دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی ایده‌آل‌های ضعیف ۲-جذبی در حلقه‌های جابجایی

فاطمه ترکمن

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

شهریور ۱۳۹۴

پیش کشی است ناقابل تقدیم به

انسان های شریفی که شب زنده داری هایشان، وجودم بخشید و نفس هایشان رنگ زندگیم کشید،

پدر

استوارترین اراده ای که نگاهش اعتماد به نفسم و لبخندش امید بخش لحظات تنهایی ام

و مادر

صاحب مهربانترین نگاه ها، همان که مادر بوده تا ما باشیم و مادر هست تا نفس بکشیم و مادر می ماند تا ما بمانیم

و برادر عزیز و خواهر نازنینم

که وجودشان شادی بخش و مایه دلگرمی من است.

سپاس‌گزاری....

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بی‌کران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند.

لذا اکنون که در سایه‌سار بنده‌نوازی‌هایش پایان‌نامه حاضر به انجام رسیده است، برحسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزوجل " از پدر و مادر عزیزم ... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند سپاس گویم. بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی که ایشان علاوه بر هدایت و راهنمایی مؤثر و دلسوزانه من در انجام پایان‌نامه، برای اینجانب نماد و الگوی مناسبی از یک استاد مجهز به دانش فنی و در عین حال متکی به اخلاقیات در راه تعلیم و راهنمایی دانشجویان بوده‌اند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند تقدیر و تشکر نماییم. هم‌چنین از اساتید فرزانه و دلسوز، آقایان دکتر جعفری و دکتر خورسندی که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را نمایم، باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

فاطمه ترکمن

شهریور ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **فاطمه ترکمن** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی ایده‌آل‌های ضعیف ۲-جذبی در حلقه‌های جابجایی** ، تحت راهنمایی **دکتر ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه شاهرود ‘‘ یا ‘‘ Shahrood University ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه ترکمن

شهریور ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد که $1_R \neq 0$. چندین تعمیم از ایده‌آل‌های اول مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال، ایده‌آل سره I از حلقه R را اول ضعیف می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $a, b \in R$ اگر $0 \neq ab \in I$، آنگاه $a \in I$ یا $b \in I$. گوییم ایده‌آل سره I خاصیت ۲-جذبی دارد، هرگاه به ازای هر $a, b, c \in R$ اگر $abc \in I$، آنگاه $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$.
در این پایان‌نامه، ایده‌آل‌های ضعیف ۲-جذبی در حلقه‌های جابجایی و یکدار که تعمیمی از ایده‌آل‌های اول ضعیف می‌باشند را معرفی و بررسی می‌کنیم. گوییم ایده‌آل سره I خاصیت ضعیف ۲-جذبی دارد، هر گاه به ازای هر $a, b, c \in R$ اگر $0 \neq abc \in I$، آنگاه $ab \in I$ یا $bc \in I$ یا $ac \in I$. نشان می‌دهیم هر ایده‌آل سره I که خاصیت ضعیف ۲-جذبی دارد و $I^3 \neq 0$، ۲-جذبی است.
هم‌چنین نشان می‌دهیم در حلقه‌ی جابجایی R، هر ایده‌آل سره خاصیت ضعیف ۲-جذبی دارد اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی شبه موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال M باشد که $M^3 = \{0\}$ یا $R \cong R_1 \times F$ که R_1 یک حلقه‌ی شبه موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال M است و $M^2 = \{0\}$ و F یک میدان است، یا $R \cong F_1 \times F_2 \times F_3$ که F_1، F_2 و F_3 میدان می‌باشند. در آخر ایده‌آل‌های n-جذبی که تعمیمی از ایده‌آل‌های اول هستند را بررسی می‌کنیم و در ادامه تعمیمی دیگر از ایده‌آل‌های اول که ایده‌آل‌های قویاً n-جذبی می‌باشند را معرفی و به مطالعه آن‌ها می‌پردازیم. مطالب این پایان‌نامه بر گرفته از مراجع [۴]، [۵]، [۹] و [۱۵] است.

کلمات کلیدی: ایده‌آل اول، ایده‌آل ۲-جذبی، ایده‌آل n-جذبی، ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی، ایده‌آل قویاً n-جذبی، دامنه‌ی پروفر.

مقدمه

در این پایان‌نامه، ایده‌آل‌های ضعیف ۲ـجذبی[۱] در حلقه‌های جابجایی و یکدار که تعمیمی از ایده‌آل‌های اول ضعیف[۲] می‌باشند را معرفی و بررسی می‌کنیم. ایده‌آل‌های اول ضعیف در سال ۲۰۰۳ میلادی توسط اندرسون[۳] و اسمیت[۴] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفتند. ایده‌آل‌های ۲ـجذبی[۵] که تعمیمی از ایده‌آل‌های اول می‌باشند در سال ۲۰۰۷ توسط ایمن بداوی[۶] معرفی و بررسی شدند. سپس در سال ۲۰۱۱ اندرسون به همراه بداوی، ایده‌آل‌های nـجذبی[۷] که تعمیمی از ایده‌آل‌های ۲ـجذبی می‌باشند را مورد مطالعه قرار دادند و در سال ۲۰۱۳ بداوی و یوسفیان دارانی[۸] بررسی ایده‌آل‌های ضعیف ۲ـجذبی در حلقه‌های جابجایی را با بیان ویژگی‌های این ایده‌آل‌ها شروع کرده و سپس به معرفی حلقه‌هایی پرداختند که هر ایده‌آل سره آن‌ها خاصیت ضعیف ۲ـجذبی دارد.

درفصل اول این پایان‌نامه به معرفی مطالب مقدماتی می‌پردازیم و فصل دوم را با بررسی ویژگی‌های اساسی ایده‌آل‌های ضعیف ۲ـجذبی شروع می‌کنیم و با معرفی حلقه‌هایی که هر ایده‌آل سره آن‌ها ضعیف ۲ـجذبی می‌باشد به پایان می‌رسانیم.

در فصل سوم به بررسی ایده‌آل‌های nـجذبی در حلقه‌های جابجایی و یکدار می‌پردازیم که شامل پنج بخش است. دربخش اول برخی از ویژگی‌های اساسی ایده‌آل‌های nـجذبی را بیان می‌کنیم و روابط بین این ایده‌آل‌ها و ایده‌آل‌های اول ،اول مینیمال و ماکسیمال را بیان و به بررسی آنها می پردازیم. دربخش دوم مطالعه و بررسی ویژگی های اساسی از ایده‌آل‌های nـجذبی را ادامه خواهیم داد. به طور خاص، راجع به روابط بین ایده‌آل‌های اولیه و ایده‌آل‌های nـجذبی بحث می‌کنیم. در بخش سوم توسیع‌هایی از ایده‌آل‌های nـجذبی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس در بخش چهارم ایده‌آل‌های nـجذبی در حلقه‌های خاص را بررسی می‌کنیم و در آخر تعمیمی دیگر از ایده‌آل‌های اول که ایده‌آل‌های قویاً nـجذبی [۹] نام دارند را معرفی و به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

---

[۱] Weakly 2-absorbing ideals

[۲] Weakly prime ideals

[۳] Anderson

[۴] Smith

[۵] 2-absorbing ideals

[۶] Badawi Ayman

[۷] n-absorbing ideals

[۸] Yousefian Darani

[۹] Strongly n-absorbing ideals

فهرست مطالب

۱ **مفاهیم و مقدمات لازم** ۳

۱.۱ تعاریف اولیه ۴

۲ **بررسی ایده‌آل‌های ضعیف ۲ـجذبی در حلقه‌های جابجایی** ۱۳

۱.۲ ویژگی‌های اساسی از ایده‌آل‌های ضعیف ۲ـجذبی ۱۴

۲.۲ معرفی حلقه‌هایی که هر ایده‌آل سره آن‌ها خاصیت ضعیف ۲ـجذبی دارد. ۲۲

۳ **بررسی ایده‌آل‌های nـجذبی در حلقه‌های جابجایی** ۲۹

۱.۳ ویژگی‌های اساسی ایده‌آل‌های nـجذبی I ۳۰

۲.۳ ویژگی‌های اساسی ایده‌آل‌های nـجذبی II ۳۸

۳.۳ توسیع‌هایی از ایده‌آل‌های nـجذبی ۴۱

۴.۳ ایده‌آل‌های nـجذبی در حلقه‌های خاص ۵۳

۵.۳ ایده‌آل‌های قویاً nـجذبی ۵۹

مراجع ۶۷

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۳

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات لازم

۱.۱ تعاریف اولیه

در سراسر این پایان‌نامه، همواره R حلقه‌ای جابجایی و یکدار است که $1_R \neq 0$.

تعریف ۱.۱.۱. ایده‌آل سره P از حلقه‌ی R را اول گوییم، هر گاه برای هر دو ایده‌آل I و J از R اگر $IJ \subseteq P$، آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با $\mathrm{Spec}(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. ایده‌آل سره M از حلقه‌ی R را ماکسیمال می‌نامیم، هرگاه برای هر ایده‌آل N از R اگر $M \subseteq N \subseteq R$ ، آنگاه $N = M$ یا $N = R$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. ایده‌آل اولی از R مانند p را که شامل I است، یک ایده‌آل اول مینیمال I می‌نامیم، هرگاه ایده‌آل اولی از R مثل q موجود نباشد که $I \subseteq q \subsetneqq p$. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال I را با $Min_R(I)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R را زیرحلقه‌ی R می‌نامیم، اگر S خود نسبت به عمل‌های R حلقه باشد و $1_R = 1_S$.

تعریف ۵.۱.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R را ضربی بسته نامیم، هر گاه

۱. $1 \in S$

۲. $\forall a, b \in S; ab \in S$

قضیه ۶.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و P یک ایده‌آل سره R باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *P یک ایده‌آل اول است.*

۲. *اگر $a, b \in R$ و $ab \in P$، آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.*

۳. *اگر $a_1, \cdots, a_n \in R$ و $a_1 \cdots a_n \in P$، آنگاه برای بعضی i، $a_i \in P$.*

۴. *$R - P$ یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته R است.*

برهان. رجوع شودبه [۲،قضیه ۲.۶.۳]. □

اگر R یک دامنه‌ی صحیح باشد، آنگاه بنابر قضیه ۶.۱.۱، نتیجه می شود $\{0\}$ یک ایده‌آل اول R است.

تعریف ۷.۱.۱. عنصر a از حلقه‌ی R را وارون‌پذیر (یکه) گوییم، هر گاه عضوی مانند b از R موجود باشد که $ab = 1$. مجموعه‌ی عناصر وارون‌پذیر R را با $U(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. حلقه‌ی جابجایی و یکدار R را میدان گوییم، هرگاه هر عنصر ناصفر آن نسبت به ضرب وارون‌پذیر باشد.

تعریف ۹.۱.۱. زیرمجموعه ناتهی F از میدان R را زیرمیدان R گوییم، هرگاه F خود تحت اعمال جمع و ضرب موجود در R میدان باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم X یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از حلقه‌ی R باشد. ایده‌آل تولیدشده توسط X، یعنی کوچکترین ایده‌آل حلقه‌ی R که شامل X است. این ایده‌آل با علامت $\langle X\rangle$ نشان داده می‌شود. عناصر X را مولدهای $\langle X\rangle$ نامند.
ایده‌آل I از حلقه‌ی R را با تولید متناهی می‌نامند، هرگاه زیرمجموعه‌ای متناهی از R مانند X وجود داشته باشد به طوری که $I = \langle X\rangle$.

تعریف ۱۱.۱.۱. عنصر ناصفر $a \in R$ یک مقسوم علیه صفر نامیده می‌شود، هرگاه عنصر ناصفر $b \in R$ موجود باشد که $ab = ۰$. مجموعه مقسوم علیه‌های صفر R را با $Z(R)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۲.۱.۱. حلقه جابجایی و یکدار R را دامنه صحیح گوییم، هرگاه مقسوم‌علیه صفر نداشته باشد.

لم و تعریف ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد و $a \in R$. در این‌صورت مجموعه*

$$aR := \{ar : r \in R\}$$

ایده‌آل R است و ایده‌آل اصلی تولید شده توسط a نامیده می‌شود.
نمادهای دیگر aR عبارتند از Ra و $\langle a\rangle$.

تعریف ۱۴.۱.۱. دامنه صحیح R را دامنه ایده‌آل اصلی یا PID می‌نامیم، اگر هر ایده‌آل R اصلی باشد.

قضیه ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی یکدار و I یک ایده‌آل سره R باشد. در این‌صورت حداقل یک ایده‌آل ماکسیمال شامل I وجود دارد. به ویژه، هر حلقه‌ی یکدار حداقل یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.*

برهان. رجوع شود به [۲، قضیه ۷.۶.۳]. □

نتیجه ۱۶.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد و $a \in R$. در این‌صورت a عضو وارون‌پذیر R است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، $a \notin M$ یعنی اگر و تنها اگر a بیرون هر ایده‌آل ماکسیمال R واقع شود.*

برهان. رجوع شود به [۱، نتیجه ۱۱.۳]. □

قضیه ۱۷.۱.۱. *هرگاه R حلقه‌ای جابجایی و یکدار باشد و $I \trianglelefteq R$ در صورتی‌که $R \ni a \neq ۰$ آنگاه*

$$\langle I, a\rangle = \{i + ra | i \in I, r \in R\}$$

برهان. رجوع شود به [۳، قضیه ۱۸.۱۲]. □

قضیه ۱۸.۱.۱. *در حلقه‌ی R ایده‌آل M ماکسیمال است اگر و فقط اگر*

$$\exists ۰ \neq a \in R - M \quad s.t \quad \langle M, a\rangle = R$$

برهان. رجوع شود به [۳، قضیه ۱۸.۱۳]. □

قضیه ۱۹.۱.۱. *حلقه جابجایی و یکدار R میدان است اگر و تنها اگر R و $\{0\}$ تنها ایده‌آل‌های R باشند.*

برهان. رجوع شود به [۲، قضیه ۱۰.۶.۳]. □

لم ۲۰.۱.۱. *(زورن)[۱]. فرض کنیم $(A,\leq)$ یک مجموعه‌ی ناتهی جزیی مرتب باشد و هر زنجیر از A کران بالایی در A داشته باشد. در این‌صورت A عضو ماکسیمال دارد [۲، لم زورن].*

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. a را یک عنصر پوچ توان نامند، هر گاه عدد طبیعی n موجود باشد به طوری که $a^n = 0$.

اگر R یک حلقه‌ی جابجایی باشد، آنگاه مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ توان حلقه‌ی R تشکیل یک ایده‌آل داده که به آن $Nil(R)$ گوییم.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. a را یک عنصر خود توان نامند، هر گاه $a^2 = a$.

تعریف ۲۳.۱.۱. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را پوچ گوییم، هر گاه تمام عناصر I پوچ توان باشد.

مثال ۲۴.۱.۱. $\mathrm{NiL}(R)$ یک ایده‌آل پوچ از حلقه‌ی جابجایی R است.

لم و تعریف ۲۵.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و I ایده‌آل R باشد. در این‌صورت*

$$\sqrt{I} := \{r \in R : r^n \in I \text{ وجود داشته باشد که } \mathbb{N} \text{ ای متعلق به } n\} = \bigcap_{P \in Min(I)} P$$

ایده‌آلی از R است که I را شامل می‌شود و رادیکال I نام دارد.
نماد $Rad_R(I)$ نماد دیگری برای $\sqrt{I}$ است.

برهان. رجوع شود به [۱، لم و تعریف ۴۶.۳]. □

تعریف ۲۶.۱.۱. ایده‌آل سره I از حلقه‌ی جابجایی R را اولیه نامیم، هر گاه به ازای هر $a, b \in R$ اگر $ab \in I$ و $a \notin I$، آنگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $b^n \in I$.

لم و تعریف ۲۷.۱.۱. *فرض کنیم Q یک ایده‌آل اولیه از حلقه‌ی جابجایی R باشد. در این‌صورت $P := \sqrt{Q}$ ایده‌آل اول R است و می‌گوییم Q، P-اولیه است.*

برهان. چون $1 \notin Q$، پس $1 \notin \sqrt{Q} = P$ و در نتیجه P سره است. فرض کنیم $a, b \in R$، $ab \in \sqrt{Q}$ و $a \notin \sqrt{Q}$. در این‌صورت $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(ab)^n = a^n b^n \in Q$. اما هیچ توان مثبت a متعلق به Q نیست و لذا هیچ توان مثبت a^n در Q نیست. چون Q اولیه است از تعریف آن نتیجه می‌گیریم که $b^n \in Q$ و لذا $b \in \sqrt{Q}$. در نتیجه ایده‌آل $P = \sqrt{Q}$ اول است. □

[۱] Zorn's lemma

قضیه ۲۸.۱.۱. *فرض کنیم Q ایده‌آلی از حلقه‌ی جابجایی R باشد به طوری که ایده‌آل $M = \sqrt{Q}$ ایده‌آل ماکسیمال R باشد. در این‌صورت Q ایده‌آل اولیه (در واقع Mـاولیه) R است.*

برهان. رجوع شود به [۱، قضیه ۹.۴]. □

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند به طوری که $I + J = R = \langle ۱ \rangle$. در این‌صورت I و J را هم ماکسیمال می‌نامیم.

تعریف ۳۰.۱.۱. اگر I و J دو ایده‌آل از حلقه‌ی جابجایی R باشند، آنگاه

$$I :_R J = \{r \in R \mid rJ \subseteq I\}$$

واضح است که $I :_R J$ ایده‌آلی از R است و $I \subseteq I :_R J$.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد. رادیکال جیکبسن R را اشتراک همه ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۳۲.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد و $r \in R$. در این‌صورت $r \in J(R)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in R$، $۱ - ra$ عضو وارون‌پذیر R باشد.*

برهان. رجوع شود به [۱، لم ۱۷.۳]. □

لم ۳۳.۱.۱. *فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای ضربی بسته از حلقه‌ی جابجایی R باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\forall\, (a, s),\ (b, t) \in R \times S$$

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow \exists u \in S :\ u(ta - sb) = ۰$$

در این‌صورت $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

برهان. رجوع شود به [۱، لم ۱.۵]. □

قضیه ۳۴.۱.۱. *فرض کنیم لم ۳۳.۱.۱ برقرار باشد و $(a, s) \in R \times S$. رده‌ی هم‌ارزی شامل (a, s) را با $\frac{a}{s}$ و مجموعه‌ی تمام رده‌های هم‌ارزی را با R_S نشان می‌دهیم که $\frac{a}{s} = \{(b, t) | (a, s) \sim (b, t)\}$. در این‌صورت R_S تحت عمل‌های*

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \qquad \text{و} \qquad \frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

به ازای a و bهای متعلق به R، و s و tهای متعلق به S، حلقه‌ای جابجایی است که به این حلقه، حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S گوییم.

برهان. رجوع شود به [۱، قضیه ۲.۵]. □

لم و تعریف ۳۵.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد و $P \in \operatorname{Spec}(R)$. فرض کنیم $S := R - P$، توجه داریم که $R - P$ زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از R است. حلقه‌ی کسرهای R_S را با R_P نمایش می‌دهند. این حلقه را حلقه‌ی حاصل از موضعی سازی R در P می‌نامند.*

برهان. رجوع شود به [۱، لم و تعریف ۲۰.۵]. □

تعریف ۳۶.۱.۱. فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح باشد. $S := R - \{0\}$ زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از R است. در این‌صورت R_S را میدان کسرهای R گوییم و با نماد $qf(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۷.۱.۱. عنصر ناصفر x از حلقه‌ی R را که مقسوم‌علیه صفر نباشد، منظم گوییم.

تعریف ۳۸.۱.۱. درحلقه‌ی R اگر $S = R - Z(R)$، آنگاه $R_S = \left\{\dfrac{a}{b} \mid a \in R, b \in S\right\}$ را با نماد $T(R)$ نمایش می‌دهیم و آن را حلقه‌ی کسرهای تام R می‌نامیم.

تعریف ۳۹.۱.۱. گوییم حلقه‌ی جابجایی R، π-منظم است اگر برای هر $a \in R$، عدد صحیح مثبت n و عنصر $b \in R$ موجود باشند به قسمی که $a^n = a^{2n}b$.

تعریف ۴۰.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد. بعد R را با $\dim R$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\dim R = \sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \text{زنجیری از ایده‌آل‌های اول به طول } n \text{ موجود باشد.}\}$$

قضیه ۴۱.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *R، π-منظم است.*
۲. *برای هر $a \in R$، یک عنصر $b \in R$ و عدد صحیح مثبت n وجود دارد به قسمی که $a^n = a^{n+1}b$.*
۳. *$R/N(R)$ یک حلقه‌ی فون نیومن منظم است.*
۴. *R صفر-بعدی است.*

برهان. رجوع شود به [۱۲، قضیه ۳.۱]. □

تعریف ۴۲.۱.۱. حلقه‌ی جابجایی R را فون نیومن منظم[۲] گوییم، هر گاه برای هر $x \in R$، عنصر $y \in R$ موجود باشد که $x = x^2y$.

تعریف ۴۳.۱.۱. حلقه R را تقلیل یافته گوییم[۳]، هر گاه صفر تنها عنصر پوچ توان آن باشد.

تعریف ۴۴.۱.۱. فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. تابع $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی از حلقه‌ها نامیده می‌شود، هر گاه برای هر $a, b \in R$،

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

و

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

[۲] VonNeumann regular ring

[۳] reduced

لم و تعریف ۱.۱.۴۵. *فرض کنیم R و S حلقه‌هایی جابجایی و $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای باشد.*
الف. هرگاه J ایده‌آل S باشد، آنگاه

$$f^{-1}(J) := \{r \in R : f(r) \in J\}$$

ایده‌آلی از R است که آن را حاصل تحدید J نسبت به همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ می‌نامیم. اغلب $f^{-1}(J)$ را با J^c نمایش می‌دهیم.
ب. به ازای هر ایده‌آل I از R ایده‌آل $f(I)S$، یعنی ایده‌آل تولید شده توسط $f(I)$ در S را حاصل توسیع I نسبت به همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ می‌نامیم. اغلب $f(I)S$ را با I^e نمایش می‌دهیم.

برهان. رجوع شود به [۱، لم و تعریف ۴۱.۲]. □

لم و تعریف ۱.۱.۴۶. *فرض کنیم $P \in \mathrm{Spec}(R)$ و $f : R \underset{r \to \frac{r}{1}}{\longrightarrow} R_P$ همریختی طبیعی باشد. $\Big((P^n)^e\Big)^c$ را nامین توان نمادین P می‌نامیم و با نماد $P^{(n)}$ نمایش می‌دهیم.*

برهان. رجوع شود به [۱، لم و تعریف ۴۶.۵]. □

تعریف ۱.۱.۴۷. ارتفاع ایده‌آل اول P از حلقه‌ی جابجایی و یکدار R را با htP نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$htP = \sup\{n \in \mathbb{N}\cup\{0\} | P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = P \text{ طوری‌که به باشند موجود } P_0, \cdots, P_n \text{ ایده‌آل‌های اول}\}$$

تعریف ۱.۱.۴۸. فرض کنیم R یک حلقه باشد. قرار می‌دهیم

$$R[X] := \{(a_0, a_1, \cdots) \mid a_i \in R \text{ و } a_i \text{ها از مرتبه‌ای به بعد صفرند.}\}$$

روی $R[X]$ دو عمل جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(a_0, a_1, \cdots) + (b_0, b_1, \cdots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots)$$

$$(a_0, a_1, \cdots)(b_0, b_1, \cdots) := (c_0, c_1, \cdots)$$

به طوری که برای هر k،

$$c_k = a_k b_0 + \cdots + a_0 b_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $(R[X], +, .)$ یک حلقه است که به آن حلقه‌ی چند جمله‌ای ها روی R گوییم.
اگر $x = (0, 1, 0, 0, \cdots)$، آنگاه هر عنصر از $R[X]$ مانند $(a_0, a_1, \cdots)$ را می‌توان چنین نمایش داد

$$(a_0, a_1, \cdots) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

اگر R جابجایی و یکدار باشد، آنگاه $R[X]$ نیز یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است و $1_R = 1_{R[X]}$.

تعریف ۴۹.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. قرار می‌دهیم

$$R[[X]] := \{(a_0, a_1, \cdots)|a_i \in R\}$$

روی $R[[X]]$ دو عمل جمع و ضرب را چنین تعریف می‌کنیم

$$(a_0, a_1, \cdots) + (b_0, b_1, \cdots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots)$$

$$(a_0, a_1, \cdots)(b_0, b_1, \cdots) := (c_0, c_1, \cdots)$$

به طوری که برای هر k،

$$c_k = a_k b_0 + \cdots + a_0 b_k = \sum_{l=0}^{K} a_l b_{k-l}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $(R[[X]], +, .)$ یک حلقه است که به آن حلقه‌ی سری‌های توانی گوییم. اگر $x = (0, 1, 0, 0, \cdots)$، آنگاه هر عنصر از $R[[X]]$ مانند $(a_0, a_1, \cdots)$ را می‌توان چنین نمایش داد

$$(a_0, a_1, \cdots) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

ملاحظه ۵۰.۱.۱. *اگر R حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد، آنگاه $R[[X]]$ نیز جابجایی و یکدار است.*

قضیه ۵۱.۱.۱. *فرض کنیم F یک میدان و I یک ایده‌آل ناصفر از $F[[X]]$ باشد. در این‌صورت عدد صحیح نامنفی n وجود دارد به طوری که $I = \langle X^n \rangle$.*

برهان. رجوع شود به [۲، قضیه ۱۱.۴.۳]. □

تعریف ۵۲.۱.۱. گوییم حلقه‌ی R در شرط زنجیر افزایشی روی ایده‌آل‌ها صدق می‌کند، هر گاه برای هر زنجیر $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ از ایده‌آل‌های حلقه‌ی R، $m \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $k \geq m$، $I_k = I_m$. حلقه‌ی R را نوتری نامیم، هر گاه در شرط زنجیر افزایشی روی ایده‌آل‌ها صدق کند.

نتیجه ۵۳.۱.۱. *هر PID یک دامنه‌ی صحیح نوتری است.*

برهان. رجوع شود به [۲، نتیجه ۲.۸.۳]. □

قضیه ۵۴.۱.۱. *(پایه‌ای هیلبرت). فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد. اگر R نوتری باشد، آنگاه $R[X]$ نوتری است.*

برهان. رجوع شود به [۲، قضیه ۳.۸.۳]. □

لم ۵۵.۱.۱. *(ناکایاما). فرض کنیم M مدولی متناهی مولد روی حلقه‌ی جابجایی R و I ایده‌آل R باشد و $I \subseteq J(R)$. فرض کنیم $M = IM$. در این‌صورت $M = 0$.*

برهان. رجوع شود به [۱، لم ناکایاما ۲۴.۸]. □

تعریف ۵۶.۱.۱. گوییم حلقه‌ی R در شرط زنجیر کاهشی روی ایده‌آل‌ها صدق می‌کند، هر گاه برای هر زنجیر $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_i \supseteq I_{i+1} \supseteq \cdots$ از ایده‌آل‌های حلقه‌ی R، $k \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k = I_{k+i}$. حلقه‌ی R را آرتینی نامیم، هر گاه در شرط زنجیر کاهشی روی ایده‌آل‌ها صدق کند.

نتیجه ۵۷.۱.۱. *(نتیجه قضیه باقیمانده چینی). فرض کنیم R یک حلقه‌ی یکدار و $I_1, \cdots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند به طوری که برای هر $i \neq j$، $I_i + I_j = R$. در این‌صورت*

$$\frac{R}{I_1 \cap \cdots \cap I_n} \cong \prod_{i=1}^{n} \frac{R}{I_i}$$

برهان. رجوع شود به [۲، نتیجه ۵.۳.۳]. □

تعریف ۵۸.۱.۱. هر حلقه‌ی جابجایی R را که دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال چون M دارد، شبه موضعی گوییم.

فصل ۲

بررسی ایده‌آل‌های ضعیف ۲-جذبی در حلقه‌های جابجایی

۱.۲ ویژگی‌های اساسی از ایده‌آل‌های ضعیف ۲ـجذبی

در این بخش، برخی از ویژگی‌های ایده‌آل‌های ضعیف ۲ـجذبی را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. ایده‌آل سره I از حلقه‌ی R را اول ضعیف گویند، هر گاه برای هر $a, b \in R$ اگر $0 \neq ab \in I$، آنگاه $a \in I$ یا $b \in I$.

تعریف ۲.۱.۲. ایده‌آل سره I از حلقه‌ی R را ۲ـجذبی می‌نامیم، هر گاه برای هر $a, b, c \in R$ اگر $abc \in I$، آنگاه $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$.

تعریف ۳.۱.۲. ایده‌آل سره I از حلقه‌ی R را ضعیف ۲ـجذبی گوییم، هر گاه برای هر $a, b, c \in R$ اگر $0 \neq abc \in I$، آنگاه $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$.

به وضوح هر ایده‌آل ۲ـجذبی از حلقه‌ی R، یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی است.
اگر R یک حلقه‌ی جابجایی باشد، آنگاه بنا به تعریف، $I = \{0\}$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است. اگر $I = \{0\}$، آنگاه I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از $\mathbb{Z}_4$ است هم چنین $I = \{0\}$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از $\mathbb{Z}_8$ است، اما ایده‌آل ۲ـجذبی از $\mathbb{Z}_8$ نیست.
حال مثالی از یک ایده‌آل را بیان می‌کنیم که ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی ناصفر است اما ۲ـجذبی نیست.
برای این منظور ابتدا حلقه‌ی $R(+)B$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه و B یک Rـمدول باشد در این‌صورت

$$R(+)B = \{(r, b) \mid r \in R,\ b \in B\}.$$

همراه با دو عمل زیر

$$\forall (r, b),\ (s, c) \in R(+)B$$

$$(r, b) + (s, c) = (r + s, b + c)$$

$$(r, b)(s, c) = (rs, rc + sb)$$

یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است که آن را توسیع حلقه‌ی R توسط B گوییم.

