بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

نمایش های ماتریسی مثلثی توسیع های یک حلقه

دانشجو:
مریم رباط سرپوشی

استاد راهنما:
جناب دکتر ابراهیم هاشمی
جناب دکتر احمد زیره

استاد مشاور:
جناب دکتر میرحیدر جعفری

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

آبان ۱۳۸۸

تقدیم به ...

تقدیم به پدرم ، بزرگ معلم زندگیم که استقامت را به من آموخت و مادرم که وجودش برایم همه عشق است و وجودم برایش همه رنج ، توانش رفت تا به توانایی برسم ، مویش سپیدی گرفت تا روی سپید بمانم. او که فروغ نگاهش ، گرمی کلامش و روشنایی رویش سرمایه زندگانی من است. در برابر وجود گرامیش زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مالامال از عشق و محبت ، بر دستانش بوسه می زنم و تقدیم به بهترین دوست زندگیم که چون پرستویی پر کشید و رفت. او که محبت صمیمانه اش همراه من است و یاد و خاطرش تا ابد در ذهن من جاری است.

موفقیت و نیکبختی شان آرزویم

تشکر و قدردانی

با توجه به عنایت خداوند متعال و راهنمایی و مساعدت اساتید بزرگوار و دوستان عزیزم ، اکنون که پایان نامه خود را به پایان رسانده ام بر خود لازم می دانم تا تشکر خود را ابراز نمایم.

از جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی استاد بزرگوارم که در تمامی مراحل این پایان نامه با صبر و حوصله ، اینجانب را یاری نمودند کمال تشکر را دارم. از جناب آقای دکتر احمد زیره که با راهنمایی شان مرا مورد لطف خود قرار دادند صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم. مراتب تشکر خود را از جناب آقای دکتر میرحیدر جعفری به خاطر کمک ایشان ابراز می دارم. همچنین از کمک های استاد گرامی جناب آقای سید رضا موسوی و دوست عزیزم خانم الهام حاجی شمسائی تشکر و قدردانی می کنم.

حمایت ها و دعاهای پدر و مادر عزیزم در تمامی مراحل زندگی شامل حال من بوده ، ضمن تشکر از آنها ، سلامتی شان را از درگاه خداوند متعال خواستارم.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مفهوم مجموعه خودتوان های مثلثی چپ برای یک حلقه را بیان می کنیم و رابطه بین خودتوان های مثلثی چپ یک حلقه و برخی از توسیع های آن حلقه را بررسی می کنیم. این خودتوان ها یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته برای یک حلقه تعیین می کنند. سپس حلقه های PWP را مورد مطالعه قرار می دهیم. این خانواده شامل حلقه های PWD (و بنابرین شامل همه حلقه های موروثی که نیم ابتدائی یا نوتری راست هستند) می باشد. برای یک حلقه PWP ، توسیع هایی از آن را که یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته دارند به طوری که حلقه های روی قطر اصلی آنها اول هستند را مورد بررسی قرار می دهیم.

کلمات کلیدی: نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته، توسیع یک حلقه، توسیع مرکزی، توسیع نرمالگر، توسیع شبه نرمالگر، PWD ، PWP ، حلقه شبه بئر اصلی، حلقه شبه بئر، خودتوان نیم مرکزی، بعد مثلثی، خودتوان مثلثی، حلقه u.p- منوئیدی

مقالات مستخرج از پایان نامه

[1] M. Robat Sarpooshi and E. Hashemi, Triangular matrix representations of ring extensions, Tarbiat moallem university, 20th seminar on algebra, 2-3 ordibehesht, 1388 (Apr. 22-23, 2009)

فهرست مطالب

فهرست علائم

$A.C.C$	شرط زنجیر افزایشی
$ann_l(x)$	پوچساز چپ عنصر x
$ann_r(x)$	پوچساز راست عنصر x
$\mathbb{C}$	میدان اعداد مختلط
$card\ (A)$ ، $\|A\|$	کاردینال مجموعه A
$char(R)$	مشخصه حلقه R
$D.C.C$	شرط زنجیر کاهشی
D_∞	گروه دووجهی نامتناهی
$\deg\ f(x)$	درجه چند جمله ای $f(x)$
$\dim(V)$	بعد فضای برداری V
E_{ij}	ماتریسی که درایه $(i.j)$ آن یک و سایر درایه های آن صفر است
$End_R(M)$	حلقه $R-$همریختی ها روی M
$I+J$	مجموع ایده ال های I و J
M_R	$R-$ مدول راست M
$Mat_n(R)$	حلقه ماتریس های $n\times n$ روی R
$R\oplus S$	مجموع مستقیم حلقه های R و S
R/I	حلقه خارج قسمتی R بر I
$o(x)$	مرتبه عنصر x
$P(R)$	رادیکال اول حلقه R

$\sum_{i\in I} R_i$	مجموع یک خانواده از حلقه ها
$\prod_{i\in I} R_i$	ضرب مستقیم یک خانواده از حلقه ها
$\oplus_{i\in I} R_i$	جمع مستقیم یک خانواده از حلقه ها
$\boldsymbol{Q}$	میدان اعداد گویا
R	میدان اعداد حقیقی
$R[G]$	حلقه گروهی
$R[X]$	حلقه چندجمله ایها روی R با متغیرهایی از X
$R[[X]]$	حلقه سریهای توانی روی R با متغیرهایی از X
$R[x, x^{-1}]$	حلقه چندجمله ای های لوران روی R
$R[[x, x^{-1}]]$	حلقه سری های توانی لوران روی R
$rad(R)$	رادیکال ژاکوبسن حلقه R
$< x >$	ایده ال اصلی تولید شده توسط x
Z	حلقه اعداد صحیح
$Z_n = Z/nZ$	حلقه اعداد صحیح به پیمانه n
δ_{ij}	دلتای کرونکر

فصل اول

تعاریف و خلاصه ای از پایان نامه

تمام حلقه ها را شرکت پذیر و یکدار در نظر می گیریم. یک توسیع از حلقه R یعنی توسیعی که همان عضو همانی را دارد. اگر S یک زیر مجموعه ناتهی از R باشد پوچساز راست و پوچساز چپ را به ترتیب با $r_R(S)$ و $l_R(S)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم $r_R(S)=\{a\in R|Sa=\circ\}$ و $l_R(S)=\{a\in R|aS=\circ\}$.

۱-۱ تعریف: حلقه R را *بئر*[۱] *(شبه بئر)*[۲] می نامند اگر پوچساز راست هر زیر مجموعه ناتهی (ایده ال راست) آن ، به عنوان یک ایده ال راست ، توسط یک عنصر خودتوان تولید شود. برای مطالعه بیشتر در مورد حلقه های شبه بئر می توانید به [۵]،[۷]،[۱۵]،[۱۶]،[۲۴]، [۳۲] مراجعه کنید.

تعمیم دیگری از حلقه های بئر ، حلقه های pp هستند.

---

۱ - Baer

2 - quasi-Baer

۱-۲ تعریف: حلقه R را pp *راست*[۱] (چپ) می نامند اگر پوچساز راست (چپ) هر عنصر R ، به عنوان یک ایده ال راست (چپ) ، توسط یک خودتوان تولید شود. حلقه R را pp می نامند اگر هم pp راست و هم pp چپ باشد.

۱-۳ تعریف: حلقه R را *شبه بئر اصلی راست*[۲] می نامند اگر پوچساز راست هر ایده ال راست اصلی آن ، به عنوان یک ایده ال ، توسط یک خودتوان تولید شود. حلقه های شبه بئر اصلی چپ به طور مشابه تعریف می شوند. یک حلقه را شبه بئر اصلی می نامند اگر هم شبه بئر اصلی راست و هم شبه بئر اصلی چپ باشد. هر حلقه شبه بئر ، شبه بئر اصلی است.

۱-۴ تعریف: حلقه R را *تقلیل یافته*[۳] گوییم اگر هیچ عنصر پوچ توان ناصفر نداشته باشد.

۱-۵ تعریف: عنصر خودتوان $e \in R$ را *نیم مرکزی چپ*[۴] می نامند اگر برای هر $x \in R$ ، $exe = xe$. خود توان نیم مرکزی راست به صورت مشابه تعریف می شود. به طور معادل $e = e^{۲} \in R$ نیم مرکزی چپ است اگر eR یک ایده ال R باشد. چون پوچساز راست یک ایده ال راست ، یک ایده ال است لذا در یک حلقه شبه بئر ، پوچساز راست یک ایده ال راست توسط یک خودتوان نیم مرکزی تولید می شود. $S_l(R)$ و $S_r(R)$ به ترتیب نمایانگر مجموعه تمام خودتوان های نیم مرکزی چپ و راست حلقه R می باشند. خودتوان e از حلقه R را *نیم مرکزی تقلیل یافته*[۵] می نامند اگر $S_l(e\mathrm{R}e) = \{۰, e\}$. توجه داریم که $S_l(e\mathrm{R}e) = \{۰, e\}$ اگر و فقط اگر $S_r(e\mathrm{R}e) = \{۰, e\}$. هرگاه ۱ تقلیل یافته نیم مرکزی باشد حلقه R را *تقلیل یافته نیم مرکزی* می نامیم. اگر $\mathrm{B}(R)$ مجموعه تمام خودتوان های مرکزی R باشد می توان نشان داد که $S_l(R) \cap S_r(R) = \mathrm{B}(R)$.

---

[۱] - right pp

[۲] - right principally quasi-Baer (or simply right p.q-Baer)

[۳] - reduced

[4] - left semi central

[۵] - reduced semicentral

۱-۶ تعریف: گوییم حلقه R *نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته*[1] دارد هر گاه یکریختی حلقه ای $\theta : R \to \begin{pmatrix} R_1 & R_{12} & . & . & . & R_{1n} \\ 0 & R_2 & . & . & . & R_{2n} \\ . & 0 & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & R_n \end{pmatrix}$ وجود داشته باشد که در آن هر R_i یک حلقه یکدار و برای هر $i < j$ ، R_{ij} یک R_i - مدول چپ و R_j - مدول راست است. اگر هر R_i یک حلقه تقلیل یافته نیم مرکزی باشد در این صورت گوییم R یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل از بعد مثلثی n دارد.

۱-۷ تعریف: خودتوان های $\alpha, \beta \in R$ را متعامد[2] نامیم اگر $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$.

۱-۸ تعریف: خودتوان ناصفر $e \in R$ را *ابتدائی*[3] گوییم اگر e را نتوان به صورت ترکیبی به فرم $\alpha + \beta$ نوشت که α و β خودتوان های متعامد ناصفر در R باشند.

گوردون[4] و اسمال[5] در [۲۲] مفهوم یک حلقه PWD را معرفی کردند.

۱-۹ تعریف: حلقه R را PWD[6] (PWP)[7] می نامند هر گاه یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی (مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی) مانند $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $1 \le i, j, k \le n$ و هر $x \in e_i R e_j$ و $y \in e_j R e_k$ اگر $xy = 0$ $(xRy = 0)$ آنگاه $x = 0$ یا $y = 0$.

