذاری در نظر گرفته شود. سرمایه گذاران با گزینه های بسیاری برای انتخاب سبد سرمایه خود مواجه هستند. به منظور مقایسه ریسک و بازده سرمایه گذاری، معیارهایی برای تصمیم گیری مورد نیاز است.

یکی از معیارهایی که در رسیدن به تصمیم گیری درست استفاده می شود، ابزار مطلوبیت مورد انتظار[۱۶] است. این ابزار فرض می کند سرمایه گذار منطقی است، مثلا او ثروت بیشتر را به ثروت کمتر ترجیح می دهد.

---

[۱۵] Valu at Risk

[۱۶] Expected Utility

۱.۷.۱ معیارهای سرمایه گذاری

معیار حداکثر بازده(MRC)

معیار حداکثر بازده[۱۷] در زمانیکه هیچ ریسکی وجود ندارد استفاده می شود. با توجه به این معیار، ما به سادگی سرمایه گذاری با بالاترین نرخ بازده را انتخاب می شود. با انتخاب درست، حداکثر بازده ثروت سرمایه گذاری شده را در پایان دوره سرمایه گذاری تضمین می کند.

معیار حداکثر بازده را با مثالی از تصمیم تولید بهینه توسط یک شرکت نشان می دهیم. فرض کنید P قیمت محصول هر بخش، Q مقدار تولید شده توسط شرکت و $C(Q)$ هزینه های تولید باشد. هدف شرکت این است که به گونه ای تصمیم بگیرد که مقدار بهینه Q^* را تولید کند بطوریکه سود $\Pi(Q)$ حداکثر باشد. بنابراین هدف شرکت عبارت است از :

$$Max\ \Pi(Q) = P.Q - C(Q),$$

با مشتق گرفتن از معادله فوق و مساوی صفر قرار دادن آن نتیجه خوبی بدست می آید که در سطح بهینه تولید خواهیم داشت:

$$P = C'(Q^*),$$

رابطه فوق به این معنی است که درآمد نهایی P با هزینه نهایی $C'(Q)$ برابر است. مقدار Q^* مقدار مطلوب واحدهای تولید شده است، زیرا با انتخاب Q^* شرکت حداکثر بازده $\pi(Q)$ را بدست می آورد.

سئوالی که در اینجا پیش می آید این است که آیا این قاعده را برای سرمایه گذاری های نامشخص اعمال می کنیم؟ پاسخ این است که این معیار زمانی قابل استفاده است که بازده ها مشخص باشند و در صورت عدم اطمینان قابل اجرا نیست.

معیار حداکثر بازده مورد انتظار(MERC)

معیار حداکثر بازده مورد انتظار[۱۸]، سرمایه گذاری با بالاترین بازده مورد انتظار را مشخص می کند. در نتیجه مشکل رتبه بندی را رفع می کند. برای استفاده از این قانون، ابتدا بازده مورد انتظار هر یک از سرمایه گذاریهای ممکن را محاسبه می کنیم.

معیار بازده مورد انتظار یک رتبه بندی واضح ویکنواخت ارائه می دهد. این معیار، رتبه بندی یکنواختی برای سرمایه گذاری های ریسکی فراهم می کند، ولی این بدان معنا نیست که در همه موارد مورد استفاده قرار می گیرد. از نظر فنی این معیار برای شرایط اطمینان و عدم اطمینان قابل استفاده است ولی توجیه نظری ندارد. این معیار چندان مطلوب نیست زیرا ممکن است منجر به ایجاد تصمیمات غیر منطقی شود.

---

[۱۷] Maximum Return Criterion

[۱۸] Maximum Expected Return Criterion

۲.۷.۱ اصل ها و اثبات معیار حداکثر مطلوبیت مورد انتظار(MEUC)

اثبات مطلوبیت مورد انتظار می تواند از طریق راههای گوناگون فرمول بندی شود. ما در اینجا شش اصل سازگار با معیار حداکثر مطلوبیت مورد انتظار[۱۹] را می آوریم و سپس به اثبات آن می پردازیم.

بازپرداخت سرمایه گذاری

فرض کنیم از میان سرمایه گذاریهای ممکن دو پورتفوی که با $L_۱$ و $L_۲$ نشان می دهیم، بسازیم. این دو سرمایه گذاری را بصورت زیر می نویسیم:

$$L_۱ = \{(p_۱, A_۱); (p_۲, A_۲); ...; (p_n, A_n)\},$$

$$L_۲ = \{(q_۱, A_۱); (q_۲, A_۲); ...; (q_n, A_n)\},$$

که $A_۱$ به ترتیب خروجی های ممکن با احتمال $p_۱$ و $q_۱$ است. خروجیها از کوچکترین $(A_۱)$ به بزرگترین (A_n) مرتب شده است. بنابراین تحت سرمایه گذاری $L_۱$ با احتمال $p_۱$ خروجی $A_۱$ و تحت سرمایه گذاری $L_۲$ با احتمال $q_۱$ خروجی $A_۱$ بدست می آید. این نتایج منحصر بفرد هستند، یعنی تحت هر سرمایه گذاری فقط یک نتیجه به دست می آید و $\sum p_i = \sum q_i = ۱$. در عمل به ندرت اتفاق می افتد که دو سرمایه گذاری دارای نتایج یکسان باشند. اما در واقعیت هیچ محدودیتی برای تحلیل ما ندارد. برای مثال اگر:

$$L_۱ = \{(\frac{۱}{۴}, ۴); (\frac{۳}{۴}, ۵)\}$$

و

$$L_۲ = \{(\frac{۱}{۲}, ۱); (\frac{۱}{۲}, ۱۰)\}$$

باشد. به جای خروجی هایی که در یک سرمایه گذاری وجود دارد و در دیگری وجود ندارد می توانیم خروجی را در سرمایه گذاری دیگر با احتمال صفر وارد کنیم یعنی:

$$L_۱ = \{(\frac{۰}{۱}, ۱); (\frac{۱}{۴}, ۴); (\frac{۳}{۴}, ۵); (\frac{۰}{۱}, ۱۰)\}$$

$$L_۲ = \{(\frac{۱}{۲}, ۱); (\frac{۰}{۱}, ۴); \frac{۰}{۱}, ۵); (\frac{۱}{۲}, ۱۰)\}$$

[۱۹] Maximum Expected Utility Criterion

اصل ها

اصل ۱. مقایسه پذیری[20]

طبق این اصل وقتی در خروجی مالی A_i و A_j داریم، سرمایه گذار باید بگوید که A_i را به A_j ترجیح می دهد یا بالعکس و یا اینکه بین آنها بی تفاوت است.

اصل۲. پیوستگی[21]

اگر خروجی A_3 به A_2 و خروجی A_2 به A_1 ترجیح داده شود، پس احتمال $0 \leq U(A_2) \leq 1$ وجود دارد. بطوریکه:

$$L = \{((1 - U(A_2)), A_1); (U(A_2), A_3)\} \sim A_2,$$

بنابراین سرمایه گذار بین انتخاب برای دریافت با اطمینان A_2 یا رسیدن به A_1 با احتمال $(1 - U(A_2))$ و یا رسیدن به A_3 با احتمال $U(A_2)$ بی تفاوت خواهد بود. A_1 و A_3 تابعی از A_2 هستند.

چرا این اصل را پیوستگی گویند؟ به سادگی با انتخاب $U(A_2) = 1$ می بینیم $L = A_3 \succ A_2$ (یعنی A_3 بر A_2 ترجیح داده می شود). و با انتخاب $U(A_2) = 0$ داریم:

$$L = A_1 \prec A_2,$$

بنابراین اگر بطور مداوم $U(A_2)$ را از صفر به یک افزایش دهیم خواهیم داشت:

$$L \sim A_2.$$

اصل ۳. تعویض پذیری[22]

فرض کنیم سرمایه گذاری L_1 بصورت زیر باشد:

$$L_1 = \{(p_1, A_1); (p_2, A_2); (p_3, A_3)\},$$

و همچنین فرض شود سرمایه گذار بین A_2 و شانس دیگر B $(B = \{(q, A_1); ((1 - q), A_3)\})$ بی تفاوت باشد. پس طبق اصل تعویض پذیری سرمایه گذار بین سرمایه گذاری L_1 و L بی تفاوت است ، که سرمایه گذاری L بصورت زیر است:

$$L = \{(p_1, A_1); (p_2, B); (p_3, A_3)\},$$

اصل ۴. تعدی[23]

فرض کنیم سه سرمایه گذاری L_1 و L_2 و L_3 را داشته باشیم که $L_1 \succ L_2$ و $L_2 \succ L_3$ باشد. پس با توجه به اصل تعدی داریم:

$$L_1 \succ L_3.$$

[20] Comparability

[21] Continuity

[22] Interchangeability

[23] Transitivity

اصل ۵. تجزیه پذیری[۲۴]

فرض کنیم سرمایه گذاری L^* به صورت زیر باشد:

$$L^* = \{(q, L_۱); ((۱ - q), L_۲)\},$$

که $L_۱$ و $L_۲$ خود یک سرمایه گذاری هستند.

$$L_۱ = \{(p_۱, A_۱); ((۱ - p_۱), A_۲)\},$$

و

$$L_۲ = \{(p_۲, A_۱); ((۱ - p_۲), A_۲)\},$$

در اینصورت L^* را می توان بصورت زیر تجزیه کرد:

$$L^* \sim L_۱ = \{(p^*, A_۱); ((۱ - p^*), A_۲)\},$$

که

$$P^* = qp_۱ + (۱ - q)p_۲,$$

اصل۶. یکنواختی[۲۵]

اگر اطمینان وجود داشته باشد. طبق اصل یکنواختی، اگر $A_۱ > A_۲$ پس $A_۲ \succ A_۱$ و اگر اطمینان وجود نداشته باشد اصل یکنواختی به دو روش زیر بیان می شود:

۱)فرض کنیم:

$$L_۱ = \{(p, A_۱); ((۱ - p), A_۲)\},$$

و

$$L_۲ = \{(p, A_۱); ((۱ - p), A_۳)\},$$

اگر $A_۲ > A_۳$ پس $A_۲ \succ A_۳$ و در نتیجه $L_۱ \succ L_۲$.

۲) فرض کنیم:

$$L_۱ = \{(p, A_۱); ((۱ - p), A_۲)\},$$

و

$$L_۲ = \{(q, A_۱); ((۱ - q), A_۲)\},$$

و $A_۱ > A_۲$ (پس$A_۱ \succ A_۲$)

اگر $q < p$ در نتیجه $L_۲ \succ L_۱$.

[۲۴] Decomposability

[۲۵] Monotonicity

اثبات معیار حداکثر مطلوبیت مورد انتظار(MEUC)

قضیه ۱.۷.۱. مطلوبیت مورد انتظار معیار بهینه برای رتبه بندی سرمایه گذاری های متفاوت است.

در واقع این قضیه بیان می کند اگر مطلوبیت مورد انتظار از یک سرمایه گذاری $L_۱$ بیشتر از مطلوبیت مورد انتظار برای سرمایه گذاری $L_۲$ باشد. سرمایه گذار $L_۱$ را بر $L_۲$ ترجیح می دهد $(L_۱ \succ L_۲)$.

برهان. در اثبات زیر دقیقاً از مراحل شش اصل فوق استفاده می کنیم. همچنین ما نشان می دهیم که در این اثبات، برخی از اصل های فوق بیشتر از دیگر اصل ها استفاده می شود. فرض کنیم می خواهیم بین دو سرمایه گذاری $L_۱$ و $L_۲$ یکی را انتخاب کنیم. $L_۱$ و $L_۲$ به صورت زیر است:

$$L_۱ = \{(p_۱, A_۱); (p_۲, A_۲); ...; (p_n, A_n)\},$$

و

$$L_۱ = \{(q_۱, A_۱); (q_۲, A_۲); ...; (q_n, A_n)\},$$

و

$$A_۱ < A_۲ < ... < A_n,$$

که A_iها خروجی های ممکن یک سرمایه گذاری است.

ابتدا با استفاده از اصل مقایسه پذیری ما می توانیم A_iها را مقایسه کنیم. علاوه بر این با توجه به اصل یکنواختی ما می توانیم خروجی ها را به شکل زیر مشخص کنیم:

$$A_۱ < A_۲ < ... < A_n \qquad \text{یا} \qquad A_۱ \prec A_۲ \prec ... \prec A_n$$

تعریف می کنیم:

$$A_i^* = \{((۱ - U(A_i)), A_۱); (U(A_i), A_n)\} : \qquad ۰ \leq U(A_i) \leq ۱,$$

با استفاده از اصل یکنواختی داریم:

$$\forall A_i \qquad \exists U(A_i) : \qquad A_i \sim A_i^*,$$

برای $A_۱$، $U(A_۱) = ۰$ در نظر می گیریم. پس داریم:

$$A_۱ \sim A_۱,$$

$$\forall A_n, \qquad U(A_n) = ۱ \Longrightarrow A_n \sim A_n,$$

برای همه مقادیر A_i، $۰ < U(A_i) < ۱$، با توجه به اصل یکنواختی و تعدی $U(A_i)$ از صفر به یک افزایش می یابد و A_iها از $A_۱$ به A_n صعود می کند.

A_i را با A_i^* در $L_۱$ تعویض می کنیم و با استفاده از اصل تعویض پذیری بدست می آوریم:

$$L_۱ \sim L_۱^* \equiv \{(p_۱, A_۱); (p_۲, A_۲), ..., (p_i, A_i^*), ..., (p_n, A_n)\},$$

که یک عضو در میان اعضای L_1 با A_i جابجا شده و L_1^* را بوجود آورده است. با جابجایی بیش از یک عضو در L_1^* و استفاده از اصل تعویض پذیری و تعدی بدست می آوریم:

$$L_1 \sim L_1^* \sim L_1^{**},$$

که L_1^{**} سرمایه گذاری است که دو عضو آن جابجا شده است. این روش را ادامه می دهیم تا به سرمایه گذاری $\tilde{L_1}$ که همه اعضای $A_i, (i = 1, 2, ..., n)$ با A_i^* جابجا شده است، را بدست می آوریم:

$$L_1 \sim \tilde{L} \equiv \{(p_1, A_1^*); (p_2, A_2^*); ...; (p_n, A_n^*)\},$$

با استفاده از اصل های تجزیه پذیری و تعدی داریم:

$$L_1 \sim \tilde{L}_1 \sim \tilde{\tilde{L}}_1 = \{(A_1, \sum p_i(1 - U(A_i)); (A_n, \sum p_i U(A_i))\},$$

همه مراحل فوق را با سرمایه گذاری L_2 تکرار می کنیم و بدست می آوریم:

$$L_2 \sim \tilde{L}_2 \sim \tilde{\tilde{L}}_2 = \{(A_1, \sum q_i(1 - U(A_i)); (A_n, \sum q_i U(A_i))\},$$

با توجه به اصل یکنواختی $\tilde{\tilde{L}}_1$ به $\tilde{\tilde{L}}_2$ ترجیح داده می شود، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

$$\sum p_i U(A_i) > \sum q_i U(A_i),$$

اما با استفاده از اصل تعدی می توانیم نامساوی فوق را به سرمایه گذاری اصلی تعمیم دهیم. پس داریم:

$$L_1 \succ L_2,$$

حال به این سوال پاسخ می دهیم که این نتیجه چه ارتباطی با مطلوبیت مورد انتظار دارد. فرض کنیم برای لحظه A_i مطلوبیت، $U(A_i)$ باشد. با توجه به مجموعه اصل هایی که در بالا آمده است سرمایه گذاری با مطلوبیت مورد انتظار بالاتر بر دیگر سرمایه گذاریهای ترجیح داده می شود. یعنی:

$$L_1 \succ L_2 \Longleftrightarrow \sum p_i U(A_i) \equiv E_{L_1} U(x) > \sum q_i U(A_i) \equiv E_{L_2} U(x),$$

که x نشان دهنده خروجی های ممکن و L_1 و L_2 به ترتیب نشان دهنده مطلوبیت مورد انتظار از L_1 و L_2 است. $U(A_i)$ نشان دهنده اولویت سرمایه گذار برای خروجی های گوناگون است پس می توان گفت: نشان دهنده مطلوبیت متناظر با A_i است. بنابراین $U(A_i)$ نشان دهنده تابع مطلوبیت سرمایه گذار است.

۳.۷.۱ تابع مطلوبیت

طبق قضیه بالا ثابت کردیم اگر مطلوبیت مورد انتظار از سرمایه گذاری L_1 بیشتر از سرمایه گذاری L_2 باشد، سرمایه گذاری L_1 بر L_2 ترجیح داده می شود. اگر سرمایه گذاری L_1 بر L_2 ترجیح داده شود $(L_1 \succ L_2)$، پس تابع غیر نزولی U_1 وجود دارد بطوریکه:

$$E_{L_1} U_1(x) > E_{L_2} U_1(x),$$

فقط باید به این نکته توجه داشت که، ممکن است برای یک سرمایه گذار $(L_۱ \succ L_۲)$ و برای سرمایه گذار دیگر $(L_۲ \succ L_۱)$ باشد. این مسئله نشان می دهد که تابع غیر نزولی دیگر $U_۲$ برای سرمایه گذار دوم که $L_۲$ را بر $L_۱$ ترجیح داده است وجود دارد. بطوریکه:

$$E_{L_۲}U_۲(x) > E_{L_۱}U_۲(x),$$

که این تابع غیر نزولی تابع مطلوبیت نامیده می شود.

حال به این سوال پاسخ می دهیم که چرا این تابع نشان دهنده مطلوبیت سرمایه گذاری، سرمایه گذارها است. با توجه به اصل پیوستگی برای دو مقدار $A_۱$ و A_n (که $A_n > A_۱$) و $A_۱ < A_i < A_n$، یک تابع $U(A_i)$ وجود دارد بطوریکه:

$$\{((۱ - U(A_i)), A_۱); (U(A_i), A_n)\} \equiv A_i^* \sim A_i,$$

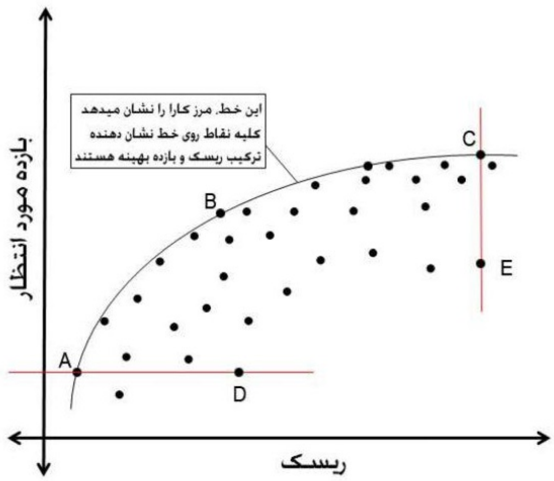
همه سرمایه گذاران بر روی مقدار $U(A_i)$ هم عقیده نیستند، اما برای همه سرمایه گذاران تابع $U(A_i)$ (که $۰ \leq U(A_i) \leq ۱$) وجود دارد. زیرا ترجیحات یک سرمایه گذار از ترجیحات سرمایه گذار دیگر فرق دارد، که تابع مطلوبیت نامیده می شود و نشان دهنده عملکرد و منعکس کننده منحنی بی تفاوتی (منحنی که هر نقطه روی آن با نقطه دیگر برای سرمایه گذار فرقی ندارد) است.