مثال ۵.۱.۲. فرض کنیم $M = \{0, 4\}$. در این‌صورت M یک ایده‌آل از $\mathbb{Z}_8$ است. هم‌چنین فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_8(+)M$ و $I = \{(0, 0), (0, 4)\}$. در این‌صورت I یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است زیرا

$$abc \in I \Longleftrightarrow abc = (0, 0) \text{ s.t } a, b, c \in R - I$$

چون $(2, 0)(2, 0)(2, 0) \in I$ و $(4, 0) \notin I$، لذا I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R نیست.
حال یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی نامتناهی را مثال می‌زنیم به طوری که خاصیت ۲ـجذبی ندارد. فرض کنیم $M = \{0, 4\}$ و $K = M[X]$. در این‌صورت K یک ایده‌آل نامتناهی از $\mathbb{Z}_8[X]$ است.

فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_8(+)K$ و $I = \{0\}(+)K$. در این‌صورت I یک ایده‌آل نامتناهی از R است. بار دیگر می‌توان گفت چون

$$abc \in I \Longleftrightarrow abc = (0, 0) \text{ s.t } a, b, c \in R - I$$

لذا I یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R است.

لم ۶.۱.۲. *فرض کنیم P_1 و P_2 دو ایده‌آل اول ضعیف متمایز از حلقه‌ی جابجایی R باشند. در این‌صورت $P_1 \cap P_2$ یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R است.*

تعریف ۷.۱.۲. فرض کنیم I یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از حلقه‌ی R باشد و $a, b, c \in R$. (a, b, c) را صفر سه‌گانه‌ی I گوییم، هر گاه $abc = 0$، $ab \notin I$، $ac \notin I$ و $bc \notin I$.

قضیه ۸.۱.۲. *فرض کنیم I یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از حلقه‌ی R و (a, b, c) صفر سه‌گانه از I باشد که $a, b, c \in R$. در این‌صورت*

الف. $abI = bcI = acI = \{0\}$.

ب. $aI^2 = bI^2 = cI^2 = \{0\}$.

برهان. الف. فرض کنیم برای بعضی $i \in I$، $abi \neq 0$. در این‌صورت
$ab(c + i) = abc + abi = abi \neq 0$. چون $ab \notin I$، لذا بنابر خاصیت ضعیف ۲-جذبی I خواهیم داشت $a(c + i) \in I$ یا $b(c + i) \in I$. بنابراین $ac \in I$ یا $bc \in I$ که یک تناقض است و در نتیجه $abI = \{0\}$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $bcI = acI = \{0\}$.

ب. فرض کنیم برای بعضی $i_1, i_2 \in I$، $ai_1i_2 \neq 0$. چون بنابر (الف)، $abI = acI = bcI = \{0\}$، پس

$$a(b + i_1)(c + i_2) = abc + aci_1 + abi_2 + ai_1i_2 = ai_1i_2 \neq 0$$

در نتیجه

$$a(c + i_2) \in I \;\; \text{یا} \;\; a(b + i_1) \in I \;\; \text{یا} \;\; (b + i_1)(c + i_2) \in I$$

بنابراین $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$ که با فرض در تناقض است و در نتیجه $aI^2 = \{0\}$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $bI^2 = cI^2 = \{0\}$. □

قضیه ۹.۱.۲. *فرض کنیم I یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از حلقه‌ی R باشد به طوری که ۲-جذبی نباشد. در این‌صورت $I^3 = \{0\}$.*

برهان. چون I یک ایده‌آل ۲-جذبی از R نیست، پس I برای بعضی $a, b, c \in R$، شامل صفر سه‌گانه (a, b, c) است. فرض کنیم برای بعضی $i_1, i_2, i_3 \in I$، $i_1i_2i_3 \neq 0$. در این‌صورت بنابر قضیه ۸.۱.۲، داریم

$$(a + i_1)(b + i_2)(c + i_3) = abc + bci_1 + aci_2 + abi_3 + ci_1i_2 + bi_1i_3 + ai_2i_3 + i_1i_2i_3 \neq 0$$

بنابراین طبق خاصیت ضعیف ۲-جذبی I،

$$(a + i_1)(c + i_3) \in I \;\; \text{یا} \;\; (b + i_2)(c + i_3) \in I \;\; \text{یا} \;\; (a + i_1)(b + i_2) \in I$$

در نتیجه $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$ که با تعریف صفر سه‌گانه در تناقض است و بنابراین $I^{۳} = \{۰\}$. □

نتیجه ۱۰.۱.۲. *فرض کنیم I یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از حلقه‌ی R باشد. اگر I، ۲-جذبی نباشد، آنگاه $I \subseteq Nil(R)$.*

توجه داشته باشیم که هر ایده‌آل سره I از حلقه‌ی R به طوری که $I^{۳} = ۰$، لزوماً یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R نیست که برای درک بیشتر، مثال زیر را داریم.

مثال ۱۱.۱.۲. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_{۱۶}$. در این‌صورت $I = \{۰,۸\}$ ایده‌آلی از $\mathbb{Z}_{۱۶}$ است به طوری که $I^{۳} = ۰$، اما $۲ \cdot ۲ \cdot ۲ = ۸ \in I$ و $۴ \notin I$، لذا I ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R نیست.

قضیه ۱۲.۱.۲. *فرض کنیم I یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R باشد که خاصیت ۲-جذبی ندارد. در این‌صورت*

الف. اگر $w \in NiL(R)$، آنگاه $w^{۲} \in I$ یا $w^{۲}I = wI^{۲} = \{۰\}$.

ب. $Nil(R)^{۲}I^{۲} = \{۰\}$.

برهان. الف. فرض کنیم $w \in NiL(R)$. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $w^{۲}I \neq \{۰\}$، آنگاه $w^{۲} \in I$. بنابراین فرض می‌کنیم $w^{۲}I \neq \{۰\}$ و n کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد به طوری که $w^n = ۰$. در این‌صورت $n \geq ۳$ و به ازای بعضی $i \in I$، داریم $w^{۲}(i + w^{n-۲}) = w^{۲}i + w^n \neq ۰$. چون $ww(i + w^{n-۲}) = w^{۲}(i + w^{n-۲}) \neq ۰$، پس طبق خاصیت ضعیف ۲-جذبی I، $w^{۲} \in I$ یا $(wi + w^{n-۱}) \in I$. حال اگر $w^{۲} \in I$، آنگاه نتیجه حاصل است. بنابراین فرض می‌کنیم $(wi + w^{n-۱}) \in I$. در این‌صورت $w^{n-۱} \in I$ و $w^{n-۱} \neq ۰$. در نتیجه $w^{۲} \in I$. بنابراین برای هر $w \in NiL(R)$ داریم $w^{۲}I = \{۰\}$ یا $w^{۲} \in I$. حال فرض کنیم برای بعضی $v \in NiL(R)$، $v^{۲} \notin I$. در این‌صورت $v^{۲}I = \{۰\}$. نشان می‌دهیم که $vI^{۲} = \{۰\}$.

برای این منظور فرض می‌کنیم به ازای بعضی $i_۱, i_۲ \in I$، $vi_۱i_۲ \neq ۰$. هم‌چنین فرض کنیم m کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد به طوری که $v^m = ۰$. چون $v^{۲} \notin I$، $m \geq ۳$ و $v^{۲}I = ۰$. بنابراین $v(v + i_۱)(v^{m-۲} + i_۲) = vi_۱i_۲ \neq ۰$. چون $v(v + i_۱)(v^{m-۲} + i_۲) \in I \neq ۰$، پس طبق خاصیت ضعیف ۲-جذبی I می‌توان نتیجه گرفت $v^{m-۱} \neq ۰$ یا $v^{۲} \in I$. بنابراین در هر دو حالت داریم $v^{۲} \in I$ که با فرض در تناقض است. لذا $vI^{۲} = \{۰\}$.

ب. فرض کنیم $a, b \in NiL(R)$. اگر $a^{۲} \notin I$ یا $b^{۲} \notin I$، آنگاه بنابر (الف)، $abI^{۲} = \{۰\}$. بنابراین فرض می‌کنیم $a^{۲} \in I$ و $b^{۲} \in I$. در این‌صورت $ab(a+b) = a^{۲}b + ab^{۲} \in I$. اگر $(a, b, a+b)$ صفر سه‌گانه I باشد، آنگاه بنابر قضیه‌ی ۸.۱.۲ (الف)، $abI = \{۰\}$ و بنابراین $abI^{۲} = \{۰\}$.

حال اگر $(a, b, a+b)$ صفر سه‌گانه I نباشد، آنگاه $ab \in I$ و درنتیجه بنابر قضیه ۹.۱.۲، $abI^{۲} = \{۰\}$.

□

نتیجه ۱۳.۱.۲. *فرض کنیم A, B, C ایده‌آل‌های ضعیف ۲-جذبی از حلقه‌ی R باشند به طوری که هیچ یک از آن‌ها ۲-جذبی نباشد. در این‌صورت*

$$A^{۲}BC = AB^{۲}C = ABC^{۲} = A^{۲}B^{۲} = A^{۲}C^{۲} = B^{۲}C^{۲} = \{۰\}$$

برهان. فرض کنیم A, B, C ایده‌آل‌های ضعیف ۲ـجذبی از حلقه‌ی R باشند به طوری که هیچ یک از آن‌ها ۲ـجذبی نباشد. در این صورت بنابر نتیجه ۱۰.۱.۲، $A, B, C \subseteq Nil(R)$. قرار می‌دهیم $I = A$. در این صورت $I^۲ = A^۲$ و $BC \subseteq Nil(R^۲)$. بنابر قضیه ۱۲.۱.۲(ب)، $A^۲BC \subseteq I^۲Nil(R^۲) = \{۰\}$ بنابراین $A^۲BC = \{۰\}$.

به طور مشابه، $AB^۲C = ABC^۲ = A^۲B^۲ = A^۲C^۲ = B^۲C^۲ = \{۰\}$. □

قضیه ۱۴.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه و B یک Rـمدول باشد. در این‌صورت ایده‌آل J از $R(+)B$ را اول است اگر و تنها اگر $J = P(+)B$ که P یک ایده‌آل اول از R است.*

برهان. فرض کنیم $J = P(+)C$ یک ایده‌آل اول از $R(+)B$ باشد، همچنین فرض کنیم $xy \in P$ به طوری که $x, y \in R$. به ازای هر $c \in C$، $(x, c)(y, c) = (xy, xc + yc) \in J$ و چون J یک ایده‌آل اول است، لذا $(y, c) \in P(+)C = J$ یا $(x, c) \in P(+)C = J$. بنابراین $y \in P$ یا $x \in P$. در نتیجه P یک ایده‌آل اول از R می‌باشد. حال فرض می‌کنیم $C \subset B$. عناصر $b \in B - C$ و $p \in P$ را انتخاب می‌کنیم. چون

$$PB \subseteq C, \quad (p, b)^۲ = (p^۲, pb + pb) \in J = P(+)C$$

اما $(p, b) \notin J$، لذا با فرض اول بودن J در تناقض است. بنابراین $B = C$.

بالعکس، فرض کنیم $J = P(+)B$ که P یک ایده‌آل اول از R است. همچنین فرض کنیم $(a_۱, b_۱), (a_۲, b_۲)$ دو عنصر از $R(+)B$ باشند به طوری که $(a_۱, b_۱)(a_۲, b_۲) \in J = P(+)B$. در این‌صورت $a_۱a_۲ \in P$. چون P ایده‌آل اول است، لذا $a_۱ \in P$ یا $a_۲ \in P$. در نتیجه $(a_۱, b_۱) \in J$ یا $(a_۲, b_۲) \in J$. □

اگر I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه I حداکثر دو ایده‌آل اول مینیمال دارد که در ۷.۱.۳، خواهیم دید. در قضیه زیر نشان می‌دهیم برای هر $n \geq ۲$، یک حلقه‌ی R و یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی ناصفر مانند I از R وجود دارد به طوری که I دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال دارد.

قضیه ۱۵.۱.۲. *فرض کنیم $n \geq ۲$. در این‌صورت حلقه‌ای مانند R و یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی ناصفر مانند I از R موجود است به طوری که I دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال دارد.*

برهان. فرض کنیم $n \geq ۲$ و $D = \mathbb{Z}_۸ \times \cdots \times \mathbb{Z}_۸$ (n−بار). همچنین فرض کنیم $M = \{۰, ۴\}$، که ایده‌آلی از $\mathbb{Z}_۸$ است. برای هر $x = (a_۱, \cdots, a_n) \in D$، تعریف می‌کنیم $xb = a_۱b$. که $b \in M$ در این‌صورت M یک Dـمدول است. حال $R = D(+)M$ و $I = \{(۰, \cdots, ۰)\}(+)M$ را در نظر می‌گیریم. توجه داریم که اگر $a, b, c \in R - I$ و $abc \in I$، آنگاه $abc = ((۰, \cdots, ۰), ۰)$ (مشابه مثال ۵.۱.۲). بنابراین I یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی ناصفر از حلقه‌ی R است. چون طبق قضیه‌ی ۱۴.۱.۲، هر ایده‌آل اول از R به فرم $P(+)M$ است که P یک ایده‌آل اول از D است، پس I دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال دارد.

□

قضیه ۲.۱.۱۶. *فرض‌کنیم $R = R_1 \times R_2$ یک حلقه‌ی جابجایی و I یک ایده‌آل سره از R_1 باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *$I \times R_2$ یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R است.*

۲. *$I \times R_2$ یک ایده‌آل ۲-جذبی از R است.*

۳. *I یک ایده‌آل ۲-جذبی از R_1 است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) چون $I \times R_2 \nsubseteq NiL(R)$، لذا بنابر نتیجه ۲.۱.۱۰، $I \times R_2$ یک ایده‌آل ۲-جذبی R است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳) اثبات بدیهی است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱) اگر I یک ایده‌آل ۲-جذبی از R_1 باشد، آنگاه به وضوح $I \times R_2$ یک ایده‌آل ۲-جذبی R است. بنابراین $I \times R_2$ یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R است. □

قضیه ۲.۱.۱۷. *فرض‌کنیم $R = R_1 \times R_2$ که R_1 و R_2 حلقه‌های جابجایی و یکدارند. فرض‌کنیم I یک ایده‌آل سره ناصفر از R_1 و J یک ایده‌آل ناصفر از R_2 باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *$I \times J$ یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی R است.*

۲. *$J = R_2$ و I یک ایده‌آل ۲-جذبی از R_1 است یا J یک ایده‌آل اول از R_2 و I یک ایده‌آل اول از R_1 است.*

۳. *$I \times J$ ایده‌آلی ۲-جذبی از R است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲). فرض کنیم $I \times J$ یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R باشد. اگر $J = R_2$، آنگاه بنابر قضیه ۲.۱.۱۶، I یک ایده‌آل ۲-جذبی از R_1 است. فرض کنیم $J \neq R_2$. نشان می‌دهیم که J یک ایده‌آل اول از R_2 و I یک ایده‌آل اول از R_1 است. فرض کنیم $a, b \in R_2$ به طوری که $ab \in J$ و $0 \neq i \in I$. در این‌صورت $(i, 1)(1, a)(1, b) = (i, ab) \in I \times J - \{(0, 0)\}$ چون $(1, a)(1, b) = (1, ab) \notin I \times J$، پس

$$(i, 1)(1, a) = (i, a) \in I \times J \quad \text{یا} \quad (i, 1)(1, b) = (i, b) \in I \times J$$

بنابراین $a \in J$ یا $b \in J$ و در نتیجه J یک ایده‌آل اول از R_2 می‌باشد. به طور مشابه فرض می‌کنیم $c, d \in R_1$ به طوری که $cd \in I$ و $0 \neq j \in J$. در این‌صورت

$$(c, 1)(d, 1)(1, j) = (cd, j) \in I \times J - \{(0, 0)\}$$

چون $(c, 1)(d, 1) = (cd, 1) \notin I \times J$، پس

$$(c, 1)(1, j) = (c, j) \in I \times J \quad \text{یا} \quad (d, 1)(1, j) = (d, j) \in I \times J$$

بنابراین $c \in I$ یا $d \in I$ و در نتیجه I یک ایده‌آل اول از R_1 است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳). اگر $J = R_2$ و I یک ایده‌آل ۲-جذبی از R_1 باشد، آنگاه بنابرقضیه ۲.۱.۱۶، $I \times R_2$ یک ایده‌آل ۲-جذبی R است . حال فرض کنیم I ایده‌آلی اول از R_1 و J یک ایده‌آل اول R_2 باشد.

فرض کنیم برای بعضی $a_۱, a_۲, a_۳ \in R_۱$ و $b_۱, b_۲, b_۳, \in R_۲$، $(a_۱, b_۱)(a_۲, b_۲)(a_۳, b_۳) \in I \times J$. در این‌صورت حداقل یکی از a'_iها عضو I است که آن را $a_۱$ و حداقل یکی از b'_iها عضو J است که آن را $b_۲$ می‌نامیم. بنابراین $(a_۱, b_۱)(a_۲, b_۲) \in I \times J$ و در نتیجه $I \times J$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است.
(۳) $\Longleftarrow$ (۱). اثبات بدیهی است. □

مثال زیر نشان می‌دهد که فرض $J \neq \{۰\}$ در قضیه ۱۷.۱.۲، یک شرط لازم است.

مثال ۱۸.۱.۲. فرض کنیم $R_۱ = \mathbb{Z}_۸(+)M$ و $I = \{۰\}(+)M$، حلقه و ایده‌آل مذکور در مثال ۵.۱.۲، باشند. همچنین فرض کنیم $R_۲$ میدان باشد. در این‌صورت $I \times \{۰\}$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از $R_۱ \times R_۲$ است به طوری که خاصیت ۲ـجذبی ندارد. به وضوح I یک ایده‌آل اول از $R_۱$ نیست.

قضیه ۱۹.۱.۲. *فرض کنیم $R = R_۱ \times R_۲$ یک حلقه‌ی جابجایی، I یک ایده‌آل سره ناصفر از $R_۱$ و J یک ایده‌ال از $R_۲$ باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *$I \times J$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از حلقه‌ی R است به طوری که خاصیت ۲ـجذبی ندارد.*

۲. *ایده‌آل I از حلقه‌ی $R_۱$ خاصیت اول ضعیف دارد به طوری که اول نیست و $J = \{۰\}$ یک ایده‌آل اول از $R_۲$ است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) فرض کنیم $I \times J$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R باشد به طوری که ۲ـجذبی نیست، همچنین فرض کنیم $J \neq \{۰\}$. در این‌صورت بنابر قضیه ۱۷.۱.۲، $I \times J$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است که با فرض در تناقض است. بنابراین $J = \{۰\}$. حال نشان می‌دهیم $J = \{۰\}$ یک ایده‌آل اول از $R_۲$ است(بنابراین $R_۲$ یک دامنه‌ی صحیح است). برای این منظور فرض می‌کنیم به ازای بعضی $a, b \in R_۲$، $ab \in J = \{۰\}$. همچنین فرض کنیم $۰ \neq i \in I$. چون

$$(i, ۱)(۱, a)(۱, b) = (i, ab) \in I \times J - \{(۰, ۰)\}\ ,\ (۱, a)(۱, b) = (۱, ab) \notin I \times J$$

پس

$$(i, ۱)(۱, a) = (i, a) \in I \times J \quad \text{یا} \quad (i, ۱)(۱, b) = (i, b) \in I \times J$$

بنابراین $a \in J$ یا $b \in J$ و در نتیجه $J = \{۰\}$ یک ایده‌آل اول از $R_۲$ است. حال نشان می‌دهیم I یک ایده‌آل اول ضعیف از $R_۱$ است. فرض کنیم برای بعضی $a, b \in R_۱$، $ab \in I - \{۰\}$. چون $(a, ۱)(b, ۱) = (ab, ۱) \notin I \times \{۰\}\ ,\ (a, ۱)(b, ۱)(۱, ۰) = (ab, ۰) \in I \times \{۰\} - \{(۰, ۰)\}$. پس

$$(a, ۱)(۱, ۰) = (a, ۰) \in I \times \{۰\} \quad \text{یا} \quad (b, ۱)(۱, ۰) = (b, ۰) \in I \times \{۰\}$$

بنابراین $a \in I$ یا $b \in I$ و در نتیجه I یک ایده‌آل اول ضعیف از $R_۱$ است. اگر I ایده‌آلی اول از $R_۱$ باشد، آنگاه به آسانی ثابت می‌شود که $I \times \{۰\}$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است که با فرض در تناقض می‌باشد.
(۲) $\Longleftarrow$ (۱). فرض کنیم I یک ایده‌آل اول ضعیف از $R_۱$ باشد به طوری که اول نیست و $J = \{۰\}$ یک ایده‌آل اول از $R_۲$ باشد. نشان می‌دهیم که $I \times \{۰\}$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است. فرض

کنیم $(a,b)(c,d)(e,f) = (ace, bdf) \in I \times \{0\} - \{(0,0)\}$. چون I یک ایده‌آل اول ضعیف از R_1 است، پس می‌توان فرض کرد $a \in I$. چون R_2 یک دامنه صحیح است، لذا می‌توان فرض کرد $d = 0$. بنابراین

$$(a,b)(c,d) = (a,b)(c,0) = (ac,0) \in I \times \{0\}$$

در نتیجه $I \times \{0\}$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است. اکنون نشان می‌دهیم که $I \times \{0\}$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R نیست. چون I یک ایده‌آل اول ضعیف از R_1 است به طوری که اول نیست، پس عناصر $a, b \in R_1$ وجود دارند به طوری که $0 = ab \in I$، اما $a \notin I$ و $b \notin I$. چون $(0,0) = (a,1)(b,1)(1,0) \in I \times \{0\}$ و هیچ یک از $(a,1)(b,1) = (ab,1)$ و $(b,1)(1,0) = (b,0)$ و $(a,1)(1,0) = (a,0)$ متعلق به $I \times \{0\}$ نیست، لذا $I \times \{0\}$ ایده‌آل ۲ـجذبی از R نیست.

□

فرض کنیم R_1،R_2 و R_3 حلقه‌های جابجایی و یکدار باشند و $R = R_1 \times R_2 \times R_3$. یک ایده‌آل I از R به فرم $I_1 \times I_2 \times I_3$ است به طوری که I_1، I_2 و I_3 به ترتیب ایده‌آل‌هایی از R_1، R_2 و R_3 می‌باشند. در دو قضیه‌ی بعدی نشان می‌دهیم که ایده‌آل‌های ضعیف ۲ـجذبی برای حلقه‌هایی که چنین ساختاری دارند قابل توجه هستند.

قضیه ۲۰.۱.۲. *فرض کنیم $R = R_1 \times R_2 \times R_3$ که R_1، R_2 و R_3 حلقه‌های جابجایی و یکدارند. اگر I یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R باشد، آنگاه I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است یا $I = \{(0,0,0)\}$.*

برهان. چون $\{0\}$ در هر حلقه‌ای یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی است، پس می‌توان فرض کرد که $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \neq \{(0,0,0)\}$. چون $I \neq \{(0,0,0)\}$، پس عنصر ناصفری مانند (a,b,c) در I موجود است. بنابراین $(a,1,1)(1,b,1)(1,1,c) = (a,b,c) \in I$. در نتیجه

$$(a,b,1) \in I \quad \text{یا} \quad (a,1,c) \in I \quad \text{یا} \quad (1,b,c) \in I$$

اگر $(a,b,1) \in I$، آنگاه $I_3 = R_3$. به طور مشابه اگر $(a,1,c) \in I$ یا $(1,b,c) \in I$، آنگاه به ترتیب $I_2 = R_2$ یا $I_1 = R_1$. بنابراین

$$I = R_1 \times I_2 \times I_3 \quad \text{یا} \quad I = I_1 \times R_2 \times I_3 \quad \text{یا} \quad I = I_1 \times I_2 \times R_3$$

در نتیجه $I \nsubseteq NiL(R)$ و چون I یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است، لذا بنابر نتیجه ۱۰.۱.۲، I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است. □

قضیه ۲۱.۱.۲. *فرض کنیم $R = R_1 \times R_2 \times R_3$ که R_1،R_2 و R_3 حلقه‌های جابجایی و یکدارند. فرض کنیم I_1 یک ایده‌آل سره از R_1، I_2 ایده‌آلی از R_2 و I_3 ایده‌آلی از R_3 باشد به طوری که $L = I_1 \times I_2 \times I_3 \neq \{(0,0,0)\}$. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *$L = I_1 \times I_2 \times I_3$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است.*

۲. *$L = I_1 \times I_2 \times I_3$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است.*

۳. *$L = I_1 \times R_2 \times R_3$ و I_1 یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R_1 است یا $L = I_1 \times I_2 \times R_3$ به طوری که I_1 یک ایده‌آل اول از R_1 و I_2 ایده‌آلی اول از R_2 می‌باشد یا $L = I_1 \times R_2 \times I_3$ به طوری که I_1 ایده‌آلی اول از R_1 و I_3 ایده‌آلی اول از R_3 می‌باشد.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲). چون L یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی ناصفر است، لذا بنابر قضیه ۲۰.۱.۲، L یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳). چون L یک ایده‌آل ۲ـجذبی R است، پس I_1 یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R_1 است زیرا اگر $abc \in I_1$ که $a, b, c \in R_1$، آنگاه $(a, 0, 0)(b, 0, 0)(c, 0, 0) = (abc, 0, 0) \in I_1 \times I_2 \times I_3 = L$ چون L ایده‌آلی ۲ـجذبی است، لذا

$(a, 0, 0)(b, 0, 0) = (ab, 0, 0) \in I_1 \times I_2 \times I_3 = L$ یا

$(a, 0, 0)(c, 0, 0) = (ac, 0, 0) \in I_1 \times I_2 \times I_3 = L$ یا

$(b, 0, 0)(c, 0, 0) = (bc, 0, 0) \in I_1 \times I_2 \times I_3 = L$

در نتیجه $ab \in I_1$ یا $ac \in I_1$ یا $bc \in I_1$. بنابراین I_1 یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R_1 است. چون I_1 یک ایده‌آل سره از R_1 می‌باشد، پس بنا به برهان قضیه ۲۰.۱.۲، $I_2 = R_2$ یا $I_3 = R_3$. ابتدا فرض می‌کنیم $I_2 \neq R_2$ و $I_3 = R_3$. در این‌صورت نشان می‌دهیم I_1 یک ایده‌آل اول از R_1 و I_2 یک ایده‌آل اول از R_2 می‌باشد. برای این منظور فرض می‌کنیم $a, b \in R_1$ به طوری که $ab \in I_1$ و هم چنین فرض می‌کنیم $c, d \in R_2$ به طوری که $cd \in I_2$. در این‌صورت

$$(a, 1, 1)(1, cd, 1)(b, 1, 1) = (ab, cd, 1) \in L - \{(0, 0, 0)\}$$

چون $(a, 1, 1)(b, 1, 1) \notin L - \{(0, 0, 0)\}$،

پس $(a, 1, 1)(1, cd, 1) = (a, cd, 1) \in L - \{(0, 0, 0)\}$

یا $(1, cd, 1)(b, 1, 1) = (b, cd, 1) \in L - \{(0, 0, 0)\}$

از این رو $a \in I_1$ یا $b \in I_1$. در نتیجه I_1 ایده‌آلی اول از R_1 می‌باشد. به طور مشابه، چون

$$(ab, 1, 1)(1, c, 1)(1, d, 1) = (ab, cd, 1) \in L - \{(0, 0, 0,)\}$$

و $(1, c, 1)(1, d, 1) = (1, cd, 1) \notin L - \{(0, 0, 0)\}$، پس

$(ab, 1, 1)(1, c, 1) = (ab, c, 1) \in L - \{(0, 0, 0)\}$ یا $(ab, 1, 1)(1, d, 1) = (ab, d, 1) \in L - \{(0, 0, 0)\}$

بنابراین $c \in I_2$ یا $d \in I_2$. از این رو I_2 یک ایده‌آل اول از R_2 می‌باشد. در آخر فرض می‌کنیم $I_2 = R_2$ و $I_3 \neq R_3$. با استفاده از برهانی مشابه که روی ایده‌آل $I_1 \times I_2 \times R_3$ بکار برده شد، نتیجه می‌گیریم که I_1 ایده‌آلی اول از R_1 و I_3 ایده‌آلی اول از R_3 می‌باشد.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱). اگر L یکی از سه فرم بیان شده درگزاره (۳) باشد، آنگاه به وضوح L یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است و بنابراین L یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R می‌باشد. □

قضیه ۲۲.۱.۲. *فرض کنیم A یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از حلقه‌ی جابجایی R باشد. در این‌صورت*

الف. اگر $I \subseteq A$ یک ایده‌آل از R باشد، آنگاه A/I یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R/I است.

ب. اگر $R_\circ$ زیرحلقه‌ای از R باشد، آنگاه $A \cap R_\circ$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از $R_\circ$ است.
ج. اگر S یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از R باشد به طوری که $A \cap S = \varnothing$، آنگاه A_s یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R_s است.