---

[1] - generalized triangular matrix representation

[2] - orthogonal

[3] - primitive

[4] - Gordon

[5] - Small

[6] - piecewise domain

[7] - piecewise prime ring

۱-۱۰ تعریف: فرض کنید K یک حلقه و X یک مجموعه از متغیر های مستقل روی K باشد. *حلقه چند جمله ا ی ها*[۱] روی K را با $R=K[X]$ نمایش می دهیم. عناصر آن به صورت چند جمله ای هستند و جمع و ضرب روی R به طور طبیعی تعریف می شود.

۱-۱۱ تعریف: فرض کنید K یک حلقه و $X=\{x_i | i\in I\}$ یک مجموعه از متغیر های مستقل روی K باشد. *حلقه سریهای توانی*[۲] روی K را با علامت $R=K[[X]]$ نمایش می دهیم. عناصر آن به فرم $f_\circ + f_1 + f_2 + \ldots$ هستند که هر f_i یک چند جمله ای همگن از درجه i بر اساس متغیر های $X=\{x_i | i\in I\}$ است. جمع و ضرب روی R به طور طبیعی تعریف می شود.

۱-۱۲ تعریف : فرض کنید K یک حلقه و x یک متغیر مستقل رو ی K باشد. *حلقه سریهای توانی لوران*[۳] روی K را با علامت $R=K((x))$ نمایش می دهیم. عناصر آن به فرم $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i x^i$ هستند که تعداد متناهی از ضرایب توان های منفی x مخالف صفر هستند. جمع و ضرب روی R به طور طبیعی تعریف می شود و بوضوح داریم $K[[x]]\subseteq K((x))$.

۱-۱۳ تعریف : فرض کنید K یک حلقه و $\sigma : K \to K$ یک همریختی باشد. *حلقه چند جمله ای های اریب*[۴] روی K را با علامت $R=K[x;\sigma]$ نمایش می دهیم. عناصر آن همان چند جملا ای های به فرم $a_\circ + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ هستند. جمع روی R به طور طبیعی تعریف می شود اما ضرب از قانون $xb=\sigma(b)x$ پیروی می کند. یعنی در حالت کلی ضرب به صورت زیر تعریف می شود :

$$\left(\sum_{i=\circ}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=\circ}^{m} b_j x^j\right)=\sum\sum a_i \sigma^j(b_j) x^{i+j}.$$

---

۱ - polynomials ring

۲ - power series ring

۳ - Laurent power series ring

٤ - Skew polynomials ring

۱-۱۴ تعریف : مشابه تعریف بالا ، *حلقه سری های توانی اریب*[۱] نیز تعریف می شود و آن را با علامت $R=K[[x;\sigma]]$ نمایش می دهیم: $R=K[[x;\sigma]]=\{a_\circ+a_1x+..|a_i\in K\}$.

۱-۱۵ تعریف : فرض کنید K یک حلقه و $\sigma:K\to K$ یک خودریختی باشد. حلقه سری های توانی اریب لوران را با علامت $R=K((x;\sigma))$ نشان می دهیم. عناصر آن به فرم $\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_ix^i$ است به طوری که برای $i<\circ$ ، تعداد متناهی از a_i ها مخالف صفر هستند. جمع روی R به طور طبیعی تعریف می شود اما ضرب از قانون $xb=\sigma(b)x$ و $x^{-1}b=\sigma^{-1}(b)x^{-1}$ پیروی می کند. بوضوح $K[[x;\sigma]]$ زیر حلقه ای از $K((x;\sigma))$ است.

۱-۱۶ تعریف : فرض کنید K یک حلقه و $\sigma:K\to K$ یک خودریختی باشد. مشابه تعریف بالا ، می توان حلقه سری های توانی $R=K[[x;\sigma]]$ را تشکیل داد. حال زیر مجموعه $\left\{\sum_{i=m}^{n}a_ix^i|m\le n,m\in Z,n\in Z,a_i\in K\right\}$ از حلقه $R=K[[x;\sigma]]$ را در نظرمی گیریم. بوضوح مجموعه فوق یک زیر حلقه از $K[[x;\sigma]]$ است که ان را با علامت $K[x,x^{-1};\sigma]$ نمایش می دهیم و به آن حلقه چند جمله ای های اریب لوران می گوییم.

G نمایانگر یک منوئید و μ عضو همانی آن می باشد.

۱-۱۷ تعریف: منوئید G را $u.p$-*منوئید*[۲] می نامند اگر برای هر دو زیر مجموعه ناتهی متناهی $A,B\subseteq G$ ، عنصر $x\in G$ وجود داشته باشد که به طور یکتا به فرم ab نوشته شود که $a\in A$ و $b\in B$.

کلاس $u.p$-منوئید ها بسیار بزرگ و از اهمیت خاصی برخوردار است. برای مثال این کلاس شامل همه منوئیدهای مرتب چپ یا راست ، زیرمنوئید های یک گروه آزاد و گروه های پوچ توان فارغ

---

۱ - skew power series ring

۲ - unique product monoid

از تاب است. هر u.p– منوئید G حذف پذیر است و عنصر غیر همانی از مرتبه متناهی ندارد.

۱–۱۸ تعریف : فرض کنید R حلقه و G یک گروه باشد. R–مدول آزاد تولید شده توسط G را *حلقه گروهی*[۱] می نامیم و با علامت $R[G]$ نمایش می دهیم.

نشان می دهیم یک حلقه PWP یک حلقه شبه بئر با بعد مثلثی متناهی است. هر حلقه PWP یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل دارد که حلقه های روی قطر اصلی آن اول هستند. حلقه ماتریس های $n\times n$ و حلقه چند جمله ای ها روی حلقه های PWD همچنان PWD هستند.

همچنین نشان می دهیم اگر R یک حلقه PWP باشد توسیع های زیر نیز PWP هستند (و بنابراین یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل دارند): ۱- حلقه منوئیدی $R[G]$ که G یک $u.p$- منوئید است ، ۲- $R[X]$ و $R[[X]]$ که X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجائی است ، ۳- حلقه چند جمله ای های لوران $R[x,x^{-1}]$ و حلقه سری های توانی لوران $R[[x,x^{-1}]]$ ، ۴- حلقه چند جمله ای های اریب $R[x;\alpha]$ و حلقه سری های توانی اریب $R[[x;\alpha]]$ که α یک خودریختی از R است ، ۵- حلقه ماتریس های مربعی $Mat_n(R)$ و حلقه ماتریس های بالا مثلثی $T_n(R)$.

در فصل ۲ رابطه شبه بئر بودن حلقه R و حلقه منوئیدی $R[G]$ را بررسی می کنیم. همچنین یک شرط لازم و کافی برای شبه بئر بودن یک جبر گروهی نیم اول پیدا می کنیم. از آن نتیجه می گیریم که هر جبر گروهی نوتری راست نیم اول یک مجموع مستقیم متناهی از حلقه های اول است.

در فصل ۳ خودتوان های نیم مرکزی توسیع های R را بر حسب خود توان های نیم مرکزی R مشخص می کنیم.

[۱] - group ring

در فصل ۴ مفاهیم یک مجموعه از خودتوان های مثلثی و بعد مثلثی را بیان می کنیم. همچنین نشان می دهیم که اگر R شبه بئر باشد آنگاه R از بعد مثلثی n است اگر و فقط اگر دقیقا n ایده ال اول مینیمال داشته باشد.

در فصل ۵ نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل برای انواع توسیع های R را تعیین می کنیم.

۱-۱۹ تعریف: فرض کنید N توسیعی از R باشد و $n \in \mathrm{N}$. n را یک *عنصر* R- *شبه نرمالگر چپ*[1] می نامند اگر $nR \subseteq Rn$. اگر $n = n^2$ آنگاه $nRn = nR$ (یعنی n به فرم نیم مرکزی راست روی R عمل می کند).

به عنوان مثال اگر R حلقه ماتریس های بالا مثلثی ۲×۲ روی اعداد صحیح و N حلقه ماتریس های مربعی ۲×۲ روی میدان اعداد گویا باشد آنگاه $n = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ یک عنصر خودتوان R-شبه نرمالگر چپ از N است. اگر q یک عدد صحیح نباشد آنگاه n نرمالگر نیست. گوئیم N یک *توسیع شبه نرمالگر چپ*[2] از R است اگر N به عنوان یک R- مدول چپ توسط یک مجموعه از عناصر R- شبه نرمالگر چپ تولید شود. به عنوان مثال هر توسیع نرمالگر و حلقه $R[x;\sigma]$ ، که σ یک همریختی است ، توسیع هایی شبه نرمالگر چپ از R هستند. توجه داریم که $R[x;\sigma]$ یک توسیع نرمالگر از R است که توسط مجموعه $\{1, x, x^2, \ldots\}$ تولید می شود اگر و فقط اگر σ پوشا باشد.

۱-۲۰ تعریف الف: حلقه R را *ساده*[3] گوییم اگر $R \neq 0$ و (0) و R تنها ایده ال های آن باشند.

ب: گوییم حلقه R *نیم ساده*[1] است هر گاه هر ایده ال آن یک جمعوند مستقیم از R باشد یا به طور معادل R با مجموع مستقیمی از ایده ال های مینیمال خود برابر باشد.

---

[1] - left R-quasi normalizing element

[2] - left quasi normalizing extension

[3] - simple ring

۱-۲۱ تعریف الف: فرض کنید R یک حلقه جابجایی و P ایده الی از R باشد. ایده ال P را *اول*[۲] نامیم هر گاه $P \neq R$ و برای ایده ال های $I, J \subseteq R$ ، اگر $IJ \subseteq P$ آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

ب: ایده ال Q از حلقه R را *نیم اول*[۳] نامیم هر گاه برای هر ایده ال I از R ، اگر $I^2 \subseteq Q$ آنگاه $I \subseteq Q$. برای مثال هر ایده ال اول ، نیم اول است.

۱-۲۲ تعریف: گوییم حلقه R *اول*[۴] (*نیم اول*[۵]) است هر گاه ایده ال $(\circ)$ یک ایده ال اول (نیم اول) باشد. برای مثال هر دامنه یک حلقه اول و هر حلقه تقلیل یافته یک حلقه یک نیم اول است.

۱-۲۳ تعریف: فرض کنید $\{C_i : i \in I\}$ یک خانواده از زیر مجموعه های مجموعه C باشد. گوییم این خانواده در *شرط زنجیر افزایشی*[۶] (به طور خلاصه $A.C.C$) صدق می کند هر گاه یک زنجیر افزایشی نامتناهی مانند $C_{i_1} \subset C_{i_2} \subset \dots$ در این خانواده وجود نداشته باشد. دو گزاره زیر معادل با این شرط هستند:

(۱) برای هر زنجیر صعودی در این خانواده مانند $C_{i_1} \subseteq C_{i_2} \subseteq \dots$ ، یک عدد صحیح n وجود داشته باشد به طوری که $C_{i_n} = C_{i_{n+1}} = C_{i_{n+2}} = \dots$.