۸.۱ مرز کارایی

مرز کارا پورتفویی است که حداکثر بازدهی را در یک سطح معین از ریسک و یا حداقل ریسک را در یک سطح معین از بازدهی ایجاد می کند. در واقع مرز کارایی، متشکل از واحدهایی (پورتفوی هایی) با اندازه کارایی یک است. از لحاظ ریاضی مرز کارا حد بیرونی داده هاست. هر پورتفوی که بر روی مرز کارا باشد دارای بیشترین نرخ بازدهی با ریسک برابر و یا کمترین ریسک با نرخ بازدهی مساوی با سایر پورتفوی هایی که پایین مرز کارایی قرار دارند است.

سرمایه گذاران براساس تابع مطلوبیت و نحوه برخوردشان با ریسک به نقطه ای بر روی مرز کارا می رسند. هیچ پورتفویی بر روی مرز کارا نسبت به سایر پورتفوی ها بر روی این مرز، برتری ندارد. تمام این پورتفوی ها دارای بازدهی و ریسک متفاوت هستند که با افزایش ریسک، نرخ بازدهی مورد انتظار آنها نیز افزایش می یابد. در واقع سرمایه گذارن برای داشتن پورتفوی بهینه حرکت کنند.

نمودار فوق نشان می‌دهد که پرتفوی بهینه سهام چه طور کار می‌کند. پرتفوی بهینه سهام معمولاً در نواحی میانی این منحنی قرار می‌گیرد، چراکه هر چه شما از نقطه A به سمت نقطه C حرکت کنید، ریسک بیشتری برای افزایش بازده به نسبت کمتر تحمل خواهید کرد. به عبارتی در بخش‌های پایینی نمودار (نزدیک به نقطه A) شما به ازای یک واحد افزایش ریسک ممکن است چندین واحد بازده اضافی دست آورید. هرقدر که به سمت بخش‌های بالایی می‌روید به میزان ریسک شما افزوده می‌شود و از میزان بازدهی که پاداش می‌گیرید کاسته



شکل ۱.۱: نمودار مرز کارایی

می‌شود تا اینکه درنهایت به ازای چند واحد ریسک ممکن است فقط یک واحد بازده اضافی کسب کنید (نزدیک به نقطه C).

خطی که نقطه A و C را به هم وصل می‌کند مرز کارا گفته می‌شود. در نمودار فوق پورتفوی های A و B و C بر روی مرز کارایی قرار دارند. مجموعه پرتفوهای بهینه روی این خط قرار می‌گیرند این بدان معناست که هر سه پورتفوی فوق کارا هستند و هیچکدام بر دیگری برتری ندارند. چراکه پرتفوهای با ریسک بیشتر و بازده کمتر بی‌نتیجه هستند و انتخاب آن‌ها کاری معقول و منطقی به‌حساب نمی‌آید. مثلاً پرتفوی D را در نظر بگیرید. این پرتفوی ریسک بیشتری از پرتفوی A دارد و شما می‌توانید با سرمایه گذاری در دارایی‌های بدون ریسک نظیر اوراق مشارکت دولتی یا سپرده‌های بانکی همان مقدار بازده پرتفوی A را به دست آورید. به عبارتی پرتفوی A دارای حداقل ریسک است و هیچ سرمایه گذار ریسک گریزی هیچ‌یک از پرتفوهایی را که بازده مورد انتظارآن‌ها کمتر از بازده مورد انتظار پرتفوی A است، انتخاب نمی‌کند.

تعریف ۱.۸.۱. نقدشوندگی به این موضوع اشاره دارد که با چه سرعتی می‌توان یک دارایی یا سهام را به قیمت واقعی در بازار فروخت. هرقدر میزان معاملات یک سهم در بازار بیشتر باشد و خریداران و فروشندگان بیشتری آن سهم را معامله کنند، نقدشوندگی آن بیشتر است. به‌عبارت‌دیگر اگر بتوان یک دارایی را با سرعت بالایی و بدون دردسر به وجه نقد تبدیل کرد، نقد شوندگی آن دارایی و قابلیت عرضه و فروش آن در بازار بیشتر است.

فصل ۲

مدلهای پایه تحلیل پوششی داده ها و تسلط تصادفی

مطالبی که در این فصل آمده است، بجز جاهایی که به آن اشاره شده است از منبع [۴] و [۲۵]می باشد.

۱.۲ مدلهای تحلیل پوششی داده ها

اندازه گیری کارایی به دلیل اهمیت آن در ارزیابی عملکرد یک سازمان یا شرکت همواره مورد توجه محققان بوده است. در سال ۱۹۵۷ فارل [۱]با استفاده از روشی مانند اندازه گیری کارایی در مباحث مهندسی، اقدام به اندازه گیری کارایی برای یک واحد تولیدی کرد. موردی که فارل برای اندازه گیری کارایی مدنظر قرار داد شامل یک ورودی ویک خروجی بود، که تحلیل پوششی داده ها [۲] نام گرفت.

تحلیل پوششی داده‌ها یکی از ابزارهای مناسب و کارآمد در زمینه ارزیابی عملکرد و بررسی کارایی، است که به عنوان یک روش ناپارامتری به منظور محاسبه کارایی واحدهای تصمیم گیرنده استفاده می‌شود. در واقع تکنیک تحلیل پوششی داده ها مبتنی بر یک سری بهینه

[۱] Farrell

[۲] Data Envolpment Analysis

سازی بر اساس برنامه ریزی خطی است. در این روش منحنی مرز کارایی از یک سری نقاط که بوسیله برنامه ریزی خطی تعیین می شود ایجاد می شود. برای تعیین این نقاط می توان از دو فرض بازدهی ثابت و متغییر نسبت به مقیاس استفاده کرد. روش برنامه ریزی خطی پس از یک سری بهینه سازی مشخص می کند که آیا واحد تصمیم گیرنده مورد نظر بر روی مرز کارایی قرار دارد یا خارج از آن قرار گرفته است. بدین وسیله واحدهای کارا و ناکارا از یکدیگر تفکیک می شوند. تکنیک تحلیل پوششی داده ها (DEA) هنگام تحلیل داده ها تمام داده ها را تحت پوشش قرار داده ها و به همین دلیل تحلیل پوششی داده ها نام گرفته است [۵].

امروزه استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها با سرعت زیادی در حال گسترش بوده و در ارزیابی سازمانها و صنایع مختلف مانند صنعت بانکداری، پست، بیمارستانها، مراکز آموزشی، نیروگاه‌ها، پالایشگاه‌ها و... استفاده می‌شود. توسعه‌های زیادی از جنبه تئوری و کاربردی در مدلهای تحلیل پوششی داده‌ها اتفاق افتاده که شناخت جوانب مختلف آن را برای بکارگیری دقیقتر اجتناب ناپذیر می‌کند. استفاده از مدلهای تحلیل پوششی داده‌ها علاوه بر تعیین میزان کارایی نسبی، نقاط ضعف سازمان را در شاخصهای مختلف تعیین کرده و با ارائه میزان مطلوب آنها، خط مشی سازمان را به سوی ارتقای کارایی و بهره‌وری مشخص می‌کند. همچنین الگوهای کارا که ارزیابی واحدهای ناکارا بر اساس آنها انجام گرفته‌است به واحدهای ناکارا معرفی می‌شوند. الگوهای کارا واحدهایی هستند که با ورودی‌های مشابه به واحدهای ناکارا خروجی‌های بیشتر یا همان خروجی‌ها را با استفاده از ورودی‌های کمتر تولید کرده‌اند. این تنوع وسیع در نتایج است که موجب شده استفاده از این تکنیک با سرعت فزاینده‌ای رو به گسترش باشد. همین امر موجب شده است که این تکنیک از بعد تئوری نیز رشد فزاینده‌ای داشته باشد و به یکی از شاخه‌های فعال در علم تحقیق در عملیات تبدیل شود.

مدلهای DEA به دو دسته اساسی مدلهای CCR و BCC تقسیم می شود.

۱.۱.۲ مدل CCR

چارنز[۳]، کوپر[۴] و رودرز [۵]دیدگاه فارل را توسعه دادند و مدلی ارائه کردند، که توانایی اندازه گیری کارایی با چندین ورودی با چندین خروجی را داشت. و به نام مدل تحلیل پوششی داده ها شناخته شد. اولین بار در رساله دکتری رودرز و به راهنمایی کوپر با عنوان ''ارزیابی پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدارس ملی آمریکا'' در دانشگاه کارنگی مورد استفاده قرار گرفت و در سال ۱۹۷۸ در مقاله ای با عنوان ''اندازه گیری کارایی واحدهای تصمیم گیرنده'' ارائه شد.

اولین مدل تحلیل پوششی داده ها بر اساس حروف اول نام پدیدآورندگان آنها CCR نام گرفت. در این مدل، هدف اندازه گیری

[۳] Chanes

[۴] Cooper

[۵] Rohdes

و مقایسه ی کارایی نسبی واحدهای سازمانی مانند شعب بانک با چندین ورودی و چندین خروجی شبیه به هم است. یکی از ویژگی های مدل تحلیل پوششی داده ها ساختار بازده به مقیاس آن است. مدلهای CCR از جمله مدل های بازده به مقیاس ثابت هستند. مدل های بازده ثابت نسبت به مقیاس زمانی مناسب است که همه واحدها در مقیاس بهینه عمل کنند.

ساختن مدل نسبت CCR

مبنای تشکیل این مدل، تعریف کارایی به صورت نسبت یک خروجی به یک ورودی است. به عبارت دیگر در مدل CCR برای محاسبه کارایی فنی، بجای استفاده از نسبت یک خروجی به یک ورودی از نسبت مجموع موزون خروجی های مجاز به مجموع موزون ورودی های مجاز استفاده شده است.

$$\textbf{کارایی} = \frac{\text{مجموع موزون خروجی ها}}{\text{مجموع موزون ورودی ها}}, \qquad (۱.۲)$$

در صورتی که هدف بررسی کارایی n واحد، هر واحد دارای m ورودی و s خروجی باشد، کارایی واحد jام $(j = ۱, ۲, ..., n)$ بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\text{کارایی واحد } j\text{ام} = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}}, \qquad (۲.۲)$$

x_{ij} میزان ورودی iام برای واحد jام $(i = ۱, ۲, ..., m)$

y_{rj} میزان خروجی rام برای واحد jام $(۱, ۲, ..., s)$

u_r وزن داده شده به خروجی rام

v_i وزن داده شده به ورودی iام

مورد مهم در مورد رابطه فوق این است که این وسیله سنجش کارایی، نیازمند مجموعه ای از وزن هاست که در تمام واحدهای تحت بررسی استفاده می شود.

در مورد رابطه فوق باید به دو نکته توجه داشت: اول اینکه ارزش ورودی ها و خروجی ها می تواند متفاوت و اندازه گیری آنها مشکل باشد. دوم، ممکن است واحدهای مختلف به گونه ای عملیات خود را سازمان دهند که خروجی هایی با ارزش های متفاوت ارائه کنند، بنابراین به وزن های متفاوتی در اندازه گیری کارایی نیازمندند. چارنز، کوپر و رودرز این مشکل را شناختند و برای حل این مشکل در مدل خود به ورودی ها و خروجی ها وزن های مختلفی اختصاص دادند و واحدهایی را مطرح کردند که می توانند وزن هایی را در مقایسه با سایر واحدها که برای آنها متناسب تر و روشن کننده تر باشد، بپذیرند. در این شرایط مدل ارائه شده آنان برای ارزیابی واحد تحت بررسی که از این بعد آن را واحد صفر می نامیم. از حل یک مدل برنامه ریزی خطی به دست می آید که مدل نسبت CCR نامیده می شود.

برای ساختن مدل، فرض کنید n واحد موجود است. و هدف ارزیابی کارایی واحد تحت بررسی (واحد صفر یا واحد تصمیم گیرنده) است که ورودی ها $x_{۱,۰}, x_{۲,۰}, ..., x_{m,۰}$را برای تولید خروجی ها $y_{۱,۰}, y_{۲,۰}, ... y_{s,۰}$ مصرف میکند. در صورتیکه وزن های تخصیص داده شده

به خروجی ها با $u_1, u_2, ..., u_m$ و وزن های تخصیص داده شده به ورودی ها با $v_1, v_2, ..., v_m$ نشان داده شود. برای پیدا کردن حداکثر کارایی کسر زیر باید حداکثر شود.

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}}, \qquad (۳.۲)$$

این روش را برای سایر واحدها نیز باید انجام داد. به این ترتیب:

$Max\ Z_0 =$ *کارایی واحد صفر*

$s.t$

کارایی تمام واحدها $\leq 1.$

متغییر مسئله فوق، وزن هاست و جواب مسئله مناسب ترین مقادیر را برای وزن های واحد صفر ارائه و کارایی آن را اندازه گیری می کند.

مدل ریاضی آن بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &Max\ Z_0 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}} \\ &s.t \\ &\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1, \qquad (j = 0, 1, 2, ..., n), \\ &u_r, v_i \geq 0. \end{aligned} \qquad (۴.۲)$$

۲.۱.۲ خطی کردن با مدل برنامه ریزی کسری

مدل برنامه ریزی کسری مدلی است که تابع هدف آن از تقسیم دو معادله درجه یک تشکیل شده و محدودیت های آن خطی است. به این ترتیب، مدل نسبت CCR فوق یک مدل برنامه ریزی خطی خواهد بود. تبدیل این مدل به یک مدل برنامه ریزی خطی مستلزم دو بار تغییر متغییر به صورت زیر است. از این رو مجدداً مدل نسبت CCR را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &Max\ Z_0 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}} \\ &s.t \\ &\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r_j}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_j}} \leq 1, \qquad (j = 1, 2, ..., n), \\ &u_r, v_i \geq 0. \end{aligned} \qquad (۵.۲)$$

در ابتدا تغییر متغییر زیر را انجام دهید:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0}} = t, \qquad (۶.۲)$$

با تغییر متغییر فوق و طرفین وسطین کردن محدودیت ها مدل به صورت زیر در خواهد آمد:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z_{\circ} = \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{ij_{\circ}} t \\
&s.t \\
&\sum_{r=۱}^{S} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij_{\circ}} \leq \circ, \qquad (j = ۱, ۲, ..., n), \qquad (۱) \\
&\sum_{i=۱}^{n} v_i x_{ij_{\circ}} t = ۱, \qquad (۲) \\
&u_r, v_i, t \geq \circ.
\end{aligned}
$$

دقت کنید رابطه ۲ در مدل فوق همان رابطه تغییر متغییر است. حال رابطه ۱ را در t ضرب و برای بار دوم تغییر متغییر زیر را اعمال می کنیم:

$$tu_r = \mu_r, \quad \text{و} \quad tv_i = w_i, \tag{۷.۲}$$

در نتیجه مدل (۷.۲) به صورت زیر در می آید:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z_{\circ} = \sum_{r=۱}^{s} y_{rj_{\circ}} \mu_r \\
&s.t \\
&\sum_{r=۱}^{s} y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} w_i \leq \circ, \\
&\sum_{i=۱}^{m} x_{ij_{\circ}} w_i = ۱, \\
&\mu_r, w_i \geq \circ.
\end{aligned} \tag{۸.۲}
$$

۳.۱.۲ روش خطی کردن CCR

برای تبدیل مدل نسبت CCR به یک مدل برنامه ریزی خطی، استدلال بر آن است که برای حداکثر کردن مقدار یک عبارت کسری به دو شیوه می توان اقدام کرد :''مخرج کسر را ثابت در نظر گرفت و صورت را حداکثر کرد'' و یا صورت کسر را ثابت و مخرج را حداقل کرد''.بسته به اینکه یک کدام از دو شیوه به کار گرفته شود، دو نوع مدل ورودی محور(نهاده گرا) و خروجی محور(ستاده گرا) حاصل می شود.

مدل CCR ورودی محور

مدلهای ورودی محور در یک تقسیم بندی کلی به دو گروه مضربی و پوششی تقسیم می شود.

در یک مدل ورودی محور، یک واحد تصمیم گیرنده در صورتی ناکاراست که امکان کاهش هر یک از ورودی ها بدون افزایش هر یک از ورودی های دیگر یا کاهش هر یک از خروجی ها

وجود داشته باشد.

مدل مضربی CCR ورودی محور

در اینجا برای تبدیل مدل نسبت CCR به یک مدل برنامه ریزی خطی، کسر را معادل یک قرار می دهیم و صورت کسر ماکزیمم می شود. به این ترتیب، تابع هدف کسری مدل نسبت به یک تابع هدف خطی و یک هدف محدودیت تساوی تبدیل می شود.

تابع هدف مدل نسبت:

$$MaxZ_0 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}},$$

تابع هدف مدل CCR ورودی محور:

$$MaxZ_0 = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}} = 1,$$

یا

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1,$$

در این صورت مدل مضربی CCR به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&Max\ Z_0 = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} \\
&s.t \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_i \leq 0, \quad (j = 1, 2, ..., n), \\
&u_r, v_i \geq 0.
\end{aligned} \tag{۹.۲}$$

مثال ۱.۱.۲. جدول زیر ورودی ها و خروجی های شش واحد را ارائه می کند. مدل CCR مضربی ورودی محور برای واحد A بصورت زیر است:

جدول ۱.۲: داده های مربوط به ارزیابی کارایی شش واحد

	ورودی ها		خروجی ها	
واحدها	اول ($X_۱$)	دوم ($X_۲$)	اول($Y_۱$)	دوم ($Y_۲$)
A	۱.۵	۰.۲	۱.۴	۰.۳۵
B	۴	۰.۷	۱.۴	۲.۱
C	۳.۲	۱.۲	۴.۲	۱.۰۵
D	۵.۲	۲	۲.۸	۴.۲
E	۳.۵	۱.۲	۱.۹	۲.۵
F	۳.۲	۰.۷	۱.۴	۱.۵

$$max\ Z_A = ۱/۴u_۱ + ۰/۳۵u_۲$$

$$s.t,$$

$$۱/۵v_۱ + ۰/۲v_۲ = ۱,$$

$$۱/۴u_۱ + ۰/۳۵u_۲ - ۱/۵v_۱ - ۰/۲v_۲ \leq ۰,$$

$$۱/۴u_۱ + ۲/۱u_۲ - ۴v_۱ - ۰/۷v_۲ \leq ۰,$$

$$۴/۲u_۱ + ۱/۰۵u_۲ - ۳/۲v_۱ - ۱/۲v_۲ \leq ۰,$$

$$۲/۸u_۱ + ۴/۲u_۲ - ۵/۲v_۱ - ۲v_۲ \leq ۰,$$

$$۱/۹u_۱ + ۲/۵u_۲ - ۳/۵v_۱ - ۱/۲v_۲ \leq ۰,$$

$$۱/۴u_۱ + ۱/۵u_۲ - ۳/۲v_۱ - ۰/۷v_۲ \leq ۰,$$

$$u_۱, u_۲, v_۱, v_۲ \geq ۰.$$

طبق این مدل واحد A کاراست اگر امتیاز کارایی برابر یک بدست آورد. میزان کارایی شش واحد تحت بررسی به صورت جدول (۲.۲) است.