برهان. الف. فرض کنیم $\bar{R} = R/I$ و $\bar{A} = A/I$. عناصر $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{R}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\circ \neq \bar{a}\bar{b}\bar{c} \in \bar{A}$. چون $\circ \neq \bar{a}\bar{b}\bar{c}$، لذا داریم $abc \in R - I$. بنابراین $\circ \neq abc \in A$. چون A خاصیت ضعیف ۲ـجذبی دارد، پس داریم $ab \in A$ یا $ac \in A$ یا $bc \in A$. در نتیجه

$$\bar{a}\bar{b} \in \bar{A} \quad \text{یا} \quad \bar{a}\bar{c} \in \bar{A} \quad \text{یا} \quad \bar{b}\bar{c} \in \bar{A}$$

ب. اثبات بدیهی است.
ج فرض کنیم $\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{y}{s}\right)\left(\frac{z}{t}\right) \in A_s$ که $\circ \neq$ و $x, y, z \in R$ و $r, s, t \in S$، همچنین فرض کنیم $\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{y}{s}\right) \notin A_s$ و $\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{z}{t}\right) \notin A_s$. در این‌صورت نشان می‌دهیم $\left(\frac{y}{s}\right)\left(\frac{z}{t}\right) \in A_s$. چون برای بعضی $u \in S, a \in A$، $(xyz)/(rst) = \frac{a}{u}$، پس $v \in S$ وجود دارد به طوری که

$$vuxyz = vrsta \in A$$

در نتیجه $\circ \neq (vux)yz \in A$ اما $(vux)y \notin A$ و $(vux)z \notin A$. چون A یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است، پس $yz \in A$. در نتیجه $\left(\frac{y}{s}\right)\left(\frac{z}{t}\right) \in A_s$.

$\square$

۲.۲ معرفی حلقه‌هایی که هر ایده‌آل سره آن‌ها خاصیت ضعیف ۲ـجذبی دارد.

لم ۱.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد و $a, b, c \in J(R)$. در این‌صورت ایده‌آل $abcR$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است اگر و تنها اگر $abc = \circ$.*

برهان. فرض کنیم $a, b, c \in J(R)$. اگر $abc = \circ$، آنگاه $abcR$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است. حال فرض کنیم $abc \neq \circ$ و $abcR$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی R باشد. چون $abcR$ خاصیت ضعیف ۲ـجذبی دارد و $\circ \neq abc \in abcR$، پس $ab \in abcR$ یا $ac \in abcR$ یا $bc \in abcR$. بدون این که از کلیات مسئله کاسته شود، می‌توان فرض کرد که $ab \in abcR$. در این‌صورت به ازای بعضی $k \in R$، $ab = abck$. در نتیجه $ab(۱ - ck) = \circ$. چون $ck \in J(R)$، لذا بنابر لم ۳۲.۱.۱، $۱ - ck \in u(R)$ از این رو $ab = \circ$ و بنابراین $abc = \circ$ که با فرض در تناقض است. در نتیجه $abc = \circ$. $\square$

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنیم (R, M) یک حلقه‌ی شبه موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال M باشد. در این‌صورت هر ایده‌آل سره از R خاصیت ضعیف ۲ـجذبی دارد اگر و تنها اگر $M^۳ = \{\circ\}$.*

برهان. فرض کنیم هر ایده‌آل سره از R ضعیف ۲ـجذبی باشد و $a, b, c \in M$. چون $abcR$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است، لذا بنابر لم ۱.۲.۲، $abc = \circ$. درنتیجه $M^۳ = \{\circ\}$.

بالعکس، فرض کنیم $M^{3} = \{0\}$ و $I \neq \{0\}$ یک ایده‌آل سره از R باشد، هم‌چنین فرض می‌کنیم $0 \neq abc \in I$. چون $M^{3} = \{0\}$ و $abc \neq 0$، پس a یا b یا c عنصر یکه از R می‌باشد، بنابراین $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$ و در نتیجه I یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است.

□

نتیجه ۳.۲.۲. *فرض کنیم (R, M) یک حلقه‌ی شبه موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال M باشد به طوری که $M^{2} = \{0\}$. در این‌صورت هر ایده‌آل سره از R یک ایده‌آل ۲ـجذبی است.*

برهان. فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از R باشد، هم‌چنین فرض کنیم برای بعضی $a, b, c \in R$، $abc \in I$. چون $M^{3} = \{0\}$، لذا بنابر قضیه ۲.۲.۲، I یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است. بنابراین اگر $abc \in I - \{0\}$، آنگاه I یک ایده‌آل ۲- جذبی از R است. حال فرض می‌کنیم $abc = 0$. چون $M^{2} = \{0\}$ و $abc = 0$، پس اگر دقیقاً یک عنصر مانند a داخل M باشد، آنگاه دو عنصر دیگر خارج M خواهند بود و لذا معکوس‌پذیر می‌باشند ($b, c \notin M$ و $a \in M$). در نتیجه $a = 0$. از این رو $ac = 0 \in I$ یا $ab = 0 \in I$ و اگر دو عنصر مانند $c, b \in M$، آنگاه $bc \in M^{2} = \{0\}$ و در نتیجه $bc = 0 \in I$. بنابراین I ایده‌آلی ۲ـجذبی از R است.

□

قضیه ۴.۲.۲. *فرض کنیم (R_1, M_1) و (R_2, M_2) حلقه‌های جابجایی شبه موضعی با تنها ایده‌آل‌های ماکسیمال به ترتیب M_1, M_2 باشند و $R = R_1 \times R_2$. در این‌صورت هر ایده‌آل سره از R یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی است اگر و تنها اگر $M_1^{2} = M_2^{2} = \{0\}$ و R_1 یا R_2 میدان باشد.*

برهان. فرض کنیم هر ایده‌آل سره از R خاصیت ضعیف ۲ـجذبی داشته باشد. هم‌چنین فرض کنیم $a, b \in M_1$ که $ab \neq 0$. در این‌صورت $I = abR_1 \times \{0\}$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است. چون $(a, 1)(b, 1)(1, 0) = (ab, 0) \in I - \{(0, 0)\}$ و $(a, 1)(b, 1) \notin I$، پس

$$(b, 1)(1, 0) = (b, 0) \in I \text{ یا } (a, 1)(1, 0) = (a, 0) \in I$$

ابتدا فرض می‌کنیم $(a, 0) \in I$. در این‌صورت برای بعضی $k \in R_1$، $a = abk$. در نتیجه $a(1 - bk) = 0$ و چون $1 - bk$ عنصر یکه حلقه‌ی R_1 می‌باشد، لذا $a = 0$ که با فرض در تناقض است. حال فرض می‌کنیم $(b, 0) \in I$. در این‌صورت به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم $b = 0$ که باز هم یک تناقض است و لذا $M_1^{2} = \{0\}$. حال برای اثبات $M_2^{2} = \{0\}$، فرض می‌کنیم $a, b \in M_2$ به طوری که $ab \neq 0$. در این‌صورت $I = \{0\} \times abR_2$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R می‌باشد، چون

$$(1, a)(1, b)(0, 1) = (0, ab) \in I \quad , \quad (1, a)(1, b) = (1, ab) \notin I$$

لذا با به کارگیری روند مشابه اثبات روی M_1 نتیجه می‌گیریم $a = 0$ یا $b = 0$ که با فرض در تناقض است. بنابراین $M_2^{2} = \{0\}$. فرض می‌کنیم R_1 میدان نباشد. نشان می‌دهیم که R_2 میدان است. از این که R_1 میدان نیست نتیجه می‌گیریم $M_1 \neq \{0\}$ و $J = M_1 \times \{0\}$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است.

فرض کنیم R_2 میدان نباشد. چون $M_2^2 = \{0\}$ و R_2 میدان نیست، پس عنصر $c \in M_2$ موجود است به طوری که $c \neq 0$ و $c^2 = 0$. فرض می‌کنیم $m \in M_1$ به طوری که $m \neq 0$. در این‌صورت

$$(m,1)(1,c)(1,c) = (m,c^2) = (m,0) \in J = M_1 \times \{0\} - \{(0,0)\}$$

اما $(m,1)(1,c) = (m,c) \notin J$ و $(1,c)(1,c) = (1,c^2) \notin J$ که با خاصیت ضعیف ۲-جذبی J در تناقض است. بنابراین $M_2 = \{0\}$ و در نتیجه R_2 میدان است.

بالعکس، فرض کنیم $M_1^2 = \{0\}$ و R_2 میدان باشد. از این که $M_1^2 = \{0\}$، لذا بنابر نتیجه ۳.۲.۲، هر ایده‌آل سره از R_1 خاصیت ۲-جذبی دارد. چون $M_1^2 = \{0\}$ و R_2 میدان است، پس ایده‌آل $\{0\} \times R_2$ یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی R است. چون R_2 یک میدان است، لذا ایده‌آل $R_1 \times \{0\}$ یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R است. حال فرض می‌کنیم J یک ایده‌آل سره از R_1 باشد به طوری که $J \neq \{0\}$. از این که J یک ایده‌آل ۲-جذبی از R_1 است، لذا بنابر قضیه ۱۶.۱.۲، $J \times R_2$ یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R است.

در پایان نشان می‌دهیم که $I = J \times \{0\}$ یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R است. برای این منظور فرض می‌کنیم به ازای بعضی $a_1, a_2, a_3 \in R_1$ و $b_1, b_2, b_3 \in R_2$، $(a_1,b_1)(a_2,b_2)(a_3,b_3) \in I - \{(0,0)\}$ چون $M_1^2 = \{0\}$، پس فقط یکی از a_iها متعلق به M_1 می‌باشد که فرض می‌کنیم $a_1 \in M$ و $a_3, a_2 \in u(R_1)$. از این که $a_1a_2a_3 \in J$ و a_2, a_3 عناصر یکه‌ی R_1 می‌باشند، پس $a_1 \in J$. چون R_2 یک میدان است و $b_1b_2b_3 = 0$، لذا حداقل یکی از b_iها مساوی صفر است که فرض می‌کنیم $b_2 = 0$. بنابراین $(a_1,b_1)(a_2,0) = (a_1a_2,0) \in I$ و در نتیجه I یک ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی از R است. □

قضیه ۵.۲.۲. *فرض کنیم I یک ایده‌آل ۲-جذبی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت یکی از گزاره‌های زیر برقرار است*

الف. $Rad(I) = P$ یک ایده‌آل اول R است به طوری که $P^2 \subseteq I$.

ب. $Rad(I) = P_1 \cap P_2$، $P_1P_2 \subseteq I$ و $Rad(I)^2 \subseteq I$ که P_1 و P_2 تنها ایده‌آل‌های اول مینیمال ومتمایز I می‌باشند.

برهان. بنابر[۹، قضیه ۲.۵]، $Rad(I) = P$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R است یا $Rad(I) = P_1 \cap P_2$ که P_1 و P_2 تنها ایده‌آل‌های اول مینیمال و متمایز I می‌باشند. فرض کنیم $Rad(I) = P$ یک ایده‌آل اول R باشد و $x, y \in P$. لذا بنابر [۹، قضیه ۲.۱(e)]، داریم $x^2, y^2 \in I$. حال $x(x+y)y \in I$. چون I یک ایده‌آل ۲-جذبی است، پس داریم $x(x+y) = x^2 + xy \in I$ یا $(x+y)y = xy + y^2 \in I$ یا $xy \in I$. به وضوح از هر حالتی نتیجه می‌شود که $xy \in I$ و بنابراین $P^2 \subseteq I$.

حال فرض می‌کنیم $Rad(I) = P_1 \cap P_2$ به طوری که P_1 و P_2 تنها ایده‌آل‌های اول مینیمال و متمایز I می‌باشند. فرض کنیم $x, y \in Rad(I)$. در این صورت مشابه روند فوق $xy \in I$. بنابراین $Rad(I)^2 \subseteq I$. حال نشان می‌دهیم که $P_1P_2 \subseteq I$. به وضوح بنابر [۹، قضیه ۲.۱(e)]، ، برای هر $\omega \in Rad(I)$، $\omega^2 \in I$. فرض کنیم $x_1 \in P_1 - P_2$ و $x_2 \in P_2 - P_1$. در این صورت بنابر برهان [۹، قضیه ۲.۵] ، $x_1x_2 \in I$. فرض می‌کنیم $z_1 \in Rad(I)$ و $z_2 \in P_2 - P_1$. عنصر

$y_1 \in P_1 - P_2$ را انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت بنابر برهان [۹، قضیه ۲.۵]، $y_1 z_2 \in I$ و $z_1 + y_1 \in P_1 - P_2$. بنابراین $z_1 z_2 + y_1 z_2 = (z_1 + y_1) z_2 \in I$ و از این رو $z_1 z_2 \in I$. مشابه روند فوق می‌توان نشان داد که اگر $z_1 \in Rad(I)$ و $z_2 \in P_1 - P_2$، آنگاه $z_1 z_2 \in I$ و در نتیجه $P_1 P_2 \subseteq I$.
□

قضیه ۶.۲.۲. *هر ایده‌آل سره ناصفر از حلقه‌ی R یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است اگر و تنها اگر R صفر بعدی باشد(یعنی R حلقه‌ی πـمنظم است) و $R \cong F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ که F_1، F_2 و F_3 میدان هستند.*

برهان. فرض کنیم $R \cong D = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ که F_1، F_2 و F_3 میدان هستند. چون هر ایده‌آل سره ناصفر از D یک ایده‌آل ماکسیمال از D یا حاصل‌ضرب (اشتراک) دو ایده‌آل ماکسیمال متمایز از D است، پس هر ایده‌آل سره ناصفر از D یک ایده‌آل ۲ـجذبی است و در نتیجه هر ایده‌آل سره ناصفر از R یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است.

بالعکس، فرض کنیم هر ایده‌آل سره ناصفر از R یک ایده‌آل ۲ـجذبی باشد. نشان می‌دهیم که R یک حلقه‌ی صفر بعدی است. فرض کنیم $\omega \in R$. اگر ω یک عنصر یکه یا عنصر پوچ توان از R باشد، آنگاه ω یک عنصر πـمنظم از R است. بنابراین فرض می‌کنیم که ω یک عنصر نایکه و غیر پوچ توان از R باشد. در این‌صورت $\omega^4 R$ یک ایده‌آل سره ناصفر R است. در نتیجه یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R می‌باشد. چون $\omega^4 \in \omega^4 R$، پس $\omega^2 \in \omega^4 R$. بنابراین ω یک عنصر πـمنظم از R است. در نتیجه R یک حلقه‌ی πـمنظم است و بنابر قضیه ۴۱.۱.۱، R صفرـبعدی است.

در ادامه نشان می‌دهیم که R حداکثر سه ایده‌آل ماکسیمال متمایز دارد. فرض کنیم M_1، M_2 و M_3 ایده‌آل‌های ماکسیمال متمایز از R باشند. در این‌صورت

$$I = M_1 M_2 M_3 = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{0\}$$

اگر $I \neq \{0\}$، آنگاه $I = Rad(I)$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است که بنابر قضیه ۵.۲.۲، غیر ممکن است. از این که $M_1 M_2 M_3 = \{0\}$، لذا R حداکثر سه ایده‌آل ماکسیمال متمایز دارد.

فرض کنیم R یک حلقه‌ی شبه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $Nil(R) \neq \{0\}$ باشد. همچنین فرض کنیم ω یک عنصر ناصفر از $Nil(R)$ باشد. چون ωR یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است بنابر قضیه ۵.۲.۲، $Nil(R)^2 \subseteq \omega R$ و بنابراین R یک حلقه‌ی شبه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $M = Nil(R) \neq \{0\}$ است به طوری که به ازای هر عنصر ناصفر $x \in M$، $M^2 \subseteq xR$.

حال فرض کنیم R دقیقاً دو ایده‌آل ماکسیمال متمایز M_1 و M_2 داشته باشد. اگر $Nil(R) = M_1 M_2 = \{0\}$، آنگاه $R \cong \frac{R}{M_1} \oplus \frac{R}{M_2}$. بنابراین فرض می‌کنیم $Nil(R) = M_1 M_2 \neq \{0\}$، همچنین فرض کنیم $Nil(R)^2 \neq \{0\}$. در این‌صورت عناصر ناصفر $\omega_1, \omega_2 \in Nil(R)$ وجود دارند به طوری که $\omega_1 \omega_2 \neq 0$. چون $\omega_1 \omega_2 R$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است، لذا بنابر قضیه ۵.۲.۲، $\omega_1 \in M_1 M_2 = Nil(R) \subseteq \omega_1 \omega_2 R$. بنابراین $\omega_1 = \omega_1 \omega_2 k$ که $0 \neq k \in R$ و در نتیجه $\omega_1(1 - \omega_2 k) = 0$. چون $1 - \omega_2 k$ عنصر یکه از R است، پس $\omega_1 = 0$ که یک تناقض است. بنابراین $Nil(R)^2 = \{0\}$. فرض کنیم ω یک عنصر پوچ توان ناصفر R باشد. چون ωR یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است، لذا بنابر قضیه ۵.۲.۲، $Nil(R) = M_1 M_2 \subseteq \omega R$ و در نتیجه R دقیقاً دو ایده‌آل ماکسیمال متمایز دارد به طوری که $R \cong F_1 \oplus F_2$ که F_1 و F_2 میدان هستند

یا $Nil(R)^{۲} = \{۰\}$ و به ازای هر عنصر ناصفر $\omega \in Nil(R)$، $Nil(R) = \omega R$.
در آخر اگر R دقیقاً سه ایده‌آل ماکسیمال متمایز $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ داشته باشد چون $M_۱M_۲M_۳ = \{۰\}$ پس $R \cong \frac{R}{M_۱} \oplus \frac{R}{M_۲} \oplus \frac{R}{M_۳}$ و بنابراین نتیجه حاصل است. □

قضیه ۷.۲.۲. *فرض کنیم $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ حلقه‌های جابجایی باشند و $R = R_۱ \times R_۲ \times R_۳$. در این‌صورت هر ایده‌آل سره از R خاصیت ضعیف ۲ـجذبی دارد اگر و تنها اگر $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ میدان باشند.*

برهان. اگر $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ میدان باشند آنگاه بنابر قضیه ۶.۲.۲، هر ایده‌آل سره‌ی ناصفر از R خاصیت ۲ـجذبی دارد. بنابراین هر ایده‌آل سره از R ضعیف ۲ـجذبی است.
بالعکس، فرض کنیم هر ایده‌آل سره از R خاصیت ضعیف ۲ـجذبی داشته باشد و یکی از R_iها، $(۱ \leq i \leq ۳)$ میدان نباشد. بدون این که خللی به مسئله وارد شود، فرض می‌کنیم که $R_۱$ میدان نباشد. بنابراین $R_۱$ شامل ایده‌آل سره‌ای مانند J است به طوری که $J \neq \{۰\}$. فرض کنیم $I = J \times \{۰\} \times \{۰\}$. در این‌صورت I یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است. فرض می‌کنیم $m \in J$ به طوری که $m \neq ۰$. در این‌صورت

$$(m, ۱, ۱)(۱, ۰, ۱)(۱, ۱, ۰) = (m, ۰, ۰) \in I - \{(۰, ۰, ۰)\},$$

اما $(m, ۱, ۱)(۱, ۰, ۱) = (m, ۰, ۱) \notin I$، $(m, ۱, ۱)(۱, ۱, ۰) = (m, ۱, ۰) \notin I$ و $(۱, ۰, ۱)(۱, ۱, ۰) = (۱, ۰, ۰) \notin I$ که با خاصیت ضعیف ۲ـجذبی I در تناقض است. بنابراین، $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ میدان هستند. □

لم ۸.۲.۲. *فرض کنیم هر ایده‌آل سره از حلقه‌ی R ضعیف ۲ـجذبی باشد. در این‌صورت R حداکثر سه ایده‌آل ماکسیمال دارد.*

برهان. فرض کنیم $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$ و $M_۴$ ایده‌آل‌های ماکسیمال متمایز از R باشند، همچنین فرض کنیم $I = M_۱ \cap M_۲ \cap M_۳$. چون سه ایده‌آل اول از R موجود است که روی I مینیمال‌اند، لذا بنابر۷.۱.۳، I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R نیست. پس I یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است به طوری که خاصیت ۲ـجذبی ندارد. لذا بنابر قضیه ۹.۱.۲، $I^{۳} = \{۰\}$. بنابراین $I^{۳} = M_۱^{۳}M_۲^{۳}M_۳^{۳} = \{۰\} \subset M_۴$ در نتیجه یکی از M_iها، $(۱ \leq i \leq ۳)$ مشمول در $M_۴$ است که با فرض در تناقض است. بنابراین R حداکثر سه ایده‌آل ماکسیمال متمایز دارد. □

قضیه ۹.۲.۲. *در حلقه‌ی جابجایی R هر ایده‌آل سره ضعیف ۲ـجذبی است اگر و تنها اگر یکی از گزاره‌های زیر برقرار باشد.*
الف. (R, M) یک حلقه‌ی شبه موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال M است به طوری که $M^{۳} = \{۰\}$.
ب. $R \cong R_۱ \times F$ که $R_۱$ یک حلقه‌ی شبه موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال M است به طوری که $M^{۲} = \{۰\}$ و F یک میدان است.
ج. $R \cong F_۱ \times F_۲ \times F_۳$ که $F_۱$، $F_۲$ و $F_۳$ میدان هستند.

برهان. اگر R در شرط (الف) صدق کند، آنگاه بنابرقضیه ۲.۲.۲، هر ایده‌آل سره از R خاصیت ضعیف ۲ـجذبی دارد. اگر R در شرط (ب) صدق کند، آنگاه بنابر قضیه ۴.۲.۲، هر ایده‌آل سره از R خاصیت

ضعیف ۲ـجذبی دارد و اگر R در شرط (ج) صدق کند، آنگاه بنابر قضیه ۷.۲.۲، هر ایده‌آل سره از R خاصیت ضعیف ۲ـجذبی دارد.

بالعکس، فرض کنیم هر ایده‌آل سره از R ضعیف ۲ـجذبی باشد. در این‌صورت بنابر لم ۸.۲.۲، R حداکثر سه ایده‌آل ماکسیمال دارد. بنابراین سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم

حالت اول: فرض کنیم R دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال مانند M داشته باشد. در این‌صورت بنابر قضیه ۲.۲.۲، $M^3=\{0\}$.

حالت دوم: فرض کنیم R دقیقاً دو ایده‌آل ماکسیمال مانند M_1 وM_2 داشته باشد. در این‌صورت $J(R)=M_1\cap M_2$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است. نشان می‌دهیم $J(R)^3=\{0\}$. فرض کنیم $a,b,c\in J(R)$. چون $abcR$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است، لذا بنابر لم ۱.۲.۲، $abc=0$. در نتیجه $J(R)^3=M_1^3\cap M_2^3=\{0\}$. بنابراین $R\cong \frac{R}{M_1^3}\times\frac{R}{M_2^3}$. با توجه به این که $\frac{R}{M_1^3}$ و $\frac{R}{M_2^3}$ حلقه‌های جابجایی شبه موضعی هستند، لذا بنابر قضیه ۴.۲.۲، $R\cong R_1\times F$ که R_1 یک حلقه شبه موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال M است به طوری که $M^2=\{0\}$ و F یک میدان است.

حالت سوم: فرض کنیم R دقیقاً سه ایده‌آل ماکسیمال مانند M_1، M_2 و M_3 داشته باشد. در این‌صورت $J(R)=M_1\cap M_2\cap M_3$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی از R است. چون $J(R)$ اشتراک سه ایده‌آل اول از R است، لذا بنابر[۹، قضیه ۲.۵]، $J(R)$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی نیست. در نتیجه بنابر قضیه ۹.۱.۲ $J(R)^3=\{0\}$. چون $J(R)^3=M_1^3\cap M_2^3\cap M_3^3=\{0\}$، لذا $R\cong\frac{R}{M_1^3}\times\frac{R}{M_2^3}\times\frac{R}{M_3^3}$. از این رو بنابر قضیه ۷.۲.۲، $R\cong F_1\times F_2\times F_3$ که F_1، F_2 و F_3 میدان می‌باشند.

$\square$

نتیجه ۱۰.۲.۲. *فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این‌صورت هر ایده‌آل سره از $R=\mathbb{Z}_n$ یک ایده‌آل ضعیف ۲ـجذبی است اگر و تنها اگر $n=q^3$ که q یک عدد اول است یا $n=q^2p$ که p و q اعداد اول متمایز هستند یا $n=q_1q_2q_3$ که q_1، q_2 و q_3 اعداد اول متمایز می‌باشند.*

فصل ۳

بررسی ایده‌آل‌های n-جذبی در حلقه‌های جابجایی

۱.۳ ویژگی‌های اساسی ایده‌آل‌های n-جذبی I

در این بخش، برخی از ویژگی‌های اساسی ایده‌آل‌های n-جذبی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. ایده‌آل سره I از حلقه‌ی R را n-جذبی گوییم، هرگاه به ازای هر $x_1, \cdots, x_{n+1} \in R$ اگر $x_1 \cdots x_{n+1} \in I$، آنگاه n تا از x_iها موجود باشند به طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها متعلق به I باشد.

تعریف ۲.۱.۳. فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح باشد و $p \in R$. گوییم p عنصر اول R است اگر p عضو ناصفر و وارون ناپذیری از R باشد که هرگاه $a, b \in R$ و $p \mid ab$، آنگاه $p \mid a$ یا $p \mid b$.

قضیه ۳.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه و n, m اعداد صحیح مثبت باشند.*

الف. ایده‌آل سره I از حلقه‌ی R ، n-جذبی است اگر و تنها اگر برای هر $x_1, \cdots, x_m \in R$ اگر $x_1 \cdots x_m \in I$ که $m > n$، آنگاه n تا از x_iها موجود باشند به طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها متعلق به I باشد.

ب. اگر I یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه به ازای هر $m \geq n$، I یک ایده‌آل m-جذبی از حلقه‌ی R است.

ج. اگر به ازای هر $1 \leq j \leq m$، I_j یک ایده‌آل n_j-جذبی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه $I_1 \cap \cdots \cap I_m$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است که $n = n_1 + \cdots + n_m$. به ویژه، اگر $P_1, \cdots, P_n$ ایده‌آل‌های اول از R باشند، آنگاه $P_1 \cap \cdots \cap P_n$ یک ایده‌آل n-جذبی از R خواهد بود.

د. اگر $p_1, \cdots, p_n$ عناصر اول از دامنه‌ی صحیح R باشند، آنگاه $I = p_1 \cdots p_n R$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است.

ه. اگر I یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه $Rad(I)$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است و به ازای هر $x \in Rad(I)$، $x^n \in I$.

برهان. الف. اثبات بدیهی است.

ب. فرض کنیم $a_1 \cdots a_n a_{n+1} a_{n+2} \in I$ که $a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \in R$. نشان می‌دهیم $n+1$ عنصر از a_iها ($1 \leq i \leq n+2$) وجود دارند که حاصل‌ضرب آن‌ها متعلق به I است. چون I یک ایده‌آل n-جذبی است، پس اگر $a_1 \cdots a_n \underbrace{(a_{n+1} a_{n+2})}_{a_m} \in I$، آنگاه $a_{i_1} \cdots a_{i_n} \in I$ که $i_j \in \{1, \cdots, n, m\}$ و لذا $a_{i_1} \cdots a_{i_n} a_{i_m} \in I$ در نتیجه I یک ایده‌آل $n+1$-جذبی است.

ج. اثبات بدیهی است.

د. فرض کنیم $a_1 \cdots a_{n+1} \in p_1 \cdots p_n R$ که $a_1, \cdots, a_{n+1} \in R$ و p_iها $(1 \leq i \leq n)$ عناصر اول R می‌باشند. در این‌صورت $r \in R$ وجود دارد به طوری که $a_1 \cdots a_{n+1} = p_1 \cdots p_n r$. در نتیجه

$$p_1 \mid (a_1 \cdots a_n) a_{n+1}$$

و چون p_1 عنصر اول است، لذا

$$p_1 \mid a_1 \cdots a_n \qquad \text{یا} \qquad p_1 \mid a_{n+1}$$

حال اگر $p_1 \mid a_1 \cdots a_n$، آنگاه

$$p_1 \mid a_1 \cdots a_{n-1} \qquad \text{یا} \qquad p_1 \mid a_n$$

و با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت

$$p_1 \mid a_1 a_2 \qquad \text{یا} \qquad p_1 \mid a_3$$

بنابراین $1 \leq j \leq n+1$ وجود دارد به طوری که $p_1 \mid a_j$ و در نتیجه $a_j = p_1 r_1$ که $r_1 \in R$. به طور مشابه به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $p_i \mid a_{j_i}$ که $1 \leq j_i \leq n+1$. پس $p_1 \cdots p_n \mid a_{j_1} \cdots a_{j_n}$ در نتیجه $a_{j_1} \cdots a_{j_n} = p_1 \cdots p_n r'$ که $r' \in R$. بنابراین $a_{j_1} \cdots a_{j_n} \in p_1 \cdots p_n R$. از این رو $I = p_1 \cdots p_n R$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است.

ه. فرض کنیم I یک ایده‌آل n-جذبی از R باشد. در این‌صورت به ازای هر $x \in Rad(I)$ داریم $x^n \in I$، زیرا اگر $x \in Rad(I)$ باشد، آنگاه $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\underbrace{xx \cdots x}_{m\text{بار}} \in I$. حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم

الف. فرض کنیم $n < m$. چون I یک ایده‌آل n-جذبی است، پس $x^n \in I$.

ب. فرض کنیم $n \geq m$. چون طبق فرض $x^m \in I$، پس $x^{n-m}x^m \in I$ و در نتیجه $x^n \in I$.