(۲) هر مجموعه ناتهی از این خانواده تحت رابطه شمول یک عضو ماکزیمال داشته باشد.

به طور مشابه *شرط زنجیر کاهشی*[۷] (به طور خلاصه $D.C.C$) برای یک خانواده از زیر مجموعه های مجموعه C تعریف می شود و می توان دو شرط معادل بالا را برای این شرط نیز بیان کرد.

---

[۱] - semi simple ring

[۲] - prime ideal

[۳] - semi prime ideal

[۴] - prime ring

[۵] - semi prime ring

[۶] - ascending chain condition

[۷] - decending chain condition

۱-۲۴ تعریف: فرض کنید R یک حلقه و M یک R- مدول باشد. M را *نوتری*[۱] (*آرتینی*[۲]) می نامیم اگر خانواده همه زیر مدول های M در شرط $A.C.C$ $(D.C.C)$ صدق کند. حلقه R را نوتری (آرتینی) نامیم اگر R به عنوان یک R- مدول ، نوتری (آرتینی) باشد. به طور مثال هر میدان هم نوتری و هم آرتینی است و حلقه اعداد صحیح یک حلقه نوتری است.

۱-۲۵ قضیه پایه هیلبرت[۳] : اگر حلقه R نوتری باشد آنگاه حلقه چند جمله ای های $R[x_1, x_2, ..., x_n]$ نوتری است.

فرض کنید K یک حلقه و $\{x_i : i \in I\}$ یک مجموعه مستقل از متغیر های ناجابجایی باشد. می توانیم $K-$حلقه آزاد تولید شده توسط $\{x_i : i \in I\}$ را تشکیل دهیم و آن را با $R = K\langle x_i : i \in I\rangle$ نمایش می دهیم. عناصر R به صورت چند جمله ای هایی با متغیر های ناجابجایی $\{x_i\}$ و ضرایب از K هستند. در اینجا فرض می کنیم که ضرایب با هر x_i جابجا می شود. حال فرض کنید K و R مانند بالا باشند و $F = \{f_j : j \in J\} \subseteq R$. ایده ال تولید شده توسط F در R را با (F) نمایش می دهیم و حلقه خارج قسمتی $\overline{R} = R/(F)$ را تشکیل می دهیم.

۱-۲۶ تعریف : اگر $R = K\langle x, y\rangle$ و $F = \{xy. - yx - 1\}$ ، آنگاه $\overline{R} = R/(F)$ را *اولین جبر ویل*[۴] می نامند و با $A_1(K)$ نمایش می دهند. با استفاده از $A_1(K)$ ، جبرهای ویل بالاتر را به صورت زیر تعریف می کنیم $A_n(K) = A_1(A_{n-1}(K))$. به طور معال $A_n(K)$ توسط یک مجموعه از عناصر $\{x_1, y_1, ..., x_n, y_n\}$ تولید می شود ، هر کدام از این ها با عناصر K جابجا می شوند ، و با روابط $x_i y_i - y_i x_i = 1$ وقتی $1 \le i \le n$ ، $x_i y_j - y_j x_i = ۰$ برای $i \ne j$ ، $x_i x_j - x_j x_i = ۰$ برای $i \ne j$ و $y_i y_j - y_j y_i = ۰$ برای $i \ne j$.

---

۱ - noetherian

۲ - artinian

۳ - Hilbert basis theorem

٤ - the first weyl algebra

۱-۲۷ تعریف : فرض کنید C دسته ای از R- مدولها باشد. برای هر دو عضو از C مانند M و N ، مجموعه $Hom(M,N)$ را در نظر می گیریم که هر عضو از $Hom(M,N)$ یک همریختی از M به N است و معمولا با $f:M\to N$ نمایش می دهیم. برای هر M و N و P تابعی به نام $o_{M,N,P}$ به صورت زیر وجود دارد : $o_{M,N,P}:Hom(N,P)\times Hom(M,N)\to Hom(M,P)$ که برای هر g و f ، معمولا $o_{M,N,P}(g,f)$ را با نماد $g\circ f$ نمایش می دهیم. C همراه با توابع Hom و o را که در شرایط زیر صدق می کند را یک *کاتگوری از R- مدولها*[۱] می نامیم:

(۱) برای هر f و g و h که ترکیب های متناظر آنها با معنی باشد ، $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

(۲) برای هر عضو از C مانند M ، $Hom(M,M)$ شامل عضوی مانند 1_M باشد که:

(الف) برای هر $N\in C$ و برای هر $g\in Hom(M,N)$ داشته باشیم $g\circ 1_M=g$.

(ب) برای هر $P\in C$ و برای هر $f\in Hom(P,M)$ داشته باشیم $1_M\circ f=f$.

۱-۲۸ تعریف : فرض کنید R یک حلقه و P یک $R-$مدول باشد. P را *پروژکتیو*[۲] می نامیم هر گاه برای هر همریختی پوشای $f:A\to B$ بین $R-$مدولهای A و B و همریختی $g:P\to B$ ، یک همریختی $h:P\to A$ وجود داشته باشد به طوری که $f\circ h=g$.

۱-۲۹ تعریف : $R-$مدول چپ I را *انژکتیو*[۳] می نامیم هر گاه برای هر همریختی یک به یک $f:A\to B$ بین $R-$مدولهای A و B و هر همریختی $g:A\to I$ ، یک همریختی $h:B\to I$ وجود داشته باشد به طوری که $h\circ f=g$.

۱-۳۰ تعریف: حلقه R را *خود انژکتیو*[۴] می نامیم هر گاه R به عنوان R- مدول چپ ، انژکتیو باشد.

---

[۱] - category of R-modules

[۲] - projective

[۳] - injective

[۴] - self injective

فصل دوم

حلقه های منوئیدی

در این فصل نشان می دهیم که اگر G یک u.p– منوئید باشد آنگاه حلقه منوئیدی $R[G]$ شبه بئر (شبه بئر اصلی راست) است اگر و فقط اگر حلقه R شبه بئر (شبه بئر اصلی راست) باشد. همچنین شرط شبه بئر اصلی راست را برای جبرهای گروهی نیم اول بررسی می کنیم. در ادامه شرایطی را که تحت آن یک جبر گروهی نیم اول با یک مجموع مستقیم متناهی از حلقه های اول برابر است را بیان می کنیم.

۲-۱ لم: فرض کنید G یک $u.p$-منوئید باشد. در این صورت G حذف پذیر است ، یعنی برای هر $g,h,x \in G$ اگر $gx = hx$ یا $xg = xh$ آنگاه $g = h$.

برهان: فرض کنید $gx = hx$. مجموعه های $A = \{g,h\}$ و $B = \{x\}$ را در نظر بگیرید. اگر gx به صورت یکتا نوشته شده باشد آنگاه از $gx = hx$ خواهیم داشت $g = h$. اگر hx یکتا باشد مشابها نتیجه می گیریم $g = h$. ■

۲-۲ قضیه: فرض کنید G یک $u.p$- منوئید و $R[G]$ حلقه منوئیدی باشد. در این صورت:

(۱) R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است اگر و فقط اگر $R[G]$ یک حلقه شبه بئر اصلی راست باشد.

(۲) R یک حلقه شبه بئر است اگر و فقط اگر $R[G]$ یک حلقه شبه بئر باشد.

برهان: (۱) فرض کنید R یک حلقه شبه بئر اصلی راست باشد. فرض کنیم $\alpha = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_n g_n \in R[G]$. برای هر i ، $e_i \in S_l(R)$ وجود دارد به طوری که $r_R(a_i R) = e_i R$. اگر $e = e_1 e_2 \ldots e_n$ باشد آنگاه $e \in S_l(R)$ و $eR = \bigcap_{i=1}^{n} r_R(a_i R)$.

ابتدا نشان می دهیم $e \in S_l(R)$. برای این منظور باید نشان دهیم که برای هر $x \in R$، $exe = xe$. فرض کنیم $x \in R$ دلخواه باشد پس داریم:

$$xe = xe_1e_2 \ldots e_n = e_1xe_1e_2e_3 \ldots e_n = e_1xe_2e_1e_2e_3 \ldots e_n = e_1e_2xe_2e_1e_2e_3 \ldots e_n =$$

$$\ldots = e_1e_2 \ldots e_n x e_1 e_2 \ldots e_n$$

در نتیجه $exe = xe$ و لذا $e \in S_l(R)$. حال نشان می دهیم $eR = \bigcap_{i=1}^{n} r_R(a_i R)$. فرض کنیم $x \in eR = e_1 e_2 \ldots e_n R$. پس $x \in e_1 R = r_R(a_1 R)$. همچنین $x \in e_1 e_2 \ldots e_n R = e_2 e_1 e_2 \ldots e_n R$ ، در نتیجه $x \in e_2 R = r_R(a_2 R)$. اگر به همین صورت ادامه دهیم نتیجه می گیریم که : $x \in e_1 \ldots e_n R = e_n \ldots e_1 e_2 \ldots e_n R$. پس $x \in e_n R = r_R(a_n R)$. لذا برای هر i داریم $x \in r_R(a_i R)$. پس $x \in \bigcap_{i=1}^{n} r_R(a_i R)$. در نتیجه $eR \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} r_R(a_i R)$.

حال عکس رابطه شمول را نشان می دهیم. فرض کنید $x \in \bigcap_{i=1}^{n} r_R(a_i R)$. پس برای هر i ، $x \in r_R(a_i R) = e_i R$. چون $x \in e_1 R$ ، لذا $y_1 \in R$ وجود دارد به طوری که $x = e_1 y_1$. چون $x \in e_2 R$ ، پس $y_2 \in R$ وجود دارد به طوری که $x = e_2 y_2$. به همین صورت چون $x \in e_{n-1} R$ پس $y_{n-1} \in R$ وجود دارد به طوری که $x = e_{n-1} y_{n-1}$ و چون $x \in e_n R$ لذا $y_n \in R$ وجود دارد به طوری که $x = e_n y_n$. حال اگر e_{n-1} را در طرفین تساوی $e_n y_n = e_{n-1} y_{n-1}$ ضرب کنیم داریم $(\star)$

$e_{n-1}e_n y_n = e_{n-1}e_{n-1}y_{n-1} = e_{n-1}y_{n-1} = x$. لذا $x \in e_{n-1}e_n R$. اگر e_{n-2} در طرفین تساوی $e_{n-1}y_{n-1} = e_{n-2}y_{n-2}$ ضرب کنیم خواهیم داشت $e_{n-2}e_{n-1}y_{n-1} = e_{n-2}y_{n-2} = x$. اگر معادله ($\star$) را از چپ در e_{n-2} ضرب کنیم آنگاه خواهیم داشت $e_{n-2}e_{n-1}e_n y = e_{n-2}e_{n-1}y_{n-1} = e_{n-2}y_{n-2} = x$. لذا $x \in e_{n-2}e_{n-1}e_n R$. با ادامه این روند نتیجه می گیریم $x \in e_1 e_2 \ldots e_n R = eR$. لذا $\bigcap_{i=1}^{n} r_R(a_i R) \subseteq eR$.