جدول ۲.۲: داده های مربوط به ارزیابی کارایی شش واحد

واحد	$v_۲$	$v_۱$	$u_۲$	$u_۱$	Z^*
A	۱.۱۲۰	۰.۵۱۷	۰	۰.۷۱۴	۱
B	۰.۶۴۲	۰.۱۳۷	۰.۴۷۶	۰	۱
C	۰	۰.۳۱۲	۰	۰.۲۳۸	۱
D	۰	۰.۱۹۲	۰.۲۳۸	۰	۱
E	۰.۵۱۳	۰.۱۱۰	۰.۳۰۴	۰.۱۱۵۱	۰.۹۷۷۵
F	۰.۷۲۲	۰.۱۵۵	۰.۴۲۷	۰.۱۶۲	۰.۸۶۷۵

Z^* امتیاز کارایی برای تمام واحدهاست. واحد A امتیاز یک را بدست آورده است پس این واحد کاراست.

مدل پوششی CCR ورودی محور

چارنز، کوپر و رودرز در ساخت مدل تحلیلی پوششی داده ها به یک رابطه تجربی در ارتباط با «تعداد واحدهای مورد ارزیابی» و «تعداد ورودی ها» و «خروجی ها» به صورت زیر رسیده اند:

$$\text{(تعداد ورودیها + تعداد خروجیها)} ۳ \leq \text{تعداد واحدهای مورد ارزیابی}$$

به کار نگرفتن رابطه فوق در عمل موجب می شود که تعداد زیادی از واحدها بر روی مرز کارا قرار بگیرند و به عبارات دیگر دارای امتیاز کارایی یک شوند، در نتیجه قدرت تفکیک مدل کاهش می یابد.

مدل خوب، مدلی است که قدرت تفکیک پذیری بالایی داشته باشد. به این معنا که تفاوت میان میزان کارایی واحدهای مختلف را تشخیص دهد. مدلی که امتیاز کارایی تمامی واحدها را یک محاسبه می کند، توان تشخیص تفاوت کارایی واحدها را ندارد و دارای قدرت تفکیک پذیری پایین است.

در صورتیکه متناظر با محدودیت $\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{i\circ} = ۱$ را در مسئله ثانویه θ و متغییرهای متناظر با محدودیت های $\sum_{r=۱}^{m} y_{rj} u_r - \sum_{i=۱}^{n} x_{ij} v_i \leq \circ$ با λ_j نشان داده شود، مدل ثانویه به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
& Min\, Y_\circ = \theta \\
& s.t \\
& \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{r\circ}, \qquad (r = ۱, ۲, ..., n), \\
& \theta x_{i\circ} - \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \geq \circ, \qquad (i = ۱, ۲, ..., m), \\
& \lambda_j \geq \circ, \qquad (j = ۱, ۲, ..., n),
\end{aligned}
\tag{۱۰.۲}
$$

مدل فوق با اندکی تغییر بصورت زیر در خواهد آمد. این مدل را فرم پوششی می نامند.

$$
\begin{aligned}
& Min\, Y_\circ = \theta \\
& s.t \\
& \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{r\circ}, \qquad (r = ۱, ۲, ..., n), \\
& \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i\circ}, \qquad (i = ۱, ۲, ..., m), \\
& \lambda_j \geq \theta, \qquad (j = ۱, ۲, ..., n),
\end{aligned}
\tag{۱۱.۲}
$$

مدل CCR خروجی محور

۱)در یک مدل ورودی محور، یک واحد در صورتی ناکاراست که امکان کاهش هر یک از ورودی ها بدون افزایش ورودی های دیگر یا کاهش هر یک از خروجی ها وجود داشته باشد.

۲)در یک مدل خروجی محور، یک واحد در صورتی ناکاراست که امکان افزایش هر یک از خروجی ها بدون افزایش یک ورودی یا کاهش یک خروجی دیگر وجود داشته باشد.

یک واحد کارا خواهد بود، اگر و فقط اگر هیچ کدام از دو مورد فوق امکان تحقق نیابد. کارایی کمتر از یک برای یک واحد بدین معنی است که ترکیب خطی واحدهای دیگر می تواند همان مقدار خروجی را با به کارگیری ورودی های کمتر ایجاد کنند. مدل های توضیح داده شده قبل بر ورودی ها متمرکز بودند.

مدل مضربی CCR خروجی محور به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&Min\ Z_\circ = \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{i\circ}\\
&s.t\\
&\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{r\circ} = ۱,\\
&\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} \leq \circ, \qquad (j = ۱, ۲, ..., n),\\
&u_r, v_i \geq \circ.
\end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

در صورتی که متغییر متناظر با محدودیت اول مدل فوق را در مسئله ثانویه با θ و λ_j را متغییر متناظر با دیگر محدودیت های مدل اولیه فرض کنیم، مدل پوششی خروجی محور بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&Max\ Y_\circ = \theta\\
&s.t\\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \theta y_{r\circ}, \qquad (r = ۱, ۲, ..., s),\\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{j\circ}, \qquad (i = ۱, ۲, ..., m),\\
&\lambda_j \geq \circ, \qquad (j = ۱, ۲, ..., n),
\end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

در مدلهای خروجی محور هدف ما کسب بیشترین مقدار خروجی است.

۴.۱.۲ مدل BCC

در سال ۱۹۸۴، بنکر[۶]، چارنز و کوپر با تغییر در مدل CCR مدل جدیدی را عرضه کردند که بر اساس حروف اول نام خانوادگی آنها به مدل BCC شهرت یافت. مدل BCC مدلی از انواع مدلهای تحلیل پوششی داده هاست که به ارزیابی کارایی نسبی واحدهایی با بازده متغیر نسبت به مقیاس می پردازد. مدل های بازده به مقیاس ثابت محدود کننده تر از مدل های بازده به مقیاس متغییر هستند، زیرا مدل بازده به مقیاس ثابت واحدهای کارای کمتری را دربر می گیرد و مقدار کارایی نیز کمتر می شود.

مدل نسبت BCC

مدل نسبت BCC برای ارزیابی کارایی واحد تحت بررسی (صفر) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & Max\ Z_{\circ} = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{r\circ} + w}{\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{i\circ}} \\ & s.t \\ & \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} + w}{\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}} \leq ۱, \qquad (j = ۱, ۲, ..., n), \\ & u_r, v_i \geq \circ. \end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

کهw آزاد در علامت است. ساختار مدل نسبت BCC همانند مدل نسبت CCR است که هم در تابع هدف و هم در تمامی محدودیت ها به صورت کسر یک متغییر آزاد در علامت w افزوده می شود. مدلهای BCC نیز همانند مدلهای CCR به دو گروه مدلهای مضربی و پوششی تقسیم بندی می شوند.

مدل مضربی BCC

مدل نسبت BCC یک مدل برنامه ریزی غیرخطی است که برای خطی کردن آن می توان به دو شیوه عمل کرد که «حداکثر کردن صورت و ثابت نگه داشتن مخرج کسر» مدل مضربی ورودی محور را ایجاد می کند، یا با «حداقل کردن مخرج و ثابت نگه داشتن صورت کسر» مدل مضربی BCC خروجی محور به وجود می آید.

[۶] Benker

مدل مضربی BCC ورودی محور به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&Max\ Z_{\circ} = \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{r\circ} + w \\
&s.t \\
&\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{i\circ} = ۱, \\
&\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} + w \leq \circ, \qquad (j = ۱, ۲, ..., n), \\
&u_r, v_i \geq \circ.
\end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

همانطور که می بینید تفاوت این مدل با مدل CCR در وجود متغییر آزاد در علامت w است. علامت متغییر w در این مدل نوع بازده به مقیاس را بصورت زیر تعیین می کند:

الف)هرگاه $w < \circ$ باشد نوع بازده به مقیاس، کاهشی است.

ب)هرگاه $w > \circ$ باشد نوع بازده به مقیاس، افزایشی است.

ج)هرگاه $w = \circ$ باشد نوع بازده به مقیاس، ثابت است.

مثال ۲.۱.۲. برای ارزیابی نسبی چهار بیمارستان مختلف، سه ورودی و چهار خروجی مدنظر قرار گرفته است. جدول های زیر میانگین میزان ورودی و خروجی برای سه سال متوالی را نشان می دهد. مدل زیر برای بیمارستان سوم طراحی شده است:

جدول ۳.۲: ورودی های چهار بیمارستان

ورودی ها	بیمارستان اول	بیمارستان دوم	بیمارستان سوم	بیمارستان چهارم
تعداد غیر پزشک (نفر)	۲۸۵.۲	۱۶۲.۳۰	۲۷۵.۷	۲۱۰.۴
هزینه تدارکات (میلیون نفر)	۱۲۳.۸	۱۲۸.۸۰	۳۴۸.۵	۱۵۴.۱۰
تخت روز موجود	۱۰۶.۷۲	۶۴.۲۱	۱۰۴.۱۰	۱۰۴.۰۴

جدول ۴.۲: خروجی های چهار بیمارستان

خروجی ها	بیمارستان اول	بیمارستان دوم	بیمارستان سوم	بیمارستان چهارم
تعداد بیمار بستری	۴۸.۱۴	۳۴.۶۲	۳۶.۷۲	۳۳.۱۶
تعداد بیمار سرپایی	۴۳.۱۰	۲۷.۱۱	۴۵.۹۸	۵۶.۴۶
تعداد پرستار تربیت شده	۲۵۳	۱۴۸	۱۷۵	۱۶۰
تعداد انترن تربیت شده	۴۱	۲۷	۲۳	۸۴

$$Max\ Z_3 = 36.72u_1 + 45.98u_2 + 175u_3 + 23u_4 + w$$

$$s.t,$$

$$275.7v_1 + 348.5v_2 + 104.1v_3 = 1,$$

$$48.14u_1 + 43.1u_2 + 253u_3 + 41u_4 - 285.2v_1 - 123.8v_2 - 106.72v_3 + w \leq 0,$$

$$34.62u_1 + 27.11u_2 + 148u_3 + 27u_4 - 162.3v_1 - 128.7v_2 64.21v_3 + w \leq 0,$$

$$36.72u_1 + 45.98u_2 + 175u_3 + 23u_4 - 275.7v_1 - 348.5v_2 - 104.1v_3 \leq 0,$$

$$33.16u_1 + 56.46u_2 + 16.u_3 + 84u_4 - 210.4v_1 - 154.1v_2 - 104.04v_3 \leq 0,$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3 \geq 0$$

اگر بیمارستان سوم امتیاز کارایی یک را بدست آورد، یعنی Z_3^* برابر یک گردد واحدی کارا خواهد بود.

مدل مضربی BCC خروجی محور به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&Min\ Z_0 = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0} + w \\
&s.t \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r_0} = 1, \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + w \leq 0, \qquad (j = 1, 2, ..., n), \\
&u_r, v_i \geq 0.
\end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

مدل پوششی BCC

مدل پوششی ورودی محور BCC به صورت زیر خواهد بود. متغییر متناظر با محدودیت اول مدل مضربی ورودی محور با θ و متغییرهای متناظر با سایر محدودیت ها با λ_j به نمایش گذاشته شده است.

$$\begin{aligned}
&Min\ Y_0 = \theta \\
&s.t \\
&\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{rj} \geq y_{r_0}, \qquad (r = 1, 2, ..., s), \\
&\theta x_{i_0} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \geq 0, \qquad (i = 1, 2, ..., m), \\
&\sum_{i=1}^{n} \lambda_j = 1, \qquad (j = 1, 2, ..., n), \\
&\lambda_j \geq 0.
\end{aligned} \tag{۱۷.۲}$$

همانطور که مشاهده می کنید محدودیت متناظر با اضافه شدن متغییر آزاد در علامت w در مسئله اولیه، محدودیت $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ است. در این مدل θ نسبت کاهش ورودی های تحت بررسی را برای بهبود کارایی نشان می دهد.

مدل پوششی خروجی محور به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z_0 = \theta, \\
&s.t \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{i_0}, \qquad (i = 1, 2, ..., m), \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \theta y_{r_0}, \qquad (r = 1, 2, ..., s), \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \qquad (j = 1, 2, ..., n), \\
&\lambda_j \geq 0, \qquad (j = 1, 2, ..., n),
\end{aligned}
\tag{۱۸.۲}
$$

۲.۲ تسلط تصادفی

مفاهیم پایه روش تسلط تصادفی [۷] (SD) از دیر باز وجود داشته است. معیار تسلط تصادفی دارای سابقه غنی در اقتصاد مالی است. سابقه استفاده از معیار تسلط تصادفی برای ارزیابی کارایی سبد دارایی به سال ۱۹۷۴ توسط جوی و پارتر[۸] برای ارزیابی عملکرد صندوق های سرمایه گذاری مشترک برمی گردد. اما دو مقاله منتشر شده توسط هادر[۹] و راسل [۱۰] و هانوچ [۱۱] و لوی [۱۲] در سال ۱۹۶۹ و مقاله منتشر شده توسط راسچیلد[۱۳] و استیگلز[۱۴] در سال ۱۹۷۰ زمینه ساز این گسترش بودند. به دلیل مشکلاتی که در استفاده از مدلهای میانگین-واریانس و مدلهای مبتنی بر قیمت گذاری دارایی های سرمایه گذاری وجود داشت، نیاز به توسعه و گسترش روش های تسلط تصادفی بیشتر شد.

در مدلهای سنتی میانگین-واریانس و قیمت گذاری دارایی سرمایه ای فرض بر نرمال بودن توزیع های بازده ها و درجه دو بودن تابع مطلوبیت (u)است. در حالی که بازده های

[۷] Stochastic Dominance

[۸] Joie & Parter

[۹] Hadar

[۱۰] Russell

[۱۱] Hanoch

[۱۲] Levy

[۱۳] Rcthschild

[۱۴] Stiglitz

مالی مخصوصا در بازارهای نوظهور دارای توزیع های با دم چاق و کشیدگی بیشتر از توزیع نرمال هستند. بنابراین توانایی مقایسه عملکرد صندوق های سرمایه گذاری با استفاده از روش میانگین-واریانس به ماهیت تابع مطلوبیت و درجه غیر نرمال بودن توزیع بازده ها بستگی دارد[۲۰].

یکی از مزایای روش تسلط تصادفی این است که کل تابع چگالی احتمال را بررسی می کند. در روش تسلط تصادفی نه فرض نرمال بودن توزیع بازده وجود دارد و نه تابع مطلوبیت درجه دو فرض می شود. به همین دلیل مشکلاتی که ممکن است به علت نرمال فرض کردن توزیع بازده ها بوجود آید در این روش از بین می رود. روش تسلط تصادفی دارای فرض های محدود کننده کمتری درباره ترجیحات سرمایه گذاری اس. در روش تسلط تصادفی تعداد قیدهایی که به تابع مطلوبیت اعمال می شود، متناسب با تعداد مرتبه های تسلط تصادفی است. در مرتبه اول تسلط تصادفی فرض بر این است که سرمایه گذار اشباع ناپذیر است(بیشتر را بر کمتر ترجیح می دهد) در مرتبه دوم تسلط تصادفی فرض ریسک گریزی (یعنی سرمایه گذار یک درآمد مطمئن را بر یک درآمد مورد انتظار نامطمئن ترجیح می دهد) و در مرتبه سوم تسلط تصادفی فرض ریسک گریزی بطور مطلق کاهشی به مفروضات تابع مطلوبیت سرمایه گذار اضافه می گردد.

۱.۲.۲ تئوری تسلط تصادفی

این تئوری تحلیل میانگین واریانس را با کنکاش بسیار برای تعیین مرز کارای فرصت های سرمایه گذاری، از دیدگاهی مختلف به مبارزه می طلبد. تسلط تصادفی نه فرض می کند که توزیع احتمال بازده نرمال است ونه اینکه شکل تابع مطلوبیت در همه جا مقعر است. معیار تسلط تصادفی یک مدل جامع برای انتخاب پورتفوی است که مطلوبیت مورد انتظار را حداکثر می کند. این معیار، بجای اینکه ویژگی های یک توزیع را با لحظه های آماری نشان دهد، کل تابع چگالی احتمال را مورد استفاده قرار می دهد. در مقایسه دو گزینه سرمایه گذاری در یک زمان، تسلط تصادفی تعیین می کند که آیا هیچکدام از این فرصت های سرمایه گذاری احتمال مرتبط با پاداش بزرگتر را دارند یا نه.

این رویه ناشی از گزینه های سرمایه گذاری هر دارایی یا پورتفویی که توسط دارایی یا پورتفویی دیگر تحت تسلط قرار گرفته اند، شکل می گیرد در این قسمت قبل از آوردن این معیارها چند تعریف را می آوریم[۱].

مجموعه شدنی(FS)[۱۵]**:** مجموعه ای از تمام سرمایه گذاریهای ممکن که به دو مجموعه کارا (ES)[۱۶] و مجموعه ناکارا (IS)[۱۷] تقسیم می شود.

[۱۵] Fasible set

[۱۶] Efficient set

[۱۷] Inefficient set

$$(ES) \cup (IS) = FS$$

در این پایان نامه نماد u نشان دهنده تابع مطلوبیت است.

تسلط در u: گوئیم سرمایه گذاری A بر سرمایه گذاری B در u برای همه توابع مطلوبیت $u_1 \in u$ مسلط است اگر $E_A u(x) \geq E_B u(x)$، به طوری که حداقل برای یک تابع مطلوبیت نامساوی بصورت اکید برقرار باشد.

مجموعه کارا در u: یک سرمایه گذاری در مجموعه کارا قرار دارد اگر سرمایه گذاری دیگری که بر آن مسلط باشد وجود نداشته باشد.

اگر دو سرمایه گذاری در مجموعه کارا قرار بگیرند هیچ کدام بر دیگری برتری ندارند.