حال فرض می‌کنیم $x_1 \cdots x_{n+1} \in Rad(I)$ باشد که $x_1, \cdots, x_{n+1} \in R$. در این‌صورت $x_1^n \cdots x_{n+1}^n = (x_1 \cdots x_{n+1})^n \in I$ و چون I یک ایده‌آل n-جذبی می‌باشد، پس $(x_1 \cdots x_n)^n = x_1^n \cdots x_n^n \in I$ و در نتیجه $x_1 \cdots x_n \in Rad(I)$. بنابراین $Rad(I)$ یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R است. $\square$

فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد. در قسمت (ب) قضیه ۳.۱.۳، بیان شد که هر ایده‌آل n-جذبی به ازای هر $m \geq n$، یک ایده‌آل m-جذبی خواهد بود. اگر I یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R باشد که n یک عدد صحیح مثبت است، آنگاه

$$\omega_R(I) := \min\{n \mid \text{یک ایده‌آل } n - \text{جذبی از حلقه‌ی } R \text{ است.} \ I\}$$

در غیر این صورت $\omega_R(I) = \infty$ که از این پس به جای $\omega_R(I)$ از $\omega(I)$ استفاده می‌کنیم و هم چنین قرارداد می‌کنیم که $\omega(R) = 0$. بنابراین برای هر ایده‌آل I از حلقه‌ی R داریم $\omega(I) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. گوییم $\omega(I) = 1$ اگر و تنها اگر I یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R باشد و $\omega(I) = 0$ اگر و تنها اگر $I = R$. بنابراین $\omega(I)$ یک متر است که فاصله‌ی یک ایده‌آل n-جذبی از ایده‌آل اول را مشخص می‌کند.

یادآوری می‌کنیم که ایده‌آل‌های I و J ازحلقه‌ی R را قیاس ناپذیر گوییم، هر گاه $J \nsubseteq I$ و $I \nsubseteq J$.

تبصره ۴.۱.۳. *بعضی از نتایج قضیه ۳.۱.۳ را می‌توان با استفاده از تابع ω به گونه‌ای دیگر مطرح کرد. به عنوان مثال، برای قسمت (ج) قضیه ۳.۱.۳ ، می‌توان گفت*

زیرا اگر $\omega(I_1 \cap \cdots \cap I_m) \leq \omega(I_1) + \cdots + \omega(I_m)$

$$\omega(I_1) = n_1 \Longrightarrow I_1 \text{ یک ایده‌آل } n_1 - \text{جذبی است}$$

$$\vdots$$

$$\omega(I_m) = n_m \Longrightarrow I_m \text{ یک ایده‌آل } n_m - \text{جذبی است}$$

در نتیجه بنابر قضیه ۳.۱.۳ (ج)، $I_1 \cap \cdots \cap I_m$، یک ایده‌آل mـجذبی است که $m = n_1 + \cdots + n_m$ و چون ω مینیمم این مقادیر است پس $\omega(I_1 \cap \cdots \cap I_m) \leq m$ و در نتیجه
$$\omega(I_1 \cap \cdots \cap I_m) \leq \omega(I_1) + \cdots + \omega(I_m),$$

به ویژه، اگر $P_1, \cdots, P_n$، ایده‌آل‌های اول از حلقه‌ی R باشند، آنگاه مشابه اثبات فوق $\omega(P_1 \cap \cdots \cap P_n) \leq n$. اگر $P_1, \cdots, P_n$ ایده‌آل‌های اول قیاس ناپذیر از حلقه‌ی R باشند، آنگاه $\omega(P_1 \cap \cdots \cap P_n) = n$ (به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i \in P_i - (\cup_{j\neq i} P_j)$ را انتخاب می‌کنیم. آنگاه $x_1 \cdots x_n \in P_1 \cap \cdots \cap P_n$ و چون به ازای هر $2 \leq i \leq n$، x_iها متعلق به P_1 نیستند پس بنابرعکس و نقیض تعریف ایده‌آل اول P_1، داریم $x_2 \cdots x_n \notin P_1$. به طریق مشابه، در مورد ایده‌آل‌های $P_2, \cdots, P_n$ به این نتیجه می‌رسیم که هیچ زیرحاصلضرب سره‌ای از x_iها $(1 \leq i \leq n)$ در $P_1 \cap \cdots \cap P_n$ وجود ندارد. بنابراین $\omega(P_1 \cap \cdots \cap P_n) \geq n$).هم چنین قضیه ۳.۱.۳ (د)، نتیجه می‌دهد که $\omega(p_1 \cdots p_n R) = n$ که $p_1, \cdots, p_n$ عناصر اول از دامنه‌ی صحیح R هستند.
زیرا به طورکلی به ازای هر x_i غیر صفر و غیر یکه در یک دامنه‌ی صحیح R، $\omega(x_1 \cdots x_n R) \geq n$.$(\star)$
حال برای اثبات قسمت (د) گوییم چون $p_1 \cdots p_n R$ یک ایده‌آل nـجذبی است، پس
$\omega(p_1 \cdots p_n R) \leq n$ $(\star\star)$.
چون p_iها $(1 \leq i \leq n)$، عناصر اول از حلقه‌ی R هستند، پس ناصفر و غیر یکه هستند. لذا بنابر توضیحات $(\star)$، $\omega(p_1 \cdots p_n R) \geq n$. از این رو بنابر$(\star)$ و $(\star\star)$ داریم $\omega(p_1 \cdots p_n R) = n$.
از قسمت قضیه ۳.۱.۳ (ه)، به سادگی نتیجه می‌گیریم که $\omega(Rad(I)) \leq \omega(I)$.

در ادامه، حلقه‌ای را مثال خواهیم زد که هر ایده‌آل سره آن، به ازای هر عدد صحیح مثبت n، nـجذبی نیست.

مثال ۵.۱.۳. فرض کنیم $R = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$. در این صورت R یک حلقه‌ی فون نیومن منظم است (بوضوح R یک حلقه‌ی تقلیل یافته با $dim(R) = 0$). فرض کنیم به ازای هر عدد صحیح مثبت n، $I_n = \{(x_i) \in R \,|\, x_i = 0 \quad 1 \leq i \leq n \text{ که}\}$ و همچنین فرض کنیم $I = \{(x_i) \in R \,|\, x_{2i-1} = 0 \quad i \in \mathbb{N} \text{ به ازای هر}\}$. در این صورت به آسانی ثابت می‌شود که برای هر عدد صحیح مثبت n، I و I_n ایده‌آل‌های سره از R هستند که $\omega(I_n) = n$ و $\omega(I) = \infty$. می‌دانیم که هر I_n حاصل‌ضرب n ایده‌آل ماکسیمال از R است.

لم ۶.۱.۳. *فرض کنیم $I \subseteq P$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند به طوری که P یک ایده‌آل اول R است. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. P یک ایده‌آل اول مینیمال از I است.

۲. $R-P$ یک مجموعه‌ی ضربی بسته است که نسبت به خاصیت $(R-P)\cap I=\varnothing$ ماکسیمال است.

۳. به ازای هر $x\in P$، $y\in R-P$ و عدد صحیح نامنفی i وجود دارد به طوری که $yx^i\in I$.

برهان. (۱) $\Longrightarrow$ (۲) فرض کنیم $\mathcal{A}=\{S\subseteq R|S\cap I=\varnothing, \text{ضربی بسته است } S\}$. اگر P اول باشد، آنگاه $R-P$ یک مجموعه ضربی بسته است که به وضوح $I\cap(R-P)=\varnothing$. بنابراین $R-P\in\mathcal{A}$ پس $\mathcal{A}\neq\varnothing$. لذا بنابر لم زورن، $\mathcal{A}$ دارای عضو ماکسیمالی مانند S است که $S\cap I=\varnothing$. حال نشان می‌دهیم $S=R-P$. اگر Q ایده‌آلی از R شامل I باشد که ماکسیمال است با این خاصیت که $Q\cap S=\varnothing$. بنابراین Q اول است. پس Q ایده‌آل اول مینیمال I است. توجه داریم که $Q\cap(R-P)=\varnothing$. در نتیجه $Q=P$ و از این رو $R-P=S$.

(۲) $\Longrightarrow$ (۳) عضو ناصفری مانند x در P انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم $S=\{yx^i: y\in R-P,\ i=\circ,۱,۲,\cdots\}$. در این‌صورت S یک مجموعه ضربی بسته است که به طور سره شامل $R-P$ است. بنابراین $y\in R-P$ و یک عدد صحیح نامنفی i وجود دارد به طوری که $yx^i\in I$.

(۳) $\Longrightarrow$ (۱) فرض کنیم $I\subset Q\subseteq P$ که Q یک ایده‌آل اول است. اگر $x\in P-Q$ موجود باشد، آنگاه $y\notin P$ و عدد صحیح مثبت i وجود دارد به طوری که $yx^i\in I\subset Q$. که یک تناقض است و بنابراین $P=Q$. $\square$

قضیه ۷.۱.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت I حداکثر n ایده‌آل اول مینیمال دارد. به علاوه، $|Min_R(I)|\leq\omega_R(I)$.*

برهان. چون هر ایده‌آل ۱-جذبی یک ایده‌آل اول است، لذا فرض می‌کنیم $n\geq ۲$. فرض کنیم $P_۱,\cdots,P_{n+۱}$ ایده‌آل‌های اول متمایز از حلقه‌ی R باشند که روی I مینیمال‌اند. در این‌صورت به ازای هر $۱\leq i\leq n$، عنصری مانند $x_i\in P_i-\big((\cup_{k\neq i}P_k)\cup P_{n+۱}\big)$ وجود خواهد داشت. بنابر لم ۶.۱.۳، به ازای هر $۱\leq i\leq n$، $c_i\in R-P_i$ وجود دارد به طوری که برای بعضی اعداد صحیح مثبت $n_i\geq ۱$، $c_ix_i^{n_i}\in I$. چون $I\subseteq P_{n+۱}$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است و به ازای هر $۱\leq i\leq n$، $x_i\notin P_{n+۱}$، لذا به ازای هر $۱\leq i\leq n$ داریم $c_ix_i^{n-۱}\in I$. بنابراین $(c_۱+\cdots+c_n)x_۱^{n-۱}\cdots x_n^{n-۱}\in I$. چون به ازای هر $۱\leq i\leq n$، $x_i\in P_i-\big(\cup_{k\neq i}P_k\big)$ و $c_ix_i^{n-۱}\in I\subseteq P_۱\cap\cdots\cap P_n$. پس به ازای هر $۱\leq i\leq n$، $c_ix_i^{n-۱}\in P_i$ و چون P_i اول است، لذا $c_i\in P_i$ یا $x_i^{n-۱}\in P_i$. از این که $c_i\notin P_i$، پس به ازای هر $۱\leq i\leq n$، $x_i^{n-۱}\in P_i$. حال فرض می‌کنیم $c_ix_i^{n-۱}\in P_۱$ که $(i\neq ۱)$. چون $P_۱$ ایده‌آل اول است، پس $c_i\in P_۱$ یا $x_i^{n-۱}\in P_۱$. اگر $x_i^{n-۱}\in P_۱$، آنگاه بنابرخاصیت اول بودن $P_۱$ داریم $x_i\in P_۱$ که یک تناقض است زیرا $x_i\in P_i-\big(\cup_{k\neq i}P_k\big)$ و لذا $c_i\in P_۱$ و به همین ترتیب برای هر $j\neq i$ که $۱\leq j\leq n$، داریم $c_i\in P_j$. در نتیجه به ازای هر $۱\leq i\leq n$، $c_i\in\big(\cap_{k\neq i}P_k\big)-P_i$ و بنابراین به ازای هر $۱\leq i\leq n$، $c_۱+\cdots+c_n\notin P_i$.

از این رو به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $(c_1 + \cdots + c_n)\prod_{k\neq i} x_k^{n-1} \notin P_i$. در نتیجه به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $(c_1+\cdots+c_n)\prod_{k\neq i} x_k^{n-1} \notin I$ و چون I یک ایده‌آل nـجذبی از حلقه‌ی R است، پس $x_1^{n-1}\cdots x_n^{n-1} \in I \subseteq P_{n+1}$. اما به ازای بعضی $1 \leq i \leq n$، $x_i \in P_{n+1}$ که یک تناقض است و لذا I حداکثر n ایده‌آل اول مینیمال دارد. به وضوح $|Min_R(I)| \leq \omega_R(I)$. □

فرض کنیم $m \geq n$ اعداد صحیح مثبت باشند. در این‌صورت یک ایده‌آل nـجذبی از R وجود دارد که $(n-1)$ـجذبی نیست و دقیقاً m ایده‌آل اول مینیمال دارد. به عنوان مثال، فرض کنیم $n = 3$. در این‌صورت $I_1 = 27\mathbb{Z}$، $I_2 = 18\mathbb{Z}$ و $I_3 = 30\mathbb{Z}$ ایده‌آل‌های ۳ـجذبی هستند به طوری که خاصیت ۲ـجذبی ندارند و به ترتیب دارای یک، دو و سه ایده‌آل اول مینیمال می‌باشند.

قضیه ۸.۱.۳. *فرض کنیم $P_1, \cdots, P_n$ ایده‌آل‌های اول دو به دو هم ماکسیمال از حلقه‌ی R باشند. در این‌صورت $I = P_1\cdots P_n$ یک ایده‌آل nـجذبی از حلقه‌ی R است. به علاوه، $\omega(I) = n$.*

برهان. چون P_iها ($1 \leq i \leq n$) ایده‌آل‌های دو به دو هم‌ماکسیمال می‌باشند، پس $I = P_1\cdots P_n = P_1 \cap \cdots \cap P_n$. لذا بنابر قضیه ۳.۱.۳ (ج)، I یک ایده‌آل nـجذبی از R است و چون P_iها ایده‌آل‌های اول قیاس ناپذیرند، پس بنابر تبصره ۴.۱.۳ ، $\omega(I) = n$. □

در حالت کلی، حاصل‌ضرب n ایده‌آل اول ($n \geq 2$)، لزوماً ایده‌آل nجذبی نخواهد بود که مثال‌های زیر نشان دهنده این مطلب می‌باشند.

مثال ۹.۱.۳. الف. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}[X,Y] + 6Z\mathbb{Z}[X,Y,Z] \subset \mathbb{Z}[X,Y,Z]$. در این‌صورت $P_1 = X\mathbb{Z}[X,Y] + 6Z\mathbb{Z}[X,Y,Z]$ و $P_2 = Y\mathbb{Z}[X,Y] + 6Z\mathbb{Z}[X,Y,Z]$ ایده‌آل‌های اول قیاس ناپذیر R هستند. اما، $I = P_1P_2$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R نیست. زیرا $2\cdot 3\cdot 6Z^2 \in I$ اما $3\cdot 6Z^2 \notin I$، $2\cdot 6Z^2 \notin I$ و $2\cdot 3 \notin I$. به طور مشابه P_1^2 و P_2^2 نیز ایده‌آل‌های ۲ـجذبی از R نمی‌باشند.

ب. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}[X,Y,Z]$. در این‌صورت $P_1 = \langle 2, X\rangle$ و $P_2 = \langle 2, Y\rangle$ و $P_3 = \langle 2, Z\rangle$ ایده‌آل‌های اول قیاس ناپذیر و غیر ماکسیمال از حلقه‌ی R می‌باشند. اما $I = P_1P_2P_3 = \langle 8, 4X, 4Y, 4Z, 2XY, 2XZ, 2YZ, XYZ\rangle$ ایده‌آل ۳− جذبی از R نیست. برای اثبات مطلب فرض می‌کنیم

$$f_1 = 2, \quad f_2 = X+Y+2, \quad f_3 = X+Z+2, \; f_4 = Y+Z+2$$

در این‌صورت $f_1f_2f_3f_4 \in I$، اما هیچ حاصل‌ضربی از این سه عنصر (f_iها) در I موجود نیست.

اگر $M_1, \cdots, M_n$ ایده‌آل‌های ماکسیمال متمایز از حلقه‌ی R باشند، آنگاه بنابر قضیه ۸.۱.۳، $I = M_1\cdots M_n$ یک ایده‌آل nـجذبی از R است. در ادامه نشان خواهیم داد که حاصل‌ضرب هر تا n ایده‌آل ماکسیمال از حلقه‌ی R یک ایده‌آل nـجذبی است. اما ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر ایده‌آل ماکسیمال M از حلقه‌ی R، M^n یک ایده‌آل nـجذبی از R می‌باشد.

لم ۱۰.۱.۳. *فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه‌ی R و n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این‌صورت M^n یک ایده‌آل n-جذبی از R است. به علاوه، $\omega(M^n) \leq n$ و اگر $M^{n+1} \subset M^n$، آنگاه $\omega(M^n) = n$.*

برهان. فرض کنیم $x_1 \cdots x_{n+1} \in M^n$ به طوری که $x_1, \cdots, x_{n+1} \in R$. اگر $x_1, \cdots, x_{n+1} \in M$، آنگاه نتیجه حاصل است. بنابراین می‌توان فرض کرد $x_{n+1} \notin M$. در این‌صورت $\langle M^n, x_{n+1}\rangle = R$. از این رو برای بعضی $y \in M^n$ و $z \in R$، $y + zx_{n+1} = 1$.
بنابراین

$$x_1 \cdots x_n = (x_1 \cdots x_n)1 = (x_1 \cdots x_n)y + (x_1 \cdots x_{n+1})z \in M^n$$

در نتیجه M^n یک ایده‌آل n-جذبی از R است. به وضوح $\omega(M^n) \leq n$. حال فرض می‌کنیم $M^{n+1} \subset M^n$. در این‌صورت $x_1, \cdots, x_n \in M$ موجوداند به طوری که $x_1 \cdots x_n \in M^n - M^{n+1}$. بنابراین هیچ حاصل‌ضربی از $(n-1)$ تا از x_i در M^n وجود ندارد چون در غیر این صورت $x_1 \cdots x_n \in M^{n+1}$ که یک تناقض است. بنابراین M^n یک ایده‌آل $(n-1)$-جذبی از R نیست و چون در پاراگراف اول برهان نشان دادیم که M^n یک ایده‌آل n-جذبی از R است، پس $\omega(M^n) = n$. □

قضیه ۱۱.۱.۳. *فرض کنیم $M_1, \cdots, M_n$ ایده‌آل‌های ماکسیمال از حلقه‌ی R باشند. در این‌صورت $I = M_1 \cdots M_n$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است. به علاوه، $\omega(I) \leq n$.*

برهان. نشان می‌دهیم که اگر $M_1, \cdots, M_m$ ایده‌آل‌های ماکسیمال متمایز از حلقه‌ی R و $n_1, \cdots, n_m$ اعداد صحیح مثبت باشند به طوری که $n = n_1 + \cdots + n_m$، آنگاه $I = M_1^{n_1} \cdots M_m^{n_m}$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است. بنابر لم ۱۰.۱.۳، هر $M_i^{n_i}$ $(1 \leq i \leq m)$ یک ایده‌آل n_i-جذبی از R است و لذا بنابر قضیه ۳.۱.۳ (ج)، $I = M_1^{n_1} \cdots M_m^{n_m} = M_1^{n_1} \cap \cdots \cap M_m^{n_m}$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است. واضح است که $\omega(I) \leq n$. □

هدف بعدی ما قضیه ۱۶.۱.۳، است که نشان دهیم اگر یک ایده‌آل n-جذبی مانند I از حلقه‌ی R دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال مانند $P_1, \cdots, P_n$ داشته باشد، آنگاه $P_1 \cdots P_n \subseteq I$.

مثال ۱۲.۱.۳. فرض کنیم $P_1, \cdots, P_n$ ایده‌آل‌های اول قیاس ناپذیر از حلقه‌ی R باشند و $I = P_1 \cap \cdots \cap P_n$. در این صورت $Rad(I) = I$، $\omega(I) = n$ و $P_1 \cdots P_n \subseteq I = P_1 \cap \cdots \cap P_n$. اما این رابطه‌ی شمول ممکن است اکید باشد. به عنوان مثال، فرض کنیم $R = \mathbb{Z}[X, Y]$، $P_1 = \langle 2, X\rangle$ و $P_2 = \langle 2, Y\rangle$. در این‌صورت $\langle 4, 2X, 2Y, XY\rangle = P_1P_2 \subset I = P_1 \cap P_2$ زیرا $2 \in I - P_1P_2$.

لم ۱۳.۱.۳. *فرض کنیم $n \geq 2$ و $P_1, \cdots, P_n$ ایده‌آل‌های اول قیاس ناپذیر از حلقه‌ی R باشند، همچنین فرض کنیم I یک ایده‌آل n-جذبی از R مشمول در $P_1 \cap \cdots \cap P_n$ باشد. اگر برای اعداد صحیح مثبت m_i و $x_i \in P_i - \left(\cup_{k \neq i} P_k\right)$، $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \in I$، آنگاه $x_1 \cdots x_n \in I$.*

برهان. چون I یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R است، پس برای اعداد صحیح مثبت $k_1, \cdots, k_n$ که هر $0 \leq k_i \leq m_i$ و $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n$ داریم $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \in I$. اگر تعدادی k_i برابر با صفر

باشد، مثلاً $k_1 = 0$، آنگاه $x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \in I \subseteq P_1$ که یک تناقض است زیرا برای هر $2 \leq i \leq n$، $x_i \notin P_1$. بنابراین $x_1 \cdots x_n \in I$.

□

در لم زیر، از نماد $P_j \prod_{i \neq j} c_i$ برای نشان دادن مجموعه‌ی تمام حاصل‌ضرب‌هایی به فرم $a \prod_{i \neq j} c_i$ استفاده می‌کنیم که $a \in P_j$.

لم ۱۴.۱.۳. *فرض کنیم $n \geq 2$ و I یک ایده‌آل nـجذبی از حلقه‌ی R باشد به طوری که I دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال مانند $P_1, \cdots, P_n$ داشته باشد. همچنین فرض کنیم $1 \leq j \leq n$ و به ازای هر $i \neq j$ که $1 \leq i \leq n$، $c_i \in P_i - \left(\bigcup_{k \neq i} P_k\right)$. در این‌صورت $P_j \prod_{i \neq j} c_i \in I$.*

برهان. فرض کنیم $a \in P_j$. اگر $a \in P_j - \left(\bigcup_{i \neq j} P_i\right)$، آنگاه بنابر قضیه ۳.۱.۳(ه) و لم ۱۳.۱.۳، $a \prod_{i \neq j} c_i \in I$. حال فرض کنیم $a \in P_j \cap \left(\bigcup_{i \neq j} P_i\right)$ و $d \in P_j - \left(\bigcup_{i \neq j} P_i\right)$. می‌خواهیم عنصر $b \in R$ را بیابیم طوری که $bd + a \in P_j - \left(\bigcup_{i \neq j} P_i\right)$. فرض کنیم
$F = \{m | a \notin P_m;\ 1 \leq m \leq n\}$، $D = \{m | a \in P_m;\ 1 \leq m \leq n, m \neq j\}$ و $b = \prod_{k \in F} c_k$ (فرض کنیم $b = 1$ اگر $F = \varnothing$) و $x = bd + a$. چون به ازای هر $m \in F$، $d \prod_{k \in F} c_k \in P_m$ و $a \notin P_m$، از این رو برای هر $m \in F$ ، $x \notin P_m$. چون به ازای هر $m \in D$، $a \in P_m$ و $d \prod_{k \in F} c_k \notin P_m$، پس برای هر $m \in D$ داریم $x \notin P_m$. بنابراین $x \in P_j - \left(\bigcup_{i \neq j} P_i\right)$ و در نتیجه $x \prod_{i \neq j} c_i \in I$ و $d \prod_{i \neq j} c_i \in I$. از این رو $\left(\prod_{k \in F} c_k\right)\left(d \prod_{i \neq j} c_i\right) + a \prod_{i \neq j} c_i = x \prod_{i \neq j} c_i \in I$ و بنابراین $a \prod_{i \neq j} c_i \in I$. در نتیجه $P_j \prod_{i \neq j} c_i \in I$.

□

نتیجه ۱۵.۱.۳. *فرض کنیم $n \geq 2$ و $P_1, \cdots, P_n$ ایده‌آل‌های اول قیاس ناپذیر از حلقه‌ی R باشند. همچنین فرض کنیم برای بعضی $1 \leq j \leq n$، $a \in P_j$. در این‌صورت عناصر $d \in P_j - \left(\bigcup_{i \neq j} P_i\right)$ و $b \in R$ موجوداند به طوری که $bd + a \in P_j - \left(\bigcup_{i \neq j} P_i\right)$.*

حال می‌توانیم نتیجه‌ی اصلی این بخش را بیان کنیم.

قضیه ۱۶.۱.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل nـجذبی از حلقه‌ی R باشد به طوری که I دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال $P_1, \cdots, P_n$ داشته باشد. در این‌صورت $P_1 \cdots P_n \subseteq I$. به علاوه، $\omega(I) = n$.*

برهان. چون هر ایده‌آل ۱ـجذبی ایده‌آلی اول است، لذا می‌توان فرض کرد $n \geq 2$. فرض کنیم برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in P_i$، آنگاه بنابر لم ۱۴.۱.۳، به ازای هر انتخاب $c_i \in P_i - \left(P_1 \bigcup \left(\bigcup_{j \neq i} P_j\right)\right)$ که $2 \leq i \leq n$، $a_1 \prod_{2 \leq i \leq n} c_i \in I$. حال فرض می‌کنیم برای بعضی $1 \leq k \leq n - 1$، داشته باشیم

$$(a_1 \cdots a_k) \prod_{(k+1) \leq i \leq n} c_i \in I \tag{۱.۳}$$

که $c_i \in P_i - \left(P_1 \cup \left(\bigcup_{j \neq i} P_j\right)\right)$ و $k + 1 \leq i \leq n$. نشان می‌دهیم برای هر $c_i \in P_i - \left(P_1 \cup \left(\bigcup_{j \neq i} P_j\right)\right)$ و $k + 2 \leq i \leq n$، $(a_1 \cdots a_{k+1}) \prod_{(k+2) \leq i \leq n} c_i \in I$.

لذا بنابر نتیجه ۱۵.۱.۳، عناصر $d_{k+1} \in P_{k+1} - (\bigcup_{j\neq k+1} P_j)$ و $b_{k+1} \in R$ وجود دارند به طوری که $b_{k+1}d_{k+1} + a_{k+1} \in P_{k+1} - (\bigcup_{j\neq k+1} P_j)$. قرار می‌دهیم $c_{k+1} = b_{k+1}d_{k+1} + a_{k+1}$، آنگاه بنابر رابطه ۱.۳، داریم

$$\Big((b_{k+1}a_1 \cdots a_k d_{k+1}) \prod_{k+2\leq i\leq n} c_i\Big) + \Big((a_1 \cdots a_{k+1}) \prod_{k+2\leq i\leq n} c_i\Big)$$
$$= (a_1 \cdots a_k)(b_{k+1}d_{k+1} + a_{k+1}) \prod_{(k+2)\leq i\leq n} c_i$$
$$= (a_1 \cdots a_k) \prod_{(k+1)\leq i\leq n} c_i \in I$$

چون $d_{k+1} \in P_{k+1} - (\bigcup_{i\neq k+1} P_i)$، پس بنابر فرض داریم
$$(b_{k+1}a_1 \cdots a_k d_{k+1}) \prod_{(k+2)\leq i\leq n} c_i \in I$$
بنابراین
$$(a_1 \cdots a_{k+1}) \prod_{(k+2)\leq i\leq n} c_i \in I$$

در حالت خاص، اگر $k = n-1$، آنگاه $(a_1 \cdots a_{n-1})(b_n d_n + a_n) \in I$. بنابراین $a_1 \cdots a_n \in I$. در نتیجه $P_1 \cdots P_n \subseteq I$. چون I یک ایده‌آل n-جذبی از R است، پس $\omega(I) \leq n$. حال برای اثبات عکس نامساوی $(\omega(I) \geq n)$، برای هر $1 \leq i \leq n$، عنصر $x_i \in P_i - (\bigcup_{j\neq i} P_j)$ را انتخاب می‌کنیم آنگاه $x_1 \cdots x_n \in P_1 \cdots P_n \subseteq I$. اما اگر I شامل زیرحاصل‌ضرب سره‌ای از x_iها مانند $x_2 \cdots x_n \in I \subseteq P_1$، آنگاه $x_i \in P_1$ که $2 \leq i \leq n$ که یک تناقض است و لذا $\omega(I) = n$. □

نتیجه ۱۷.۱.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R باشد به طوری که I دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال $P_1, \cdots, P_n$ داشته باشد. اگر P_iها دو به دو هم‌ماکسیمال باشند، آنگاه $I = P_1 \cdots P_n$. به علاوه، $\omega(I) = n$. به ویژه، اگر هر یک از P_iها ماکسیمال باشد، آنگاه $dim(R) = 0$ یا R یک دامنه‌ی صحیح با $dim(R) \leq 1$ است.*

برهان. بنابر قضیه‌ی ۱۶.۱.۳، داریم $P_1 \cdots P_n \subseteq I \subseteq P_1 \cap \cdots \cap P_n$ و چون P_iها دو به دو هم‌ماکسیمال‌اند، لذا $I = P_1 \cdots P_n$. به وضوح $\omega(I) = n$.

□

نتیجه ۱۸.۱.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R باشد به طوری که I دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال $P_1, \cdots, P_n$ داشته باشد، آنگاه در حلقه‌ی R_{P_i} به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $I_{P_i} = P_{i_{P_i}}$.*

برهان. اگر $n = 1$، آنگاه I یک ایده‌آل اول است. بنابراین می‌توان فرض کرد $n \geq 2$. فرض کنیم $1 \leq i \leq n$. به وضوح در حلقه‌ی R_{P_i}، $I_{P_i} \subseteq P_{i_{P_i}}$.

حال برای اثبات عکس شمول، فرض می‌کنیم $x \in P_i$. به ازای هر $n \geq j \geq ۱$ که $j \neq i$، فرض می‌کنیم $c_j \in P_j - \left(\bigcup_{k\neq j} P_k\right)$. در این‌صورت $c = \prod_{j\neq i} c_j \in R - P_i$. چون بنابر قضیه ۳.۱.۱۶، $I \supseteq P_۱ \cdots P_n$، لذا $cx \in I$. بنابراین به ازای هر $s \in R - P_i$، $\frac{x}{s} = \frac{cx}{cs} \in I_{P_i}$ و در نتیجه $I_{P_i} = P_{i_{P_i}}$.