بنابراین $eR = \bigcap_{i=1}^{n} r_R(a_i R)$. در نتیجه $eR[G] \subseteq r_{R[G]}(\alpha R[G])$. بوضوح $r_{R[G]}(\alpha R[G]) \subseteq r_{R[G]}(\alpha R)$. ادعا می کنیم $r_{R[G]}(\alpha R) \subseteq eR[G]$. فرض کنید $\gamma = c_1h_1 + c_2h_2 + \ldots + c_m h_m \in r_{R[G]}(\alpha R)$. پس $\alpha R\gamma = 0$ و لذا $(a_1g_1 + \ldots + a_n g_n)R(c_1h_1 + \ldots + c_m h_m) = 0$. از استقرا روی n استفاده می کنیم.

مرحله ۱ : فرض کنید $n = 1$. پس $\alpha = a_1g_1$ و لذا برای هر $b \in R$، $(a_1g_1)b(c_1h_1 + \ldots + c_m h_m) = a_1bc_1g_1h_1 + a_1bc_2g_1h_2 + \ldots + a_1bc_m g_1h_m = 0$. طبق لم ۲-۱ برای هر $i \neq j$ ، $g_1h_i \neq g_1h_j$. پس برای هر i ، $a_1Rc_i = 0$ و لذا $c_i \in r_R(a_1R) = e_1R(= eR)$. بنابراین $c_1h_1 + c_2h_2 + \ldots + c_m h_m \in eR[G]$.

مرحله ۲ : چون G یک u.p- منوئید است لذا با فرض دو مجموعه $A = \{g_1, \ldots g_n\}$ و $B = \{h_1, \ldots, h_m\}$ از G ، i و j ای وجود دارند به طوری که $g_i h_j$ نمایش منحصر بفردی نسبت به مجموعه های A و B دارد. حال از اینکه $(a_1g_1 + \ldots + a_n g_n)R(c_1h_1 + \ldots + c_m h_m) = 0$ نتیجه می گیریم $a_iRc_j g_i h_j = 0$ و لذا $a_iRc_j = 0$. پس $c_j \in r_R(a_iR) = e_iR$. بنابراین برای هر $b \in R$ ،

$$0 = (a_1g_1 + \ldots + a_n g_n)be_i(c_1h_1 + \ldots + c_m h_m)$$

$$= (a_1g_1 + \ldots + a_{i-1}g_{i-1} + a_{i+1}g_{i+1} + \ldots a_n g_n)be_i(c_1h_1 + \ldots + c_m h_m)$$

$$= (a_1g_1 + \ldots + a_{i-1}g_{i-1} + a_{i+1}g_{i+1} + \ldots + a_n g_n)b(e_ic_1h_1 + \ldots e_ic_m h_m)$$

بنا بر فرض استقرا برای هر $1 \leq k \leq m$ ، داریم $e_ic_k \in e_1R \cap \ldots \cap e_{i-1}R \cap e_{i+1}R \ldots \cap e_nR$. بویژه

$$c_j = e_i c_j \in e_1 R \cap \ldots \cap e_{i-1} R \cap e_{i+1} R \cap \ldots \cap e_n R$$

پس $c_j \in e_1 R \cap \ldots \cap e_n R = eR$. حال از $(a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n) R (c_1 h_1 + \ldots + c_m h_m) = 0$ نتیجه می گیریم

$$(a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n) R (c_1 h_1 + \ldots + c_{j-1} h_{j-1} + c_{j+1} h_{j+1} + \ldots c_m h_m) = 0$$

به همین صورت می توان نشان داد $l \in \{1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots m\}$ وجود دارد به طوری که $c_l \in eR$ و

$$(a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n) R (c_1 h_1 + \ldots + c_{l-1} h_{l-1} + c_{l+1} h_{l+1} + \ldots + c_{j-1} h_{j-1} + c_{j+1} h_{j+1} + \ldots + c_m h_m) = 0$$

به همین صورت c_1 ، c_2 ، . . . و c_n در eR قرار دارند و لذا $\gamma = c_1 h_1 + c_2 h_2 + \ldots + c_m h_m \in eR[G]$. در نتیجه $r_{R[G]}(\alpha R[G]) \subseteq eR[G]$ و لذا $eR[G] \subseteq r_{R[G]}(\alpha R[G]) \subseteq r_{R[G]}(\alpha R) \subseteq eR[G]$. در نتیجه $r_{R[G]}(\alpha R[G]) = eR[G]$. بنابراین $R[G]$ یک حلقه شبه بئر اصلی راست است.

بعکس ، فرض کنید $R[G]$ یک حلقه شبه بئر اصلی راست باشد و $a \in R$. پس $r_{R[G]}(aR[G]) = eR[G]$ که $e = e^2 \in R[G]$. قرار دهید $e = e_0 \mu + e_1 g_1 + \ldots + e_n g_n$. فرض کنید $b \in r_R(aR)$. از اینکه $r_R(aR) \subseteq r_{R[G]}(aR[G]) = eR[G]$ داریم $eb = b$ و $e_0 b = b$. لذا $b \in e_0 R$ و $r_R(aR) \subseteq e_0 R$. از اینکه $r_{R[G]}(aR[G]) = eR[G]$ داریم $a\mathrm{Re} = 0$. پس $a\mathrm{Re}_0 = 0$ و $e_0 \in r_R(aR)$. بنابراین $r_R(aR) = e_0 R$. حال از اینکه $e_0 R = r_R(aR) \subseteq r_{R[G]}(aR[G]) = eR[G]$ نتیجه می گیریم $ee_0 = e_0$. لذا $e_0^2 = e_0$. بنابراین R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است.

(۲) فرض کنیم R یک حلقه شبه بئر باشد. فرض کنید I یک ایده ال از حلقه $R[G]$ و I_0 نمایانگر مجموعه همه ضرایب عناصر I باشد. بوضوح I_0 ایده الی از R است. طبق فرض R یک حلقه شبه بئر است لذا $e = e^2 \in R$ وجود دارد به طوری که $r_R(I_0) = eR$. ادعا می کنیم $r_{R[G]}(I) = eR[G]$. چون $I_0 e = 0$ پس $Ie = 0$. لذا $e \in r_{R[G]}(I)$. بنابراین $eR[G] \subseteq r_{R[G]}(I)$. حال فرض کنیم $c_1 h_1 + c_2 h_2 + \ldots + c_m h_m \in r_{R[G]}(I)$. باید نشان دهیم برای هر i ، $c_i \in r_R(I_0) = eR$. برای این کار نشان می دهیم که برای $a \in I_0$ ، $ac_i = 0$. فرض کنیم $a \in I_0$. در نتیجه

$a_1 g_1 + a_2 g_2 + ... + a_n g_n \in I$ وجود دارد به طوری که $a = a_1$. از اینکه $c_1 h_1 + c_2 h_2 + ... + c_m h_m \in r_{R[G]}(I)$ داریم

$$(a_1 g_1 + ... + a_n g_n) R (c_1 h_1 + ... + c_m h_m) = 0$$

با استدلالی مشابه قسمت (۱) می توان نشان داد که $c_i \in r_R(a_1 R) \cap ... \cap r_R(a_n R) \subseteq r_R(aR)$. پس $ac_i = 0$ و لذا برای هر i ، $c_i \in r_R(I_0) = eR$. در نتیجه $c_1 h_1 + c_2 h_2 + ... + c_m h_m \in eR[G]$. بنابراین $r_{R[G]}(I) = eR[G]$. بنابراین $R[G]$ یک حلقه شبه بئر است.

بعکس ، فرض کنیم $R[G]$ یک حلقه شبه بئر و I ایده الی از R باشد. مانند برهان قسمت (۱) می توان نشان داد $r_R(I)$ به عنوان یک ایده ال توسط یک خودتوان تولید می شود. در نتیجه R یک حلقه شبه بئر است. ■

۲-۳ نتیجه: فرض کنید R یک حلقه ، G یک $u.p$- منوئید و $R[G]$ حلقه منوئیدی باشد. در این صورت:

(۱) R یک حلقه pp تقلیل یافته است اگر و فقط اگر $R[G]$ یک حلقه pp تقلیل یافته باشد.

(۲) R یک حلقه بئر تقلیل یافته است اگر و فقط اگر $R[G]$ یک حلقه بئر تقلیل یافته باشد.

برهان: ابتدا نشان می دهیم که اگر R یک حلقه تقلیل یافته و G یک u.p – منوئید باشد آنگاه حلقه منوئیدی $R[G]$ تقلیل یافته است. فرض کنیم $\alpha = a_1 g_1 + ... + a_n g_n \in R[G]$ و $\alpha^2 = 0$. چون $\alpha^2 = 0$ پس $(a_1 g_1 + ... + a_n g_n)(a_1 g_1 + ... + a_n g_n) = 0$. لذا

$$a_1^2 g_1^2 + a_1 a_2 g_1 g_2 + ... + a_1 a_n g_1 g_n + a_2 a_1 g_2 g_1 + a_2^2 g_2^2 + ... + a_n^2 g_n^2 = 0$$

G یک u.p– منوئید است لذا برای هر $i \neq j$ داریم $g_k g_i \neq g_k g_j$ و $g_i g_k \neq g_j g_k$. پس $a_1^2 = 0$. R تقلیل یافته است لذا $a_1 = 0$ و در نتیجه تمام جملاتی که ضریب a_1 دارند حذف می شوند. پس $a_2^2 = 0$. چون R تقلیل یافته است لذا $a_2 = 0$ و بنابراین تمام جملاتی که ضریب a_2 دارند حذف

می شوند. به همین صورت $a_n^2 = 0$ و R تقلیل یافته است پس $a_n = 0$. بنابراین $\alpha = 0$. در نتیجه $R[G]$ تقلیل یافته است.

حال نشان می دهیم هر حلقه شبه بئر تقلیل یافته یک حلقه بئر است. فرض کنید X یک زیر مجموعه از R باشد. طبق فرض R شبه بئر است لذا خودتوان e وجود دارد به طوری که $r_R(XR) = eR$. کافی است نشان دهیم $r_R(X) = r_R(XR)$. فرض کنید $t \in r_R(X)$. پس $Xt = 0$. لذا برای هر $a \in R$ داریم $Xta = 0$. چون R تقلیل یافته است پس برای هر $a \in R$ ، $Xat = 0$. لذا $XRt = 0$. پس $t \in r_R(XR)$. بنابراین $r_R(X) = r_R(XR) = eR$. در نتیجه R یک حلقه بئر است. به همین صورت می توان نشان داد که یک حلقه شبه بئر اصلی تقلیل یافته یک حلقه pp است. حال از قضیه ۲-۲ نتیجه بدست می آید. ■

۲-۴ نتیجه: فرض کنیم R یک حلقه و X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجایی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) R یک حلقه شبه بئر (شبه بئر اصلی راست) است.

(۲) $R[X]$ یک حلقه شبه بئر (شبه بئر اصلی راست) است.