مجموعه ناکارا در u: یک مجموعه ناکارا، مجموعه ای است که شامل همه سرمایه گذاریهای ناکارا باشد. سرمایه گذاری را ناکارا گویند هرگاه حداقل یک سرمایه گذاری که بر آن مسلط باشد وجود داشته باشد.

۲.۲.۲ تسلط تصادفی مرتبه اول

در معیار تسلط تصادفی مرتبه اول [۱۸] (FSD) فرض بر این است سرمایه گذاران(تصمیم گیرندگان) مقدار بیشتر را بر کمتر ترجیح می دهند، یعنی مطلوبیت نهایی بازده، مثبت است ($u' > 0$). تمرکز تسلط تصادفی مرتبه اول بر روی گشتاور مرتبه اول توزیع (میانگین) است. چنین سرمایه گذاری نیازمند تابع مطلوبیت غیر کاهشی با توجه به نرخ بازده هستند. دو فرصت سرمایه گذاری i و j با تابع های توزیع تجمعی F و G در نظر بگیرید. هر سرمایه گذاری پیامدهای با نرخ های بازده متفاوت است.F بر G مسلط است اگر سرمایه گذاران بیشتر را بر کمتر ترجیح دهند و تابع توزیع تجمعی F هیچگاه از تابع توزیع تجمعی G بزرگتر نباشد و در برخی جاها کوچکتر نیز باشد (توزیع ها همدیگر را قطع نمی کنند و F بالای G قرار نمی گیرد). به عبارت دیگر هر نرخ بازده برای F بایستی بزرگتر یا مساوی هر نرخ بازده برای G باشد و حداقل یک نرخ بازده برای F وجود دارد که قطعاً از نرخ بازده مورد نظر برای G بزرگتر باشد. هر وقت F بر G مسلط باشد، فرصت سرمایه گذاریF ، G را از مرز کارا خارج کرده و آن را به منطقه غیر کارا منتقل میکند[۲۱].

دو فرصت سرمایه گذاری i وj با تابع های توزیع تجمعی F و G در نظر بگیرید. گوئیم F بر G مسلط مرتبه اول است ($F \succ_{FSD} G$) اگر تعریفهای زیر برقرار باشد.

تعریف ۱.۲.۲. اگر$F(x) \leq G(x)$ برای تمام xها باشد.و همچنین

$$\exists x_0 : \qquad F(x_0) < G(x_0),$$

[۱۸] First Stochastic Dominace

و یا احتمال اینکه بازدهی بدست آمده از فرصت سرمایه گذاری i یا j بیشتر از مقدار مشخص x باشد، برای i بیشتر از j است ($p(r_i > x) \geq p(r_j > x)$).

تعریف ۲.۲.۲. اگرو فقط اگر تصمیم گیرندگان F را بر G تحت تابع مطلوبیت صعودی ($u' > ۰$) ترجیح دهند به این معنی که:

$$\int u(x)dF \geq \int u(x)dG,$$

تعریف ۱ بیان می کند تحقق F ثروت بیشتری از تحقق G می دهد، و تعریف دوم بیان می کند که هر فردی با تابع مطلوبیت افزایشی F را بر G (بدون در نظر گرفتن ریسک) ترجیح می دهد.

قضیه ۱.۲.۲. دو تعریف فوق برای تسلط تصادفی مرتبه اول معادلند.

۱-برای هر تابع مطلوبیت صعودی u ($u' > ۰$)

$$\int u(x)dF \geq \int u(x)dG \qquad \text{یا} \qquad E_F u(x) \geq E_G u(x),$$

۲-برای هر x

$$F(x) \leq G(x)$$

برهان. ۲ ⇒ ۱

فرض کنیم ۲ برقرار نباشد پس:

$$\exists x_۰ : \qquad F(X_۰) > G(X_۰),$$

تعریف می کنیم:

$$u(x) = \begin{cases} ۱ & x > x_۰ \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

$$\int_a^{x_۰} u(x)dF = ۱ - F(x_۰) < ۱ - G(x_۰) = \int_a^{x_۰} u(x)dG,$$

که این یک تناقض است. در نتیجه $F(x) \leq G(x)$.

(۲ ⇒ ۱)

برای اثبات این قسمت فرض می کنیم F و G بر روی بازه $[a, b]$ پیوسته و اکیدا صعودی هستند، و $a \leq x \leq b$ در نظر می گیریم و برای $x \leq a$ داریم $F(x) = G(x) = ۰$ و برای $x \geq b$ داریم $F(x) = G(x) = ۱$میخواهیم از رابطه ۲ به رابطه ۱ برسیم. داریم:

$$\triangle = E_F u(x) - E_G u(x) = \int_a^b u(x)dF - \int_a^b u(x)dG = \int_a^b f(x)u(x)dx - \int_a^b g(x)u(x)dx,$$

$f(x)$ و $g(x)$ تابع های چگالی دو سرمایه گذاری F و G هستند. داریم:

$$\triangle = \int_a^b (f(x) - g(x))\, u(x)dx,$$

با استفاده از انتگرال گیری جز به جز داریم:

$$\triangle = [F(x) - G(x)]|_a^b - \int_a^b [F(x) - G(x)]u\prime(x)dx,$$

عبارت $[F(x)-G(x)]|_a^b$ برابر صفر خواهد بود، زیرا برای $x = b$ داریم: $F(b)-G(b) = ۱ - ۱ = ۰$:
وبرای $x = a$ داریم: $F(a) - G(a) = ۰ - ۰ = ۰$ ، بنابراین داریم:

$$\triangle = \int_a^b [F(x) - G(x)u\prime(x)dx,$$

که $F(x) - G(x) > ۰$ (طبق ۲) و $u'(x) \geq ۰$ پس $\triangle > ۰$ خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$\int u(x)dF > \int u(x)dG,$$

□

قوانین لازم و کافی برای تسلط تصادفی:

قانون کافی اول [۱۹] :

$$Min_F(x) \geq Max_G(X), \qquad \text{اگر } F \text{ بر } G \text{ مسلط است}$$

قانون کافی دوم[۲۰] :

$$F(X) \leq G(X), \qquad \text{اگر } F \text{ بر } G \text{ مسلط است}$$

قانون لازم اول[۲۱] :

$$F \succ_{FSD} G, \qquad \Rightarrow \qquad E_F(X) \geq E_G(X),$$

قانون لازم دوم [۲۲] :

$$F \succ_{FSD} G, \qquad \Rightarrow \qquad \bar{X}_{geo}(F) > \bar{X}_{geo}(G),$$

قانون لازم سوم[۲۳] :

$$Min_F(X) \geq Min_G(X),$$

برای اثبات شرطهای فوق به [۲۵] مراجعه شود.
اشکال زیر حالتهای مختلف شرطهای لازم و کافی و وجود یا عدم وجود تسلط تصادفی مرتبه اول را نشان می دهد.

---

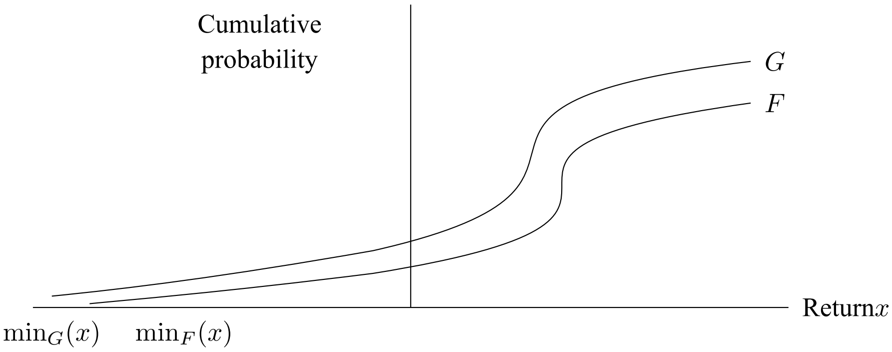
[۱۹] one rule sufficient

[۲۰] two rule sufficient

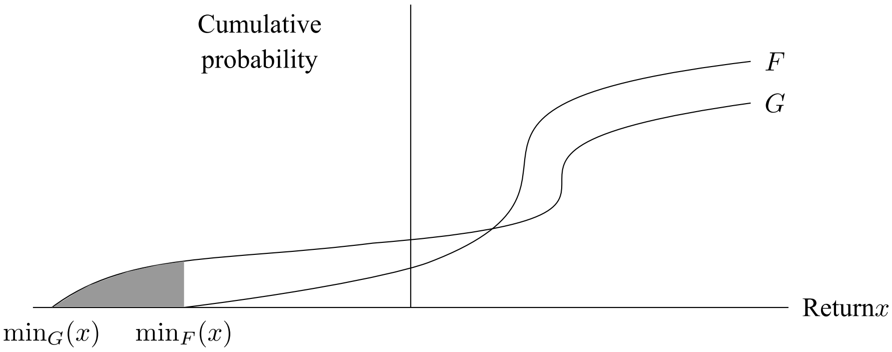
[۲۱] one rule necessary

[۲۲] two rule necessary

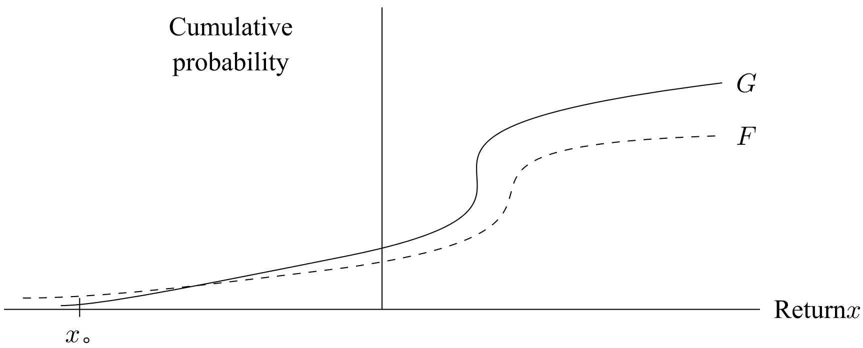
[۲۳] three rule necessary



شکل ۱.۲: در شکل بالا قانون کافی دوم رعایت شده و حالت تسلط تصادفی مرتبه اول برقرار است و F بر G مسلط است .



شکل ۲.۲: در شکل بالا شرط لازم سوم برقرار است ولی دو شرط لازم دیگر برقرار نمی باشد و تسلط تصادفي مرتبه اول نیست.



شکل ۳.۲: در شکل بالا شرط لازم سوم برقرار نبوده بنابراین حالت تسلط تصادفی مرتبه اول صدق نمی کند.

۳.۲.۲ تسلط تصادفی مرتبه دوم

روش تسلط تصادفی مرتبه دوم [۲۴] (SSD) توسط راسل و هادر[۱۸] ارائه شد. آنها معتقدند که معیار کاراتر و قویتر نیاز است تا سرمایه گذاران را راهنمایی کند. بدین ترتیب آنها معیار تسلط تصادفی مرتبه دوم را ارائه نمودند. در روش تسلط تصادفی مرتبه دوم علاوه بر مفروضات تسلط تصادفی مرتبه اول فرض ریسک گریزی سرمایه گذاران نیز افزوده می شود، یعنی مشتق دوم تابع مطلوبیت منفی است ($u'' < ۰$). تمرکز این معیار بر روی گشتاور دوم (واریانس) است.

بر اساس تسلط تصادفی مرتبه دوم، F برG مسلط است (که با $FD_۲G$ یا با $F \succeq_{SSD} G$ نمایش می دهیم) اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱-سرمایه گذاران مقدار بیشتر را بر کمتر ترجیح می دهند ($u' > ۰$).

۲-سرمایه گذاران ریسک گریز باشند ($u'' < ۰$).

۳-مجموع احتمالات تجمعی برای همه بازده ها هیچ وقت برای F از G بیشتر نباشد.

پس می توان بیان کرد سرمایه گذار زمانی سرمایه گذاری در i با توزیع F را بر سرمایه گذاری در j با توزیع G ترجیح می دهد که یکی از تعاریف زیر برقرار باشد:

تعریف ۳.۲.۲. F بر G مسلط مرتبه دوم است اگر برای توابع مطلوبیتی که دارای ویژگی $u' \geq ۰$ و$u'' \leq ۰$ داشته باشیم:

$$\int udF \geq \int udG \qquad \text{یا} \qquad E[u(x_i)] \geq E[u(x_j)],$$

تعریف ۴.۲.۲. FبرG مسلط مرتبه دوم است هرگاه داشته باشیم.

$$\forall x \in [a,b] \qquad : \qquad \int_a^x F(t)dt \leq \int_a^x G(t)dt,$$

بطوریکه

$$\exists x_۰ \in [a,b] \qquad \text{که} \qquad \int_a^x F(t)dt < \int_a^x G(t)dt,$$

قضیه ۲.۲.۲. دو تعریف فوق معادلند:

برهان. ($۱ \Rightarrow ۲$)

برای اثبات این قسمت فرض م کنیم F و G برروی بازه $[a,b]$ پیوسته و اکیدا صعودی هستند و $a \leq x \leq b$در نظر می گیریم، و برای $x \leq a$ داریم:

$$F(x) = G(x) = ۰,$$

و برای $x \geq b$ داریم:

$$F(x) = G(x) = ۱,$$

[۲۴] Second Stochastic Dominace

$$I_{۲}(x)=\int_a^x [G(t)-F(t)]dt \geq ۰,$$

$$E_F u(x)-E_G u(x)=\int_a^b [G(t)-F(t)]dtu'(x)dx,$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جز داریم:

$$u=u'(x) \qquad\qquad v=\int_a^x [G(t)-F(t)]dt,$$

$$E_F u(x)-E_G u(x)=u'(x)\int_a^x [G(t)-F(t)]dt|_a^b-\int_a^b u''\left(\int_a^x [G(t)-F(t)]dt\right)dx,$$

چون$F(a)=G(a)=۰$، داریم:

$$E_F u(x)-E_G u(x)=u'(b)\int_a^x [G(t)-F(t)]dt|_a^b-\int_a^b u''\left(\int_a^x [G(t)-F(t)]dt\right)dx,$$

چون $\int_a^x[G(t)-F(t)]dt \geq ۰$ و برای$x=b$ داریم: $u'(b)\geq ۰$، پس بخش اول انتگرال نامنفی می باشد و چون $u''<۰$ و $\int_a^x[G(t)-F(t)]dt \geq ۰$ پس کل عبارت نامنفی خواهد بود و داریم:

$$E_F u(x) \geq E_G u(x),$$

(۲ $\Rightarrow$ ۱) فرض کنیم تعریف ۲ برقرار نباشد.

$$\exists x_۰: \qquad\qquad I_{۲}(x_۰)<۰,$$

$u(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u(x)=\begin{cases} ۱ & x>x_۰, \\ ۰ & o.w, \end{cases}$$

$$E_F u(x)-E_G u(x)=\int_a^{x_۰} [G(t)-F(t)](۱)dx+\int_{x_۰}^b [G(t)-F(t)](۰)dx,$$

بخش دوم انتگرال فوق صفر خواهد بود پس داریم:

$$E_F u(x)-E_G u(x)=\int_a^{x_۰} [G(t)-F(t)dx=I_{۲}(x),$$

$$I_{۲}(x_۰)<۰ \Rightarrow E_F u(x_۰)-E_G u(x_۰)<۰ \Rightarrow E_F u(x_۰)<E_G u(x_۰),$$

پس خواهیم داشت:

$$\int_a^x F(t)dt \leq \int_a^x G(t)dt.$$

$\square$

قوانین لازم و کافی تسلط تصادفی مرتبه دوم:

قانون کافی اول:

F بر G مسلط است اگر $\quad Min_F(x) \geq Max_G(X),$

قانون کافی دوم:

$$F(X) \leq G(X), \qquad \text{اگر است مسلط } G \text{ بر } F$$

قانون لازم اول:

$$F \succ_{SSD} G, \qquad \Rightarrow \qquad E_F(X) \geq E_G(X),$$

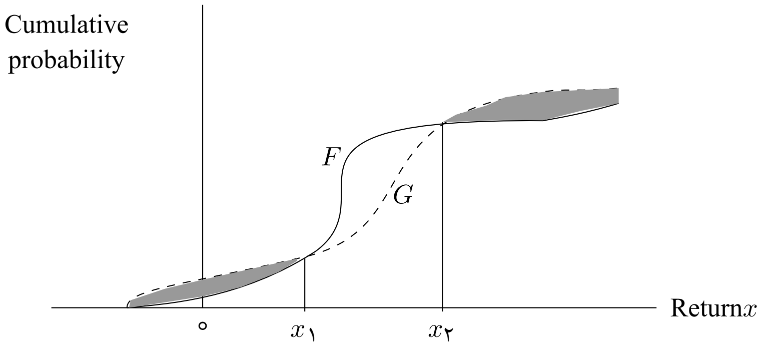
قانون لازم دوم :

$$F \succ_{SSD} G, \qquad \Rightarrow \qquad \bar{X}_{geo}(F) > \bar{X}_{geo}(G),$$

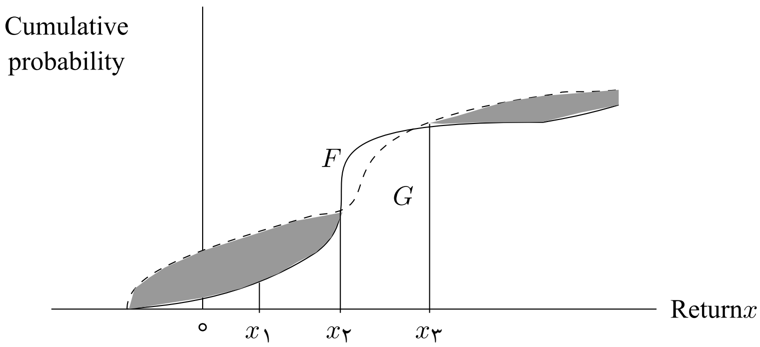
قانون لازم سوم:

$$Min_F(X) \geq Min_G(X),$$

اشکال زیر حالتهای مختلف شرطهای لازم و کافی و وجود یا عدم وجود تسلط تصادفی مرتبه دوم را نشان می دهد.



شکل ۴.۲: در این شکل نه F و نه G بر دیگری مسلط نیستند.



شکل ۵.۲: در این شکل F بر G مسلط است.