□

۳.۲ ویژگی‌های اساسی ایده‌آل‌های nـجذبی II

در این بخش، مطالعه‌ی ویژگی‌های اساسی ایده‌آل‌های nـجذبی که در بخش قبلی آغاز کردیم را ادامه می‌دهیم. در ابتدا رابطه‌ی بین ایده‌آل‌های nـجذبی و ایده‌آل‌های اولیه را بررسی می‌کنیم. نتیجه‌ی بعدی تعمیم لم ۳.۱.۱۰، می‌باشد. چون هر توان از یک ایده‌آل ماکسیمال M، یک ایده‌آل Mـاولیه است.

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنیم P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R باشد، هم‌چنین فرض کنیم I یک ایده‌آل Pـاولیه از R باشد به طوری که برای بعضی اعداد صحیح مثبت n، $P^n \subseteq I$. در این‌صورت I یک ایده‌آل nـجذبی از R است. به علاوه، $\omega(I) \leq n$. به ویژه، اگر P^n یک ایده‌آل Pـاولیه از R باشد، آنگاه P^n یک ایده‌آل nـجذبی از R است که $\omega(P^n) \leq n$ و اگر $P^{n+۱} \subset P^n$، آنگاه $\omega(P^n) = n$.*

برهان. فرض کنیم $x_۱ \cdots x_{n+۱} \in I$ به طوری که $x_۱, \cdots, x_{n+۱} \in R$. اگر یکی از x_iها در P نباشد، چون I یک ایده‌آل Pـاولیه است، پس حاصل‌ضرب x_iهای دیگر مشمول در I می‌باشد. بنابراین می‌توان فرض کرد که هر x_i در P موجود است ($n+۱ \geq i \geq ۱$). چون $P^n \subseteq I$، پس $x_۱ \cdots x_n \in I$. از این رو I یک ایده‌آل nـجذبی از R است.
به وضوح $\omega(I) \leq n$ و اگر P^n یک ایده‌آل Pـاولیه از R باشد، آنگاه P^n یک ایده‌آل nـجذبی از R است و $\omega(P^n) \leq n$. هم‌چنین بنابر برهان لم ۳.۱.۱۰، اگر $P^{n+۱} \subset P^n$، آنگاه $\omega(P^n) = n$.

□

در قضیه‌ی فوق، فرض $P^n \subseteq I$ به ازای بعضی اعداد صحیح مثبت n، ضروری است. چون یک ایده‌آل اولیه به ازای هر عدد صحیح مثبت n، لزوماً یک ایده‌ال nـجذبی نیست که در مثال ۳.۴.۱۲، خواهیم دید.

تعریف ۳.۲.۲. ایده‌آل اول P از حلقه‌ی R را اول بخش پذیر گوییم، هر گاه برای هر $x \in R - P$، $P \subset \langle x \rangle$.

نتیجه ۳.۲.۳. *هر ایده‌آل اول بخش پذیر از حلقه‌ی R، قابل مقایسه با هر ایده‌آلی از R است.*

تعریف ۳.۲.۴. دامنه‌ی صحیح R را دامنه‌ی بخش پذیر گوییم، هر گاه هر ایده‌آل اول آن بخش پذیر باشد.

قضیه ۵.۲.۳. *فرض کنیم P یک ایده‌آل اول بخش‌پذیر از حلقه‌ی R و I یک ایده‌آل nـجذبی از R باشد به طوری که $Rad(I) = P$. در این‌صورت I یک ایده‌آل Pـاولیه از R است.*

برهان. فرض کنیم $xy \in I$ که $x, y \in R$ و $y \notin P$. در این‌صورت نشان می‌دهیم $x \in I$. چون $y \notin P$ و P یک ایده‌آل اول است، لذا $x \in P$. چون P یک ایده‌آل اول بخش‌پذیر از R و $y^{n-1} \notin P$، پس $P \subset y^{n-1}R$. از این که $x \in P$ و $P \subset y^{n-1}R$، لذا $z \in R$ وجود دارد به طوری که $x = y^{n-1}z$. از آن جایی که $y^n z = yy^{n-1}z = yx \in I$، $y^n \notin I$ و I یک ایده‌آل nـجذبی از R است، پس $x = y^{n-1}z \in I$. در نتیجه I یک ایده‌آل Pـاولیه از حلقه‌ی R است.

□

قضیه ۶.۲.۳. *فرض کنیم $Nil(R) \subset P$ ایده‌آل‌های اول بخش‌پذیر از حلقه‌ی R باشند. در این‌صورت P^n یک ایده‌آل P اولیه از R است و بنابراین P^n یک ایده‌آل nـجذبی از حلقه‌ی R است که به ازای هر عدد صحیح مثبت n، $\omega(P^n) \leq n$. به علاوه، اگر $P^{n+1} \subset P^n$، آنگاه $\omega(P^n) = n$.*

برهان. نشان می‌دهیم P^n یک ایده‌آل Pـاولیه از حلقه‌ی R است که در این‌صورت بنابر قضیه ۱.۲.۳، P^n یک ایده‌آل nـجذبی از R خواهد بود. چون $Nil(R) \subset P$ یک ایده‌آل اول بخش‌پذیر از Rاست، پس $Nil(R) \subset P^n$. فرض کنیم $xy \in P^n$ که $x, y \in R$ و $y \notin Rad(P^n) = P$. در این صورت نشان می‌دهیم $x \in P^n$. چون $xy \in P^n$، لذا $xy = \sum z_{i1} \cdots z_{in}$ که هر $z_{ij} \in P$ $(1 \leq j \leq n)$. چون $y \notin P$ و P یک ایده‌آل اول بخش‌پذیر از R است، لذا $P \subset yR$. بنابراین $z_{ij} = z'_{ij}y$ که $z'_{ij} \in R$. در نتیجه

$$xy = \sum z_{i1} \cdots z_{in-1} z'_{in} y = \big(\sum z_{i1} \cdots z_{in-1} z'_{in}\big) y$$

از این رو $xy = zy$ که $z \in P^n$. بنابراین $y(x-z) = 0 \in Nil(R)$ در نتیجه $x - z \in Nil(R) \subset P^n$ از این رو $x \in P^n$. به وضوح $\omega(P^n) \leq n$ و اثبات $\omega(P^n) = n$ از قضیه ۱.۲.۳، نتیجه می‌شود.

□

فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد. برای $x \in R$ فرض می‌کنیم $I_x = \{y \in R \mid yx \in I\} = (I :_R x)$. در ادامه شرایطی را که تحت آن I_x یک ایده‌آل nـجذبی از R خواهد بود را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۷.۲.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل nـجذبی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت $I_x = (I :_R x)$ به ازای هر $x \in R - I$، یک ایده‌آل nـجذبی از R شامل I است. به علاوه، برای هر $x \in R$، $\omega(I_x) \leq \omega(I)$.*

برهان. فرض کنیم $a_1 \cdots a_{n+1} \in I_x$ که $a_1, \cdots, a_{n+1} \in R$. در این‌صورت $(xa_1)a_2 \cdots a_{n+1} \in I$. چون I یک ایده‌آل nـجذبی می‌باشد، لذا $a_2 \cdots a_{n+1} \in I$ یا حاصل‌ضرب xa_1 در $(n-1)$ تا از a_iها متعلق به I است به طوری که $2 \leq i \leq n+1$. در هر دو حالت، یک حاصل‌ضرب n تایی از a_iها موجود می‌باشد که متعلق به I_x است. در نتیجه I_x یک ایده‌آل nـجذبی از R است. به وضوح $I \subset I_x$.

اگر $x \in R - I$ بنابر توضیحات فوق $\omega(I_x) \leq \omega(I)$. و اگر $x \in I$، آنگاه $I_x = R$ و بنابراین $\omega(I_x) = 0 \leq \omega(I)$.

□

قضیه ۸.۲.۳. *فرض کنیم $n \geq 2$ و $I \subset Rad(I)$ یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R باشد. همچنین فرض کنیم $x \in Rad(I) - I$ و $(m \geq 2)$ کمترین عدد صحیح مثبت باشد به طوری که $x^m \in I$. در این‌صورت $I_{x^{m-1}} = (I :_R x^{m-1})$ یک ایده‌آل $(n-m+1)$-جذبی از R شامل I است.*

برهان. توجه داریم $2 \leq m \leq n$ چون I یک ایده‌آل n-جذبی از R است. بنابراین $n - m + 1 \geq 1$. به وضوح $I \subseteq I_{x^{m-1}}$. فرض کنیم $a_1 \cdots a_{n-m+2} \in I_{x^{m-1}}$ که $a_1, \cdots, a_{n-m+2} \in R$. چون $x^{m-1}a_1 \cdots a_{n-m+2} \in I$ و I یک ایده‌آل n-جذبی از R است، لذا حاصل‌ضرب x^{m-1} در $(n-m+1)$ تا از a_iها یا $x^{m-2}a_1 \cdots a_{n-m+2}$ متعلق به I است. اگر حاصل‌ضرب x^{m-1} در $(n-m+1)$ تا از a_iها متعلق به I باشد، آنگاه نتیجه حاصل است. بنابراین فرض می‌کنیم حاصل‌ضرب x^{m-1} در $(n-m+1)$ تا از a_iها متعلق به I نباشد. از این رو $x^{m-2}a_1 \cdots a_{n-m+2} \in I$. چون

$$xx^{m-2}a_1 \cdots a_{n-m+1}(a_{n-m+2} + x) = x^{m-1}a_1 \cdots a_{n-m+2} + x^m a_1 \cdots a_{n-m+1} \in I$$

و حاصل‌ضرب x^{m-1} در $(n-m+1)$ تا از a_iها در I نیست و I یک ایده‌آل n-جذبی است، لذا داریم

$$x^{m-2}a_1 \cdots a_{n-m+2} + x^{m-1}a_1 \cdots a_{n-m+1} = x^{m-2}a_1 \cdots a_{n-m+1}(a_{n-m+2} + x) \in I$$

و چون $x^{m-2}a_1 \cdots a_{n-m+2} \in I$، لذا $x^{m-1}a_1 \cdots a_{n-m+1} \in I$ که یک تناقض است. زیرا فرض کردیم که حاصل‌ضرب x^{m-1} در $(n-m+1)$ تا از a_iها متعلق به I نیست. بنابراین حاصل‌ضرب x^{m-1} در $(n-m+1)$ تا از a_i متعلق به I است و در نتیجه $I_{x^{m-1}}$ یک ایده‌آل $(n-m+1)$-جذبی از R شامل I است.

□

نتیجه ۹.۲.۳. *فرض کنیم $n \geq 2$ و $I \subset Rad(I)$ یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R باشد. همچنین فرض کنیم $x \in Rad(I) - I$ و $x^n \in I$. اما $x^{n-1} \notin I$. در این‌صورت $I_{x^{n-1}} = (I :_R x^{n-1})$ یک ایده‌آل اول از R شامل $Rad(I)$ است.*

برهان. توجه داریم که بنابر قضیه ۸.۲.۳، $I_{x^{n-1}}$ یک ایده‌آل $(n-n+1)$-جذبی از R شامل I می‌باشد. بنابراین $I_{x^{n-1}}$ یک ایده‌آل اول از R شامل $Rad(I)$ می‌باشد.

□

نتیجه ۱۰.۲.۳. *فرض کنیم $n \geq 2$ و به ازای بعضی ایده‌آل اول P از R، I یک ایده‌آل P-اولیه‌ی n-جذبی از حلقه‌ی R باشد. اگر $x \in Rad(I) - I$ و n کمترین عدد صحیح مثبت باشد به طوری که $x^n \in I$، آنگاه $I_{x^{n-1}} = (I :_R x^{n-1}) = P$.*

برهان. بنابر نتیجه ۹.۲.۳، داریم $P = Rad(I) \subseteq I_{x^{n-1}}$. فرض کنیم $y \in I_{x^{n-1}}$. در این‌صورت $x^{n-1}y \in I$. چون I یک ایده‌آل P-اولیه است و $x^{n-1} \notin I$، لذا $y \in P$ و بنابراین $I_{x^{n-1}} = P$.

□

قضیه ۱۱.۲.۳. *فرض کنیم ۲ $n \geq$ و $I \subset Rad(I)$ یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R باشد به طوری که I دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال $P_1, \cdots, P_n$ داشته باشد. همچنین فرض کنیم $x \in Rad(I) - I$ و ۲ $m \geq$ کمترین عدد صحیح مثبت باشد به طوری که $x^m \in I$. در این‌صورت هر حاصل‌ضرب از $(n-m+1)$ تا از P_iها مشمول در $I_{x^{m-1}} = (I :_R x^{m-1})$ است.*

برهان. توجه داریم که $n \geq m$. بنابراین ۱ $n-m+1 \geq$. فرض کنیم $F = \{Q_1, \cdots, Q_{m-1}\} \subset G = \{P_1, \cdots, P_n\}$ و $D = G - F$. در این‌صورت D دقیقاً $(n-m+1)$ تا از P_iها را شامل می‌شود. چون $x \in Rad(I) - I$، لذا برای هر $1 \leq i \leq m-1$، $x \in Q_i$. چون $x^{m-1} \in Q_1 \cdots Q_{m-1}$ و بنابر قضیه ۱۶.۱.۳، $\left(\prod_{Q\in F} Q\right)\left(\prod_{P\in D} P\right) = P_1 \cdots P_n \subseteq I$، لذا داریم $x^{m-1}\prod_{P\in D} P \subseteq I$. بنابراین $\prod_{P\in D} P \subseteq I_{x^{m-1}}$.

□

قضیه ۱۲.۲.۳. *فرض کنیم ۲ $n \geq$ و $I \subset Rad(I)$ یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R باشد به طوری که I دقیقاً n ایده‌آل اول مینیمال مانند $P_1, \cdots, P_n$ داشته باشد. اگر $x \in Rad(I) - I$، آنگاه هر حاصل‌ضرب $(n-1)$تایی از P_iها مشمول در $I_x = (I :_R x)$ می‌باشد.*

برهان. اثبات مشابه برهان قضیه ۱۱.۲.۳، است.

□

قضیه ۱۳.۲.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل P اولیه از حلقه‌ی R باشد به طوری که $P^n \subseteq I$ که n عدد صحیح مثبت است. همچنین فرض کنیم $x \in P - I$. اگر برای بعضی اعداد صحیح مثبت m، $x^m \notin I$، آنگاه $I_{x^m} = (I :_R x^m)$ یک ایده‌آل $(n-m)$-جذبی از R است.*

برهان. توجه داریم که $n < m$ زیرا $P^n \subseteq I$. بنابراین ۱ $n-m \geq$. به وضوح I_{x^m} یک ایده‌آل P اولیه از R است. چون $P^n \subseteq I$، لذا $x^m P^{n-m} \subseteq I$ و بنابراین $P^{n-m} \subseteq I_{x^m}$. در نتیجه بنابر قضیه ۱.۲.۳، I_{x^m} یک ایده‌آل $(n-m)$-جذبی از R است.

□

۳.۳ توسیع‌هایی از ایده‌آل‌های n-جذبی

در این بخش، پایداری خاصیت n-جذبی ایده‌آل‌های تحت توسیع‌های مختلف را بررسی می‌کنیم. دو قضیه زیر و نتیجه‌ی بعد از آن، تعمیمی از نتایج شناخته شده در رابطه با ایده‌آل‌های اول هستند که اثبات آن‌ها از تعریف نتیجه می‌شود و بنابراین برهان آن‌ها را ذکر نمی‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل n-جذبی از حلقه‌ی R و S یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از R باشد به طوری که $I \cap S = \varnothing$. در این‌صورت I_s یک ایده‌آل n-جذبی از R_s است. به علاوه، $\omega_{R_s}(I_s) \leq \omega_R(I)$.*

برهان. چون $I\cap S=\varnothing$، پس I_S ایده‌آل سره از R_S می‌باشد. فرض کنیم

$$a_1\cdots a_{n+1}\in I_S \Longrightarrow \forall i \quad a_i=\frac{r_i}{s_i} \quad s.t \quad r_i\in I \ , \ \ s_i\in S$$

$$a_1\cdots a_{n+1}=\frac{r_1\cdots r_{n+1}}{s_1\cdots s_{n+1}}\in I_S \Longrightarrow \frac{r_1\cdots r_{n+1}}{s_1\cdots s_{n+1}}=\frac{a}{b} \ \ s.t \ \ a\in I \ , \ \ b\in S$$

$$\Longrightarrow \exists u\in S \ \ s.t \ \ ubr_1\cdots r_{n+1}=uas_1\cdots s_{n+1}$$

$$\Longrightarrow ubr_1\cdots r_{n+1}\in I$$

و چون I، n-جذبی است، پس یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

الف. $r_{i_1}\cdots r_{i_n}\in I$

ب. $ur_{i_1}\cdots r_{i_{n-1}}\in I$

ج. $br_{i_1}\cdots r_{i_{n-1}}\in I$

د. $ubr_{i_1}\cdots r_{i_{n-2}}\in I$

اگر $r_{i_1}\cdots r_{i_n}\in I$، آنگاه $\frac{r_{i_1}\cdots r_{i_n}}{s_{i_1}\cdots s_{i_n}}\in I_S$. درنتیجه $\frac{r_{i_1}}{s_{i_1}}\,\frac{r_{i_2}}{s_{i_2}}\,\cdots\,\frac{r_{i_n}}{s_{i_n}}\in I_S$

و اگر $ur_{i_1}\cdots r_{i_{n-1}}\in I$، آنگاه $ur_{i_1}\cdots r_{i_n}\in I$. درنتیجه $\frac{u\,r_{i_1}\,r_{i_2}\cdots r_{i_n}}{u\,s_{i_1}\,s_{i_2}\cdots s_{i_n}}\in I_S$. بنابراین $\frac{u}{u}\,\frac{r_{i_1}}{s_{i_1}}\,\frac{r_{i_2}}{s_{i_2}}\,\cdots\,\frac{r_{i_n}}{s_{i_n}}\in I_S$. به طور مشابه برای حالت‌های ج و د نیز حکم برقرار است.

اثبات قسمت پایانی قضیه نیز بوضوح برقرار است. □

قضیه ۲.۳.۳. *فرض کنیم $f:R\longrightarrow T$ یک همریختی حلقه‌ها باشد*

الف. فرض کنیم J یک ایده‌آل n-جذبی از T باشد. در این‌صورت $f^{-1}(J)$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است. به علاوه، $\omega_R\big(f^{-1}(J)\big)\leq\omega_T(J)$.

ب. فرض کنیم f پوشا و I یک ایده‌آل n-جذبی از R شامل $ker(f)$ باشد. در این‌صورت $f(I)$ یک ایده‌آل n-جذبی از T است اگر و تنها اگر I یک ایده‌آل n-جذبی از R باشد. به علاوه، $\omega_T\big(f(I)\big)=\omega_R(I)$. به ویژه، در حالت یکریختی f نیز این شرط برقرار است.

نتیجه ۳.۳.۳. *الف. فرض کنیم $R\subseteq T$ توسیعی از حلقه‌ها و J یک ایده‌آل n-جذبی از T باشد. در این‌صورت $J\cap R$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است. به علاوه، $\omega_R(J\cap R)\leq\omega_T(J)$.*

ب. فرض کنیم $I\subseteq J$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند. در این‌صورت J یک ایده‌آل n-جذبی از R است اگر و تنها اگر J/I یک ایده‌آل n-جذبی از R/I باشد. به علاوه،$\omega_{R/I}(J/I)=\omega_R(J)$.

نتیجه ۴.۳.۳. *فرض کنیم $P_1,\cdots,P_m$ ایده‌آل‌های اول قیاس ناپذیر از حلقه‌ی R باشند و برای اعداد صحیح مثبت $n_1,\cdots,n_m$ که $n=n_1+\cdots+n_m$، $I=P_1^{n_1}\cdots P_m^{n_m}$. هم‌چنین فرض کنیم $S=R-(P_1\cup\cdots\cup P_m)$. در این‌صورت $S(I)=\{x\in R\mid x/1\in I_s\}$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است و به ویژه، $P^{(n)}$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است که P یک ایده‌آل اول R است. به علاوه، $\omega\big(S(I)\big)\leq\omega(I)$ و $\omega(P^{(n)})\leq\omega(P^n)$.*

برهان. فرض کنیم $f : R \longrightarrow R_s$ همریختی طبیعی با ضابطه‌ی $f(x) = x/1$ باشد. در این‌صورت $(P_1)_s, \cdots, (P_m)_s$ ایده‌آل‌های ماکسیمال از R_s هستند و لذا بنابر قضیه ۳.۱.۱۱،
$I_s = \left(P_1^{n_1} \cdots P_m^{n_m}\right)_s$ یک ایده‌آل nـجذبی از R_s است و در نتیجه بنابر قضیه ۳.۳.۲ (الف)،
$S(I) = f^{-1}\left((P_1^{n_1} \cdots P_m^{n_m})_s\right)$ یک ایده‌آل nـجذبی از R است. حال نشان می‌دهیم $P^{(n)} = S(P^n)$،
که در این صورت به وضوح $P^{(n)}$ یک ایده‌آل nـجذبی از R خواهد بود. فرض می‌کنیم
$S(P^n) = \{x \in R \mid x/1 \in P_s^n\}$. چون

$$P^{(n)} = \left((P^n)^e\right)^c = f^{-1}\left((P^n)^e\right) = f^{-1}\left(f(P^n)R_s\right)$$

$$= \{x \in R \mid f(x) \in f(P^n)R_s\} = \{x \in R \mid x/1 \in \langle f(P^n)\rangle$$

$$= \{x \in R \mid x/1 \in \langle f(P^n)\rangle\}$$

لذا کافی است نشان دهیم $P_s^n = \langle f(P^n)\rangle$. فرض کنیم $x_1, \cdots, x_n \in P^n$ و $y \in \langle f(P^n)\rangle$. در این‌صورت $y = y_1\frac{x_1}{1} + y_2\frac{x_2}{1} + \cdots + y_n\frac{x_n}{1}$ به طوری که $y_i \in R_s$ بنابراین $y_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ که $b_i \notin P$ و $a_i \in R$. در نتیجه

$$y = \frac{a_1}{b_1}\frac{x_1}{1} + \frac{a_2}{b_2}\frac{x_2}{1} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\frac{x_n}{1}$$

از این رو

$$y = \frac{a_1x_1}{b_1} + \frac{a_2x_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_nx_n}{b_n}$$

بنابراین به ازای هر i، $\dfrac{a_ix_i}{b_i} \in P_s^n$ و لذا $y \in P_s^n$. در نتیجه

$$\langle f(P^n)\rangle \subseteq P_s^n \qquad (۳.۲)$$

حال فرض می‌کنیم $y \in P_s^n$. در این‌صورت $y = \dfrac{a}{b}$ که $b \notin P$ و $a \in P^n$. بنابراین
$y = \dfrac{a}{1}\dfrac{1}{b} \in \langle f(P^n)\rangle$. در نتیجه

$$P_s^n \subseteq \langle f(P^n)\rangle \qquad (۳.۳)$$

و از این رو بنابر۳.۲ و ۳.۳، $P_s^n = \langle f(P^n)\rangle$ و لذا

$$S(P^n) = \{x \in R \mid \frac{x}{1} \in P_s^n\} = \{x \in R \mid \frac{x}{1} \in \langle f(P^n)\rangle = P^{(n)}.$$

و بنابر قضایای ۳.۳.۲ (الف) و ۳.۳.۱، به ترتیب داریم $\omega_R(S(I)) \leq \omega_{R_s}(I_s) \leq \omega_R(I)$. در نتیجه $\omega(P^{(n)}) \leq \omega(P^n)$.

□

مثال ۳.۳.۵. الف. نامساوی در قضیه ۳.۳.۱، ممکن است اکید باشد. فرض کنیم R، I و I_n به ترتیب حلقه و ایده‌آل‌های مثال ۳.۱.۵، باشند. چون R یک حلقه‌ی فون نیومن منظم است، لذا بنابر [۱۵، تمرین۲۹] به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، R_M یک میدان است. و از این که I و هر I_n ایده‌آل‌های سره از R می‌باشند، پس $I \subseteq M$ و هر $I_n \subseteq M_n$ که M و M_n ایده‌آل‌های ماکسیمال از R هستند و لذا برای هر عدد صحیح مثبت $n \geq 2$،

$$\omega_{R_{M_n}}(I_{nM_n}) = 1 < n = \omega_R(I_n)$$

و $\omega_R(I) = \infty > 1 = \omega_{R_M}(I_M)$. همچنین فرض کنیم $J = 0$. در این‌صورت
$$\omega(J) = \infty > 1 = sup\{\omega(J_M) \mid M \in Spec(R)\}.$$
یعنی یک ایده‌آل اول موضعی به ازای هر عدد صحیح مثبت n لزوماً یک ایده‌آل nـجذبی نیست.

ب. نامساوی در قضیه ۲.۳.۳ (الف) و نتیجه ۳.۳.۳ (الف)، ممکن است اکید باشد. فرض کنیم $R = \mathbb{Q}[X] \subset T = \mathbb{Q}[X,Y]$ و $J = \langle X, Y^2 \rangle$ یک ایده‌آل از T باشد. در این‌صورت بنابر قضیه ۱.۲.۳، $\omega_T(J) = 2$ اما $J \cap R = XR$. بنابراین $\omega_R(J \cap R) = 1 < 2 = \omega_T(J)$.

ج. نامساوی در نتیجه ۴.۳.۳، نیز ممکن است اکید باشد. فرض کنیم R، P_1 و P_2 به ترتیب حلقه و ایده‌آل‌های اول از مثال ۹.۱.۳ (الف)، باشند و $I = P_1P_2$. در این‌صورت $\omega(S(I)) = 2 < \omega(I)$ و $\omega(P_1^{(2)}) = 2 < \omega(P_1^2)$.

در ادامه می‌خواهیم ایده‌آل‌های nـجذبی را در حاصل‌ضربی از دو حلقه و در نتیجه هر تعداد متناهی از حلقه‌ها مشخص کنیم که تعمیمی از این نتیجه‌ی معروف است که ایده‌آل‌های اول از $R_1 \times R_2$ به فرم $P_1 \times R_2$ یا $R_1 \times P_2$ می‌باشند که P_i ایده‌آل اول R_i است.

قضیه ۶.۳.۳. *فرض کنیم I_1 یک ایده‌آل mـجذبی از حلقه‌ی R_1 و I_2 یک ایده‌آل nـجذبی از حلقه‌ی R_2 باشد. در این‌صورت $I_1 \times I_2$ یک ایده‌آل $(m+n)$ـجذبی از حلقه‌ی $R_1 \times R_2$ می‌باشد. به علاوه،* $\omega_{R_1 \times R_2}(I_1 \times I_2) = \omega_{R_1}(I_1) + \omega_{R_2}(I_2)$.

برهان. فرض کنیم $T = R_1 \times R_2$. نشان می‌دهیم که $\omega_T(I_1 \times I_2) = \omega_{R_1}(I_1) + \omega_{R_2}(I_2)$. ابتدا فرض می‌کنیم $\omega_{R_1}(I_1) = m < \infty$ و $\omega_{R_2}(I_2) = n < \infty$ (می‌توان فرض کرد $m, n \geq 1$). در این‌صورت $x_1, \cdots, x_m \in R_1$ و $y_1, \cdots, y_n \in R_2$ وجود دارند به طوری که $x_1 \cdots x_m \in I_1$ و $y_1 \cdots y_n \in I_2$. اما هیچ زیرحاصل‌ضرب سره از x_iها در I_1 و هیچ زیرحاصل‌ضرب سره از y_jها در I_2 وجود ندارد. بنابراین
$$(x_1, 1) \cdots (x_m, 1)(1, y_1) \cdots (1, y_n) = (x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_n) \in I_1 \times I_2$$
اما هیچ زیرحاصل‌ضرب سره در $I_1 \times I_2$ وجود نخواهد داشت و در نتیجه
$$\omega_T(I_1 \times I_2) \geq m + n = \omega_{R_1}(I_1) + \omega_{R_2}(I_2) \tag{۴.۳}$$
حال قرار می‌دهیم $N = m + n + 1$ و فرض می‌کنیم $(x_1, y_1) \cdots (x_N, y_N) \in I_1 \times I_2$ که $(x_i, y_j) \in T$. بنابراین $x_1 \cdots x_N \in I_1$ و $y_1 \cdots y_N \in I_2$. در نتیجه $\{i_1, \cdots, i_m\}, \{j_1, \cdots, j_n\} \subset \{1, \cdots, N\}$ وجود دارند به طوری که $x_{i_1} \cdots x_{i_m} \in I_1$ و $y_{j_1} \cdots y_{j_n} \in I_2$. فرض کنیم $K = \{i_1, \cdots, i_m\} \cup \{j_1, \cdots, j_n\}$. در این‌صورت $\mid K \mid \leq m+n$. بنابراین $\prod_{k \in K}(x_k, y_k) \in I_1 \times I_2$ و لذا
$$\omega_T(I_1 \times I_2) \leq m + n = \omega_{R_1}(I_1) + \omega_{R_2}(I_2) \tag{۵.۳}$$
برهان فوق نشان می‌دهد که $\omega_T(I_1 \times I_2)$ نامتناهی است اگر و تنها اگر $\omega_{R_1}(I_1)$ یا $\omega_{R_2}(I_2)$ نامتناهی باشند. بنابراین طبق ۴.۳ و ۵.۳، $\omega_T(I_1 \times I_2) = \omega_{R_1}(I_1) + \omega_{R_2}(I_2)$.