(۳) $R[x, x^{-1}]$ یک حلقه شبه بئر (شبه بئر اصلی راست) است.

برهان: X یک u.p- منوئید است پس (۱) و (۲) معادلند. چون $R[x, x^{-1}] \cong R[Z]$ که در آن Z گروه جمعی اعداد صحیح است و Z نیز یک u.p- منوئید است ، در نتیجه گزاره های (۱) و (۳) نیز معادلند. ■

۲-۵ تعریف: عنصر $a \in R$ را فون نیومن منظم می نامیم هر گاه $a \in aRa$. اگر هر عنصر $a \in R$ فون نیومن منظم باشد آنگاه حلقه R را *فون نیومن منظم*[1] می نامیم.

[1] - Von neumann regular

۲-۶ قضیه (قضیه مشکه[1]): فرض کنید K یک حلقه و G یک گروه باشد. در این صورت $R=K[G]$ نیم ساده است اگر و فقط اگر K نیم ساده و $|G|$ در K وارون پذیر باشد.

برهان: فرض کنید V یک R-مدول و W یک زیر مدول از آن باشد. نشان می دهیم که W یک جمعوند مستقیمی از V است. R- همریختی $f:V\to W$ را طوری در نظر بگیرید که $f|_W$ همانی باشد. (چون W یک جمعوند مستقیم $K-$مدولی از V است لذا نگاشت f را می توان در نظر گرفت.) تابع f را با همریختی h جایگزین می کنیم به طوری که h همان خواص f را داشته باشد. نگاشت $h:V\to V$ را با ضابطه $h(v):=|G|^{-1}\sum_{g\in G}g^{-1}f(gv)$ تعریف کنید. چون $h(v)\in|G|^{-1}\sum_{g\in G}g^{-1}W\subseteq W$ لذا h یک همریختی از V به W است. اگر $v\in W$ آنگاه چون h روی W همانی است نتیجه می گیریم که $h(v)=|G|^{-1}\sum_{g\in G}g^{-1}(gv)$. برای هر $\alpha\in G$ داریم

$$h(\alpha v)=|G|^{-1}\sum_{g\in G}g^{-1}(f(g\alpha v))$$

$$=|G|^{-1}\sum_{g'\in G}\alpha g'^{-1}f(g'v)$$

$$=\alpha h(v)$$

لذا h یک همریختی است. در نتیجه $V=W\oplus\ker(h)$. بنابراین نتیجه حاصل است.

بعکس ، فرض کنید $R=K[G]$ نیم ساده باشد. همریختی حلقه ای $\varepsilon:K[G]\to K$ را طوری در نظر بگیرید که $\varepsilon|_K=Id_K$ و $\varepsilon(G)=1$. چون K تصویر همریخت $K[G]$ است پس K نیم ساده است. حال نشان می دهیم که هر عدد اول مانند p که $|G|$ را عاد کند در K وارون پذیر است. طبق قضیه کوشی در تئوری گروه ها ، گروه G یک عنصر مانند σ از مرتبه p دارد. چون حلقه R نیم ساده است لذا فون نیومن منظم است. چون $[1-(1-\sigma)\alpha]\cdot(1-\sigma)=\circ$ در نتیجه عنصر $\alpha\in R$ وجود دارد به طوری که $(1-\sigma)\alpha(1-\sigma)=1-\sigma$. عنصر $\beta\in R$ وجوددارد به طوری که

---

[1] - Maschke's theorem

$1-(1-\sigma)\alpha=\beta\cdot(1+\sigma+...+\sigma^{p-1})$. با در نظر گرفتن نگاشت ε نتیجه می گیریم $1=\varepsilon(\beta)p$.
بنابراین $p=p\cdot 1$ در K وارون پذیر است. ■

۲-۷ تعریف: فرض کنید M یک R-مدول باشد. M را *صادق*[۱] می نامیم هر گاه $ann_R(M)=0$.

۲-۸ تعریف: حلقه R را GFC (FPF) راست می نامند اگر هر مدول دوری (با تولید متناهی) صادق آن یک مولد از کاتگوری R- مدول های راست باشد. کلاس حلقه های GFC شامل حلقه های FPF راست است. می توان نشان داد که اگر R یک حلقه خود انژکتیو باشد آنگاه R یک حلقه GFC راست است اگر و فقط اگر FPF راست باشد.

۲-۹ تعریف: فرض کنید M یک R- مدول و N زیر مدولی از M باشد به طوری که برای هر زیر مدول X از M ، $N\cap X\neq 0$. در این صورت N یک زیر مدول *اساسی*[۲] از M نامیده می شود و با علامت $N \triangleleft_{ess} M$ نمایش می دهیم. اگر یک ایده ال راست I یک زیر مدول اساسی از R_R باشد آن را یک ایده ال راست اساسی می نامیم.

۲-۱۰ تعریف: مجموعه $Z_r(R)=\{a\in R \mid aI=0$ ، برای برخی ایده ال راست اساسی I از $R\}$ ایده الی از R است که آن را *ایده ال منفرد راست*[۳] R می نامیم. ایده ال منفرد چپ به طور مشابه تعریف می شود.

۲-۱۱ تعریف: گوییم حلقه R *نامنفرد راست*[۴] است هر گاه $Z_r(R)=0$.

۲-۱۲ نتیجه ([۱۳]- نتیجه ۱-۱۹)**:** فرض کنید R یک حلقه FPF راست باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) R نامنفرد راست است.

---

[۱] - faithful

[۲] - essential

[۳] -right nonsingular ideal

[۴] - right nonsingular ring

(۲) R یک حلقه نیم اول است.

(۳) R یک حلقه شبه بئر است.

(۴) R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است.

۲-۱۳ تعریف: حلقه R را *شبه فربنیوس*[۱] می نامند اگر آرتینی چپ و به عنوان R- مدول چپ خود انژکتیو باشد.

۲-۱۴ قضیه ([30] قضیه ۸-۵ (قضیه کنل- مالیاوین[۲])): فرض کنید K یک حلقه و G یک گروه باشد. در این صورت حلقه گروهی $K[G]$ خود انژکتیو است اگر و فقط اگر G متناهی باشد.

مثال بعد نشان می دهد که شرط u.p- منوئید بودن G در قضیه ۲-۲ قابل حذف نیست.

۲-۱۵ مثال: فرض کنید F یک میدان ، G یک گروه متناهی و $F[G]$ جبر گروهی باشد. چون F یک میدان است و پس نوتری است. از طرفی G یک گروه متناهی و لذا با تولید متناهی است. پس $F[G]$ نوتری است. حال طبق قضیه کنل– مالیاوین چون G یک گروه متناهی است در نتیجه $F[G]$ یک حلقه شبه فربنیوس است. لذا $F[G]$ شبه بئر است اگر و فقط اگر $F[G]$ نامنفرد راست (و چپ) باشد اگر و فقط اگر $F[G]$ آرتینی نیم ساده باشد. طبق قضیه مسچه ، $F[G]$ شبه بئر است اگر و فقط اگر مرتبه $|G|$ در F وارون پذیر باشد. در نتیجه یک جبر گروهی از یک گروه متناهی روی یک میدان وجود دارد که شبه بئر نیست.

۲-۱۶ تعریف: گوییم حلقه R *موروثی*[۳] (*نیم موروثی*[۴]) راست است هر گاه هر ایده ال راست (با تولید متناهی) آن پروژکتیو باشد.

---

[۱] - quasi-Frobenius (or simply QF-ring)

[۲] - Connell-Malliavin-Pascaud-Renault

[۳] - hereditary

[۴] - semi hereditary

۲-۱۷ مثال: قضیه ۲-۲ (۱) را نمی توان به $R[[x]]$ گسترش داد. یک حلقه فون نیومن منظم جابجایی (و لذا شبه بئر اصلی و pp) مانند R وجود دارد به طوری که حلقه $R[[x]]$ نه شبه بئر اصلی و نه pp است. فرض کنید F یک میدان باشد. قرار دهید

$R=\left\{(a_n)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}F_n \mid\right.$ ها تقریبا ثابت هستند $\left.a_n\right\}$ که برای هر $n=1,2,\ldots$ ، $F_n=F$. R یک زیر حلقه از $\prod_{n=1}^{\infty}F_n$ است. R یک حلقه فون نیومن منظم جابجایی است.

فرض کنید $f(x)=a_{0}+a_1x+a_2x^2+\ldots\in R[[x]]$ باشد به طوری که $a_{0}=(0,1,0,0,0,\ldots)$ ، $a_1=(0,1,0,1,0,0,0,\ldots)$ ، $a_2=(0,1,0,1,0,1,0,0,0,\ldots)$ و به همین صورت بقیه عناصر را می نویسیم.فرض کنید $R[[x]]$ یک حلقه pp باشد (فرض خلف). لذا یک خودتوان $e(x)\in R[[x]]$ وجود دارد به طوری که $r_{R[[x]]}(f(x))=e(x)R[[x]]$. پس داریم $e(x)=e_{0}\in R$ و $f(x)e_{0}=0$. لذا نتیجه می گیریم که $a_ie_{0}=0$ برای هر $i=0,1,2,\ldots$. در نتیجه برای برخی عدد صحیح مثبت n و تعدادی b_i که $i=0,1,2,\ldots,2n+1$ داریم $e_{0}=(b_1,0,b_3,0,\ldots,b_{2n+1},0,0,0,\ldots)$. فرض کنید $g(x)=\beta_{0}+\beta_1x+\beta_2x^2+\ldots\in R[[x]]$ که $\beta_{0}=(1,0,0,0,\ldots)$ ، $\beta_1=(1,0,1,0,0,0,\ )$. ، $\beta_2=(1,0,1,0,1,0,0,0,0,\ldots)$ و به همین صورت بقیه عناصر را می نویسیم. در نتیجه $f(x)g(x)=0$ (یعنی $g(x)\in r_{R[[x]]}(f(x))$). اما $g(x)\notin e_{0}R[[x]]$ که این نتاقض است. بنابراین $R[[x]]$ یک حلقه pp نیست.

نشان می دهیم $R[x]$ نیم هردیتاری است. فرض کنید $f(x)=a_{0}+a_1x+\ldots+a_nx^n\in R[x]$ و A پوچساز $f(x)$ در $R[x]$ باشد . برای هر $i=0,\ldots,n$ خودتوان e_i از R وجود دارد به طوری که $Ra_i=\mathrm{Re}_i$. قرار دهید $e=(1-e_{0})\ldots(1-e_n)$. پس $R[x]e\subseteq A$.