۴.۲.۲ تسلط تصادفی مرتبه سوم

تئوری تسلط تصادفی مرتبه سوم [۲۵] (TSD) توسط وایت مور [۲۶] توسعه یافت. در این معیار علاوه بر مفروضات دو معیار قبل ($u' > 0, u'' < 0$)، فرض ریسک گریزی مطلق کاهشی نیز به تابع مطلوبیت سرمایه گذار اعمال می شود. از نظر ریاضی نشان می دهد که مشتق مرتبه سوم تابع مطلوبیت یک سرمایه گذار مثبت است. هرچه ثروت افزایش یابد، مبالغ بیشتری در دارایی های ریسکی سرمایه گذاری می گردد بطوریکه اکثر سرمایه گذاران ریسک گریزی مطلق کاهشی (ریسک گریزی مطلق، میزانی که یک سرمایه گذار برای یک سطح معین ثروت ریسک گریز است) را نشان می دهد. تمرکز این معیار بر روی گشتاور مرتبه سوم (چولگی) است. سرمایه گذاران فرصت های سرمایه گذاری که دارای بازده با چولگی مثبت هستند را ترجیح می دهند.

F بر G دارای تسلط تصادفی مرتبه سوم است اگر یکی از تعاریف زیر برقرار باشد:

تعریف ۵.۲.۲. $E[u_{(x_i)}] \geq E[u_{(x_j)}]$برای توابع مطلوبیتی که دارای ویژگیهای $u' \geq 0, u'' \leq 0, u''' \geq 0$ باشند.

تعریف ۶.۲.۲. $I = \int_a^x \int_a^z [G(t) - F(t)]dtdz \geq 0$برای تمام xها و نامساوی اکید در برخی از xها برقرار باشد.

همانطور که در توضیحات بالا برای مراتب یک تا سه تسلط تصادفی مشاهده کردیم با افزایش تعداد مرتبه های تسلط تصادفی محدودیت هایی به تابع مطلوبیت سرمایه گذار اعمال می شود. مرتبه چهارم تسلط تصادفی بر روی گشتاور مرتبه چهارم (کشیدگی) متمرکز است. فرض می شود که سرمایه گذاران توزیع هایی با دم چاق را به توزیع ها با دم لاغر ترجیح می دهند (یعنی توزیع های با کشیدگی بیشتر را بر توزیع ها با کشیدگی کمتر ترجیح می دهند). یعنی سرمایه گذاران پرهیز از ضرر زیاد را به سود زیاد با احتمال کم ترجیح می دهند (بیشتر محتاط هستند).

---

[۲۵] Third Stochastic Dominace

[۲۶] Wait More

فصل ۳

روابط میان مدلهای تحلیل پوششی داده ها و تسلط تصادفی

در این فصل روشها و مدلهایDEA برای ارزیابی کارابی پورتفوی ارائه شده است. همچنین در ادامه روش های تسلط تصادفی برای ارزیابی کارابی پورتفوی آورده شده است و مدلDEA متناظر با آن بیان شده است. اکثر مطالبی که در این فصل آورده شده است بجز جاهایی که مستقیماً به آن اشاره شده از منابع [۱۵] ، [۱۲] ، [۴] ، [۱۴] آمده است.

۱.۳ انواع مدلهای DEA

مدلهای شعاعی

در یک تقسیم بندی دیگر تحلیل پوششی داده ها به دو دسته مدلهای شعاعی و غیر شعاعی تقسیم بندی می شود. همه مدلهای BCC و CCR که در فصل دوم آورده شده است جزء این مدلها هستند.

مدلهای غیر شعاعی

مدل غیرشعاعی مدلی است که به طور غیر متناوب میزان ورودی های مثبت را کاهش و یا خروجی های مثبت را افزایش می دهد. این مدل را، در سال ۱۹۷۸، فریر و لوول[۱] ارائه کردند. در جدول زیر انواع مدلهای غیر شعاعی آورده شده است:

جدول ۱.۳: مدل‌های غیرشعاعی DEA

<table>
<tr><th>نوع مرز</th><th colspan="2">مدل ورودی محور</th><th colspan="2">مدل خروجی محور</th></tr>
<tr><td>بازده به مقیاس ثابت</td><td colspan="2">$\mathrm{Min}Z = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i - \varepsilon\sum_{r=1}^{s}s_r^+\right)$
st :
$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} = \theta_i x_{io} \quad i = 1,2,\dots,m$
$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \quad r = 1,2,\dots,s$
$\theta_i \leq 1 \quad i = 1,2,\dots,m$
$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,m$</td><td colspan="2">$\mathrm{Max}Z = \left(\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\theta_r - \varepsilon\sum_{r=1}^{s}s_r^+\right)$
st :
$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} \quad i = 1,2,\dots,m$
$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} = \theta_r y_{ro} \quad r = 1,2,\dots,s$
$\theta_r \geq 1 \quad r = 1,2,\dots,s$
$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,n$</td></tr>
<tr><td>بازده به مقیاس متغیر</td><td>مدل فوق به‌علاوه ←</td><td colspan="2">$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$</td><td>→ مدل فوق به‌علاوه</td></tr>
<tr><td>بازده به مقیاس غیرافزایشی</td><td>مدل فوق به‌علاوه ←</td><td colspan="2">$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \leq 1$</td><td>→ مدل فوق به‌علاوه</td></tr>
<tr><td>بازده به مقیاس غیرکاهشی</td><td>مدل فوق به‌علاوه ←</td><td colspan="2">$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \geq 1$</td><td>→ مدل فوق به‌علاوه</td></tr>
<tr><td>هدف کارا</td><td colspan="2">$\hat{x}_{io} = \theta_i^* x_{io} \quad i = 1,2,\dots,m$
$\hat{y}_{ro} = y_{ro} + {s_r^+}^* \quad r = 1,2,\dots,s$</td><td colspan="2">$\hat{x}_{io} = x_{io} - {s_i^-}^* \quad i = 1,2,\dots,m$
$\hat{y}_{ro} = \theta_r^* y_{ro} \quad r = 1,2,\dots,s$</td></tr>
</table>

۲.۳ تحلیل پوششی داده ها

تحلیل پوششی داده ها به دو دسته مدلهای بازده به مقیاس ثابت که شامل مدلهای CCR و مدلهای بازده به مقیاس متغییر که شامل مدلهای BCC می باشد.

بازده به مقیاس ثابت

فرض کنیم n بخش با K ورودی و J خروجی داریم، و $Z_{1i}, Z_{2i}, ..., Z_{Ki}$ نشان دهنده ورودی ها و $Y_{1i}, Y_{2i}, ..., Y_{ji}$ نشان دهنده خروجی بخشiام می باشد .کارایی DEA بخش oام که از مجموعه بخش های $1, 2, ..., n$ می باشد. با استفاده از مقدار بهینه مدل برنامه ریزی کسری زیر بدست می آید که نسبت وزن های خروجی به وزن های ورودی را تحت شرایط زیر ماکسیمم می کند. داریم:

---

[۱] fereer & loovel

$$\max_{y_{jo},\tilde{y_{ko}}} \frac{\sum_{j=۱}^{J} y_{jo}Y_{jo}}{\sum_{k=۱}^{K} \tilde{y}_{k\circ} Z_{k\circ}}$$
$$s.t$$
$$\frac{\sum_{j=۱}^{J} y_{jo}Y_{ji}}{\sum_{k=۱}^{K} \tilde{y}_{ko} Z_{ki}} \leq ۱, \qquad i = ۱, ۲, ..., n, \tag{۱.۳}$$
$$\tilde{y_k}o \geq \circ \qquad k = ۱, ۲, ..., K,$$
$$y_{jo} \geq \circ, \qquad j = ۱, ۲, ..., J,$$

که y_{jo}و $\tilde{y}_{ko}$ وزن های خروجی و ورودی بخش oام هستند. بخش oام، DEA کاراست اگر مقدار بهینه مساوی یک باشد و در غیر اینصورت DEA ناکاراست. در وزن ها از کمیت های بی نهایت کوچک صرفنظر می کنیم. مدل (۱.۳) را می توان بصورت برنامه خطی زیر در [۱۶]نوشت:

$$\max_{y_{jo},\tilde{y_{ko}}} \sum_{j=۱}^{J} y_{jo}Y_{jo}$$
$$s.t$$
$$\sum_{k=۱}^{K} \tilde{y}_{ko} z_{ko} = ۱,$$
$$-\sum_{k=۱}^{K} \tilde{y}_{ko} z_{ki} + \sum_{j=۱}^{J} y_{jo}Y_{ji} \leq \circ, \qquad i = ۱, ۲, ..., n, \tag{۲.۳}$$
$$\tilde{y}_{ko} \geq \circ \qquad k = ۱, ۲, ..., K,$$
$$y_{jo} \geq \circ, \qquad j = ۱, ۲, ..., J,$$

معمولاً بجای مدل (۲.۳) دوگان آن، که ترکیب خطی نامنفی از ورودی هاست حل می شود.

در این مدل ترکیب خطی نامنفی از ورودیهایی که با معیار ورودی تحت شرط نامنفی بودن و ترکیب خطی از خروجی هایی که بزرگتر یا مساوی معیار خروجی است، مقایسه می شود.

$$\min_{\theta,x_i} \theta$$
$$s.t$$
$$\sum_{i=۱}^{n} x_i Y_{ij} \geq Y_{jo}, \qquad j = ۱, ۲, ..., J, \tag{۳.۳}$$
$$\sum_{i=۱}^{n} x_i Z_{ki} \leq \theta . Z_{k\theta}, \qquad k = ۱, ۲, ..., K,$$
$$x_i \geq \circ \qquad i = ۱, ۲, ..., n,$$

کهx_iها وزن ها و θ فرم اصلاح شده ممکن همه ورودی ها در یک زمان است که با توجه به مدل فوق اگر $\theta < ۱$ باشد واحد o ، DEA ناکاراست.

۱.۲.۳ بازده به مقیاس متغیر(VRS)

تفاوت اساسی مدلهای بازده به مقیاس ثابت با مدلهای بازده به مقیاس متغیر در شکل نمایش دوگان آنهاست. در مدلهای بازده به مقیاس متغیر شرط $\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱$ نیز به محدودیت ها اضافه می شود.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\theta, x_i} \theta \\
&s.t \\
&\sum_{i=۱}^{n} x_i Y_{ji} \geq Y_{jo}, \qquad j = ۱, ۲, ..., J, \\
&\sum_{i=۱}^{n} x_i z_{ki} \leq \theta . z_{ko}, \qquad k = ۱, ۲, ..., K, \\
&\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱, x_i \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n,
\end{aligned}
\tag{۴.۳}
$$

برنامه ریزی اصلی مدل (۴.۳) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\max_{y_j o, \tilde{y_{ko}}, yo} \sum_{j=۱}^{J} y_{jo} Y_{jo} - y_o \\
&s.t \\
&\sum_{k=۱}^{K} \tilde{y}_{ko} z_{ko} = ۱, \\
&\sum_{k=۱}^{K} \tilde{y}_{ko} z_{ki} + \sum_{j=۱}^{J} y_{jo} Y_{ji} - y_o \leq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n, \\
&\tilde{y}_{ko} \geq ۰, \qquad k = ۱, ۲, ..., K, \\
&y_{jo} \geq ۰, \qquad j = ۱, ۲, ..., J,
\end{aligned}
\tag{۵.۳}
$$

و مدل برنامه ریزی کسری آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\max_{y_{jo},\tilde{y}_{ko},y_o} \frac{\sum_{j=۱}^{J} y_{jo}Y_{jo} - y_o}{\sum_{k=۱}^{K} \tilde{y}_{ko}z_{ko}}$$

$$s.t$$

$$\frac{\sum_{j=۱}^{J} y_{jo}Y_{jo} - y_o}{\sum_{k=۱}^{K} \tilde{y}_{ko}z_{ko}} \leq ۱, \qquad i = ۱, ۲, ..., n, \tag{۶.۳}$$

$$\tilde{y}_{ko} \geq ۰, \qquad k = ۱, ۲, ..., K,$$

$$y_{jo} \geq ۰, \qquad j = ۱, ۲, ..., J,$$

که در این مدلها متغییر $y_۰$ یک متغییر آزاداست. این مدل را می توان برای اندازه گیری ناکارایی نسبت به هر یک از ورودی ها گسترش داد که نتایج آن بسیار قویتر از مدل قبلی است. ما می توانیم دوگان مدل (۶.۳) را بصورت زیر بنویسیم:

$$\min_{\theta_k,x_i} \frac{۱}{k} \sum_{k=۱}^{K} \theta_k$$

$$s.t$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i Y_{ij} \geq Y_{jo}, \qquad j = ۱, ۲, ..., J,$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i Z_{ki} \leq \theta_k . z_{ko}, \qquad t = ۱, ۲, ..., k, \tag{۷.۳}$$

$$۰ \leq \theta_k \leq ۱, \qquad k = ۱, ۲, ..., K,$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱, \qquad x_i \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n,$$

همچنین می توان مدل خروجی محور را به مدل ورودی-خروجی محور VRS بصورت زیر تعمیم داد:

$$\min \frac{۱}{K + L} \left(\sum_{k=۱}^{K} \theta_k + \sum_{j=۱}^{J} \frac{۱}{\varphi_j} \right)$$

$$s.t$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i Y_{ij} \geq \varphi_j . Y_{jo}, \qquad j = ۱, ۲, ..., J,$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i Z_{ki} \leq \theta_k . Z_{ko}, \qquad k = ۱, ۲, ..., K, \tag{۸.۳}$$

$$۰ \leq \theta_k \leq ۱, \qquad \varphi_j \geq ۱,$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱, \qquad x_i \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n,$$

که φ_j نشان دهنده بهبود ممکن در خروجی مربوطه است. واحد o ناکاراست، اگریک ترکیب محدب از ورودی ها یا خروجی ها وجود داشته باشد که معیار بهتری باشد که حداقل در یک ورودی و یک خروجی در همان زمان، محدودیت مورد نظر را برآورده کند.

۳.۳ تسلط تصادفی

روش تسلط تصادفی، روشی برای مقایسه پورتفوی ها می باشد، که هر پورتفوی با یک بردار بازده نمایش داده می شود. در معیار تسلط تصادفی مرتبه دوم فرض می کنیم تصمیم گیرندگان ریسک گریز و بازار غیر اشباع می باشد. طبق لوی[۲۵] پورتفوی $\bar{X}$ بر پورتفوی X با معیار تسلط تصادفی دوم مسلط است اگر $Eu(\sum_{i=1}^{n} R\bar{x}_i) \geq Eu(\sum_{i=1}^{n} Rx_i)$ برای همه توابع مطلوبیت غیر کاهشی و مقعر با یک نامساوی اکید حداقل برای یک تابع مطلوبیت برقرار باشد.

فرض کنیم$F_X(\eta)$نشان دهنده تابع توزیع احتمال بازده پورتفوی X باشد، یعنی:

$$F_X(t) = p(-\sum_{i=1}^{n} R_i x_i \leq t), \tag{۹.۳}$$

دومین تابع توزیع از بازده پورتفوی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_X^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{t} F_X(\eta) d\eta, \tag{۱۰.۳}$$

پس روابط SSD می تواند بصورت زیر مقایسه گردد. پورتفوی $\bar{X}$ بر پورتفوی X با روش تسلط تصادفی دوم مسلط است اگر و فقط اگر:

$$\begin{aligned} &F_{\bar{X}}^{(2)}(t) \leq F_X^{(2)}(t), && \forall t \in \mathbb{R}, \\ &\text{بطوریکه} \\ &\exists t_0 : && F_{\bar{X}}^{(2)}(t_0) < F_X^{(2)}(t_0), \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

در این بخش ما کارایی پورتفوی $\bar{X}$ با بردار بازده متناظر $R_0 = \sum_{i=1}^{n} R_i \bar{x}_i$، که بعنوان معیار در مدل DEA استفاده می شود را آزمایش می کنیم.

۱.۳.۳ کارایی جفت جفت SD

در این قسمت، ابتدا یک محاسبات جذاب از شرایط لازم و کافی آزمون SSD را بیان می کنیم و سپس ازآن برای آزمون FSD وSSD جفت جفت استفاده می کنیم . طبق لوی [۲] [۲۵] فرض کنیم v_x^s بازده پورتفوی X باشد و $s = 1, 2, ..., S$.بازده را بصورت صعودی $v_x^1, v_x^2, ..., v_x^S$ مرتب می کنیم. فرض کنیم$v_i^1, v_i^2, ..., v_i^S$ نشان دهنده بازده مرتب شده دارایی i ام باشد. گوئیم پورتفوی X بر پورتفوی $\bar{X}$ بر اساس تسلط تصادفی مرتبه اول مسلط است. اگر و فقط اگر

[۲] Levy

$$v_X^s \geq v_{\bar{X}}^s, \qquad s = ۱, ۲, ..., S,$$
بطوریکه (۱۲.۳)
$$\exists s_\circ : \qquad X^{s_\circ} \geq v_{\bar{X}}^{s_\circ}$$

بنابراین ما می توانیم پورتفوی $\bar{X}$ را FSD جفت جفت ناکارا گوئیم هرگاه یک پورتفوی وجود داشته باشد که در شرط (۱۲.۳) صدق کند و در غیر اینصورت پورتفوی $\bar{X}$ یک پورتفوی کاراست.

پورتفوی X بر پورتفوی $\bar{X}$ بر اساس تسلط تصادفی مرتبه دوم مسلط است. اگر و فقط اگر

$$\sum_{t=۱}^{s} v_x^t \geq \sum_{t=۱}^{s} v_{\bar{x}}^t, \qquad s = ۱, ۲, ..., S,$$
بطوریکه (۱۳.۳)
$$\exists t_\circ : \qquad \sum_{t=۱}^{s} v_x^{t_\circ} > \sum_{t=۱}^{s} v_{\bar{x}}^{t_\circ},$$

بنابراین پورتفوی $\bar{X}$ را SSD جفت جفت ناکارا گوئیم، اگر یک پورتفوی وجود داشته باشد که در شرط فوق صدق کند و در غیر اینصورت پورتفوی $\bar{X}$ کاراست. بنابراین الگوریتم آزمون کارابی جفت جفت SSD پورتفوی $\bar{X}$ شامل دو مرحله می باشد.

مرحله اول: بازده ها را بصورت صعودی مرتب می کنیم و مجموع بازده های هر دارابی را بدست می آوریم:

$$\sum_{t=۱}^{s} v_i^t \qquad i = ۱, ۲, ...N,$$

و سپس مجموع بازده مرتب شده پورتفوی $\bar{X}$ را محاسبه می کنیم.

مرحله دوم: در مرحله دوم سعی می کنیم i را به گونه ای پیدا کنیم که در شرط زیر صدق کند:

$$\sum_{t=۱}^{s} v_i^t \geq \sum_{t=۱}^{s} v_{\bar{x}}^t, \qquad \forall s = ۱, ۲, ..., S, \tag{۱۴.۳}$$

اگر چنین iابی (پورتفوبی) وجود داشته باشد پورتفوی $\bar{X}$ ناکاراست و در غیر اینصورت پورتفوی $\bar{X}$، SSD جفت جفت کاراست. در ضمن می توانیم نتیجه بگیریم که هر پورتفوی که SSD جفت جفت ناکارا باشد FSD جفت جفت ناکارا نیز می باشد و اگر پورتفوی FSD جفت جفت کارا باشد آنگاه SSD جفت جفت کاراست.