□

نتیجه ۷.۳.۳. *فرض کنیم I_k به ازای هر عدد صحیح ($1 \le k \le n$)، یک ایده‌آل از حلقه‌ی R_k باشد و $R = R_1 \times \cdots \times R_n$. در این‌صورت $\omega_R(I_1 \times \cdots \times I_n) = \omega_{R_1}(I_1) + \cdots + \omega_{R_n}(I_n)$.*

نتیجه ۸.۳.۳. *فرض کنیم $I_1, \cdots, I_n$ ایده‌آل‌های دو به دو هم‌ماکسیمال از حلقه‌ی R باشند. در این‌صورت $\omega(I_1 \cap \cdots \cap I_n) = \omega(I_1 \cdots I_n) = \omega(I_1) + \cdots + \omega(I_n)$. به ویژه، برای ایده‌آل‌های ماکسیمال متمایز $M_1, \cdots, M_k$ از R و اعداد صحیح مثبت $n_1, \cdots, n_k$، $\omega(M_1^{n_1} \cdots M_k^{n_k}) = \omega(M_1^{n_1}) + \cdots + \omega(M_k^{n_k})$.*

برهان. کافیست حالت $n = 2$ را بررسی کنیم. بنابراین فرض می‌کنیم I و J ایده‌آل‌های هم‌ماکسیمال از حلقه‌ی R باشند. چون J, I هم‌ماکسیمال‌اند، لذا بنابر قضیه‌ی باقیمانده چینی $\frac{R}{IJ} \cong \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}$ و $IJ = I \cap J$. بنابراین بنابر نتیجه ۳.۳.۳ و قضیه ۶.۳.۳،

$$\omega_R(I \cap J) = \omega_R(IJ) = \omega_{R/IJ}(0) = \omega_{R/I \times R/J}(0 \times 0) = \omega_{R/I}(0) + \omega_{R/J}(0)$$
$$= \omega_R(I) + \omega_R(J)$$

اثبات قسمت دوم نتیجه نیز واضح است.

□

فرض کنیم R یک حلقه، M یک R-مدول و $T = R(+)M$. اگر I یک ایده‌آل n-جذبی از R باشد، آنگاه به آسانی می‌توان نشان داد که $I(+)M$ یک ایده‌آل n-جذبی از T است. در واقع $\omega_T\big(I(+)M\big) = \omega_R(I)$. برای حالت خاص $T = R(+)R$ که R یک دامنه‌ی صحیح است، قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه ۹.۳.۳. *فرض کنیم D یک دامنه‌ی صحیح باشد، $R = D(+)D$ و I یک ایده‌آل n-جذبی از D باشد به طوری که $(n-1)$-جذبی نیست. در این‌صورت $0(+)I$ یک ایده‌آل $(n+1)$-جذبی از R است به طوری که خاصیت n-جذبی ندارد. بنابراین $\omega_R\big(0(+)I\big) = \omega_D(I) + 1$. به ویژه، اگر P یک ایده‌آل اول از D باشد، آنگاه $0(+)P$ یک ایده‌آل ۲-جذبی از R است.*

برهان. چون I یک ایده‌آل n-جذبی از D است به طوری که $(n-1)$-جذبی نیست، پس $d_1, \cdots, d_n \in D$ وجود دارند به طوری که $d_1 \cdots d_n \in I$ و هیچ حاصل‌ضرب $(n-1)$تایی از d_iها متعلق به I نیست. فرض کنیم $b_1 = (d_1, 0), \cdots, b_n = (d_n, 0)$ و $b_{n+1} = (0, 1)$. در این‌صورت
$$b_1 \cdots b_{n+1} = (0, d_1 \cdots d_n) \in 0(+)I$$

و به وضوح هیچ حاصل‌ضرب nتایی از b_iها متعلق به $0(+)I$ نیست. بنابراین $0(+)I$ یک ایده‌آل n-جذبی از R نیست. حال نشان می‌دهیم که $0(+)I$ یک ایده‌آل $(n+1)$-جذبی از R است. فرض کنیم $c_1 = (a_1, m_1), \cdots, c_{n+2} = (a_{n+2}, m_{n+2}) \in R$ به طوری که $c_1 \cdots c_{n+2} \in 0(+)I$. چون $Rad\big(0(+)I\big) = 0(+)D$ ایده‌آل اول از R است، پس حداقل یکی از c_iها عضو $0(+)D$ است که فرض می‌کنیم $c_1 = (0, m_1) \in 0(+)D$. در نتیجه $c_1 \cdots c_{n+2} = (0, m_1 a_2 \cdots a_{n+2}) \in 0(+)I$.

از این رو $m_1 a_2 \cdots a_{n+2} \in I$. بنابراین حاصل‌ضرب m_1 در $(n-1)$تا از a_iها یا حاصل‌ضرب nتا از a_iها متعلق به I است. در نتیجه حاصل‌ضرب c_1 در $(n-1)$ تا از c_iها $(i \neq 1)$ در $I(+)\circ$ می‌باشد یا حاصل‌ضرب nتا از c_iها $(i \neq 1)$. از این رو $I(+)\circ$ یک ایده‌آل $(n+1)$-جذبی از R است و در نتیجه $\omega_R(\circ(+)I) = n+1$. اثبات قسمت پایانی قضیه نیز واضح است. □

قضیه ۱۰.۳.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل ۲-جذبی از حلقه‌ی R باشد به طوری که $Rad(I) = P$ یک ایده‌آل اول از R است و $P \neq I$. برای هر $x \in P - I$، فرض می‌کنیم $B_x = \{y \in R \mid yx \in I\}$. در این‌صورت B_x یک ایده‌آل اول از R شامل P است. به علاوه، به ازای هر $x, y \in P - I$، $B_x \subseteq B_y$ یا $B_y \subseteq B_x$.*

برهان. فرض کنیم $x \in P - I$. چون $P^2 \subseteq I$ (بنابر قضیه ۵.۲.۲)، لذا $P \subseteq B_x$. فرض کنیم $P \neq B_x$ و $yz \in B_x$ که $y, z \in R$. از آن جایی که $P \subset B_x$، پس می‌توان فرض کرد $y \notin P$ و $z \notin P$. بنابراین $yz \notin I$. چون $yz \in B_x$، لذا $yzx \in I$ و از آن جایی که I یک ایده‌آل ۲-جذبی از R است و $yz \notin I$، لذا نتیجه می‌گیریم $yx \in I$ یا $zx \in I$. بنابراین $y \in B_x$ یا $z \in B_x$. از این رو B_x یک ایده‌آل اول از R شامل P خواهد بود.
فرض کنیم $x, y \in P - I$ و $z \in B_x - B_y$. چون $P \subseteq B_y$ و $z \in B_x - P$، لذا نشان می‌دهیم که $B_y \subset B_x$. فرض کنیم $\omega \in B_y$. چون $P \subseteq B_x$، پس می‌توان فرض کرد $\omega \in B_y - P$. و از آن جایی که $z \notin P$ و $\omega \notin P$، لذا $z\omega \notin I$. چون $z(x+y)\omega \in I$ ، $zy \notin I$ و $z\omega \notin I$ و I یک ایده‌آل ۲-جذبی است، لذا $(x+y)\omega \in I$. بنابراین $\omega x \in I$ زیرا $(x+y)\omega \in I$ و $\omega y \in I$. در نتیجه $\omega \in B_y \subseteq B_x$. □

قضیه ۱۱.۳.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل ۲-جذبی از حلقه‌ی R باشد به طوری که $Rad(I) = P_1 \cap P_2 \neq I$ که P_1 و P_2 تنها ایده‌آل‌های اول متمایز ناصفر از R هستند که روی I مینیمال‌اند. در این‌صورت برای هر $x \in Rad(I) - I$، $B_x = \{y \in R \mid xy \in I\}$ یک ایده‌آل اول از R شامل P_1 و P_2 است. به علاوه، به ازای هر $x, y \in Rad(I) - I$، $B_x \subseteq B_y$ یا $B_y \subseteq B_x$.*

برهان. فرض کنیم $x \in Rad(I) - I$. چون $P_1 P_2 \subseteq I$ (بنابر قضیه ۵.۲.۲)، لذا $xP_1, xP_2 \subseteq I$. از این رو $P_1, P_2 \subset B_x$. فرض کنیم $yz \in B_x$ که $y, z \in R$. چون $P_1, P_2 \subset B_x$، لذا می‌توان فرض کرد $y, z \notin P_1$ و $y, z \notin P_2$. بنابراین $yz \notin I$ و از آن جایی که $yz \in B_x$. از این رو داریم $yzx \in I$. چون I یک ایده‌آل ۲-جذبی از R است و $yz \notin I$، لذا $yx \in I$ یا $zx \in I$ و بنابراین $y \in B_x$ یا $z \in B_x$. از این رو B_x یک ایده‌آل اول از R است و با بکارگیری برهانی مشابه برهان قضیه ۱۰.۳.۳، نتیجه حاصل است. □

قضیه ۱۲.۳.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد به طوری که $I \neq Rad(I)$ و $Rad(I)$ یک ایده‌آل اول از R باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *I یک ایده‌آل ۲-جذبی از حلقه‌ی R است.*
۲. *به ازای هر $x \in Rad(I) - I$، $B_x = \{y \in R \mid yx \in I\}$ یک ایده‌آل اول از R است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) اثبات بنابر قضیه ۱۰.۳.۳، واضح است.
(۲) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنیم $xyz \in I$ که $x, y, z \in R$. چون $Rad(I)$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R است و $I \subseteq Rad(I)$ ، لذا می‌توان فرض کرد $x \in Rad(I)$. اگر $x \in I$، آنگاه $xy \in I$ و نتیجه حاصل است. بنابراین فرض می‌کنیم $x \in Rad(I) - I$. در این صورت $yz \in B_x$. چون بنابر قضیه ۱۰.۳.۳، B_x یک ایده‌آل اول از R است، پس $yx \in I$ یا $zx \in I$. بنابراین I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است.
□

قضیه ۱۳.۳.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد که $I \neq Rad(I) = P_1 \cap P_2$ به طوری که P_1 و P_2 ایده‌آل‌های اول متمایز ناصفر از R هستند که روی I مینیمال‌اند. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از حلقه‌ی R است.*
۲. *$P_1P_2 \subseteq I$ و به ازای هر $x \in Rad(I) - I$، $B_x = \{y \in R \mid yx \in I\}$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R است.*
۳. *به ازای هر $x \in (P_1 \cup P_2) - I$، $B_x = \{y \in R \mid yx \in I\}$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) اثبات بنابر قضایای ۵.۲.۲ و ۱۱.۳.۳، واضح می‌باشد.
(۲) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنیم $x \in P_1 - P_2$. به وضوح $yx \in I$ اگر وتنها اگر $y \in P_2$. چون $P_1P_2 \subseteq I$ پس $B_x = P_2$ یک ایده‌آل اول از R است. فرض کنیم $z \in P_2 - P_1$. در این‌صورت با بکارگیری روندی مشابه قبل، $B_z = P_1$ یک ایده‌آل اول از R است. و چون B_d به ازای هر $d \in Rad(I) - I$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R است، لذا نتیجه حاصل است.
(۳) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنیم $xyz \in I$. می‌توان فرض کرد $x \in (P_1 \cup P_2) - I$. در این‌صورت $yz \in B_x$. چون B_x بنابر قضیه ۱۱.۳.۳، یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R است، لذا $yx \in I$ یا $zx \in I$ و بنابراین I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از حلقه‌ی R است.

□

مثال ۱۴.۳.۳. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$.
الف. فرض کنیم $I = p_1 \cdots p_n\mathbb{Z}$ که $p_1, \cdots, p_n \in \mathbb{Z}$ اعداد اول مثبت (نه لزوماً متمایز) هستند. در این صورت I یک ایده‌آل nـجذبی از $\mathbb{Z}$ است به طوری که خاصیت $n-1$ـجذبی ندارد. از اینرو بنابر قضیه‌ی ۹.۳.۳، $0(+)I$ یک ایده‌آل $n+1$ـجذبی از R است اما یک ایده‌آل nـجذبی از D نیست. بنابراین $\omega_R(0(+)I) = \omega_{\mathbb{Z}}(I) + 1 = n + 1$.
ب. فرض کنیم $p \in \mathbb{Z}$ اعداد اول مثبت باشد. در این صورت بنابر قضیه‌ی ۹.۳.۳، $J = 0(+)p\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است به طوری که $Rad(J) = 0(+)\mathbb{Z}$. برای هر $x \in Rad(J) - J$، $J_x = (J :_R x) = (p\mathbb{Z})(+)\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل اول از R است. بنابراین برای هر $x \in Rad(J) - J$، $\omega(J_x) = 1 < 2 = \omega(J)$.
ج. اگر I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از حلقه‌ی T باشد و $x, y \in Rad(I) - I$، آنگاه بنابر قضایای ۱۰.۳.۳ و ۱۱.۳.۳، I_x و I_y ایده‌آل‌های اول از T هستند. اما اگر $n \geq 3$ و I یک ایده‌آل nـجذبی از T باشد، آنگاه

I لزوماً یک ایده‌آل اول از T نیست. فرض کنیم $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ اعداد اول مثبت متمایز باشند. در این صورت بنابر قضیه‌ی ۹.۳.۳، $J = 0(+)p_1p_2\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل ۳ـجذبی از R است به طوری که یک ایده‌آل ۲ـجذبی از $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$ با $Rad(J) = 0(+)\mathbb{Z}$ نیست. فرض کنیم $x = (0, n) \in Rad(J) - J$ در این صورت اگر $n \in \mathbb{Z} - (p_1\mathbb{Z} \bigcup p_2\mathbb{Z})$، آنگاه $J_x = (p_1p_2\mathbb{Z})(+)\mathbb{Z}$ و $\omega(J_x) = 2$. اگر $n \in p_2\mathbb{Z} - p_1p_2\mathbb{Z}$، آنگاه $J_x = (p_1\mathbb{Z})(+)\mathbb{Z}$ و $\omega(J_x) = 1$. اگر $n \in p_1\mathbb{Z} - p_1p_2\mathbb{Z}$، آنگاه $J_x = (p_2\mathbb{Z})(+)\mathbb{Z}$ و $\omega(J_x) = 1$. بنابراین $\omega(J) = 3$ در حالیکه برای هر $x \in Rad(J) - J$، $\omega(J_x)$ برابر با ۱ یا ۲ است.

د. فرض کنیم I یک ایده‌آل Pـاولیه از حلقه‌ی T باشد به طوری که برای بعضی اعداد صحیح مثبت m، $P^m \subseteq I$. اگر I یک ایده‌آل nـجذبی از T باشد به طوری که خاصیت $n - 1$ـجذبی نداشته باشد، آنگاه بنابر قضیه ۱.۲.۳، $\omega_T(I) = n \geq m$. اما بنابر قسمت (a)، برای هر عدد صحیح $n \geq 2$، حلقه $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$ و ایده‌آل $I_n = 0(+)(p_1 \cdots p_{n-1}\mathbb{Z})$ از R، شامل ایده‌آل اول $P = Rad(I_n) = 0(+)\mathbb{Z}$ از R هستند که $P^2 \subseteq I_n$ و $\omega_R(I_n) = n$.

مثال ۱۵.۳.۳. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{Q}$. در این‌صورت $I = 0(+)2\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل از R است. به طوری که $Rad(I) = 0(+)\mathbb{Q}$. فرض کنیم $x = (0, \frac{1}{2}) \in Rad(I) - I$.
در این‌صورت $I_x = (I :_R x) = 4\mathbb{Z}(+)\mathbb{Q}$ یک ایده‌آل اول از Rنیست و بنابر قضیه ۱۲.۳.۳، I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R نیست. در واقع به راحتی می‌توان نشان داد که برای هر عدد صحیح مثبت n، I یک ایده‌آل nـجذبی از R نیست. فرض کنیم به ازای هر عددصحیح مثبت n، $x_i = (2, 0)$ که $1 \leq i \leq n$ و $x_{n+1} = (0, \frac{1}{2^{n-1}})$. در این‌صورت $x_1 \cdots x_{n+1} = (0, 2) \in I$. اما هیچ زیر حاصل‌ضرب سره از x_iها در I نیست و بنابراین $\omega_R(I) = \infty$.

قضیه ۱۶.۳.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت $\langle I, x\rangle$ یک ایده‌آل nـجذبی از حلقه‌ی $R[X]$ است اگر و تنها اگر I یک ایده‌آل nـجذبی از R باشد. به علاوه، $\omega_{R[X]}(\langle I, x\rangle) = \omega_R(I)$.*

برهان. بنابر نتیجه ۳.۳.۳ (ب)، چون در $R \cong R[X]/\langle x\rangle$، $I \cong \langle I, x\rangle/\langle x\rangle$، لذا حکم برقرار است. به وضوح $\omega_{R[X]}(\langle I, x\rangle) = \omega_R(I)$.

□

لم ۱۷.۳.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد و $x + y \in I$ به طوری که $x, y \in R$. در این‌صورت $I_x = I_y$.*

قضیه ۱۸.۳.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت $I[X]$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از حلقه‌ی $R[X]$ است اگر و تنها اگر I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R باشد.*

برهان. اگر $I[X]$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از $R[X]$ باشد، آنگاه بنابر نتیجه ۳.۳.۳ (الف)، I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R است.
بالعکس، فرض کنیم I یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R باشد. یادآوری می‌کنیم $I[X]$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی $R[X]$ است اگر و تنها اگر I یک ایده‌آل اول از R باشد. بنابراین می‌توان فرض کرد که I

ایده‌آل اول از R نباشد. از آن جا که بنابر قضیه ۵.۲.۲، $Rad(I) = P$ یک ایده‌آل اول از R است یا $Rad(I) = P_1 \cap P_2$ به طوری که $P_1P_2 \subseteq I$ و P_1, P_2 ایده‌آل‌های اول از R می‌باشند، لذا

$$Rad\big(I[X]\big) = P_1[X] \cap P_2[X] \quad \text{یا} \quad Rad\big(I[X]\big) = P[X]$$

به طوری که $P_1[X]P_2[X] \subseteq I[X]$. حال فرض کنیم
$f(x) = a_0 + \cdots + a_nx^n \in Rad\big(I[X]\big) - I[X]$. بنابر قضایای ۱۲.۳.۳ و ۱۳.۳.۳، کافیست نشان دهیم $I[X]_{f(x)}$ یک ایده‌آل اول از $R[X]$ است. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض می‌کنیم برای هر $0 \leq i \leq n$، $a_i \notin I$. با استفاده از قضایای ۱۰.۳.۳ و ۱۱.۳.۳، چون $I_{a_0}, I_{a_1}, \cdots, I_{a_n}$ ایده‌آل‌های اول از R هستند، لذا $0 \leq k \leq n$ وجود دارد به طوری که برای هر $0 \leq i \leq n$، $I_{a_k} \subseteq I_{a_i}$. نشان می‌دهیم $I[X]_{f(x)} = I_{a_k}[X]$ ایده‌آل اول از $R[X]$ است. به وضوح $I_{a_k}[X] \subseteq I[X]_{f(x)}$. زیرا اگر $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in I_{a_k}[X]$. در این‌صورت برای هر $1 \leq j \leq m$، $b_j \in I_{a_k} \subseteq I_{a_i}$. پس برای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$، $b_ja_i \in I$. لذا $g(x)f(x) \in I[X]$ و در نتیجه $g(x) \in I[X]_{f(x)}$. فرض کنیم $g(x) = b_0 + \cdots + b_mx^m \in I[X]_{f(x)}$. بنابراین

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + \cdots a_nb_mx^{n+m} \in I[X]$$

چون $b_0a_0 \in I$، پس $b_0 \in I_{a_0}$. حال فرض می‌کنیم $i < k$ به طوری که برای هر c که $0 \leq c \leq i < k$، $b_0 \in I_{a_c}$. نشان خواهیم داد که $b_0 \in I_{a_{i+1}}$.
جمله‌ی $(b_{i+1}a_0 + b_ia_1 + \cdots + b_1a_i + b_0a_{i+1})x^{i+1}$ از $f(x)g(x)$ را در نظر می‌گیریم.(بعضی از b_iها ممکن است صفر باشند). قرار می‌دهیم:

$$t = b_{i+1}a_0 + \cdots + b_1a_i$$

چون $t + b_0a_{i+1} \in I$، لذا بنابر لم ۱۷.۳.۳، $I_t = I_{b_0a_{i+1}}$. از آن جایی که برای هر c که $0 \leq c \leq i < k$، $b_0 \in I_{ac}$، پس $b_0 \in I_t$ زیرا

$$b_0t = b_{i+1}b_0a_0 + \cdots + b_1b_0a_i \in I$$

بنابراین $b_0 \in I_{b_0a_{i+1}}$. پس $b_0^2a_{i+1} \in I$ یعنی $b_0^2 \in I_{a_{i+1}}$. از این‌رو $b_0 \in I_{a_{i+1}}$ زیرا $I_{a_{i+1}}$ ایده‌آل اول R است. می‌دانیم که $b_0 \in I_{a_0}$. قرار می‌دهیم $i = 0$، پس $b_0 \in I_{a_1}$. حال قرار می‌دهیم $i = 1$. چون I_{a_1} و $b_0 \in I_{a_0}$، لذا $b_0 \in I_{a_2}$. با ادامه‌ی همین روند خواهیم داشت $b_0 \in I_{a_k}$. حال فرض می‌کنیم $0 \leq h < m$ و $b_0, \cdots, b_n \in I_{a_k}$. نشان می‌دهیم $b_{h+1} \in I_{a_k}$.
جمله‌ی $(b_0a_{h+1} + \cdots + b_{h+1}a_0)x^{h+1}$ را در نظر می‌گیریم. مستقیماً نتیجه می‌گیریم که $b_{h+1} \in I_{a_0}$. با تکرار روند مشابه آنچه برای نشان دادن $b_0 \in I_{a_k}$ استفاده شد، خواهیم داشت $b_{h+1} \in I_{a_k}$. قبلاً نشان دادیم که $b_0 \in I_{a_k}$. قرار می‌دهیم $h = 0$، پس بنابر توضیحات فوق، $b_1 \in I_{a_k}$. حال قرار می‌دهیم $h = 1$. بنابراین $b_2 \in I_{a_k}$. با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت $b_m \in I_{a_k}$. پس برای هر $1 \leq j \leq m$، $b_ja_k \in I$ و چون برای هر $1 \leq i \leq n$، $I_{a_k} \subseteq I_{a_i}$، از این‌رو برای هر $1 \leq j \leq m$، $b_ja_i \in I$. پس $g(x) \in I_{a_k}[X]$. بنابراین $I[X]_{f(x)} = I_{a_k}[X]$ ایده‌آل اول از $R[X]$ است و در نتیجه $I[X]$ یک ایده‌آل ۲ـجذبی از $R[X]$ است. $\square$

این بخش را با بررسی ایده‌آل‌های n-جذبی برای ساختار "$D+M$" به پایان می‌رسانیم. فرض کنیم $T=K+M$ یک دامنه‌ی صحیح باشد به طوری که K یک میدان و زیرحلقه‌ای از T است و M یک ایده‌آل ماکسیمال ناصفر از T است. همچنین فرض کنیم D یک زیرحلقه از K باشد. در این‌صورت $R=D+M$ یک زیرحلقه از T است به طوری که $qf(R)=qf(T)$. اولین لم، ایده‌آل‌های n-جذبی از حلقه‌ی R که شامل M می‌باشند را توصیف می‌کند.

لم ۱۹.۳.۳. *فرض کنیم $T=K+M$ یک دامنه‌ی صحیح باشد به طوری که K یک میدان و زیرحلقه‌ای از T است و M یک ایده‌آل ماکسیمال ناصفر از T می‌باشد. همچنین فرض کنیم D یک زیرحلقه از K و $R=D+M$. فرض کنیم I ایده‌آلی از D باشد. در این‌صورت $I+M$ یک ایده‌آل n-جذبی از R است اگر و تنها اگر I یک ایده‌آل n-جذبی از D باشد. به علاوه، $\omega_R(I+M)=\omega_D(I)$.*

برهان. بنابر نتیجه ۳.۳.۳ (ب)، حکم برقرار است زیرا در $R/M\cong D$، $(I+M)/M\cong I$.
به وضوح $\omega_R(I+M)=\omega_D(I)$.

□

قضیه ۲۰.۳.۳. *فرض کنیم $T=K[[X]]=K+XK[[X]]$ یک دامنه‌ی صحیح باشد به طوری که K یک میدان و $M=XK[[X]]$ یک ایده‌آل ماکسیمال از T است، همچنین فرض کنیم $R=D+M=D+XK[[X]]$ که D زیرحلقه‌ای از K است. در این‌صورت هر ایده‌آل از R با M قابل مقایسه است. ایده‌آل‌های R شامل M به فرم $I+XK[[X]]$ هستند که I یک ایده‌آل از D است و ایده‌آل‌های R مشمول در M به فرم $WX^n+X^{n+1}K[[X]]$ می‌باشند که W یک D-زیرمدول از K و n عدد صحیح مثبت است. توجه داریم که $M^n=X^nK[[X]]$ و برای هر عدد صحیح مثبت n، $\omega_T(M^n)=\omega_R(M^n)=n$ [۱۱، قضیه ۲.۱].*

تعریف ۲۱.۳.۳. دامنه‌ی صحیح R را حلقه‌ی ارزیابی می‌نامیم، هر گاه برای هر دو ایده‌آل A و B از R، $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$.
دامنه صحیح R را که حلقه‌ی ارزیابی باشد، دامنه‌ی ارزیابی گوییم.

تعریف ۲۲.۳.۳. دامنه‌ی ایده‌آل اصلی R را حلقه‌ی ارزیابی گسسته یا DVR گویند، هر گاه دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال ناصفر داشته باشد.

قضیه ۲۳.۳.۳. *فرض کنیم D یک زیرحلقه از میدان K باشد و $R=D+XK[[X]]$.*
الف. اگر D یک میدان باشد، آنگاه هر ایده‌آل سره از R برای بعضی اعداد صحیح مثبت n، یک ایده‌آل n-جذبی از R است.
ب. اگر D یک زیرحلقه‌ی سره از K باشد و $qf(D)=K$، آنگاه ایده‌آل‌های n-جذبی ناصفر از R به فرم $I+XK[[X]]$ یا $X^mK[[X]]$ می‌باشند که I یک ایده‌آل n-جذبی از D و m عدد صحیح مثبت است که $1\leq m\leq n$. به علاوه، $\omega_R(I+XK[[X]])=\omega_D(I)$ و $\omega_R(X^mK[[X]])=m$.

برهان. الف. فرض کنیم $D=K$. در این‌صورت حکم برقرار است زیرا $R=K[[X]]$ یک DVR است. بنابراین فرض می‌کنیم $D=F$ یک زیرمیدان سره از K باشد. در این‌صورت $R=$

$F+XK[[X]]$ یک دامنه‌ی صحیح شبه موضعی یکـ بعدی با ایده‌آل ماکسیمال $M=XK[[X]]$ است. هر ایده‌آل سره ناصفر از R، Mـ اولیه است و بنابر قضیه ۲۰.۳.۳، برای بعضی Fـزیرفضای ناصفر W از K و عدد صحیح مثبت n، به فرم $I=WX^n+X^{n+1}K[[X]]$ است. بنابراین $M^{n+1}\subseteq I$. در نتیجه بنابر قضیه ۱.۲.۳، $\omega_R(I)\leq n+1$. لذا هر ایده‌آل سره از R برای بعضی اعداد صحیح مثبت n، nـجذبی می‌باشد.

ب. فرض کنیم $K=qf(D)\supset D$ و J یک ایده‌آل nـجذبی ناصفر از R باشد. در این‌صورت بنابر قضیه ۲۰.۳.۳، J با M قابل مقایسه است. اگر $J\subset M$، آنگاه بنابر لم ۱۹.۳.۳، $J=I+XK[[X]]$ که I یک ایده‌آل nـجذبی از D است. بنابراین می‌توان فرض کرد $M\subseteq J$. در این‌صورت $J=WX^m+X^{m+1}K[[X]]$ که W یک Dـزیرمدول ناصفر از K و m عدد صحیح مثبت است. فرض کنیم $W\subset K$. در این‌صورت $0\neq a,d\in D$ وجود دارند به طوری که $a\in W$، اما برای هر عدد صحیح مثبت i، $\frac{a}{d^i}\notin W$. بنابراین $d^i\left(\frac{a}{d^i}X^m\right)=aX^m\in J$، اما هیچ زیرحاصل‌ضرب سره‌ای در J موجود نیست. لذا به ازای هر عدد صحیح مثبت i، J یک ایده‌آل iـجذبی از R نیست، یعنی $\omega_R(J)=\infty$. در نتیجه $W=K$ و بنابراین $J=X^mK[[X]]$ یک ایده‌آل mـجذبی از R است و $1\leq m\leq n$.

اثبات $\omega_R(I+XK[[X]])=\omega_D(I)$ و $\omega_R(X^mK[[X]])=m$ از لم ۱۹.۳.۳ و توضیحات قبل این قضیه، نتیجه می‌شود.

□

تعریف ۲۴.۳.۳. حلقه‌ی R را حلقه‌ی بزوت[۱] گویند، هر گاه هر ایده‌آل با تولید متناهی از R، اصلی باشد.

تعریف ۲۵.۳.۳. دامنه‌ی صحیح R را دامنه‌ی بزوت[۲] گویند، هر گاه یک حلقه‌ی بزوت باشد.

تعریف ۲۶.۳.۳. گوییم میدان K بسته جبری است، هرگاه هر چندجمله‌ای غیرثابت از $K[X]$ یک ریشه در K داشته باشد.

تعریف ۲۷.۳.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه از S باشد و $s\in S$. در این صورت گوییم s روی R صحیح است، هرگاه $n\in\mathbb{N}$ و $r_0,r_1,\cdots,r_{n-1}\in R$ موجود باشند به طوری که

$$r_0+r_1s+\cdots+r_{n-1}s^{n-1}+s^n=0$$

تعریف ۲۸.۳.۳. فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی جابجایی S باشد. در این‌صورت $R':=\{s\in S$ ؛ s روی R صحیح است$\}$ یک زیرحلقه‌ی S است که R را شامل می‌شود و بستار صحیح R در S نام دارد. گوییم R در S صحیحاً بسته است اگر $R=R'$.