بعکس ، فرض کنید $g(x)=b_{0}+b_1x+\ldots+b_kx^k\in A$. با استفاده از استقرای روی k و n نشان می دهیم $g(x)\in R[x]e$ و لذا $A=R[x]e$. اگر $k=0$ آنگاه $f(x)b_{0}=0$ و لذا برای هر

$i=0,\dots,n$ داریم $e_i b_0 = 0$. پس $b_0 = b_0 e \in R[x]e$. حال فرض کنیم $k>0$ و برای هر n دلخواه اگر $h(x)\in A$ و $\deg h(x)<k$ آنگاه $h(x)\in R[x]e$. اگر $n=0$ آنگاه $e_0 g(x)=0$ و $g(x)=g(x)e\in R[x]e$. فرض کنیم $n>0$ و اگر $f(x)$ با یک چندجمله ای از درجه کمتر جایگزین شود نتیجه مورد نظر بدست آید. چون $e_n b_k = 0$ پس $\deg e_n g(x)<k$ و $f(x)e_n g(x)=0$. لذا طبق فرض استقرا روی k ، چندجمله ای $m(x)\in R[x]$ وجود دارد به طوریکه $e_n g(x)=em(x)$. پس $e_n g(x)=e_n{}^2 g(x)=e_n em(x)=0$ و چون a_n یک مضرب e_n است لذا $a_n g(x)=0$. لذا $\left(f(x)-a_n x^n\right)g(x)=0$ وبنابر فرض استقرا روی n ، $g(x)\in R[x](1-e_0)\dots(1-e_{n-1})$. بنابراین $g(x)=g(x)(1-e_n)\in R[x]e$. در نتیجه $R[x]$ نیم هردیتاری است. R یک حلقه فون نیومن منظم جابجایی (و لذا تقلیل یافته) است ، اما $R[[x]]$ یک حلقه pp نیست و لذا شبه بئر اصلی نیست.

۲-۱۸ تعریف: حلقه R را *دو منظم*[۱] گوییم اگر هر ایده ال اصلی آن توسط یک خودتوان مرکزی تولید شود.

یک حلقه دو منظم (بنابراین شبه بئر اصلی) مانند R وجود دارد که نه pp راست ، نه pp چپ و نه شبه بئر است.

۲-۱۹ مثال: فرض کنید $k\geq 1$ یک عدد صحیح و W ، k-امین جبر ویل روی یک میدان با مشخصه صفر باشد. W ساده است اما نه موروثی راست و نه موروثی چپ نیست. بنابراین یک عدد صحیح m وجود دارد به طوری که $Mat_m(W)$ نه pp راست و نه pp چپ است. فرض کنید $\{a_n\}$ ها تقریبا ثابت هستند $R=\{(a_n)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}Mat_m(W)|$. R یک حلقه دو منظم (بنابراین شبه بئر اصلی) است که نه pp چپ و نه pp راست و نه شبه بئر است.

در اینجا این سوال پیش می آید که اگر R یک حلقه موروثی چپ باشد آیا شبه بئر است؟ مثال زیر نشان می دهد که جواب این سؤال منفی است.

---

۱ - Biregular

۲-۲۰ مثال: فرض کنید $A=\prod_{n=1}^{\infty} Z_2$ ، $T=\{(a_n)_{n=1}^{\infty} \mid$ ها تقریبا ثابت هستند $a_n\}$ و $Z_2 \oplus_{n=1}^{\infty}=\{$ a_n ها تقریبا همه جا صفر هستند $I=\{(a_n)_{n=1}^{\infty} \mid$. حال فرض کنید $R=\begin{pmatrix} T/I & T/I \\ 0 & T \end{pmatrix}$. در این صورت طبق [21] ، R موروثی چپ است. فرض کنید $\alpha=\begin{pmatrix} (0,0,\ldots)+I & (1,1,\ldots)+I \\ 0 & (0,0,\ldots) \end{pmatrix}\in R$. دراین صورت $\alpha R=\begin{pmatrix} 0 & T/I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $r(\alpha R)=\begin{pmatrix} T/I & T/I \\ 0 & I \end{pmatrix}$. اما هیچ خودتوان $e\in R$ وجود ندارد به طوری که $r(\alpha R)=eR$.

۲-۲۱ تعریف: فرض کنید G یک گروه ، F یک میدان و $F[G]$ جبر گروهی باشد. مجموعه های $\Delta(G)$ و $\Delta^+(G)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم $\Delta(G)=\{x\in G \mid |G:C_G(x)|<\infty\}$ و $\Delta^+(G)=\{x\in\Delta(G)\mid o(x)<\infty\}$ که در آن $C_G(x)$ مرکز ساز x در G است.

۲-۲۲ تعریف: فرض کنید K یک حلقه و G یک گروه و $K[G]$ حلقه گروهی باشد. برای $\alpha=\sum a_x x\in K[G]$ ، محمل α را با $Supp(\alpha)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم $Supp(\alpha)=\{x\in G\mid a_x\neq 0\}$. $Supp(\alpha)$ یک مجموعه متناهی است.

۲-۲۳ لم (لم دیتزمن[1]): فرض کنید G یک گروه باشد که توسط x_1 و ... و x_n تولید شود به طوری که هر x_i از مرتبه متناهی باشد و تنها تعداد متناهی ترکیب در G داشته باشد. در این صورت G یک گروه متناهی است.

۲-۲۴ قضیه ([۳۴]- قضیه ۵-۵): فرض کنید F یک میدان و G یک گروه باشد به طوری که زیرگروه نرمال متناهی نداشته باشد که مشخصه F مرتبه آن را عاد کند. در این صورت اگر I یک ایده ال پوچساز از $F[G]$ باشد آنگاه $I=(I\cap F[\Delta^+(G)])F[G]$.

---

[1] - Dietzmann's lemma

۲-۲۵ نتیجه: اگر G و F و I مانند قضیه بالا باشند آنگاه برای $a \in I$ ، خودتوان مرکزی $e \in I$ وجود دارد به طوری که $a = ea$.

اثبات: فرض کنیم $a = \sum a_i g_i$ به طوری که $a_i \in I \cap F[\Delta^+(G)]$ و g_i نماینده همدسته های مجزای $\Delta^+(G)$ در G باشد (طبق قضیه قبل a را می توان به این فرم نوشت). فرض کنیم H یک زیر گروه نرمال متناهی از $\Delta^+(G)$ شامل ساپورت هر a_i باشد. (متناهی بودن H از لم دیتزمن نتیجه می شود). حال $I \cap F[H]$ یک ایده ال از حلقه آرتینی نیم ساده $F[H]$ است و لذا توسط یک خودتوان یکتای e که در مرکز $F[H]$ قرار دارد تولید می شود. پس $e \in I$ و برای هر i، $ea_i = a_i$. لذا $a = ea$. حال باید نشان دهیم که e در مرکز $F[G]$ قرار دارد. برای هر $g \in G$ ، geg^{-1} یک خودتوان است و چون H در G نرمال است در نتیجه geg^{-1} عضو $F[H]$ است. لذا $(geg^{-1})F[H] = g(I \cap F[H])g^{-1} = I \cap F[H]$. از یکتایی e نتیجه می شود $geg^{-1} = e$. بنابراین e یک خودتوان مرکزی است.

۲-۲۶ گزاره: فرض کنید G یک گروه ، F یک میدان و $R = F[G]$ یک جبر گروهی نیم اول باشد. در این صورت R شبه بئر است اگر و فقط اگر هر ایده ال پوچساز آن با تولید متناهی باشد.

برهان: اگر R شبه بئر باشد بوضوح نتیجه برقرار است.

بعکس ، حال فرض کنید هر ایده ال پوچساز از R با تولید متناهی باشد. فرض کنید K یک ایده ال پوچساز از R باشد. لذا $K = \sum_{i=1}^{n} R\alpha_i R$. طبق نتیجه بالا خودتوان مرکزی $e_i \in K$ وجود دارد به طوری که $\alpha_i \in e_i K$. لذا

$$K = \sum_{1}^{n} R\alpha_i R \subseteq \sum_{1}^{n} e_i K \subseteq K$$

پس $K = \sum_{1} e_i R$. در نتیجه خودتوان مرکزی $e \in R$ وجود دارد به طوریکه $K = eR$. بنابراین R یک حلقه شبه بئر است.■

۲-۲۷ تعریف : فرض کنید $1 \in R$ را بتوان به صورت مجموعی از خودتوان های اولیه مرکزی متعامد نوشت یعنی $1 = c_1 + \ldots + c_r$. لذا داریم $R = c_1 R + \ldots + c_r R$. این ترکیب را یک تجزیه بلوکی برای R و هر $c_i R$ را یک بلوک می نامیم. هر کدام از این بلوک ها یک حلقه غیر قابل تجزیه است. در حالت کلی چنین تجزیه ای می تواند وجود نداشته باشد.

۲-۲۸ نتیجه: فرض کنید F یک میدان و $R = F[G]$ یک جبر گروهی نیم اول باشد. اگر R یک تجزیه بلوکی داشته باشد آنگاه R با یک مجموع مستقیم متناهی از حلقه های اول برابر است.

برهان: فرض کنید $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$ یک تجزیه بلوکی برای R باشد. لذا هر R_i به عنوان یک حلقه غیر قابل تجزیه است. پس R تنها 2^n خودتوان مرکزی دارد. فرض کنید K یک ایده ال پوچساز از R باشد. لذا برای هر $\alpha \in K$ یک خودتوان مرکزی $e \in R$ وجود دارد به طوری که $\alpha \in eK$. چون K با تولید متناهی است لذا طبق گزاره ۲-۲۶ ، R شبه بئر است. پس هر R_i یک حلقه شبه بئر نیم اول است و خودتوان های بدیهی تنها خودتوان های مرکزی آن هستند. لذا هر R_i تقلیل یافته نیم مرکزی است. حال نشان می دهیم هر R_i یک حلقه اول است. فرض کنید X و Y ایده ال هایی از R_i باشند به طوری که $XY = 0$. خودتوان $e \in S_l(R_i)$ وجود دارد به طوری که $r(X) = eR_i$ است. چون R_i تقلیل یافته نیم مرکزی است لذا $e \in \{0,1\}$. اگر $e = 0$ آنگاه $Y = 0$ و اگر $e = 1$ آنگاه $X = 0$. بنابراین هر R_i یک حلقه اول است. ■

۲-۲۹ نتیجه: فرض کنید F یک میدان باشد. اگر $R = F[G]$ یک جبر گروهی نیم اول باشد و در هر یک از شرایط زیر صدق کند آنگاه R با یک مجموع مستقیم متناهی از حلقه های اول برابر است:

(۱) نوتری راست ;

(۲) شرط $D.C.C$ روی ایده ال های پوچساز ;

(۳) شرط $A.C.C$ روی ایده ال های پوچساز.

برهان: تحت هر یک از شرایط بالا R یک تجزیه بلوکی دارد. بنابراین طبق نتیجه ۲-۲۸ ، R با یک مجموع مستقیم متناهی از حلقه های اول برابر است.

ابتدا برای راحتی ایده ال I از R را خوب می نامیم اگر یک تجزیه بلوکی داشته باشد در غیر این صورت آن را بد نامیم. به طور مثال ایده ال صفر خوب است (زیرا مجموع مستقیمی از یک خانواده تهی از حلقه های غیر قابل تجزیه است). هر ایده ال غیر قابل تجزیه از R خوب است و اگر I و J دو ایده ال خوب از R باشند و $I \bigcap J = 0$ آنگاه $I + J$ نیز خوب است.