آزمون DEA-risk هم ارز با SD جفت-جفت

مطالبی که در این بخش آمده از جمله قضیه ها ولم ها و تعاریف بجز جاهایی که به منبع دیگری اشاره شده از منبع [۱۴] است.

در این بخش آزمون DEA-risk که با آزمون کارایی SSD بر پایه روابط بین CVaR و SSD هم ارز می باشد را نشان خواهیم داد. بردار بازده پورتفوی $\bar{x}$ مورد آزمایش را بعنوان معیار در نظر می گیریم و آن را با R_0 نشان می دهیم.

فرض می کنیم $\alpha_s = \frac{s}{S}$ و $s \in \Gamma = \{0, 1, ..., S-1\}$

و $\tilde{s} = arg\, max\{s \in \Gamma : CVaR_{\alpha_s}(-R_o) < 0\}$ وهمچنین فرض می کنیم $CVaR_{\alpha_s}$ هیچگاه مساوی صفر نیست. پس آزمون VRS-DEA-risk ورودی خروجی را می توان بصورت زیر ساخت:

$$
\begin{aligned}
&\theta(R_0) = \min_{\theta_k,\varphi_k,x_i} \frac{1}{S}\left[\sum_{k=\tilde{s}+1}^{S-1}\theta_k + \sum_{k=0}^{\tilde{s}}\frac{1}{\varphi_k}\right]\\
&s.t.\\
&\sum_{i=0}^{n} x_i CVaR_{\alpha_k}(R_i) \geq \varphi_k . CVaR_{\alpha_k}(R_0), \qquad k = 0, 1, ..., \tilde{s},\\
&\sum_{i=0}^{n} x_i CVaR_{\alpha_k}(-R_i) \leq \theta_k . CVaR_{\alpha_k}(R_0), \qquad k = \tilde{s}+1, ..., S-1\\
&0 \leq \theta_k \leq 1, \varphi_k \geq 1,\\
&\sum_{i=0}^{n} x_i = 1, \qquad x_i \in \{0, 1\}, \qquad i = 0, 1, ..., n,
\end{aligned}
\tag{۱۵.۳}
$$

این مدل برابر است با مدل DEA-risk شماره (۸.۳) با انتخاب بخش هایی از سطح احتمال و وزن های دودویی می باشد. در واقع پورتفوی که طبق این مدل کارا بدست می آید طبق مدل (۸.۳) نیز کارا خواهد بود [۱۵].

لم ۱.۳.۳. فرض کنیم $F_1(X)$ و $F_2(X)$ تابع توزیع تجمعی از X_1 و X_2 باشند،پس خواهیم داشت:

$$X_1 \succeq_{SSD} X_2 \iff F_1^{(2)}(t) \leq F_2^{(2)}(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$X_1 \succ_{SSD} X_2 \iff F_1^{(2)}(t) \leq F_2^{(2)}(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

که روابط بالا حداقل برای یک نامساوی اکید باید برقرار باشد. در واقع لم فوق بعنوان تعریفی از تسلط تصادفی مرتبه دوم بکار می رود.

تعریف ۱.۳.۳. اولین چارک تابع F_X نسبت به بردار تصادفی X را با $F_X^{(-1)}$ نشان می دهیم که تابع معکوس از چپ پیوسته تابع توزیع احتمالF_Xاست و به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_X^{(-1)}(\nu) = min\{u : F_X(u) \geq \nu\}, \tag{۱۶.۳}$$

تعریف ۲.۳.۳. دومین چارک تابع F_X را با $F_X^{(-۲)}$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_X^{(-۲)} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{p} F_X^{(-۱)}(t)dt, & ۰ < p \leq ۱, \\ ۰ & p = ۰ \\ +\infty, & o.w, \end{cases} \tag{۱۷.۳}$$

لم ۲.۳.۳. برای هر متغییر تصادفی X با $E \mid X \mid < \infty$، داریم:

$$X_۱ \succeq_{SSD} X_۲ \Longleftrightarrow \frac{F_۱^{(-۲)}(p)}{p} \geq \frac{F_۲^{(-۲)}(p)}{p}, \qquad \forall p \in (۰, ۱),$$

برای برهان به [۲۷]مراجعه شود.

تعریف ۳.۳.۳. فرض کنیم Y متغییر تصادفی از دست رفته نسبت به بازده توصیف شده با بردار تصادفی X باشد یعنی $Y = -X$. فرض کنیم $E \mid Y \mid < \infty$ باشد. برای سطح ثابت شده α ،ارزش در معرض ریسک با استفاده از α-چارک تابع توزیع F_Y به صورت زیر تعریف می شود:

$$VaR_\alpha(Y) = F_Y^{(-۱)}(\alpha),$$

و ارزش در معرض ریسک مشروط را می توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$CVaR_\alpha(Y) = \underset{a \in R}{min}\{a + \frac{۱}{۱-\alpha}E[Y-a]^+\},$$

که$[x]^+ = max(x, ۰)$

اگر $Y = -\sum_{i=۱}^{n} R_i x_i$ در نظر بگیریم آنگاه داریم:

$$CVaR_\alpha(-\sum_{i=۱}^{n} R_i x_i) = \underset{a \in R}{m\ in} + \frac{۱}{(۱-\alpha)S} \sum_{s=۱}^{S} \left(-\sum_{i=۱}^{n} x_i r_{i,s} - a\right)^+,$$

همچنین در مقاله یوریسو [۳] و راک فالر Rockafellar [۳۰]می توانیم تعریف دیگری از CVaR را با استفاده از امید شرطی بصورت زیر ببینیم:

$$CVaR_\alpha(Y) = E(Y \mid Y > VaR_\alpha(Y)),$$

اگر $-Y$ و $۱-\alpha$ را بجای X و p استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{F_X^{(-۲)}(p)}{p} = -CVaR_\alpha(Y),$$

با استفاده از لم (۴.۳.۳) داریم:

$$X_۱ \succeq_{SSD} X_۲ \Longleftrightarrow CVaR_\alpha(Y_۱) \leq CVaR_\alpha(Y), \qquad \forall \alpha \in (۰, ۱), \tag{۱۸.۳}$$

از حالا به بعد فرض می کنیم Y یک متغییر تصادفی گسسته که مقدار y^tبه ازای $t = ۱, ۲, ..., T$ با احتمالهای مساوی می گیرد. طبق[۲۹] و [۲۷] می توانیم برنامه خطی زیر را برای CVaR

[۳] Uryasev

بنویسیم:

$$CVaR_\alpha(Y) = \min_{a,w_t} a + \frac{۱}{(۱-\alpha)T}\sum_{t=۱}^{T} w_t,$$

$$s.t \qquad (۱۹.۳)$$

$$w_t \geq Y_t - a,$$

$$w_t \geq ۰,$$

فرض کنیم $y^{[k]}$ ، kامین عضو میان $y^۱, y^۲, ..., y^T$ باشد و به ترتیب صعودی مرتب شده است.

یعنی: $y^{[۱]} < y^{[۲]} < ... < y^{[T]}$ (شکل صعودی مرتب شده $y^۱, y^۲, ..., y^t$). جواب بهینه برنامه ریزی خطی فوق با استفاده از قضیه زیر بدست می آید:

قضیه ۱.۳.۳. اگر $\alpha \in (\frac{k}{T}, \frac{k+۱}{T})$ و $\alpha \neq ۱$باشد سپس:

$$CVaR_\alpha(Y) = y^{[k+۱]} + \frac{۱}{(۱-\alpha)T}\sum_{i=k+۱}^{T}(y^{[i]} - y^{[k+۱]}), \qquad (۲۰.۳)$$

برای $k = ۰, ۱, ..., T-۱$ و $CVaR_۱(Y) = y^{[T]}$.

برهان. بردار تصادفی Y را با مقدار y^t به ازای $t = ۱, ۲, ..., T$ و احتمالهای $p_۱, p_۲, ..., p_T$ در نظر میگیریم.α را بصورت زیر انتخاب می کنیم:

$$\alpha \in (\sum_{j=۱}^{j_\alpha - ۱} p_j, \sum_{j=j_\alpha - ۱}^{j_\alpha} p_j)$$

طبق گزاره ۸ در [۳۰] داریم:

$$CVaR_\alpha(Y) = \frac{۱}{۱-\alpha}\left[\left(\sum_{j=۱}^{j_\alpha} p_j - \alpha\right) y^{[j_\alpha]} + \sum_{j=j_\alpha+۱}^{T} p_j y^{[j]}\right],$$

چون $p_j = \frac{۱}{T}$ برای $t = ۱, ۲, ..., T$ و $j_\alpha = k + ۱$ قضیه ثابت می شود و خواهیم داشت:

$$CVaR_\alpha(Y) = y^{[k+۱]} + \frac{۱}{(۱-\alpha)T}\sum_{i=k+۱}^{T}(y^{[i]} - y^{[k+۱]}),$$

□

ترکیب قضیه (۶.۳.۳) با رابطه (۱۵.۳) شرایط لازم و کافی برای تسلط تصادفی مرتبه دوم را می دهد.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنیم $Y_۱ = -X_۱$ و $Y_۲ = -X_۲$ دو بردار تصادفی گسسته باشد که مقدارهای $y_۱^t$ و $y_۲^t$ برای $t = ۱, ۲, ..., T$ با احتمالهای مساوی می گیرد. پس

$$X_۱ \succeq_{SSD} X_۲ \Longleftrightarrow CVaR_\alpha(Y_۱) \leq CVaR_\alpha(Y_۲), \qquad \alpha \in \{۰, \frac{۱}{T}, \frac{۲}{T}, ..., \frac{T-۱}{T}\}, \quad (۲۱.۳)$$

برهان. فرض کنیم $\alpha_k = \frac{k}{T}$ برای $k = ۰, ۱, ..., T - ۲$ لم ۱ را به کار می بریم. داریم:

$$CVaR_{\beta_۱}(Y_i) = CVaR_{\beta_۲}(Y_i), \qquad i = ۱, ۲, \qquad \beta_۱, \beta_۲ \in (\frac{T-۱}{T}, ۱),$$

بنابراین کافی است نشان دهیم:

$$CVaR_{\alpha_k}(Y_۱) \leq CVaR_{\alpha_k}(Y_۲) \tag{۲۲.۳}$$

و

$$CVaR_{\alpha_{k+۱}}(Y_۱) \leq CVaR_{\alpha_{k+۱}}(Y_۲) \tag{۲۳.۳}$$

برای همه $\alpha \in \langle \alpha_k, \alpha_{k+۱} \rangle$ برقرار است.

برای اثبات رابطه (۱۹.۳) و (۲۰،۳) فرض می کنیم یک تناقض وجود داشته باشد یک $\tilde{\alpha} \in \langle \alpha_k, \alpha_{k+۱} \rangle$ بطوریکه

$$CVaR_{\tilde{\alpha}}(Y_۱) \geq CVaR_{\tilde{\alpha}}(Y_۲)$$

از پیوستگی $CVaR$ در α خواهیم داشت.

$$\alpha^۱ \in (\alpha_k, \alpha_{k+۱}) \qquad \text{و} \qquad \alpha^۲ \in (\alpha_k, \alpha_{k+۱}) \qquad \text{که} \qquad \alpha^۱ \neq \alpha^۲$$

بطوریکه:

$$CVaR_{\alpha^۱}(Y_۱) = CVaR_{\alpha^۱}(Y_۲) \tag{۲۴.۳}$$

$$CVaR_{\alpha^۲}(Y_۱) = CVaR_{\alpha^۲}(Y_۲) \tag{۲۵.۳}$$

با بکار گیری رابطه (۱۷.۳) از قضیه (۶.۳.۳) در رابطه (۲۱.۳) و (۲۲.۳) خواهیم داشت $\alpha^۱ = \alpha^۲$ و این متناقض است با $\alpha^۱ \neq \alpha^۲$ و به این ترتیب قضیه ثابت می شود. □

گزاره ۱.۳.۳. مدل DEA-risk ورودی-خروجی محور (۱۵.۳) با وزن های دودویی با آزمون کارایی SSD جفت جفت هم ارز است. معیار $R_۰ = \sum_{i=۱}^{n} R_i \bar{x}_i$ ، DEA-risk کاراست ($\theta^{VRS \quad I-O}(R_۰) = ۱$) اگر و فقط اگر پورتفوی $\bar{X}$ ، SSD جفت جفت کارا باشد.

برهان. با استفاده از قضیه (۷.۳.۳) به اثبات گزاره فوق می پردازیم. توزیع دو متغییر تصادفی گسسته با توجه به رابطه SSD با استفاده از CVaRs در تعداد متناهی از سطح α_s ، $s \in \Gamma$ می تواند مقایسه شود در واقع $X_۱ \succ_{SSD} X_۲$ اگر و فقط اگر $CVaR_{\alpha_s}(-X_۱) \leq CVaR_{\alpha_s}(-X_۲)$ و $s \in \Gamma$ با حداقل یک نامساوی اکید، با استفاده از مدل DEA، بدنبال یک دارایی که دارای حداقل یک CVaR بشدت پایین برای یک سطح خاص و کمتر یا مساوی CVaRs برای سطوح دیگر می باشیم. اگر چنین دارایی وجود داشته باشد پس پورتفوی SSD جفت جفت ناکاراست و در غیر اینصورت SSD جفت جفت کاراست. با حل مدل (۱۵.۳) می توانیم چنین دارایی را با وزن های دودویی جستجو کنیم و اطمینان حاصل کنیم که دقیقا یک دارایی انتخاب شده است. □

۴.۳ کارایی پورتفوی با استفاده از تسلط تصادفی مرتبه دوم

در این بخش برخلاف موارد قبلی، یک پورتفوی آزمایش شده را با همه پورتفوی های شدنی مقایسه می کنیم. فرض کنیم $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)'$بردار وزن های پورتفوی معین بصورت زیر باشند:

$$\Lambda = \{\lambda \in R^N \mid 1'\lambda = 1 \quad , \quad \lambda_n \geq 0 \quad , \quad n = 1, 2, ..., N\}$$

پورتفوی کارا نسبت به پورتفوی های شدنی به صورت زیر تعریف می شود.

پورتفوی $\bar{X}$ را SSD ناکارا گوئیم هرگاه پورتفوی دیگری مانند$\lambda \in \Lambda$ وجود داشته باشد که بر $\bar{X}$، SSD مسلط باشد و در غیر اینصورت $\bar{X}$ ،یک پورتفوی SSD کاراست. در این بخش چند آزمون جهت ارزیابی کارایی پورتفوی با استفاده از تسلط تصادفی مرتبه دوم آورده شده است.

۱.۴.۳ آزمون پست (۲۰۰۳) برای کارایی SSD

فرض کنیم بازده مرتب شده به صورت $r^1\bar{X} < r^2\bar{X} < ... < r^s\bar{X}$ باشد. در اینصورت فرمول پست (۲۰۰۳) بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\theta^p(\bar{X}) = \min_{\theta, \beta_s} \theta \\
&s.t \\
&\sum_{s=1}^{S} \beta_s (r^s\bar{X} - r_{i,s}) + \theta \geq 0, \qquad i = 1, 2, ..., n, \\
&\beta_s - \beta_{s+1} \geq 0, \qquad s = 1, 2, ..., S-1, \\
&\beta_s \geq 0, \qquad s = 1, 2, ..., S-1, \\
&\beta_s = 1.
\end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

$\theta^p(\bar{X}) = 0$ آنگاه پورتفوی $\bar{X}$ ارزیابی شده SSD کارا خواهد بود و تابع مطلوبیت را برای سرمایه گذار ریسک گریز حداکثر می کند.

دوگان فرمول پست (۲۰۰۳) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&\varphi(\bar{X}) = max \varphi_j \\
&s.t \\
&\sum_{s=۱}^{S} \beta_s (r_{i,s} - r^s \bar{X}) = \varphi_j, \qquad j = ۱, ۲, ..., m, \\
&\beta_s - \beta_{s+۱} \geq ۰, \qquad s = ۱, ۲, ..., S - ۱, \\
&\varphi \in \mathbb{R}^m, \\
&\bar{X} \in \chi.
\end{aligned} \tag{۲۷.۳}$$

اگر $\varphi(\bar{X}) = ۰$ حل بهینه مسئله فوق باشد. پس $\bar{X}$، SSD کاراست. اگرچه پورتفوی بهینه X بیان می کند که بعنوان پورتفوی بهینه با بزرگترین افزایش در میانگین بازده است ولی لزوما بر $\bar{X}$ مسلط نیست. این آزمون تنها شرط لازم برای آزمون کارایی SSD پورتفوی را فراهم می کند و شرط کافی را بیان نمی کند. با این حال در برنامه های کاربردی تجربی بسیار کاربرد دارد و علاوه بر این جنبه محاسباتی ساده آزمون جذاب است. در زیر بخش زیر به معرفی آزمون دیگری با نام آزمون کارایی کوپا[۴] و چوونس[۵] می پردازیم.

۲.۴.۳ آزمون کارایی کوپا و چوونس

این آزمون برپایه مقایسه CVaR در سطح های خاص می باشد. فرض کنیم $\alpha_s = \frac{s}{S}$ ، $s \in \Gamma = \{ : ۰, ۱, ..., S - ۱\}$

$$\begin{aligned}
&\delta^{k-c}(\bar{X}) = max \sum_{s=۰}^{S-۱} \delta_s \\
&s.t \\
&CVaR_{\alpha_s}\left(-\sum_{i=۱}^{n} R_i \bar{x}_i\right) - CVaR_{\alpha_s}\left(-\sum_{i=۱}^{n} R_i \lambda_i\right) \geq \delta_s, \qquad s \in \Gamma, \\
&\delta_s \geq ۰, \qquad s \in \Gamma, \\
&X \in \chi.
\end{aligned} \tag{۲۸.۳}$$

δ_s متغییرهای آزاد هستند.