تعریف ۲۹.۳.۳. فرض کنیم F توسیع میدان K باشد. در این‌صورت K یک فضای برداری روی F است. بعد K روی میدان F را درجه توسیع F روی K نامیده و با علامت $[F:K]$ نشان می‌دهیم.

[۱] Bezout ring

[۲] Bezout domain

قضیه ۳۰.۳.۳. *دامنه صحیح R یک دامنه‌ی بزوت است اگر و تنها اگر T یک دامنه‌ی بزوت، K میدان کسرهای D و D یک دامنه‌ی بزوت باشد.*

برهان. رجوع شود به[۱۳، قضیه ۷]. □

قضیه ۳۱.۳.۳. *فرض کنیم K میدان کسرهای D باشد، هم‌چنین فرض کنیم T و D بعد کرول متناهی داشته باشند. در این‌صورت R بعد کرول متناهی دارد که برابر است با*

$$Max\{T \text{ بعد } \text{ و } \text{ بعد } D + \text{ ارتفاع } M \text{ در } T\}$$

برهان. رجوع شود به [۱۳،نتیجه ۹]. □

حال مثالی را بیان می‌کنیم که دو حالت قضیه قبل را توضیح می‌دهد.

مثال ۳۲.۳.۳ الف. فرض کنیم $R = \mathbb{Q} + X\mathbb{R}[[X]] \subset \mathbb{R}[[X]]$. در این‌صورت R یک دامنه‌ی صحیح شبه موضعی یکـ بعدی با ایده‌آل ماکسیمال $M = X\mathbb{R}[[X]]$ است به طوری که R دامنه‌ی ارزیابی نیست[۱۵،تمرین ۱۲ـ۱۳].
هر ایده‌آل سره ناصفر از R برای بعضی $\mathbb{Q}$ـزیرفضای ناصفر W از $\mathbb{R}$ و عدد صحیح مثبت n، به فرم $I = WX^n + X^{n+1}\mathbb{R}[[X]]$ است. در این‌صورت $M^{n+1} \subseteq I$. در نتیجه بنابر قضیه ۱.۲.۳، $\omega_R(I) \leq n+1$. اگر $W = \mathbb{R}$، آنگاه $I = X^n\mathbb{R}[[X]]$ و $\omega_R(I) = n$. در غیر این‌صورت $\omega_R(I) = n+1$. برای اثبات این مطلب فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R} - W$ و $\beta = \alpha^{\frac{1}{n}}$ به طوری که $\alpha > 0$. در این‌صورت $(\beta X)^{n+1} \in I$، اما $(\beta X)^n = \alpha X^n \notin I$. بنابراین به ازای بعضی اعداد صحیح مثبت n، هر ایده‌آل سره از R یک ایده‌آل nـجذبی از R است.
ب. فرض کنیم $R = F + XK[[X]]$ به طوری که F یک زیرمیدان سره از K می‌باشد. در این‌صورت R یک دامنه‌ی صحیح شبه موضعی یکـبعدی با ایده‌آل ماکسیمال $M = XK[[X]]$ است. به علاوه، R دامنه‌ی ارزیابی نیست و ویژگی‌های حلقه‌ای R، وابسته به توسیع میدان K/F است. به عنوان مثال، حلقه‌ی R نوتری است اگر و تنها اگر $[K : F] < \infty$ و R صحیحاً بسته است اگر و تنها اگر F بسته جبری در K باشد [۱۱، قضیه ۲.۱]. لذا بنابر قضیه ۲۳.۳.۳ (الف)، با انتخاب هر زیرمیدان دلخواه از K می‌توان دامنه‌ی صحیحی مانند R پیدا نمود که تمام ایده‌آل‌های سره آن nـجذبی باشند که عدد n صحیح مثبت است.
ج. فرض کنیم $R = \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[[X]] \subset \mathbb{Q}[[X]]$. در این‌صورت بنابر قضایای ۳۰.۳.۳ و ۳۱.۳.۳ R یک دامنه‌ی بزوت دوـبعدی با $Spec(R) = \{0, X\mathbb{Q}[[X]]\} \cup \{pR \mid p \in \mathbb{Z}\text{عدد اول است}\}$ است به طوری که دامنه‌ی ارزیابی نیست. ایده‌آل $I = XR = \mathbb{Z}X + X^2\mathbb{Q}[[X]]$ به ازای هر عدد صحیح مثبت n، یک ایده‌آل nـجذبی از R نیست. بنابراین $\omega_R(I) = \infty$ زیرا $2^n(\frac{1}{2^n}X) = X \in I$ است اما هیچ زیرحاصلضرب سره‌ای در I موجود نیست. بنابر قضیه ۲۳.۳.۳ (ب)، یک ایده‌آل nـجذبی ناصفر از R به فرم $I_1 = P_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k} R = P_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k}\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[[X]]$ است که $P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{Z}$ اعداد اول مثبت متمایز و $n_1, \cdots, n_k$ اعداد صحیح مثبت هستند به طوری که $n_1 + \cdots + n_k \leq n$ یا $I_2 = X^m\mathbb{Q}[[X]]$ که m عدد صحیح مثبت است و $m \leq n$. به علاوه، $\omega_R(I_1) = n_1 + \cdots n_k$ و

$\omega_R(I_2) = m$.

د. فرض کنیم D یک زیرحلقه از میدان K باشد به طوری که $D \subset qf(D) = F \subset K$. در این‌صورت هر ایده‌آل ناصفر از $R = D + M$ مشمول در $M = XK[[X]]$ برای بعضی Dـزیرمدول ناصفر W از K و عدد صحیح مثبت m به فرم $I = WX^m + X^{m+1}K[[X]]$ می‌باشد. اگر $W \subset K$، آنگاه برای بعضی اعداد صحیح مثبت n، I ممکن است nـجذبی باشد یا نباشد. به عنوان مثال، فرض کنیم $I_1 = XR = DX + X^2K[[X]]$ و $I_2 = FX + X^2K[[X]]$. در این‌صورت به آسانی ثابت می‌شود که $\omega_R(I_2) = 2$ و $\omega_R(I_1) = \infty$.

۴.۳ ایده‌آل‌های nـجذبی در حلقه‌های خاص

در این بخش، ایده‌آل‌های nـجذبی را در چند کلاس خاص از حلقه‌های جابجایی مطالعه می‌کنیم. اگر R یک دامنه‌ی ددکیند باشد، آنگاه هر ایده‌آل سره ناصفر از R حاصل‌ضربی از ایده‌آل‌های ماکسیمال است و بنابراین برای بعضی اعداد صحیح مثبت n، یک ایده‌آل nـجذبی از R خواهد بود. به ویژه، اگر $I = M_1 \cdots M_n$ که هر M_i یک ایده‌آل ماکسیمال از R است، آنگاه بنابر قضیه ۱۱.۱.۳، I یک ایده‌آل nـجذبی از R است. در واقع، عکس این مطلب در حالتی که R یک دامنه‌ی صحیح نوتری باشد نیز برقرار است.

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای(نه لزوماً یکدار) شامل یک عنصر منظم باشد، هم‌چنین فرض کنیم $T(R)$ حلقه‌ی کسرهای تام R باشد. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از $T(R)$ را یک ایده‌آل کسری R گویند، هر گاه S یک Rـزیر مدول از $T(R)$ باشد به طوری که برای بعضی عناصر منظم r از R، $rS \subseteq R$.

تذکر: اگر I یک ایده‌آل کسری ناصفر از R باشد، آنگاه $I^{-1} = \{x \in T(R) \mid xI \subseteq R\}$

تعریف ۲.۴.۳. دامنه‌ی صحیح R را دامنه‌ی ددکیند[۳] می‌نامیم، هر گاه برای هر ایده‌آل کسری ناصفر I از R، $II^{-1} = R$.

قضیه ۳.۴.۳. *فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح نوتری باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. R یک دامنه‌ی ددکیند است.

۲. اگر I یک ایده‌آل nـجذبی از R باشد، آنگاه برای ایده‌آل‌های ماکسیمال $M_1, \cdots, M_m$ از R که $1 \le m \le n$، $I = M_1 \cdots M_m$.

به علاوه، اگر R یک دامنه‌ی ددکیند باشد به طوری که میدان نباشد و برای ایده‌آل‌های ماکسیمال $M_1, \cdots, M_n$ از R اگر $I = M_1 \cdots M_n$، آنگاه $\omega(I) = n$.

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) با توجه به توضیحات ابتدایی بخش، نتیجه حاصل است.
(۲) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد. چون هر ایده‌آل بین M^2 و M، یک

[۳] Dedekind domain

ایده‌آل Mـاولیه از R است، لذا بنابر قضیه ۱.۲.۳، یک ایده‌آل ۲ـجذبی از R خواهد بود. فرض بند (۲) نتیجه می‌دهد که هیچ ایده‌آلی بین M^{2} و M وجود ندارد. از این رو بنابر [۱۵، قضیه ۳۹.۲]، R یک دامنه‌ی ددکیند است. اثبات قسمت پایانی بند (۲) با استفاده از لم ۱۰.۱.۳ و نتیجه ۸.۳.۳، حاصل می‌شود.

□

تعریف ۴.۴.۳. دامنه‌ی صحیح R را دامنه‌ی ددکیند تقریبی[۴] گویند، هرگاه برای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، R_M یک دامنه‌ی ارزیابی نوتری[۵] (DVR) باشد.

قضیه ۵.۴.۳. *فرض کنیم R یک دامنه‌ی ددکیند تقریبی باشد. در این‌صورت یک ایده‌آل ناصفر I از R ایده‌آلی nـجذبی است اگر و تنها اگر برای ایده‌آل‌های ماکسیمال $M_1, \cdots, M_m$ از R که $1 \leq m \leq n$، $I = M_1 \cdots M_m$. به علاوه، $\omega(M_1 \cdots M_m) = m$.*

برهان. فرض کنیم I یک ایده‌آل nـجذبی ناصفر از R باشد. در این‌صورت بنابر قضیه ۷.۱.۳، فقط تعداد متناهی از ایده‌آل‌های اول مانند $P_1, \cdots, P_k$ که $k \leq n$، در R وجود دارند که روی I مینیمال هستند. چون R_{P_i} یک DVR است، لذا به ازای هر $1 \leq i \leq k$، داریم $I_{P_i} = (P_i^{n_i})_{P_i}$ به طوری که n_i عدد صحیح مثبت است. (توجه داریم بنابر قضیه ۱.۳.۳، $n_i \leq n$). فرض کنیم $J = P_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k}$. در این‌صورت برای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، $I_M = J_M$. بنابراین $I = J$ یک حاصل‌ضرب از ایده‌آل‌های ماکسیمال R است.

بالعکس، اثبات از قضیه ۱۱.۱.۳، نتیجه می‌شود.

اثبات $\omega(M_1 \cdots M_m) = m$ نیز از قضیه ۳.۴.۳، نتیجه می‌شود. □

قضیه ۶.۴.۳. *اگر Rـ مدول M نوتری باشد، آنگاه هر زیرمدول از M را می‌توان به فرم اشتراک تعداد متناهی از زیرمدول‌های اولیه نوشت.*

برهان. رجوع شود به [۱۶، قضیه ۲.۷]. □

تعریف ۷.۴.۳. فرض کنیم M یک Rـ مدول باشد. زیر مدول Q از M را اولیه گوییم، هرگاه برای هر $a \in R$ و $x \in M$ که $ax \in Q$ و $x \notin Q$، $a^n M \subseteq Q$.

ایده‌آل Q از حلقه‌ی R را اولیه گوییم، هرگاه Q به عنوان یک R ـ زیر مدول اولیه باشد.

قضیه ۸.۴.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری باشد، آنگاه برای بعضی اعداد صحیح مثبت n، هر ایده‌آل سره از R یک ایده‌آل nـجذبی است.*

برهان. فرض کنیم J یک ایده‌آل Pـاولیه از R باشد به طوری که P ایده‌آلی اول از R است. در این‌صورت برای بعضی اعداد صحیح مثبت m، $P^m \subseteq J$ زیرا R حلقه‌ای نوتری است. لذا بنابر قضیه

---

[۴] Almost dedekind domain

[۵] Noetherian valuation domain

۱.۲.۳، J یک ایده‌آل mـجذبی از R است. فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از R باشد. در این‌صورت بنابر قضیه ۶.۴.۳، I اشتراک متناهی از ایده‌آل‌های اولیه R می‌باشد زیرا R نوتری است. و لذا بنا به قضیه ۳.۱.۳ (ج)، به ازای بعضی اعداد صحیح مثبت n، I یک ایده‌آل nـجذبی از R است.

□

لم ۹.۴.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی بزوت، I یک ایده‌آل n−جذبی از R و P یک ایده‌آل اول از R باشد به طوری که $Rad(I) = P$. در این‌صورت $P^n \subseteq I$. به ویژه، اگر R یک دامنه‌ی ارزیابی باشد نیز حکم برقرار است.*

برهان. فرض کنیم $x_1, ..., x_n \in P$. چون R یک حلقه‌ی بزوت است، پس برای بعضی $x \in P$، داریم $\langle x_1, ..., x_n\rangle = xR$ و بنابراین برای بعضی $y \in R$، $x_1...x_n = x^n y$. چون بنابر قضیه ۳.۱.۳ (ه)، $x^n \in I$، لذا $x_1...x_n = x^n y \in I$ و در نتیجه $P^n \subseteq I$.

اگر R یک دامنه‌ی ارزیابی باشد به وضوح حکم برقرار است. □

قضیه ۱۰.۴.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی ارزیابی باشد به طوری‌که میدان نیست. همچنین فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از R باشد. دراین‌صورت $Rad(I)$ یک ایده‌آل اول از R است.*

برهان. فرض کنیم S مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال I باشد. می‌دانیم $Rad(I) = \bigcap_{P\in S} P$. چون R حلقه‌ی ارزیابی است، پس مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول R تحت رابطه شمول مرتب شده خطی هستند. بنابراین S تک عضوی است. در نتیجه $Rad(I)$ یک ایده‌آل اول از R است.

□

قضیه ۱۱.۴.۳. *فرض کنیم R یک دامنه‌ی ارزیابی و n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برای یک ایده‌آل I از R معادلند:*

۱. *I یک ایده‌آل n−جذبی از R است.*

۲. *برای بعضی ایده‌آل اول P از R، I یک ایده‌آل P−اولیه از R است و $P^n \subseteq I$.*

۳. *برای بعضی ایده‌آل اول $P = Rad(I)$ از R و عدد صحیح مثبت m که $1 \leq m \leq n$، $I = P^m$.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) فرض کنیم I یک ایده‌آل n−جذبی از R باشد. در این‌صورت بنابر قضیه ۱۰.۴.۳، $P = Rad(I)$ یک ایده‌آل اول بخش پذیر از R است و از این‌رو بنابر قضیه ۵.۲.۳، I یک ایده‌آل P اولیه از R است. در نتیجه بنا به لم ۹.۴.۳، $P^n \subseteq I$.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳) بنابر [۱۵، قضیه ۱۷.۳(b)]، نتیجه حاصل است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱) اگر $I = \{0\}$، آنگاه I یک ایده‌آل اول از R است. لذا I یک ایده‌آل ۱ـجذبی از R می‌باشد. از این رو I، nـجذبی است. بنابراین فرض می‌کنیم $I \neq \{0\}$. از آن جایی که R یک دامنه‌ی ارزیابی است، پس یک دامنه‌ی بخش‌پذیر می‌باشد و چون $Nil(R) = 0 \subset P$، پس بنابر قضیه ۶.۲.۳، $I = P^m$ یک ایده‌آل mـجذبی از R است. در نتیجه بنابر قضیه ۳.۱.۳ (ب)، I همچنین یک ایده‌آل nـجذبی از R خواهد بود. □

مثال ۱۲.۴.۳. فرض کنیم R یک دامنه‌ی ارزیابی یک‌بعدی با ایده‌آل ماکسیمال M باشد. در این‌صورت هر ایده‌ال سره ناصفر از R، M-اولیه است [۱۵، قضیه ۱۷.۱]، اگر M اصلی باشد، آنگاه R، DVR است و بنابراین هر ایده‌آل سره از R برای بعضی اعداد صحیح مثبت n، یک ایده‌آل n-جذبی خواهد بود. در این حالت، $\omega(\circ) = ۱$ و $\omega(M^n) = n$. اگر M ایده‌آل اصلی نباشد، آنگاه $M = M^۲$ و در نتیجه برای هر عدد صحیح مثبت n، صفر و M تنها ایده‌آل‌های n-جذبی از R می‌باشند. در این حالت، برای هر ایده‌آل I از R که $\circ \subset I \subset M$، $\omega(M) = \omega(\circ) = ۱$ و $\omega(I) = \infty$. توجه داریم که بنابر قضیه ۱.۲.۳، I یک ایده‌آل M-اولیه است.

تعریف ۱۳.۴.۳. دامنه‌ی صحیح R را دامنه‌ی پروفر گوییم[۶]، هر گاه هر ایده‌آل با تولید متناهی ناصفراز R وارون پذیر باشد.

قضیه ۱۴.۴.۳. *دامنه‌ی صحیح R یک دامنه‌ی پروفر است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، R_M یک دامنه‌ی ارزیابی باشد.[۱۵، قضیه ۲۲.۱]*

نتایج قبل را می‌توان به دامنه‌های پروفر توسیع داد. یادآوری می‌کنیم که ایده‌آل‌های اول قیاس‌ناپذیر از دامنه‌ی پروفر R، هم ماکسیمال‌اند زیرا R به طور موضعی یک دامنه‌ی ارزیابی می‌باشد. همچنین یک ایده‌آل اول P از دامنه پروفر R خودتوان است اگر و تنها اگر P_p در R_p خودتوان باشد.

قضیه ۱۵.۴.۳. *فرض کنیم R یک دامنه‌ی پروفر باشد. در این‌صورت به ازای بعضی اعداد صحیح مثبت n، ایده‌آل I از R، n-جذبی است اگر و تنها اگر I یک حاصل‌ضرب از ایده‌آل‌های اول R باشد. به علاوه، اگر $P_۱, ..., P_k$ ایده‌آل‌های اول قیاس ناپذیر از R و $n_۱, ..., n_k$ اعداد صحیح مثبت باشند که $n_i = ۱$ و اگر P_i خودتوان باشد، آنگاه $\omega(P_۱^{n_۱}...P_k^{n_k}) = n_۱ + ... + n_k$.*

برهان. فرض کنیم I یک ایده‌ال n-جذبی ناصفر از R باشد. همچنین فرض کنیم $P_۱, ..., P_k$ که $k \leq n$، ایده‌آل‌های اول مینیمال از I باشند. در این‌صورت P_iها دو به دو هم‌ماکسیمال‌اند زیرا R یک دامنه‌ی پروفر است. بنابر قضایای ۱.۳.۳ و ۱۱.۴.۳، برای بعضی اعداد صحیح مثبت n_i داریم $I_{P_i} = (P_i^{n_i})_{P_i}$. فرض کنیم $J = P_۱^{n_۱} \cdots P_K^{n_K}$. هم‌چنین فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد، می‌توان فرض کرد که P_i تنها ایده‌آل اول مینیمال I است که مشمول در M می‌باشد. مشابه برهان فوق برای بعضی اعداد صحیح مثبت K_i، $I_M = (P_i^{K_i})_M$ و می‌توان فرض کرد که $K_i = n_i$ زیرا $(I_M)_{P_i} = I_{P_i}$. بنابراین برای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R، $I_M = J_M$ و در نتیجه $I = J$. بنابراین I یک حاصل‌ضرب از ایده‌آل‌های اول R است.

بالعکس، فرض کنیم I یک حاصل‌ضرب از ایده‌آل‌های اول R باشد. توجه داریم که اگر $P \subset Q$ ایده‌آل‌های اول R باشند، آنگاه $PQ = P$. بنابراین می‌توان فرض کرد که $I = P_۱^{n_۱} \cdots P_K^{n_K}$ که $P_۱, \cdots, P_K$ ایده‌آل‌های اول هم‌ماکسیمال از R و n_iها اعداد صحیح مثبت می‌باشند به طوری که $n = n_۱ + \cdots + n_K$. بنابر [۱۵، قضیه ۲۳.۳]، هر $P_i^{n_i}$ یک ایده‌آل P_i-اولیه از R است. لذا بنابر

[۶] Prufer domain

قضیه ۱.۲.۳، هر $P_i^{n_i}$ یک ایده‌آل n_iـجذبی از R است. در نتیجه بنابر قضیه ۳.۱.۳ (ج)، I یک ایده‌آل nـجذبی از R می‌باشد زیرا

$$I = P_1^{n_1}\cdots P_K^{n_K} = P_1^{n_1}\cap\cdots\cap P_K^{n_K}$$

اثبات حکم قسمت دوم قضیه، بنابر قضیه ۱.۲.۳ و نتیجه ۸.۳.۳ ، حاصل است.

□

در مباحث گذشته دیدیم که هر ایده‌آل سره از یک حلقه‌ی نوتری به ازای بعضی اعداد صحیح مثبت n، یک ایده‌آل nـجذبی است. برای هر حلقه‌ی R، تعریف می‌کنیم

$$\Omega(R) = \{\omega_R(I) \mid \text{یک ایده‌آل سره از } R \text{ است.} I\}$$

آنگاه $\{1\}\subseteq\Omega(R)\subseteq\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. مثال و قضایای زیر مقادیر ممکن $\Omega(R)$ برای چند حلقه‌ی خاص را مشخص می‌کنند.

مثال ۱۶.۴.۳. الف. فرض کنیم $n = p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}$ که $n_1,\cdots,n_k$ اعداد صحیح مثبت و $p_1,\cdots,p_k\in\mathbb{Z}$ اعداد اول مثبت متمایز هستند. در این‌صورت بنابر قضیه ۶.۳.۳، $\Omega(\mathbb{Z}_n) = \{1,\cdots,m\}$ که $m = n_1+\cdots+n_K$، به ویژه برای هر عدد اول مثبت $p\in\mathbb{Z}$ و عدد صحیح مثبت n، $\Omega(\mathbb{Z}_{p^n}) = \{1,\cdots,n\}$.

ب. فرض کنیم $R=\mathbb{Z}$. در این‌صورت بنابر قضیه ۳.۱.۳ (د)، $\Omega(R)=\mathbb{N}$.

ج. فرض کنیم $R=\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2$، I و I_n حلقه و ایده‌آل‌های مذکور در مثال ۵.۱.۳ باشند. در این‌صورت برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\omega(I_n)=n$ و $\omega(I)=\infty$. در نتیجه $\Omega(R)=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

د. فرض کنیم R یک حلقه‌ی شبه موضعی، صفرـبعدی با ایده‌آل ماکسیمال M باشد به طوری که برای هر عدد صحیح مثبت n، $M^{n+1}\subset M^n$. در این‌صورت بنابر لم ۱۰.۱.۳، $\mathbb{N}\subseteq\Omega(R)$.

ه. فرض کنیم $T=\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[[X]]$، $M=X\mathbb{R}[[X]]$ و n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این‌صورت $\Omega(T)=\mathbb{N}$.

قضیه ۱۷.۴.۳. *فرض کنیم R یک حلقه و n یک عدد صحیح مثبت باشد به طوری که هر ایده‌آل سره از R یک ایده‌آل nـجذبی باشد. در این‌صورت $dim(R)=0$ و R حداکثر n ایده‌آل ماکسیمال دارد.*

برهان. فرض کنیم $dim(R)\geq 1$. در این‌صورت R شامل ایده‌آل‌های اول $P\subset Q$ می‌باشد. عنصر $x\in Q-P$ را انتخاب می‌کنیم و فرض کنیم $I=x^{n+1}R$. در این‌صورت $x^n\in I$ زیرا I یک ایده‌آل nـجذبی از R است و بنابراین برای بعضی $y\in R$، $x^n=x^{n+1}y$. از این رو $x^n(1-xy)=0\in P$. در نتیجه $1-xy\in P\subset Q$. بنابراین از $x\in Q$ نتیجه می‌شود $1\in Q$ که یک تناقض است. پس $dim(R)=0$. در نتیجه بنابر قضیه ۸.۱.۳ حداکثر n ایده‌آل ماکسیمال دارد.

□

لم ۱۸.۴.۳. *فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکسیمال با تولید متناهی از R باشد. اگر برای بعضی اعداد صحیح مثبت n، $M^n=M^{n+1}$، آنگاه $ht(M)=0$. به ویژه، اگر R حلقه‌ای نوتری با $dim(R)\geq 1$ باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n، یک ایده‌آل ماکسیمال M از R موجود است به طوری که $M^{n+1}\subset M^n$.*

برهان. فرض می‌کنیم $ht(M) \geq ۱$. در این‌صورت برای بعضی ایده‌آل اول P از R، $P \subset M$. در حلقه‌ی R_M داریم
$$P_M \subset M_M, \qquad M_M M_M^n = M_M^n$$
لذا بنابر لم ناکایاما $M_M^n = ۰$. اما $M_M^n \subseteq P_M$. بنابراین $P_M = M_M$ که یک تناقض است. در نتیجه $ht(M) = ۰$.
اثبات قسمت دوم قضیه واضح است.

□

قضیه ۱۹.۴.۳. *فرض کنیم R، $R_۱$ و $R_۲$ حلقه باشند.*

۱. *اگر $|Max(R)| = n < \infty$، آنگاه $\{۱, \cdots, n\} \subseteq \Omega(R)$ و اگر $|Max(R)|$ نامتناهی باشد، آنگاه $\mathbb{N} \subseteq \Omega(R)$.*

۲. *فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از R باشد. در این‌صورت $\Omega(R/I) \subseteq \Omega(R)$.*

۳. *$\Omega(R) \subseteq \Omega(R[X])$.*

۴. *$\Omega(R_۱ \times R_۲) = \Omega(R_۱) + \Omega(R_۲)$.*

۵. *فرض کنیم M یک Rـمدول باشد. در این‌صورت $\Omega(R) \subseteq \Omega\big(R(+)M\big)$.*

۶. *فرض کنیم $T = K + M$ یک دامنه‌ی صحیح باشد به طوری‌که K یک میدان و زیرحلقه‌ای از T است و M یک ایده‌آل ماکسیمال ناصفر T است، همچنین فرض کنیم D یک زیرحلقه‌ای از K باشد. در این‌صورت $\Omega(D) \subseteq \Omega(D + M)$.*

۷. *R یک میدان است اگر و تنها اگر $\Omega(R) = \{۱\}$.*

۸. *اگر R یک حلقه‌ی آرتینی باشد. در این‌صورت برای بعضی $n \in \mathbb{N}$، $\Omega(R) = \{۱, \cdots, n\}$.*

۹. *اگر R یک حلقه‌ی نوتری با $dim(R) \geq ۱$ باشد، آنگاه $\Omega(R) = \mathbb{N}$.*

۱۰. *فرض کنیم R یک دامنه‌ی ارزیابی باشد که میدان نیست. اگر R، DVR باشد، آنگاه $\Omega(R) = \mathbb{N}$. اگر R، DVR نباشد در صورتی‌که هر ایده‌آل اول از R خود توان باشد، آنگاه $\Omega(R) = \{۱, \infty\}$ و اگر R شامل یک ایده‌آل اول ناصفر غیر خود توان باشد، آنگاه $\Omega(R) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

برهان. ۱. بنابر قضیه ۸.۱.۳، نتیجه حاصل است.

۲. اثبات بنابر نتیجه ۳.۳.۳ (ب)، برقرار است.

۳. اثبات از قضیه ۱۶.۳.۳، نتیجه می‌شود.

۴. اثبات از قضیه ۶.۳.۳، نتیجه می‌شود.

۵. بنا به توضیحات قبل قضیه ۹.۳.۳، که برای هر ایده‌آل I از R اگر I یک ایده‌آل nـجذبی از R باشد، آنگاه $I(+)M$ یک ایده‌آل nـجذبی از $R(+)M$ است و $\omega_{R(+)M}\big(I(+)M\big) = \omega_R(I)$، نتیجه حاصل است.

۶. بنابر لم ۱۹.۳.۳، نتیجه حاصل است.

۷. به وضوح نتیجه برقرار است زیرا هر ایده‌آل سره از حلقه‌ی R، اول است اگر و تنها اگر R میدان باشد.

۸. اگر R موضعی باشد، آنگاه بنابر قضیه ۱.۲.۳، حکم برقرار است. در حالت کلی چون هر حلقه‌ی

آرتینی حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی حلقه‌های آرتینی موضعی است، لذا بنابر نتیجه ۷.۳.۳، حکم برقرار است.

۹. بنابر قضیه ۸.۴.۳، داریم $\Omega(R) \subseteq \mathbb{N}$. بنابر لم‌های ۱۰.۱.۳ و ۱۸.۴.۳، داریم $\mathbb{N} \subseteq \Omega(R)$. در نتیجه $\Omega(R) = \mathbb{N}$.

۱۰. بنابر قضیه ۱۱.۴.۳، نتیجه حاصل است.