غیر قابل تجزیه باشد. بنابراین یک ترکیب به صورت $R = R_1 \oplus R_1'$ دارد که $R_1, R_1' \neq 0$. یکی از جمعوند ها باید بد باشد. فرض کنید R_1 بد باشد. پس یک ترکیب به صورت $R_1 = R_2 \oplus R_2'$ دارد که $R_2, R_2' \neq 0$ و یکی از جمعوندها باید بد باشد. فرض کنید R_2 بد باشد. با ادامه این روند زنجیرهایی نامتناهی به صورت زیر بدست می آوریم:

$$R \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots$$

و

$$(0) \subset R_1' \subset R_1' \oplus R_2' \subset R_1' \oplus R_2' \oplus R_3' \subset \dots$$

لذا R هم در شرط $A.C.C$ و هم در شرط $D.C.C$ روی ایده ال هایش صدق نمی کند که این تناقض با فرض مساله است. لذا نتیجه حاصل است. ■

چون هر حلقه اول یک حلقه PWP (و لذا شبه بئر) است لذا نتیجه بالا منجر به این سوال می شود: اگر R یک جبر گروهی اول باشد آیا R یک حلقه PWD یا یک حلقه بئر است ؟ مثال زیر نشان می دهد که جبرهای گروهی نامنفرد اول نوتری وجود دارند که بئر نیستند.

۲-۳۰ قضیه (قضیه کنل[1]): فرض کنید K یک حلقه ، G یک گروه و $R=K[G]$ حلقه گروهی باشد. در این صورت R یک حلقه اول است اگر و فقط اگر K یک حلقه اول باشد و G زیر گروه غیر بدیهی متناهی نرمال نداشته باشد.

برهان: فرض کنید R یک حلقه اول باشد. اگر A و B ایده ال هایی از K باشند به طوری که $AB=0$. لذا $(AR)(BR)=0$. پس داریم $AR=0$ یا $BR=0$. در نتیجه $A=0$ یا $B=0$. بنابراین K یک حلقه اول است. اگر H یک زیر گروه نرمال متناهی از G باشد. ایده ال چپ U از R که توسط همه $h-1$ ها که $h\in H$ است را در نظر بگیرید. ایده ال چپ β تولید شده توسط $\sum_{h\in H} h$ ، پوچساز ایده ال U است. چون R یک حلقه اول است در نتیجه $U=0$. بنابراین $H=1$.

بعکس ، فرض کنید K یک حلقه اول باشد و G زیر گروه نا بدیهی متناهی نرمال نداشته باشد. زیر گروه $\Delta=\Delta(G)$ از G را در نظر بگیرید. طبق لم دیتزمن ، هر عنصر Δ و همه ترکیبات آن در G ، یک زیر گروه نرمال متناهی از G تولید می کند. لذا این گروه تابدار است و هر عنصر Δ تنها تعداد متناهی ترکیب در Δ دارد. از طرفی Δ آبلی است. فرض کنید $\Delta_\circ$ زیر گروه از Δ باشد. لذا $K[\Delta_\circ]$ یک حلقه اول است. پس $K[\Delta]$ یک حلقه اول است. حال نشان می دهیم $K[G]$ اول است. فرض کنید $\alpha K[G]\alpha'=0$ که در آن $\alpha,\alpha'\in K[G]$. همریختی $\pi:K[G]\to K[\Delta]$ را با ضابطه $\pi\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)=\sum_{g\in\Delta} a_g g$ را در نظر بگیرید. پس $\pi(\alpha K[G])\pi(\alpha' K[G])=0$. چون $\pi(\alpha K[G])$ و $\pi(\alpha' K[G])$ ایده ال هایی از حلقه اول $K[\Delta]$ هستند در نتیجه یکی از آنها باید صفر باشد. پس $\alpha K[G]=0$ یا $\alpha' K[G]=0$. در نتیجه $\alpha=0$ یا $\alpha'=0$. بنابراین $K[G]$ یک حلقه اول است. ■

[1] - Connell's theorem

۲-۳۱ تعریف: گروه G را $polycylic-by-finite$ [۱] می نامند هر گاه یک زنجیر متناهی از زیر گروه های آن به صورت $1=G_{\circ} \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر i ، $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ دوری باشد.

۲-۳۲ تعریف: فرض کنید R یک حلقه و M یک R - مدول باشد. زیر مدول Q از M را *مکمل*[۲] در M نامیم اگر Q هیچ توسیع اساسی در M نداشته باشد. حلقه R را CS[۳] نامیم اگر هر ایده ال مکمل آن یک جمعوند مستقیم از R باشد.

۲-۳۳ قضیه ([۳]- قضیه ۳-۳-۱۰): فرض کنید G یک گروه $polycylic-by-finite$ و $K[G]$ اول باشد. دراین صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) $K[G]$ یک حلقه CS است.

(۲) $K[G]$ یک حلقه pp است.

(۳) G فارغ از تاب است یا $G \cong D_\infty$ و $char(K) \neq 2$.

۲-۳۴ مثال: فرض کنید K یک میدان با مشخصه ای غیر از ۲ و گروه G به صورت $G = D_\infty \times C$ باشد که D_∞[۴] گروه دووجهی نامتناهی و C یک گروه دوری نامتناهی است. G زیرگروه نرمال متناهی غیر بدیهی ندارد. می دانیم $D_\infty = \{a,b| \ b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\}$. فرض کنید $(x,y) \in G$ و از مرتبه متناهی باشد. لذا $o(y) < \infty$ و چون $y \in C$ پس $y = ۱$. می توان نشان داد برای هر k ، $b^{-۱}a^k b = a^{-k}$. حال اگر H یک زیر گروه نرمال G باشد باید $H \lhd D_\infty$. اگر $|H| < \infty$ آنگاه $a^{-k}a^i ba^k = a^{-k}a^i a^{-k}b = a^{i-۲k}b \in H$. در نتیجه برای هر i مجموعه $\{a^{i-۲k}b | k \in Z\} \subseteq H$

---

۱ - polycyclic-by-finite

۲ - complement

۳ - CS-ring

٤ - infinite dihedral group

نامتناهی است که تناقض با متناهی بودن H دارد. حال چون G هیچ زیر گروه نرمال متناهی غیر بدیهی ندارد پس طبق قضیه کنل ، جبر گروهی $K[G]$ اول است. از طرفی G یک گروه $polycylic-by-finite$ است زیرا می توان زنجیر متناهی $G \rhd D_\infty \rhd \langle a\rangle \rhd ۱$ را در نظر گرفت که $\frac{\langle a\rangle}{۱}=\langle a\rangle$ دوری است و $\frac{D_\infty}{\langle a\rangle}\cong Z_۲$ نیز دوری است و همچنین $\frac{G}{D_\infty}=C$ که C نیز طبق فرض یک گروه دوری نا متناهی است. چون K یک میدان است لذا نوتری است. همچنین $K[\langle a\rangle]\cong K[Z]\cong K[x,x^{-۱}]$. طبق قضیه پایه ای هیلبرت[۱] $K[x,x^{-۱}]$ نیز نوتری و لذا $K[\langle a\rangle]$ نوتری است. چون $\frac{K[D_\infty]}{K[\langle a\rangle]}\cong K[Z_۲]$ و $K[Z_۲]$ نیز نوتری است لذا $K[D_\infty]$ نیز نوتری است. از طرفی $\frac{K[G]}{K[D_\infty]}\cong K[C]$ و چون $K[D_\infty]$ نوتری است پس $K[G]$ یک حلقه نوتری است. G فارغ از تاب نیست زیرا $(b,۱)$ یک عنصر غیر همانی از مرتبه متناهی است. از طرفی G با D_∞ یکریخت نیست لذا طبق قضیه قبل $K[G]$ یک حلقه pp نیست. در نتیجه $K[G]$ بئر نیست.

مثال بعدی نشان می دهد که حلقه های گروهی نوتری نیم اول وجود دارند که شبه بئر نیستند.

۲-۳۵ مثال: فرض کنید G یک گروه دو عضوی ، Z حلقه اعداد صحیح و $R=Z[G]$ حلقه گروهی صحیح باشد. فرض کنید $G=\{۱,g\}$ که $g^۲=۱$. در این صورت R یک حلقه نوتری نیم اول جابجایی است. از طرفی صفر و یک تنها خودتوان های R هستند پس R تقلیل یافته نیم مرکزی است. حال اگر فرض کنیم R شبه بئر باشد باید اول باشد. اما از اینکه $(۱+g)(۱-g)=۰$ به یک تناقض می رسیم. در نتیجه R شبه بئر نیست.

---

[۱] - Hilbert basis theorem

فصل سوم

خودتوان های نیم مرکزی

خودتوان های نیم مرکزی عناصر مهمی برای تعیین نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته هستند. در این فصل رابطه بین خودتوان های نیم مرکزی R و تعدادی از توسیع های R را مورد مطالعه قرار می دهیم. همچنین برای یک کلاس بزرگ از توسیع های R ، خودتوان های نیم مرکزی آنها را برحسب خودتوان های نیم مرکزی R بدست می آوریم.

۳-۱ تعریف: فرض کنید S توسیعی از R باشد. عنصر $a \in S$ را *نسبت به* R *مرکزی*[۱] گوییم اگر برای هر $r \in R$ ، $ar = ra$ باشد و *نسبت به* R *نرمالگر*[۲] گوییم اگر $aR = Ra$. اگر S یک مجموعه مولد داشته باشد که هر یک از عناصر آن نرمالگر یا مرکزی نسبت به R باشند آنگاه S یک *توسیع نرمالگر*[۳] یا *توسیع مرکزی*[۱] از R نامیده می شود.

---

[۱] - to centralize R

[۲] - to normalize R

[۳] - normalizing extension

فرض کنید C یک توسیع مرکزی[۱] از R باشد. پس $S_l(R) \subseteq S_l(C)$ و در بعضی موارد $B(R) = B(C)$ (برای مثال $B(R) = B(R[x])$). مثال بعدی نشان می دهد که در حالت کلی $S_l(R) \neq S_l(R[x])$.

۲-۳ مثال: فرض کنید F یک میدان باشد و $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$. در این صورت $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x \in S_l(R[x])$ $+$ $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ اما $e \notin R$.

۳-۳ لم: فرض کنید Γ هر یک از توسیع های زیر از R باشد و $c \in \Gamma$.

(۱) Γ به عنوان یک R-مدول چپ توسط مجموعه T تولید شود.

(۲) $\Gamma = R[[x;\sigma]]$ که σ یک همریختی حلقه ای از R است و $\mathrm{T} = \{x^i \mid i$ یک عدد صحیح نامنفی است$\}$.

(۳) $\Gamma = R[[X]]$ که X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجایی است و T مجموعه همه ضرب های متناهی از عناصر X باشد.

(۴) $\Gamma = R[[x, x^{-1}]]$ باشد و $\mathrm{T} = \{x^k \mid k$ یک عدد صحیح است$\}$.