با استفاده از برنامه ریزی خطی می توانیم اندازه ناکارایی $\delta^{k-c}(\bar{X})$ را با حل مسئله بهینه سازی زیر محاسبه کنیم. داریم:

[۴] Kopa

[۵] Chovance

$$\begin{aligned}
&\delta^{K-c}(\bar{X}) = \max_{\delta_s,\lambda_i,a_s^t,b_s} \sum_{s=1}^{S} \delta_s \\
&s.t \\
&CVaR_{\frac{s-1}{S}}\left(-\sum_{i=1}^{n} R_i \bar{x}_i\right) - b_s - \frac{1}{1-\frac{s-1}{S}S}\sum_{t=1}^{T} a_s^t \geq \delta_s, \\
&a_s^t + r^t X \geq -b_s, \qquad s,t = 1,2,...,S, \\
&a_s^t \geq 0, \qquad s,t = 1,2,...,S, \\
&\delta_s \geq 0, \qquad s = 1,2,...,S, \\
&X \in \chi.
\end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

اگر $\delta^{K-C} > 0$ پس پورتفوی $\bar{X}$ ، SSD ناکاراست و پورتفوی X^* که حل مسئله فوق است بر پورتفوی $\bar{X}$، SSD مسلط است و در غیر اینصورت اگر $\delta^{K-C} = 0$ باشد پورتفوی $\bar{X}$ ، SSD کارا خواهد بود.

۳.۴.۳ آزمون کارایی کوسمان(۲۰۰۴)

پایه اساسی و ابتدایی این آزمون در ادبیات اقتصادی در کوسمان[۶] (۲۰۰۱) و بعدتر در کوسمان (۲۰۰۴) پیشرفت کرد. آزمون کوسمان (۲۰۰۴) بر اساس ماتریس تصادفی مضاعف $W = \{w_{st}\}_{s,t=1}^{S}$ می باشد. فرض می کنیم همه بازده ها در ماتریس M قرار گیرد. بطوریکه r^s نشان دهنده سطر sام ماتریس M باشد و همچنین $1^T = (1, 1, ..., 1)$. آزمون کوسمان بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\theta^{k_1}(\bar{X}) = min(1^T MX - 1^T WM\bar{X}) \\
&s.t \\
&MX \geq WM\bar{X}, \\
&\sum_{s=1}^{S} w_{st} = 1, \qquad t = 1,2,...,S, \\
&\sum_{t=1}^{S} w_{st} = 1, \qquad s = 1,2,...,S, \\
&X \in \chi.
\end{aligned} \tag{۳۰.۳}$$

مقایسه رابطه فوق با مسئله پست (۲۰۰۳) نشان می دهد، ساختار مشابه دارد بجز ماتریس تصادفی مضاعف W در رابطه (۲۷.۳). در آزمون پست (۲۰۰۳) بازده دارایی ها بصورت صعودی مرتب شده است در حالیکه در آزمون کوسمان نیازی به مرتب کردن بازده ها نیست.

[۶] Kuosman

۴.۴.۳ آزمون DEA-risk هم ارز با تسلط تصادفی مرتبه دوم

فرض می کنیم $\tilde{s} = arg\,max\{s \in \Gamma : CVaR_{\alpha_s}(-R_\circ) < \circ\}$ و معیار $CVaR_{\alpha_s}$ صفر نباشد. آزمون DEA-risk هم ارز با آزمون تسلط تصادفی مرتبه دوم بصورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\theta(R_\circ) = min\frac{۱}{S}\left[\sum_{k=\tilde{s}+۱}^{S-۱}\theta_k + \sum_{k=\circ}^{\tilde{s}}\frac{۱}{\varphi_k}\right]\\
&s.t\\
&-CVaR_{\alpha_k}(-\sum_{i=۱}^{n}R_i x_i) \geq \varphi_k.(-CVaR_{\alpha_k}(-R_\circ)), \qquad k=\circ, ۱, ..., \tilde{s},\\
&-CVaR_{\alpha_k}(-\sum_{i=۱}^{n}R_i x_i) \geq \theta_k.CVaR_{\alpha_k}(-R_\circ), \qquad k=\tilde{s}+۱, ..., s-۱,\\
&\circ \leq \theta_k \leq ۱, \qquad \varphi_k \geq ۱,\\
&\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱, \qquad x_i \geq \circ, \qquad i = ۱, ۲, ..., n.
\end{aligned}
\tag{۳۱.۳}
$$

که $-CVaR_\alpha$ اندازه هایی که به ما می دهند، بعنوان خروجی در نظر گرفته می شود. در واقع پورتفویی که طبق آزمونهای تسلط مرتبه دوم (آزمون پست (۲۰۰۳)، آزمون کارایی کوپا و چونس و آزمون کارایی کوسمان) همان پورتفویی خواهد بود که در مدل (۳۱.۳) کارا خواهد بود.

فصل ۴

ارزیابی کارایی

با توجه به اهمیت سنجش کارایی و ارزیابی عملکرد بنگاهها ،در این فصل از پایان نامه با استفاده از مدلهای DEA-risk و SD که در فصل سوم آورده شده با استفاده از نرم افزارهای GAMS و MATLAB به ارزیابی کارایی ۳۵ شرکت صنعت خودرو سازی می پردازیم. در این مدلها ریسک بعنوان ورودی و نقد شوندگی و بازده بعنوان خروجی طی سه دوره سه ساله برای سالهای ۹۲-۸۹،۸۹-۸۶ و ۹۵-۹۲ در نظر گرفته شده است. سپس با مقایسه تعداد شرکتهای کارای محاسبه شده در هر روش، این روش ها را با توجه به میزان تشخیص کارایی و ناکارایی شرکت ها به ترتیب از ضعیف به قوی رتبه بندی کردیم. همچنین با استفاده از روش اندرسون - پترسون[۱] به رتبه بندی واحدهای کارا پرداختیم.

[۱] Anderson & Peterson

۱.۴ ارزیابی کارایی با استفاده از مدلهای DEA-risk

در این بخش با استفاده از مدلهای ارائهDEA-risk شده در فصل سوم به ارزیابی کارایی شرکت های صنعت خودرو سازی می پردازیم. در این ارزیابی ریسک بعنوان ورودی انتخاب شده است و داده ها باید بصورت نامنفی باشند. داده های منفی را با یک شیفت مثبت کرده ایم.

بعنوان یک محصول جانبی از آزمون کارایی DEA ما می توانیم وزن های بهینه را تجزیه و تحلیل کنیم، بطوریکه وزن های صفر و غیر صفر را تشخیص دهیم. حذف ورودی هایی که وزن آن ها صفر است هیچ ضرری به جواب بهینه نمی رساند و بر روی کارایی DEA-risk هیچ تاثیری ندارد.

در جدول زیر مقادیر کارایی ارزیابی شده آورده شده است. در این جدول شرکت هایی که مقدار یک را برای دوره های قید شده بدست آورده اند کارا هستند و شرکت هایی که مقادیر کمتر از یک بدست آورده اند ناکارا محسوب می شوند.

جدول ۱.۴: ارزیابی کارایی با استفاده از مدلهای DEA

شرکت	مدل (۳.۳)	مدل (۴.۳)	مدل (۷.۳)	مدل (۸.۳)	مدل (۳.۳)	مدل (۴.۳)	مدل (۷.۳)	مدل (۸.۳)	مدل (۳.۳)	مدل (۴.۳)	مدل (۷.۳)	مدل (۸.۳)
الکتریک خودروشرق	۰.۰۰۲۷	۰.۰۱۲۱	۰.۰۱۲۱	۰.۱۲۵۶	۰.۰۹۵۹	۰.۱۹۷۲	۰.۱۹۷۲	۰.۵۲۶۳	۰.۱۵۴۸	۰.۲۵۰۳	۰.۲۵۰۳	۰.۳۱۶۷
سایپا آذین	۰.۰۱۱۱	۰.۰۱۱۴	۰.۰۱۱۴	۰.۳۹۷۸	۰.۴۲۹۴	۰.۹۸۸	۰.۹۸۸	۰.۹۹۶	۰.۱۹۵۵	۰.۱۹۶۱	۰.۱۹۶۱	۰.۴۷۰۸
قطعات اتومبیل	۰.۰۱۲۷	۰.۰۴۹۷	۰.۰۴۹۷	۰.۴۲۹	۰.۰۵۴۸	۰.۳۰۰۳	۰.۳۰۰۳	۰.۶۸۰۹	۱	۱	۱	۱
مهرکام پارس	۰.۰۱۶۶	۰.۱۰۶۷	۰.۱۰۶۷	۰.۵۳۹۶	۰.۰۴۶۱	۰.۰۶۵۴	۰.۰۶۵۴	۰.۳۵۷۲	۰.۷۱۶۵	۰.۷۱۹۹	۰.۷۱۹۹	۰.۶۲۸
نیرو محرکه	۰.۰۰۴۶	۰.۰۰۷۸	۰.۰۰۷۸	۰.۳۰۱۴	۰.۰۹۰۷	۰.۷۸۰۴	۰.۷۸۰۴	۰.۹۰۳۸	۰.۱۷۲۶	۰.۳۴۶۵	۰.۳۴۶۵	۰.۳۷۲۴
رینگ سازی مشهد	۰.۰۰۶۸	۰.۰۱۰۴	۰.۰۱۰۴	۰.۲۷۱۸	۰.۰۳۷۸	۰.۰۷۹۴	۰.۰۷۹۴	۰.۵۱۲۷	۰.۲۷۷۱	۰.۳۸۳۶	۰.۳۸۳۶	۰.۴۷۴۶
ریخته گری تراکتور	۰.۰۰۹۸	۰.۰۱۴	۰.۰۱۴	۰.۲۸۱۷	۰.۰۱۹۷	۰.۰۲۶۴	۰.۰۲۶۴	۰.۴۱۳۸	۰.۳۳۱۱	۰.۳۵۳۵	۰.۳۵۳۵	۰.۴۹۹۵
محور خودرو	۰.۰۱۶۱	۰.۴۸۱۹	۰.۴۸۱۹	۰.۷۱۰۴	۰.۰۳۲۶	۰.۴۵۸۹	۰.۴۵۸۹	۰.۸۱۹۶	۰.۳۶۷۱	۰.۳۷۸۱	۰.۳۷۸۱	۰.۴۷۸۸
آهنگری تراکتور	۰.۰۲۷۶	۰.۵۱۳۴	۰.۵۱۳۴	۰.۷۹۹۲	۱	۱	۱	۱	۰.۸۹۷۵	۰.۹۵۴۷	۰.۹۵۴۷	۰.۷۱۵
نصیر ماشین	۰.۰۱۳۴	۰.۰۶۷۹	۰.۰۶۷۹	۰.۳۸۰۲	۰.۰۵۶۵	۰.۷۶۸۵	۰.۷۶۸۵	۰.۹۲۲۸	۰.۶۴۵۵	۰.۶۴۸۳	۰.۶۴۸۳	۰.۷۷۸۸
سر.ایران خودرو	۰.۰۲۹۱	۰.۱۵	۰.۱۵	۰.۵۴۷۵	۰.۰۶۱۸	۰.۲۰۱۲	۰.۲۰۱۲	۰.۵۱۳۴	۰.۸۸۶۵	۱	۱	۱
فنر سازی خاور	۰.۰۳۲۶	۱	۱	۱	۰.۰۵۱۴	۰.۴۴۷	۰.۴۴۷	۰.۸۱۵۷	۰.۶۳۰۸	۰.۶۳۲۱	۰.۶۳۲۱	۰.۸۳۶۲
کمک فنر ایندامین	۰.۰۲۸۴	۰.۲۳۲۴	۰.۲۳۲۴	۰.۶۲۸۴	۰.۰۴۰۹	۰.۱۱۰۹	۰.۱۱۰۹	۰.۵۷۳	۰.۴۳۹۱	۰.۴۶۸۱	۰.۴۶۸۱	۰.۴۸۵
سر.اعتبار ایران	۰.۰۳۱۸	۰.۲۶۶۵	۰.۲۶۶۵	۰.۵۶۷۹	۰.۰۴۴۷	۰.۳۰۳۴	۰.۳۰۳۴	۰.۷۰۵۳	۰.۳۶۳۶	۰.۶۲۰۳	۰.۶۲۰۳	۰.۵۸۷
چرخشگر	۰.۰۴۰۵	۱	۱	۱	۰.۰۲۶۲	۰.۰۳۴۹	۰.۰۳۴۹	۰.۴۶۷۳	۰.۵۵۳۸	۰.۵۷۹۲	۰.۵۷۹۲	۰.۵۸۶۶
ایرکا پارت صنعت	۰.۰۳۰۱	۰.۳۰۰۹	۰.۳۰۰۹	۰.۶۸۷	۰.۰۵	۰.۴۵۷۱	۰.۴۵۷۱	۰.۸۰۹۶	۰.۱۸۲۴	۰.۱۸۵۶	۰.۱۸۵۶	۰.۳۲۷۲
محور سازان	۰.۰۹۸۹	۱	۱	۱	۰.۰۲۲۷	۰.۰۳۴۱	۰.۰۳۴۱	۰.۳۰۹	۰.۲۶۹۴	۰.۲۸۶۴	۰.۲۸۶۴	۰.۴۷۲۴
فنرسازی زر	۰.۰۳۱۴	۰.۴۲۱۸	۰.۴۲۱۸	۰.۷۲۸۶	۰.۰۶۸۸	۱	۱	۱	۰.۳۰۰۷	۰.۳۱۲۱	۰.۳۱۲۱	۰.۴۱۱۱
صنایع ریخته گری ایران	۰.۰۵۰۹	۰.۷۶۵۵	۰.۷۶۵۵	۰.۷۰۳۸	۰.۱۵۱۲	۱	۱	۱	۰.۴۸۹۹	۰.۴۹۶۹	۰.۴۹۶۹	۰.۶۴۴۲
رادیاتور ایران	۰.۰۵۵۳	۱	۱	۱	۰.۰۲۶۱	۰.۰۴۵۵	۰.۰۴۵۵	۰.۴۰۵۷	۰.۳۰۹۲	۰.۳۱۲۳	۰.۳۱۲۳	۰.۵۸۴۵
لنت ترمز	۰.۰۲۴۶	۱	۱	۱	۰.۰۱۱۴	۰.۰۲۱۹	۰.۰۲۱۹	۰.۶۰۸۲	۱	۱	۱	۱
سازه پویش	۰.۰۳۶۶	۱	۱	۱	۰.۰۱۵	۰.۰۱۵۱	۰.۰۱۵۱	۰.۳۶۴۲	۰.۹۹۲۳	۱	۱	۱
پارس خودرو	۰.۰۰۸۸	۰.۰۱۱۹	۰.۰۱۱۹	۰.۲۴۹۸	۰.۰۷۶۵	۰.۱۶۰۸	۰.۱۶۰۸	۰.۴۴۶۲	۰.۲۴۳۵	۰.۲۷۵۵	۰.۲۷۵۵	۰.۵۱۱۸
سایپا آذین	۰.۰۰۶۲	۰.۰۱۱	۰.۰۱۱	۰.۱۹۶۴	۰.۴۳۴۶	۱	۱	۱	۰.۱۹۵۵	۰.۱۹۶۱	۰.۱۹۶۱	۰.۴۷۰۸
گروه بهمن	۰.۰۳۵۳	۰.۷۱۶۸	۰.۷۱۶۸	۰.۵۹۴۲	۰.۰۵۷۴	۱	۱	۱	۰.۰۱۳۲	۰.۴۴۹۴	۰.۴۴۹۴	۰.۱۹۱۳
ایران خودرو دیزل	۰.۰۰۵۵	۰.۰۲۴۳	۰.۰۲۴۳	۰.۱۲۵۴	۰.۰۶۷۷	۰.۱۱۷۶	۰.۱۱۷۶	۰.۴۸۰۶	۰.۴۵۱۲	۰.۴۵۲۲	۰.۴۵۲۲	۰.۶۴۰۵
سر.رنا	۰.۰۲۴	۰.۴۸۷۶	۰.۴۸۷۶	۰.۵۴۶۳	۰.۰۷۰۸	۰.۵۹۵۴	۰.۵۹۵۴	۰.۸۵۴۴	۰.۲۱۰۷	۰.۴۲۷۸	۰.۴۲۷۸	۰.۴۱۳۲
زامیاد	۰.۰۱۴۶	۰.۰۱۵۴	۰.۰۱۵۴	۰.۴۱۰۶	۰.۰۹۰۱	۱	۱	۱	۰.۱۰۰۸	۰.۳۷۲۹	۰.۳۷۲۹	۰.۲۹۲۵
ایران خودرو	۰.۰۱۴۹	۰.۰۲۰۳	۰.۰۲۰۳	۰.۳۵۴۸	۰.۱۱۱۹	۱	۱	۱	۰.۲۲۷۸	۰.۳۹۶۸	۰.۳۹۶۸	۰.۴۰۷۴
موتور سازان تراکتور	۰.۰۱۳۱	۰.۰۱۴۷	۰.۰۱۴۷	۰.۲۸۰۴	۰.۰۲۵۴	۰.۰۴۳۲	۰.۰۴۳۲	۰.۵۴۲۴	۰.۳۱۵۱	۰.۳۹۲۲	۰.۳۹۲۲	۰.۵۳۹۲
سایپا دیزل	۱	۱	۱	۱	۰.۰۲۷۵	۰.۰۴۰۹	۰.۰۴۰۹	۰.۳۵۵۶	۰.۴۱۴۶	۰.۸۳۳۲	۰.۸۳۳۲	۰.۵۶۲۳
ایران خودرو	۰.۰۱۴۹	۰.۰۲۰۳	۰.۰۲۰۳	۰.۳۵۴۸	۰.۱۱۱۹	۱	۱	۱	۰.۲۲۷۸	۰.۳۹۶۸	۰.۳۹۶۸	۰.۴۰۷۴
موتور سازان تراکتور	۰.۰۱۳۱	۰.۰۱۴۷	۰.۰۱۴۷	۰.۲۸۰۴	۰.۰۲۵۴	۰.۰۴۳۲	۰.۰۴۳۲	۰.۵۴۲۴	۰.۳۱۵۱	۰.۳۹۲۲	۰.۳۹۲۲	۰.۵۳۹۲

همانطور که در جدول فوق مشاهده می کنیم از بین ۳۵ شرکت مورد ارزیابی در دوره اول هشت شرکت کارا، در دوره دوم نه شرکت و در دوره سوم از میان شرکت های مورد ارزیابی قرار گرفته چهار شرکت کارا شدند. این نشان می دهد که با گذشت زمان و در دوره سوم شرکت های کارا کم شده اند.

۲.۴ رتبه بندی واحدهای کارا

مدل‌هاي پايه‌اي تحليل پوششي داده‌ها، به دليل نبود رتبه‌بندي كامل بين واحدهاي كارا، امكان مقايسه واحدهاي كارا با يكديگر را فراهم نمي‌آورند. به عبارت ديگر، اين مدل‌ها واحدهاي تحت بررسي را به دو گروه ‘‘واحدهاي كارا’’ و ‘‘واحدهاي ناكارا’’ تقسيم مي‌كنند. واحدهاي ناكارا با كسب امتياز كارايي، قابل رتبه‌بندي هستند، اما واحدهاي كارا به دليل اينكه داراي امتياز كاراييِ برابر (كارايي واحد) هستند، قابل رتبه‌بندي نيستند. لذا برخي از محققين، روش‌هايي را برای رتبه‌بندي اين واحدهاي كارا پيشنهاد كرده‌اند كه از معروفترين آنها مي‌توان به مدلAP و روش كارايي متقابل اشاره كرد. در مدل اندرسون ـ پيترسون (مدلAP)، محدوديت متناظر با واحد تحت بررسي، از ارزيابي حذف مي‌شود. اين محدوديت سبب مي‌شود كه حداكثر مقدار تابع هدف، يک باشد. با حذف اين محدوديت، كارايي واحد تحت بررسي مي‌تواند بيشتر از ۱ باشد[۷]. روش زیر به منظور رتبه بندی این واحدها ارائه شده است.