□

۵.۳ ایده‌آل‌های قویاً nـجذبی

در بخش پایانی، ایده‌آل‌های قویاً nـجذبی را معرفی و مطالعه می‌کنیم. توجه داریم که ایده‌آل سره I از حلقه‌ی R یک ایده‌آل اول است اگر و تنها اگر برای ایده‌آل‌های I_1 و I_2 از R اگر $I_1I_2 \subseteq I$، آنگاه $I_1 \subseteq I$ یا $I_2 \subseteq I$. فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. گوییم ایده‌آل سره I از حلقه‌ی R قویاً nـجذبی است، هر گاه برای ایده‌آل‌های $I_1, \cdots, I_{n+1}$ از R اگر $I_1 \cdots I_{n+1} \subseteq I$، آنگاه حاصل‌ضرب n تا از I_iها مشمول در I باشد.
بنابراین یک ایده‌آل قویاً ۱ـجذبی ایده‌آلی اول است و اشتراک n ایده‌آل اول یک ایده‌آل قویاً nـجذبی است. واضح است که هر ایده‌آل قویاً nـجذبی از R یک ایده‌آل nـجذبی است و در قضیه ۱.۵.۳، خواهیم دید که این دو مفهوم معادلند، هر گاه $n = 2$. حدس می‌زنیم که به ازای هر عدد صحیح مثبت n نیز این دو مفهوم معادلند. فرض کنیم I یک ایده‌آل سره حلقه‌ی R باشد. اگر به ازای بعضی اعداد صحیح مثبت n، I یک ایده‌آل قویاً nـجذبی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه

$$\omega_R^{\star}(I) = min\{n \mid \text{یک ایده‌آل قویاً } n - \text{جذبی } R \text{است.} I\}$$

در غیر این‌صورت $\omega_R^{\star}(I) = \infty$. که از این پس نماد $\omega^{\star}(I)$ را به جای $\omega_R^{\star}(I)$ استفاده می‌کنیم. همچنین $\omega_R^{\star}(R) = 0$. بنابراین $\omega_R^{\star}(I) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. $\omega_R^{\star}(I) = 1$ اگر و تنها اگر I یک ایده‌آل اول از R باشد و برای هر ایده‌آل I از R، $\omega_R(I) \leq \omega_R^{\star}(I)$. تعریف می‌کنیم

$$\Omega^{\star}(R) = \{\omega_R^{\star}(I) \mid \text{یک ایده‌آل سره از} R \text{است.} I\}$$

بنابراین $\{1\} \subseteq \Omega^{\star}(R) \subseteq \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

قضیه ۱.۵.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل سره ناصفر از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. I یک ایده‌آل ۲ـجذبی R است.

۲. اگر برای بعضی ایده‌آل‌های I_1، I_2 و I_3 از R، $I_1I_2I_3 \subseteq I$، آنگاه $I_1I_2 \subseteq I$ یا $I_1I_3 \subseteq I$ یا $I_2I_3 \subseteq I$.

برهان. کافیست (۱) $\Longleftarrow$ (۲) اثبات شود زیرا (۲) $\Longleftarrow$ (۱) بدیهی است. فرض کنیم برای بعضی ایده‌آل‌های I_1، I_2 و I_3 از R، $I_1I_2I_3 \subseteq I$. در این‌صورت بنابر قضیه ۵.۲.۲، $Rad(I)$ یک ایده‌آل

اول R است یا $Rad(I) = P_1 \cap P_2$ به طوری که P_1 و P_2 ایده‌آل‌های اول متمایز ناصفر از R می‌باشند که روی I مینیمال‌اند. اگر $I = Rad(I)$، آنگاه به آسانی ثابت می‌شود که $I_1I_2 \subseteq I$ یا $I_1I_3 \subseteq I$ یا $I_2I_3 \subseteq I$. بنابراین فرض می‌کنیم $I \neq Rad(I)$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم

حالت اول: فرض کنیم $Rad(I)$ یک ایده‌آل اول R باشد. در این‌صورت می‌توان فرض کرد $I_1 \subseteq Rad(I)$ و $I_1 \not\subseteq I$. فرض کنیم $x \in I_1 - I$. چون $xI_2I_3 \subseteq I$، لذا نتیجه می‌گیریم $I_2I_3 \subseteq B_x$. زیرا بنابر قضیه ۱۲.۳.۳، B_x یک ایده‌آل اول از R است. بنابراین $I_2 \subseteq B_x$ یا $I_3 \subseteq B_x$. اگر برای هر $d \in I_1 - I$، $I_2 \subseteq B_d$ و $I_3 \subseteq B_d$، آنگاه $I_1I_2 \subseteq I$ (و $I_1I_3 \subseteq I$) و نتیجه حاصل است.

بنابراین فرض می‌کنیم برای بعضی $y \in I_1 - I$، $I_2 \subseteq B_y$ و $I_3 \not\subseteq B_y$. چون بنابر قضیه ۱۰.۳.۳، $\{B_W \mid W \in I_1 - I\}$ مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های اول R است که به طور خطی مرتب شدند و $I_2 \subseteq B_y$ و $I_3 \not\subseteq B_y$، لذا برای هر $Z \in I_1 - I$، $I_2 \subseteq B_Z$ و بنابراین $I_1I_2 \subseteq I$.

حالت دوم: فرض کنیم $Rad(I) = P_1 \cap P_2$ که P_1 و P_2 ایده‌آل‌های اول متمایز ناصفر از R می‌باشند که روی I مینیمال‌اند. می‌توان فرض کرد $I_1 \subseteq P_1$. اگر $I_2 \subseteq P_2$ یا $I_3 \subseteq P_2$، آنگاه $I_1I_2 \subseteq I$ یا $I_1I_3 \subseteq I$ زیرا بنابر قضیه ۵.۲.۲، $P_1P_2 \subseteq I$. بنابراین به روش مشابه‌ای که در حالت اول استفاده شد و قضیه ۱۰.۳.۳، نتیجه حاصل است. □

حدس ۱. فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این‌صورت ایده‌آل سره I از حلقه‌ی R قویاً nـجذبی است اگر و تنها اگر I یک ایده‌آل nـجذبی R باشد(یعنی برای هر ایده‌آل I از R، $\omega_R(I) = \omega_R^\star(I)$ و بنابراین $\Omega(R) = \Omega^\star(R)$).

حدس۲. فرض کنیم n عدد صحیح مثبت باشد و I یک ایده‌آل nـجذبی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت $Rad(I)^n \subseteq I$.

ابتدا نشان می‌دهیم حدس (۱)، حدس (۲) را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۲.۵.۳. *فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت و I یک ایده‌آل قویاً nـجذبی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت $Rad(I)^n \subseteq I$. به ویژه، حدس (۱) حدس (۲) را نتیجه می‌دهد.*

برهان. فرض کنیم $x_1, \cdots, x_n \in Rad(I)$ و $J = \langle x_1, \cdots, x_n\rangle \subseteq Rad(I)$. در این‌صورت بنابر قضیه ۳.۱.۳ (ه)، برای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i^n \in I$ و بنابراین $J^{n^n} \subseteq I$. از این رو $J^n \subseteq I$ زیرا I یک ایده‌آل قویاً nـجذبی از R است. در نتیجه $Rad(I)^n \subseteq I$. به وضوح حدس (۱) حدس (۲) را نتیجه می‌دهد.

□

قضیه ۳.۵.۳. *فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت و I یک ایده‌آل قویاً nـجذبی از حلقه‌ی R باشد به طوری که I دقیقاً m ایده‌آل اول مینیمال $P_1, \cdots, P_m$ داشته باشد که $(m \leq n)$. در این‌صورت $P_1^{n_1} \cdots P_m^{n_m} \subseteq I$ که $n_1, \cdots, n_m$ اعداد صحیح مثبت می‌باشند و $n = n_1 + \cdots + n_m$.*
به ویژه، اگر $Rad(I) = P$ یک ایده‌آل اول از R باشد، آنگاه $P^n \subseteq I$.

برهان. توجه داریم که بنابر قضیه ۷.۱.۳، $m \leq n$. فرض کنیم $J = Rad(I) = P_1 \cap \cdots \cap P_m$. در این‌صورت $P_1 \cdots P_m \subseteq P_1 \cap \cdots \cap P_m = J$. از این رو بنابر قضیه ۲.۵.۳، $(P_1 \cdots P_m)^n \subseteq J^n \subseteq I$

و بنابراین $P_1^n \cdots P_m^n \subseteq I$. چون I یک ایده‌آل قویاً nـجذبی از R است، لذا برای اعداد صحیح نامنفی $n_1, \cdots, n_m$ که $n = n_1 + \cdots + n_m$، داریم $P_1^{n_1} \cdots P_m^{n_m} \subseteq I$. از این که برای هر $1 \leq i \leq m$، $P_1^{n_1} \cdots P_m^{n_m} \subseteq I \subseteq P_i$، لذا هر $n_i \geq 1$.
اثبات قسمت دوم قضیه واضح است.

□

قضیه ۴.۵.۳. *فرض کنیم P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R و n یک عدد صحیح مثبت باشد، همچنین فرض کنیم حدس (۲) برقرار باشد.*
الف. اگر P^n یک ایده‌آل Pـاولیه از R باشد و $P^n \subset P^{n-1}$، آنگاه $\omega(P^n) = n$.
ب. اگر P یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد و $P^n \subset P^{n-1}$، آنگاه $\omega(P^n) = n$.
ج. فرض کنیم I یک ایده‌آل Pـاولیه از R باشد. اگر $P^n \subseteq I$ و $P^{n-1} \not\subseteq I$، آنگاه $\omega(I) = n$.

برهان. الف. بنابر قضیه ۱.۲.۳، داریم $\omega(P^n) \leq n$. اگر $\omega(P^n) \leq n-1$، آنگاه بنابر حدس (۲)، $P^{n-1} \subseteq P^n$ که یک تناقض است.
ب. اگر P یک ایده‌آل ماکسیمال R باشد، آنگاه P^n، Pـاولیه است.
ج. برهان مشابه بند (الف) می‌باشد.

□

تذکر: الف. توجه داریم که قضیه ۴.۵.۳، شرط $P^{n+1} \subset P^n$ برای $\omega(P^n) = n$ را درلم ۱۰.۱.۳و قضایای ۱.۲.۳ و ۶.۲.۳، را به $P^n \subset P^{n-1}$ بهبود می‌بخشد.
ب. فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه‌ی شبه موضعی R با $dim(R) = 0$ باشد به طوری که برای هر عدد صحیح مثبت n، $M^{n+1} \subset M^n$. اگر حدس (۲) برقرار باشد، آنگاه $\omega_R(0) = \infty$(اگر $\omega_R(0) = n < \infty$ آنگاه بنا به حدس (۲)، $M^n = 0$ که یک تناقض است).

قضیه ۵.۵.۳. *فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت و R حلقه‌ای باشد به طوری که $\{0\}$ یک ایده‌آل قویاً nـجذبی از R است. در این‌صورت هر ایده‌آل سره از R یک ایده‌آل nـجذبی است اگر و تنها اگر $R \cong R_1 \times \cdots \times R_m$ که $1 \leq m \leq n$ و هر R_i یک حلقه شبه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال M_i است و اعداد صحیح مثبت $n_1, \cdots, n_m$ موجوداند به طوری که $n = n_1 + \cdots + n_m$ و برای هر $1 \leq i \leq m$، $M_i^{n_i} = 0$.*

برهان. فرض کنیم R یکریخت با $T = R_1 \times \cdots \times R_m$ باشد که $1 \leq m \leq n$، هر R_i یک حلقه‌ی شبه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال M_i است و اعداد صحیح مثبت $n_1, \cdots, n_m$ موجوداند به طوری که $n = n_1 + \cdots + n_m$ و برای هر $1 \leq i \leq m$، $M_i^{n_i} = 0$. واضح است که هر ایده‌آل سره از هر R_i یک ایده‌آل M_iـاولیه از R_i است و اگر I_i ایده‌آل سره R_i باشد، آنگاه بنابر قضیه ۱.۲.۳، $\omega_{R_i}(I_i) \leq n_i$. زیرا $M_i^{n_i} = 0$. فرض می‌کنیم $I_1, \cdots, I_m$ به ترتیب ایده‌آل‌هایی از $R_1, \cdots, R_m$ باشند. در این‌صورت بنا به نتیجه ۷.۳.۳،

$$\omega_T(I_1 \times \cdots \times I_m) = \omega_{R_1}(I_1) + \cdots + \omega_{R_m}(I_m) \leq n_1 + \cdots + n_m = n$$

بنابراین هر ایده‌آل سره T یک ایده‌آل n-جذبی می‌باشد و در نتیجه چون $R \cong T$، لذا بنابر قضیه ۲.۳.۳، هر ایده‌آل سره از R نیز یک ایده‌آل n-جذبی است.

بالعکس، فرض کنیم هر ایده‌آل سره از R یک ایده‌آل n-جذبی باشد. در این‌صورت بنابر قضیه ۱۷.۴.۳، $dim(R) = ۰$ و R m ایده‌آل ماکسیمال دارد که $m \leq n$. فرض کنیم $M_۱, \cdots, M_m$ ایده‌آل‌های ماکسیمال R باشند. چون $\{۰\}$ یک ایده‌آل قویاً n-جذبی از R است، لذا بنابر قضیه ۳.۵.۳، برای اعداد صحیح مثبت $n_۱ \cdots, n_m$ که $n = n_۱ + \cdots + n_m$، $M_۱^{n_۱} \cdots M_m^{n_m} = ۰$. از این رو بنابر قضیه‌ی باقیمانده چینی، $\frac{R}{M_m^{n_m}} \times \cdots \times \frac{R}{M_۱^{n_۱}} \cong R$. حال قرار می‌دهیم $R_i = \frac{R}{M_i^{n_i}}$. در این‌صورت R_i یک حلقه‌ی شبه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال M_i است و اعدادصحیح مثبت $n_۱, \cdots, n_m$ موجودند به طوری که $n = n_۱ + \cdots + n_m$ و برای هر $۱ \leq i \leq m$، $M_i^{n_i} = ۰$. □

قضیه ۶.۵.۳. *فرض کنیم I یک ایده‌آل P-اولیه از حلقه‌ی R و n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *I یک ایده‌آل n-جذبی از R است و $P^n \subseteq I$.*

۲. *I یک ایده‌آل قویاً n-جذبی R است.*

به ویژه، اگر P^n، P-اولیه باشد، آنگاه P^n یک ایده‌آل قویاً n-جذبی R است.

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) فرض کنیم برای ایده‌آل‌های $I_۱, \cdots, I_{n+۱}$ از R، $I_۱ \cdots I_{n+۱} \subseteq I$، اما هیچ حاصل‌ضرب nتایی از I_jها مشمول در I نباشد. در این‌صورت هر I_j مشمول در P است زیرا I، P-اولیه است و بنابراین هر حاصل‌ضرب nتایی از I_jها مشمول در I است زیرا $P^n \subseteq I$. که یک تناقض است. در نتیجه یک حاصل‌ضرب nتایی از I_jها موجود است که مشمول در I است.
(۲) $\Longleftarrow$ (۱) اثبات بنابر قضیه ۳.۵.۳، واضح است.
حکم پاراگراف آخر قضیه بنابر قضیه ۱.۲.۳، و قسمت (۱) $\Longleftarrow$ (۲) واضح است.

□

نتیجه ۷.۵.۳. *فرض کنیم $M_۱, \cdots, M_n$ ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R باشند. در این‌صورت $I = M_۱ \cdots M_n$ یک ایده‌آل قویاً n-جذبی از R است.*

برهان. اثبات مشابه برهان قضیه ۱۱.۱.۳، می‌باشد. با این تفاوت که باید به جای لم ۱۰.۱.۳، قضیه ۶.۵.۳، راجایگزین کرده و از قضیه ۳.۱.۳(ج)، برای ایده‌آل‌های قویاً n-جذبی استفاده کنیم.
□

نتیجه ۸.۵.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری باشد. در این‌صورت برای بعضی اعداد صحیح مثبت n، هر ایده‌آل سره از R یک ایده‌آل قویاً n-جذبی است.*

برهان. اثبات مشابه برهان قضیه ۸.۴.۳، می‌باشد. با این تفاوت که باید به جای قضیه ۱.۲.۳، قضیه ۶.۵.۳، راجایگزین کرده و از قضیه ۳.۱.۳(ج)، برای ایده‌آل‌های قویاً n-جذبی استفاده کنیم. □

نتیجه ۹.۵.۳. *فرض کنیم R یک دامنه‌ی پروفر و n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این‌صورت یک ایده‌آل I از R قویاً n-جذبی است اگر و تنها اگر I یک ایده‌آل n-جذبی از R باشد. به علاوه $\omega(I) = \omega^\star(I)$.*

برهان. برای ایده‌آل سره ناصفر I از R که $\omega(I) = n$، نشان می‌دهیم $\omega(I) = \omega^\star(I)$. بنابر برهان قضیه ۱۵.۴.۳، می‌توان فرض کرد $I = P_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k}$ که P_iها ایده‌آل‌های اول هم‌ماکسیمال‌اند و n_iها اعداد صحیح مثبت می‌باشند به طوری که $n_i = 1$، اگر P_iها خود توان باشند و $n = n_1 + \cdots + n_k$، آنگاه مشابه قضیه ۳.۱.۳(ج)، برای ایده‌آل‌های قویاً n-جذبی و قضیه ۶.۵.۳،

$$\omega(I) \leq \omega^\star(I) = \omega^\star(P_1^{n_1} \cap \cdots \cap P_k^{n_k}) \leq \omega^\star(P_1^{n_1}) + \cdots + \omega^\star(P_k^{n_k}) \leq n_1 + \cdots + n_k = n = \omega(I)$$

(یادآوری می‌کنیم هر $P_i^{n_i}$ یک ایده‌آل اولیه از R است [۱۵، لم۲۳.۲(b)]. در نتیجه $\omega(I) = \omega^\star(I)$.
□

فهرست نمادها

$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح
$\mathbb{Q}$	مجموعه اعداد گویا
$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی
$x \in \mathbb{N}$	x عضوی از مجموعه اعداد طبیعی است
$I \cap J$	اشتراک دو ایده‌آل I و J
$R - P$	تفاضل P از R
$I \subseteq J$	I زیرمجموعه‌ی J است
$I \nsubseteq J$	I زیرمجموعه J نیست
$R_1 \times R_2$	حاصل‌ضرب دکارتی حلقه‌های R_1 و R_2
$I \trianglelefteq R$	I ایده‌آلی از R است
$\langle x \rangle$	ایده‌آل تولید شده توسط x
$\prod_{i=1}^{n} R_i$	حاصل‌ضرب مستقیم حلقه‌ها
$F_1 \oplus F_2$	مجموع مستقیم F_1 و F_2
$R \cong D$	R با D یکریخت است
$U(R)$	مجموعه یکه‌های حلقه‌ی R
$Z(R)$	مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R
PID	دامنه ایده‌آل اصلی
$Nil(R)$	مجموعه عناصر پوچ توان R
$Min(I)$	مجموعه ایده‌آل‌های اول مینیمال I
$\sqrt{I}$	اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال I
$Rad(I)$	اشتراک ایده‌آل‌های اول مینیمال I
R_s	حلقه‌ی کسرهای R
R_P	حلقه‌ی حاصل از موضعی‌سازی R در P
$qf(R)$	میدان کسرهای R
$T(R)$	حلقه‌ی کسرهای تام R

$J(R)$	اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال R
$R[x]$	حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها
$R[[x]]$	حلقه‌ی سری‌های توانی
$R[x_۱, \cdots, x_n]$	حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی n متغیر
$a\|b$	a عاد می‌کند b را
$dimR$	بعد کرول R
htP	ارتفاع ایده‌آل اول P
$P^{(n)}$	امینn توان نمادین P
$[k : F]$	درجه k روی F
DVR	حلقه‌ی ارزیابی گسسته

مراجع

[۱] شارپ، رودنی، *گام‌هایی در جبر تعویض‌پذیر*، ترجمه محمد مهدی ابراهیمی، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۶.

[۲] ساهای، ویوک؛ بیست، ویکاس، جبر، ترجمه ابراهیم هاشمی، چاپ اول، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ۱۳۸۷.

[۳] نیکوکار، م؛ غافری، م، جبر *(۱)*، چاپ اول، نشر فرناز، تهران، ۱۳۷۹.

[4] A. Badawi, *On 2-absorbing ideals of commutative rings*, Bull. Austral. Math. Soc, **75** (2007), 417–429.

[5] A. Badawi and A. Yousefian darani, *On weakly 2-absorbing ideals of commutative rings*, Houston J. Math, **39** (2013), 441–452.

[6] A. Geroldinger and W. Hassler, *Local tameness of v-Noetherian monoids*, J. Pure Appl. Algebra, **212** (2008), 1509–1524.

[7] D. D. Anderson and E. Smith, *Weakly prime ideals*, Houston J. Math, **29** (2003), 831–840.

[8] D. D. Anderson and M. Bataineh, *Generalizations of prime ideals*, Comm. Algebra, **36** (2008), 686–696.

[9] D. F. Anderson and A. Badawi, *On n- absorbing ideals of commutative rings*, Comm. Algebra, **39** (2011), 1646–1672.

[10] D. F. Anderson and S. T. Chapman, *How far is an element from being prime?*, J. Algebra Appl, **9** (2010), 779–789.

[11] E. Bastida and R. Gilmer, *Overrings and divisorial ideals of rings of the form $D + M$*, Michigan Math. J, **20** (1973), 79–95.

[12] J. Huckaba, *Commutative rings with Zero-Divisors*, Marcel Dekker. New York. Basil, (1988).

[13] J. W. Brewer and E. A. Rutter, *$D+M$ constructions with general overrings*, Michigan Math. J, **23** (1976), 33–42.

[14] R. Fossum, *The Divisor class group of a krull domain*, New York. Springer Verlag, (1973).

[15] R. Gilmer, *Multiplicative ideal theory*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math, (1992).

[16] M. D. Larsen and P. J. McCarthy, *Multiplicative theory of ideals*, New York. London. Academic Press, (1971).

[17] T. G. Lucas, *Examples built with D+ M, A+ XB [X] and other pullback constructions, Non-Noetherian commutative ring theory*, Math. Appl, (2000), 341–368.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ایده‌آل اصلی	Principal ideal
ایده‌آل اول	Prime ideal
ایده‌آل اول بخش‌پذیر	Divided prime ideal
ایده‌آل اول ضعیف	Weakly Prime ideal
ایده‌آل با تولید متناهی	Finitely generaled ideal
ایده‌آل بدیهی	Trivial ideal
ایده‌آل تولید شده توسط یک مجموعه	Generated by a set ideal
ایده‌آل سره	Proper ideal
ایده‌آل کسری	Fractional ideal
ایده‌آل ماکسیمال	Maximal ideal
ایده‌آل ماکسیمال متمایز	Distinct maximal ideal
ایده‌آل وارون‌پذیر	Invertible ideal
ایده‌آل P-اولیه	P-Primary ideal
ایده‌آل ۲-جذبی	2-absorbing ideal
ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی	Weakly 2-absorbing
ایده‌آل n-جذبی	n-absorbing ideal
ایده‌آل قویاً n-جذبی	Strongly n-absorbing ideal
ایزومورفیسم	Isomorphism
بعد متناهی	Finite dimension
بعد کرول	Krull dimension
توسیع میدان	Field extension
جبری بسته	Algebraically closed
حلقه‌ی ارزیابی	Valuation ring
حلقه‌ی ارزیابی گسسته	Discrete valuation

حلقه‌ی ایده‌آل اصلی .... Principal ideal ring
حلقه‌ی آرتینی .... Artinian ring
حلقه‌ی بزوت .... Bezout ring
حلقه‌ی تقلیل یافته .... Reduced ring
حلقه‌ی جابجایی .... Commutative ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها .... Polynomials ring
حلقه‌ی سری‌های توانی .... Ring of formal power series
حلقه‌ی شبه موضعی .... Quasi- Local ring
حلقه‌ی فون نیومن منظم .... Von neumann regular ring
حلقه‌ی کسرهای تام .... Total quotient ring
حلقه‌ی موضعی .... Localy ring
حلقه‌ی نوتری .... Noetherian ring
حلقه‌ی π-منظم .... π-regular ring
دامنه‌ی ارزیابی .... Valuation domain
دامنه‌ی ارزیابی خاص .... Certain valuation domain
دامنه‌ی ارزیابی موضعی .... Locally valuation domain
دامنه‌ی ایده‌آل اصلی .... Principal ideal domain
دامنه‌ی بخش‌پذیر .... Divided domain
دامنه‌ی بزوت .... Bezout domain
دامنه‌ی پروفر .... Prufer domain
دامنه‌ی ددکنید .... Dedekind domain
دامنه‌ی ددکنید تقریبی .... Almost dedekind domain
دامنه‌ی صحیح .... Integral domain
شمول .... Inclusion
صحیحاً بسته .... Iintegrally closed
عنصر اول .... Prime element
عنصر پوچ توان .... Nilpotent element
عنصر منظم .... Regular element
عنصر همانی .... Identity element
عنصر یکه .... Unit element
فضای برداری .... Vector space
قضیه‌ی باقیمانده چینی .... Chinese remainder theorem

قیاس‌ناپذیر .... Incomparable

لم زورن .... Zorn's lemma

لم ناکایاما .... Nakayama's Lemma

مجموع مستقیم .... Direct sum

مجموعه‌ی ضربی بسته .... Multiplicatively closed subset

مقسوم‌علیه صفر .... Zero-divisor

میدان کسرها .... Quotient field

همریختی .... Homomorphism

R-مدول .... R-module

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

2-absorbing ideal	ایده‌آل ۲-جذبی
P-primary ideal	ایده‌آل P-اولیه
Algebraically closed	جبری بسته
Almost dedekind domain	دامنه‌ی ددکنید تقریبی
Artinian ring	حلقه‌ی آرتینی
Bezout domain	دامنه‌ی بزوت
Bezout ring	حلقه‌ی بزوت
Certain valuation domain	دامنه‌ی ارزیابی خاص
Chinese remainder theorem	قضیه‌ی باقیمانده چینی
Commutative ring	حلقه‌ی جابجایی
Dedekind domain	دامنه‌ی ددکنید
Direct sum	مجموع مستقیم
Discrete valuation	حلقه‌ی ارزیابی گسسته
Distinct maximal ideal	ایده‌آل ماکسیمال متمایز
Divided domain	دامنه‌ی بخش‌پذیر
Divided prime ideal	ایده‌آل اول بخش‌پذیر
Field extension	توسیع میدان
Finite dimension	بعد متناهی
Finitely generaled ideal	ایده‌آل با تولید متناهی
Fractional ideal	ایده‌آل کسری
Generated by a set ideal	ایده‌آل تولید شده توسط یک مجموعه
Homomorphism	همریختی
Identity element	عنصر همانی
Inclusion	شمول

Incomparable .... قیاس‌ناپذیر
Isomorphism .... ایزومورفیسم
Integral domain .... دامنه‌ی صحیح
Integrally closed .... صحیحاً بسته
Invertible ideal .... ایده‌آل وارون‌پذیر
Krull dimension .... بعد کرول
Localy ring .... حلقه‌ی موضعی
Locally valuation domain .... دامنه‌ی ارزیابی موضعی
Multiplicatively closed subset .... مجموعه‌ی ضربی بسته
n-absorbing ideal .... ایده‌آل n−جذبی
Nakayama's Lemma .... لم ناکایاما
Nilpotent element .... عنصر پوچ توان
Noetherian ring .... حلقه‌ی نوتری
Polynomials ring .... حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها
Prime element .... عنصر اول
Prime ideal .... ایده‌آل اول
Principal ideal .... ایده‌آل اصلی
Principal ideal domain .... دامنه‌ی ایده‌آل اصلی
Principal ideal ring .... حلقه‌ی ایده‌آل اصلی
Proper ideal .... ایده‌آل سره
Prufer domain .... دامنه‌ی پروفر
Quasi- Local ring .... حلقه‌ی شبه موضعی
Quotient field .... میدان کسرها
Quotient ring .... حلقه‌ی خارج قسمتی
R-Module .... R−مدول
Reduced ring .... حلقه‌ی تقلیل یافته
Regular element .... عنصر منظم
Ring of formal power series .... حلقه‌ی سری‌های توانی
Strongly n-absorbing ideal .... ایده‌آل قویاً n−جذبی
Total quotient ring .... حلقه‌ی کسرهای تام
Trivial ideal .... ایده‌آل بدیهی
Unit element .... عنصر یکه

Valuation domain .... دامنه‌ی ارزیابی
Valuation ring .... حلقه‌ی ارزیابی
Vector space .... فضای برداری
Von neumann regular ring .... حلقه‌ی فون نیومن منظم
Weakly 2-absorbing .... ایده‌آل ضعیف ۲-جذبی
Weakly Prime ideal .... ایده‌آل اول ضعیف
Zorn's lemma .... لم زورن
Zero-divisor .... مقسوم‌علیه صفر
π-regular ring .... حلقه‌ی π-منظم

Aabstract

Let R be a commutative ring with identity $1_R \neq 0$. Various generalizations of prime ideals have been studied. For example, a proper ideal I of R is weakly prime if $a, b \in R$ with $o \neq ab \in I$, then either $a \in I$ or $b \in I$. A proper ideal I of R is said to be 2-absorbing if whenever $a, b, c \in R$ and $abc \in I$, then either $ab \in I$ or $ac \in I$ or $bc \in I$. In this thesis, we study weakly 2-absorbing ideals in commutative rings with identity, which are a generalization of weakly prime ideals. A proper ideal I of R is called a weakly 2-absorbing ideal of R if whenever $a, b, c \in R$ and $0 \neq abc \in I$, then either $ab \in I$ or $ac \in I$ or $bc \in I$.
We show that a weakly 2-absorbing ideal I of R with $I^3 \neq 0$ is a 2-absorbing ideal of R. We show that every proper ideal of a commutative ring R is a weakly 2-absorbing ideal if and only if either R is a quasi-local ring with maximal ideal M such that $M^3 = \{o\}$ or R is ring-isomorphic to $R_1 \times F$ where R_1 is a quasi-local ring with maximal ideal M and $M^2 = \{o\}$ and F is a field or R is ring-isomorphic to $F_1 \times F_2 \times F_3$ for some fields F_1, F_2, F_3. Finally we investigate n-absorbing ideals and strongly n-absorbing ideals, which are a generalization of prime ideals.

key words: 2-absorbing ideal, n-absorbing ideal, prime ideal, prufer domain, strongly n-absorbing ideal, weakly 2-absorbing ideal.

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

On weakly 2-absorbing ideals of commutative rings

Fatemeh Torkaman

Supervisor

Dr. Ebrahim Hashemi

September 2015