۱.۲.۴ رتبه بندی شرکت های کارا با مدل اندرسون-پترسون

در سال ۱۹۹۳ اندرسون و پترسون [۴] روشی را برای رتبه بندی واحدهای کارا پیشنهاد کردند که تعیین کاراترین واحدها را میسر می سازد. با این روش مقدار کارایی واحدهای کارا می تواند از یک بیشتر شود. به این ترتیب، واحدهای کارا نیز مانند واحدهای ناکارا رتبه بندی می شوند. رتبه بندی واحدهای کارا بصورت زیر انجام می گیرد.

مرحله۱: مدل مضربی (یا پوششی) CCR را برای واحدهای تحت بررسی حل کنید تا واحدهای کارا و ناکارا مشخص شوند.

در صورتی که واحد تحت ارزیابی واحد K باشد مدل مضربی و پوششی آن، همان طور که در فصل دوم آورده شد به صورت زیر خواهد بود:

$$Max\ Z_k = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk}, \tag{۱.۴}$$

s.t

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1, \tag{۲.۴}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \qquad (j = 1, 2, ..., n), \tag{۳.۴}$$

$$u_r, v_i \geq \epsilon,$$

یا

$$MinY_0 = \theta - \epsilon(\sum_{r=1}^{s} s_i^+ + \sum_{i=1}^{m} s_r^-), \tag{۴.۴}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{ik}, \qquad (i = 1, 2, ..., m), \tag{۵.۴}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \qquad (r = 1, 2, ..., s), \tag{۶.۴}$$

$$\lambda_j \geq 0, s_r^- \geq 0, s_i^+ \geq 0,$$

لازم به ذکر است که در مدل BCC محدودیت $\sum_{i=1}^{n} \lambda_j = 1$ به مجموعه محدودیت های فوق اضافه می شود.

مرحله ۲: در این مرحله فقط واحدهای کارایی را در نظر می گیریم که امتیاز آنها در مرحله یک معادل یک شده و از مجموعه محدودیت مرحله اول، محدودیت مربوط به آن واحد را از مدل مضربی یا متغییر متناظر به این محدودیت را از مدل پوششی حذف و دوباره مدل را حل می کنیم.

در حالتی که واحد k واحدی کارا باشد، در این مرحله در مدل مضربی محدودیت شماره (۳.۳) بصورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{j=1}^{n} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \qquad (j = 1, 2, ..., n), \qquad j \neq k,$$

و در مدل پوششی محدودیت های (۵.۳) و (۶.۳) به صورت زیر در می آیند:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{ik}, \qquad (i = 1, 2, ..., m), \qquad j \neq k,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \qquad (r = 1, 2, ..., s), \qquad j \neq k,$$

از آنجا که در مرحله دوم محدودیت مربوط به واحد تحت بررسی که حد بالای آن عدد یک است، حذف می شود مقدار کارایی می تواند بیش از یک شود. به این ترتیب، واحدهای کارا با امتیازهای بالاتر از یک رتبه بندی می شوند.

با توجه به مدل اندرسون- پترسون ده شرکت که از نظر کارایی رتبه برتر کسب کرده اند بصورت زیر است:

جدول ۲.۴: رتبه بندی واحدهای کارا با استفاده از مدل اندرسون-پترسون

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
زامیاد	ایران خودرو	بهمن	رادیاتورایران	محور سازان	لنت ترمز	چرخشگر	قطعات اتومبیل	سایپادیزل	سازه پویش
۲.۱۴۴	۲.۴۰۰	۱.۹۶۱	۱.۹۶۰	۱.۹۲۵	۱.۶۱۴	۱.۶۰۸	۱.۵۲۶	۱.۴۹۶	۱.۱۵۶

در این رتبه بندی شرکت زامیاد در رتبه اول قرار می گیرد و کاراترین شرکت است. به همین ترتیب شرکت ایران خودرو در رتبه دوم و شرکت بهمن در رتبه سوم قرار می گیرد. هرچه مقدار عددی بدست آمده برای کارایی شرکت بیشتر باشد شرکت کاراتر است.

۳.۴ ارزیابی کارابی با تسلط تصادفی

در ارزیابی کارابی با FSD جفت جفت تعداد زیادی از شرکت ها کارا می شوند . در این روش یک شرکت کاراست اگر مطلوبیت مورد انتظار بازده ها حداقل برای یک تابع مطلوبیت ماکسیمم گردد. این بدان معنی است که معیار FSD جفت جفت حداقل برای یک تصمیم گیرنده بهترین انتخاب است. زیرا مطلوبیت مورد انتظاش را حداکثر می کند (هدف مدیران و سرمایه گذاران در سرمایه گذاری حداکثر کردن تابع مطلوبیت می باشد). ولی بدنبال راهی هستیم تا از تعداد شرکتهای کارا بکاهیم. با اضافه کردن شرط ریسک گریزی تصمیم گیرندگان به معیار FSD جفت جفت، خیلی از تعداد شرکت های کارا کاهش پیدا می کند. در واقع اضافه نمودن شرط ریسک گریزی به معیار FSD جفت جفت منجر به روش SSD جفت جفت می شود. در جدول زیر نتایج آزمون SSD جفت جفت آورده شده است.

آزمون کارابی SSD پورتفوی بسیار قویتر از دو آزمون قبل (FSD جفت جفت و SSD جفت جفت) می باشد. زیرا شاخصی (شرکتی) SSD کاراست، اگر هیچ ترکیب محدب خطی از شاخص های در نظر گرفته شده که بر شاخص کارا، SSD مسلط باشد، وجود نداشته باشد. پس هر شاخصی که SSD کاراست، SSD جفت جفت کارا نیز هست.

نتایج بدست آمده نشان می دهد شاخص کارابی SSD بسیار قوی است و فقط شاخصی SSD کارا می باشد که بالاترین میانگین را داشته باشد و بقیه شاخص ها ناکارا خواهند بود. اگرچه ممکن است سرمایه گذاران ریسک گریز ترکیبی از شاخص های دیگر را نسبت به شاخص کارا ترجیح دهند. نتایج کارابی با آزمون SSD در جدول زیر آمده است.

جدول ۳.۴: ارزیابی کارایی با استفاده از روش SSD جفت جفت

نام شرکت	دوره اول	دوره دوم	دوره سوم
نصیر ماشین		√	√
نیرو محرکه		√	
مهر کام پارس			√
آهنگری تراکتور		√	√
فنرسازی خاور	√		√
چرخشگر	√		√
محور سازان	√		
صنایع ریخته‌گیری	√	√	
فنرسازی زر		√	
رادیاتور ایران	√	√	
لنت ترمز	√		√
سازه پویش	√		√
ساپیا دیزل	√		√
ایران خودرو		√	
ساپیا آذین		√	
زامیاد		√	
گروه بهمن		√	√
قطعات اتومبیل			√
سر ایران خودرو			√

جدول ۴.۴: ارزیابی کارایی با استفاده از روش SSD

نام شرکت	دوره اول	دوره دوم	دوره سوم
ساپیا دیزل	√		
آهنگری تراکتور		√	
لنت ترمز			√

۴.۴ مقایسه روش های مختلف ارزیابی کارایی

در این فصل از پایان نامه به تجزیه و تحلیل کارایی ۳۵ شرکت از صنایع خودروسازی با استفاده از سه روش DEA-risk ، SSD جفت جفت و SSD پرداختیم و با استفاده از این روش ها پورتفوی های (شرکت های) کارا را برای سه دوره مشخص کردیم. همانطور که در صفحات پیش مشاهده کردیم با استفاده از مدل DEA-risk در دوره اول هفت، در دوره دوم هشت و در دوره سوم چهار شرکت کارا شدند در این ارزیابی ریسک بعنوان ورودی در نظر گرفته شد. با توجه به تحقیقات باسو و فاناری [۲] [۹] و مورتی و همکاران[۳] [۲۶] می توان از چندین معیار

[۲] Basso & Funari

[۳] Murthi et al

ریسک از جمله ارزش در معرض ریسک (VaR) ، ارزش در معرض ریسک مشروط (CVaR) ، افت سرمایه در معرض ریسک [۴] (DaR) و افت سرمایه در معرض ریسک مشروط [۵] (CDaR) بعنوان ورودی استفاده کرده اند. سپس با استفاده از معیار FSD جفت جفت دریافتیم که این روش بسیار ضعیف است زیرا تقریبا همه شرکت ها را بعنوان شرکت های کارا در هر سه دوره طبقه بندی می کند. معیار SSD پورتفوی یک آزمون قوی برای ارزیابی کارایی است زیرا در هر دوره فقط یک پورتفوی بعنوان SSD کارا بدست آمد. نتایج مقایسه سه روش بیان شده در جدول آمده است.

جدول ۵.۴: مقایسه روش ها

نام شرکت	مدل DEA-risk			مدل SSD جفت جفت			مدل SSD		
نام شرکت	دوره اول	دوره دوم	دوره سوم	دوره اول	دوره دوم	دوره سوم	دوره اول	دوره دوم	دوره سوم
نصیر ماشین				√	√				
نیرو محرکه					√				
مهر کام پارس				√					
آهنگری تراکتور		√		√	√			√	
فنرسازی خاور	√			√		√			
سر ایران خودرو			√			√			
چرخشگر	√			√		√			
محورسازان	√			√					
صنایع ریخته گری		√		√	√				
فنرسازی زر		√			√				
رادیاتور ایران	√			√	√				
لنت ترمز	√		√	√		√			√
سازه پویش	√		√	√		√			
سایپا آذین		√			√				
سایپا دیزل	√			√		√	√		
ایران خودرو		√			√				
زامیاد		√			√				
قطعات اتومبیل			√			√			
گروه بهمن		√		√	√				

بنابراین با توجه به نتایج بدست آمده برای ارزیابی پورتفوی ،می توان روش های فوق را بصورت زیر از ضعیف به قوی رتبه بندی کرد.

کارایی SSD پورتفوی > کارایی DEA-risk > کارایی جفت جفت SSD > کارایی جفت جفت FSD

طبق ارزیابی های انجام شده روش کارایی SSD پورتفوی برای ارزیابی کارایی پورتفوی قویتر از بقیه روشهاست و روش FSD جفت جفت از بقیه روشها برای ارزیابی کارایی ضعیف تر است زیرا در این روش اکثر شرکت ها کارا بدست می آیند.

---

[۴] Drowdown at Risk

[۵] Conditional Drowdown at Risk

مراجع

[۱] ترجمان. و، راعی. ر، (۱۳۸۹)، ''محاسبه ریسک با معیار تسلط تصادفی و مقایسه آن با سایر معیارهای متداول در بورس اوراق بهادار تهران''، **مدیریت و پیشرفت**، شماره ۲، صفحه ۴۷.

[۲] لحیم گرزاده. ا، و مرادی. ع، (۱۳۹۵)، **''مدیریت پورتفوی با رویکرد کاربردی''** چاپ اول، موسسه آراد کتاب تهران، صفحه ۲۳۵.

[۳] طالبیان. ب، (۱۳۹۱)، پایان نامه ارشد: ''نشدنی بودن ابرکارایی و داده های صفر در DEA ''. دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی.

[۴] مهرگان. م، (۱۳۹۲) **''تحلیل پوششی داده ها ''** چاپ دوم، موسسه نشر تهران: نشر دانشگاهی.

[۵] معین الدینی. پ، و هاشمی. س، (۱۳۸۲)، '' ارزیابی کارایی واحدهای اجرایی گمرک ایران از طریق تحلیل پوششی داده ها'' **مدیر ساز**، شماره ۱۴، دوره ۷، ص ۳۸-۳۲.

[۶] همدانی. غ، (۱۳۷۳)، **''نظریه احتمالات و نتیجه گیری آماری''** چاپ دوم، موسسه انتشارات علمی، دانشگاه صنعتی شریف، صفحه ۴۸۹.

[7] Andersen. P, Peterson. N. C, (1993), ''A procedure for ranking efficient unit in DEA'', **Management Scince**, 39, 10, pp 1261-1294.

[8] Banker. RD, Charnes. A, Cooper. W, (1984), '' Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis'', **Management Scince**, 30, 9, pp 1078–1092.

[9] Basso. A, Funari. S, (2003), ''Measuring the performance of ethical mutual funds a DEA approach'', **J Oper Res**, 54, 5, pp 521-531.

[10] Branda. M, (2012), ''Stochastic programming problems with generalized integrated chance constraints Optimization'', **Optimization Jornal**, 61, 8, pp 949-968.

[11] Branda, M , Kopa. M, (2012), " DEA-risk efficiency and stochastic dominance efficiency of stock indices", **Czech J Econ Financ**, 62, 2, pp 106–124.

[12] M.Branda. M, Kopa. M, (2012),"DEA-Risk Efficiency and Stochastic Dominance Efficiency of Stock Indices", **Finance a úvěr-Czech Journal of Economics and Finance**, 62, 2, pp 106-124.

[13] Branda. M, (2013), " Diversification-consistent data envelopment analysis with general deviation measures", **Eur J Oper Res**, 226, 3, pp 626-635.

[14] M.Branda. M, Kopa. M, (2013), "From stochastic dominance to DEA-risk models: portfolio efficiency analysis", **Eur J Oper Res**, 230, 2, pp 321-332.

[15] Branda. M, Kopa.M, (2014), "On relations between DEA-risk models and stochastic dominance efficiency tests". **Springer**, 22, 1, pp 13-35.

[16] Charnes. A , Cooper. W, (1962), " Programming with linear fractional functionals", **Naval Res Logist Quartrly**, 9, 3, pp 181–196.

[17] Cook. WD, Seiford. LM, (2009), " Data envelopment analysis (DEA) thirty years on", **Eur J Oper Res**, 192, 1, pp 1–17.

[18] Hader. J , Russell. W, (1971), "Stochastic dominace and diversification", **Elsevier Jornal of Economic**, 3, 3, pp 288-305.

[19] Hardy. GH, Littlewood. JE, Pólya. G, (1934), **" Inequalities"**, Vol. 2, Cambridge University Press, pp 340.

[20] Hanoch. G, Levy. H, (1969)" The efficient analysis of choices involving risk", **The Review of Economic Studies**, 36, 3, pp 335–346.

[21] Kjetsaa. R, Kieff.M,(2003) "Stochastic dominance analysis of equity mutual fund performance", **American Business Review**, 3, 9, pp 136-144.

[22] Kopa. M, Chovanec. P, "Asecond-order stochastic dominance portfolio efficiency measure", **Kybernetika**, 44, 2, pp 243–258.

[23] Lamb.JD, Tee. K. H, (2012), " Data envelopment analysis models of investment funds", **Eur J Oper Res**, 216, 3,pp 687–696.

[24] Lamb. JD, Tee. K. H, (2012) " Resampling DEA estimates of investment fund performance", **Eur J Oper Res**, 223, 3, pp 834–841.

[25] Levy. H, (2006)**" Stochastic dominance: investment decision making under uncertainty**, Vol. 3, Springer, New York, pp 505.

[26] Murthi. BPS, Choi. YK, Desai. P, (1997), "Efficiency of mutual funds and portfolio performance measurement a non-parametric approach", **Eur J Oper Res**, 98, 2, pp 408–418.

[27] Ogryczak.W, Ruszczy. A, (2002), "Dual stochastic dominance and related mean-risk models", **SIAM J. Optim**,13, 1, pp 60–78.

[28] Pierce. J, (1997), "Efficiency progress in The Newsouthwales Government", **Office of Finance Managment**, 97, 8.

[29] Ruszczy. A, Vanderbei.R. J, (2003), " Frontiers of stochastically nondominated portfolios", **Econometrica**, 71, 4, pp 1287–1297.

[30] Uryasev. S, Rockafellar. R.T, (2002), " Conditional value-at-risk for general loss distributions", **Elsevier Jornal of Economic**, 26 , pp 1443–1471.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احتمالی	Probabilistic
ارزیابی	Estimation
اندازه	Measure
بازده	Return
بهینه	Optimal
تابع توزیع	Distribution Function
تابع مطلوبیت	Utility Function
تحلیل پوششی داده ها	Data Envelopment Analysis
تسلط تصادفی	Stochastic Dominace
تصمیم گیرندگان	Decision-making
خروجی	Output
دارایی	Asset
ریسک	Risk
کارایی	Efficiency
متغییر تصادفی	Random Variable
محدودیت	Constraint
ناکارا	Inefficient
ورودی	Inpput

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

دارایی	Asset
محدودیت	Constraint
تحلیل پوششی داده ها	Data Envelopment Analysis
تصمیم گیرندگان	Decision-making
تابع توزیع	Distribution Function
کارایی	Efficiency
ارزیابی	Estimation
ناکارا	Inefficient
ورودی	Input
اندازه	Measure
بهینه	Optimal
خروجی	Output
احتمالی	Probabilistic
متغیر تصادفی	Random Variable
بازده	Return
ریسک	Risk
تسلط تصادفی	Stochastic Dominace
تابع مطلوبیت	Utility Function

Aabstract

In the financial affairs, the issue of selecting appropriate and profitable stock as well as evaluation of portfolio performance are some of the most important issues which have highly engaged the minds of investors. In this regard, some models such as Data Envelopment Analysis (DEA) and Stochastic Dominace (SD) criterion have been suggested in order to evaluate portfolio performance. DEA technique is a non-parametric method which is based on performance evaluation or optimization calculation of a finite number of homogeneous decidsion-making units. In the SD method, probability frequency function is used for selection of active portfolio. By the use of this method, efficient and inefficient portfolios can be identified. In addition to evaluation of DEA and SD models for stock selection and creation of optimum portfolio, this study also tries to evaluate efficiency of portfolios with these models; and by the use of doing a comparative evaluation, it also tries to introduce the stronger technique of portfolio performance evaluation to the investors.

Keywords

Data Envelopment Analysis, Standard Deviation, efficiency, portfolio

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Finance Mathematics

Estimation of portfolio efficiency via DEA and SD

By: Anehbakhet Ghorbanzadeh

Supervisors

Dr. Ahmad Nezakati Rezazade
Dr. Mojtaba Ghiyasi

July 2017