اگر $c_\circ \in S_l(R)$ وجود داشته باشد به طوری که $c_\circ c = c$ ، $cc_\circ = c_\circ$ و برای هر $t \in T$ ، $tc_\circ = c_\circ tc_\circ$ باشد آنگاه $c \in S_l(\Gamma)$.

برهان:(۱) فرض کنید $d \in \Gamma$. پس $d = \sum a_i t_i$ که $a_i \in R$ و $t_i \in T$. در نتیجه

$$dc = dc_\circ c = \left(\sum a_i t_i\right)c_\circ c = \left(\sum a_i c_\circ t_i\right)c_\circ c = c_\circ\left(\sum a_i c_\circ t_i\right)c_\circ c$$

$$= cc_\circ\left(\sum a_i c_\circ t_i\right)c_\circ c = c\left(\sum a_i c_\circ t_i\right)c_\circ c = c\left(\sum a_i t_i\right)c_\circ c = c\left(\sum a_i t_i\right)c = cdc$$

بنابراین $c \in S_l(\Gamma)$.

(۲) فرض کنید $d \in \Gamma$. پس $d = \sum a_i x^i$. در نتیجه

---

[۱] - centralizing extension

$$dc=\left(\sum a_i x^i\right)c=\left(\sum a_i x^i\right)c_\circ c=\left(\sum a_i\sigma^i(c_\circ)x^i\right)c \qquad (\circledast)$$

از طرفی داریم $tc_\circ=c_\circ tc_\circ$. لذا $\left(\sum a_i x^i\right)c_\circ=c_\circ\left(\sum a_i x^i\right)c_\circ$. پس $\sum a_i\sigma^i(c_\circ)x^i=c_\circ\left(\sum a_i\sigma^i(c_\circ)\right)x^i$. بنابراین برای هر i ، $a_i\sigma^i(c_\circ)=c_\circ a_i\sigma^i(c_\circ)$. حال با قرار دادن رابطه اخیر در معادله $(\circledast)$ داریم:

$$dc=\left(\sum a_i\sigma^i(c_\circ)x^i\right)c=\left(\sum c_\circ a_i\sigma^i(c_\circ)x^i\right)c=c_\circ\left(\sum a_i\sigma^i(c_\circ)x^i\right)c=cc_\circ\left(\sum a_i\sigma^i(c_\circ)x^i\right)c$$

$$=c\left(\sum c_\circ a_i\sigma^i(c_\circ)x^i\right)c=c\left(\sum a_i\sigma^i(c_\circ)x^i\right)c=c\left(\sum a_i x^i\right)c_\circ c=c\left(\sum a_i x^i\right)c=cdc$$

بنابراین $dc=cdc$. در نتیجه $c\in S_l(\Gamma)$. سایر موارد نیز به همین صورت ثابت می شوند. ■

۳-۴ قضیه: فرض کنید σ یک همریختی روی R و X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجایی باشد.

(۱) فرض کنید $\Gamma=R[x;\sigma]$ یا $\Gamma=R[[x;\sigma]]$. در این صورت $e\in S_l(\Gamma)$ اگر و فقط اگر $e_\circ\in S_l(R)$ ، $e_\circ e=e$ ، $ee_\circ=e_\circ$ و $\sigma(e_\circ R)\subseteq e_\circ R$ که $e_\circ\in R$ جمله ثابت e است.

(۲) فرض کنید $\Delta=R[X]$ یا $\Delta=R[[X]]$. در این صورت $e\in S_l(\Delta)$ اگر و فقط اگر $e_\circ\in S_l(R)$ ، $e_\circ e=e$ ، $ee_\circ=e_\circ$ که $e_\circ\in R$ جمله ثابت e است.

برهان: (۱) فرض کنید $\Gamma=R[x;\sigma]$ باشد و $e=e_\circ+e_1x+\ldots+e_nx^n\in S_l(\Gamma)$. لذا برای هر $a\in R$ ، $eae=ae$. پس برای هر $a\in R$ و برای هر $k=0,1,\ldots,n$ داریم $\sum_{m=0}^{k}e_m\sigma^m(ae_{k-m})=ae_k$. اگر $k=0$ آنگاه برای هر $a\in R$ ، $e_\circ ae_\circ=ae_\circ$ و لذا $e_\circ\in S_l(R)$. اگر $k=1$ و $a=e_\circ$ آنگاه $e_\circ e_1+e_1\sigma(e_\circ)=e_\circ e_1$. لذا $e_1\sigma(e_\circ)=0$ $(\ast)$. اگر $k=1$ باشد و $a=1$ ، آنگاه $e_\circ e_1+e_1\sigma(e_\circ)=e_1$. حال از معادله $(\ast)$ نتیجه می گیریم $e_\circ e_1=e_1$. اگر $k=2$ و $a=e_\circ$ ، آنگاه $e_\circ e_2+e_1\sigma(e_\circ)\sigma(e_1)+e_2\sigma^2(e_\circ)=e_\circ e_2$. حال از معادله $(\ast)$ داریم

$e_\circ e_2+e_2\sigma^2(e_\circ)=e_\circ e_2$. پس $e_2\sigma^2(e_\circ)=\circ$ (**) . اگر $k=2$ باشد و $a=1$ ، آنگاه $e_\circ e_2+e_1\sigma(e_1)+e_2\sigma^2(e_\circ)=e_2$. حال از معادله (**) داریم

$$e_2=e_\circ e_2+e_1\sigma(e_1)+e_2\sigma^2(e_\circ)=e_\circ e_2+e_1\sigma(e_1)$$

اگر $e_\circ$ را از چپ در معادله اخیر ضرب کنیم آنگاه $e_\circ e_2+e_\circ e_1\sigma(e_1)=e_\circ e_2$. لذا $e_\circ e_1\sigma(e_1)=\circ$ و چون $e_\circ e_1=e_1$ پس $e_1\sigma(e_1)=\circ$. بنابراین $e_2=e_\circ e_2+e_1\sigma(e_1)=e_\circ e_2$. حال فرض کنیم برای هر $m=1,2,\ldots,k$، $e_m\sigma^m(e_\circ)=\circ$ و $e_\circ e_m=e_m$. برای $m=k+1$ ثابت می کنیم. داریم $\sum_{m=\circ}^{k+1}e_m\sigma^m(ae_{k+1-m})=ae_{k+1}$. اگر در معادله اخیر بجای a از $e_\circ$ استفاده کنیم آن گاه از اینکه برای هر $m=1,2,\ldots,k$ داریم $e_m\sigma^m(e_\circ)=\circ$ ، نتیجه می گیریم

$$e_{k+1}\sigma^{k+1}(e_\circ e_\circ)=e_{k+1}\sigma^{k+1}(e_\circ)=\circ$$

اگر $a=1$ در نظر گرفته شود آنگاه $\sum_{m=\circ}^{k+1}e_m\sigma^m(e_{k+1-m})=e_{k+1}$ و از اینکه $e_{k+1}\sigma^{k+1}(e_\circ)=\circ$ داریم

$$e_\circ e_{k+1}+e_1\sigma(e_k)+\ldots+e_k\sigma^k(e_1)=e_{k+1}\quad(\star)$$

با ضرب معادله ($\star$) از چپ در $e_\circ$ نتیجه می شود

$$\sum_{m=\circ}^{k}e_\circ e_m\sigma^m(e_{k+1-m})=e_\circ e_{k+1}$$

در نتیجه $\sum_{m=1}^{k}e_\circ e_m\sigma^m(e_{k+1-m})=\circ$. بنابر فرض استقرا برای هر $m=1,\ldots,k$ داریم $e_\circ e_m=e_m$ ، پس $\sum_{m=1}^{k}e_m\sigma^m(e_{k+1-m})=\circ$. لذا از معادله ($\star$) داریم $e_\circ e_{k+1}=e_{k+1}$. پس $e_\circ\in S_l(R)$ ، $e_\circ e=e$ و $ee_\circ=e_\circ$. بنابراین $e\Gamma=e_\circ\Gamma$. حال از اینکه $e_\circ xe=e_\circ exe=exe=xe$ داریم $e_\circ xe_\circ=xe_\circ$. در نتیجه $e_\circ\sigma(e_\circ)=\sigma(e_\circ)$ و لذا $\sigma(e_\circ R)\subseteq e_\circ R$.

عکس گزاره از لم ۳-۳ نتیجه می شود. برهان برای حالت $\Gamma=R[[x;\sigma]]$ به صورت مشابه است.

(۲): فرض کنید $e \in S_l(\Delta)$. اگر $X=\{x\}$ آنگاه نتیجه مورد نظر از قسمت (۱) بدست می آید. برای حالت $X=\{x_1,x_2\}$ و $\Delta = R[[X]]$ اثبات می کنیم. فرض کنید

$$e = e_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 + c_{111}x_1^3 + c_{112}x_1^2x_2 + \dots$$

اگر $e \in R$ باشد برهان کامل است. لذا فرض کنید $e \notin R$ و a یک عنصر دلخواه از R باشد. چون $ae = eae$ پس دستگاه معادلات زیر را داریم:

(۰) $\qquad e_0ae_0 = e_0$

(۱) $\qquad e_0ac_1 + c_1ae_0 = ac_1$

(۲) $\qquad e_0ac_2 + c_2ae_0 = ac_2$

(۱,۱) $\qquad e_0ac_{11} + c_1ac_1 + c_{11}ae_0 = ac_{11}$

(۱,۲) $\qquad e_0ac_{12} + c_1ac_2 + c_{12}ae_0 = ac_{12}$

(۲,۱) $\qquad e_0ac_{21} + c_2ac_1 + c_{21}ae_0 = ac_{21}$

(۲,۲) $\qquad e_0ac_{22} + c_2ac_2 + c_{22}ae_0 = ac_{22}$

.

. .

از معادله (۰) داریم $e_0 \in S_l(R)$. اگر معادله (۱) را از راست در e_0 ضرب کنیم بدست می آوریم $e_0ac_1e_0 + c_1ae_0 = ac_1e_0$. لذا $c_1ae_0 = 0$. پس $e_0ac_1 = ac_1$. اگر $a=1$ در نظر گرفته شود آن گاه $c_1e_0 = 0$ و $e_0c_1 = c_1$. به طور مشابه اگر معادله (۲) را از راست در e_0 ضرب کنیم بدست می آید $e_0ac_2e_0 + c_2ae_0 = ac_2e_0$. لذا $c_2ae_0 = 0$. در نتیجه $e_0ac_2 = ac_2$. اگر قرار دهیم $a=1$ آنگاه $c_2e_0 = 0$ و $e_0c_2 = c_2$. حال اگر معادلات (i,j) را از سمت راست در e_0 ضرب کنیم آنگاه $e_0ac_{ij}e_0 + c_iac_je_0 + c_{ij}ae_0 = ac_{ij}e_0$. اما $c_iac_je_0 = 0$ و $e_0ac_{ij}e_0 = ac_{ij}e_0$. در نتیجه $c_{ij}ae_0 = 0$. حال اگر در معادلات (i,j) قرار دهیم $a=1$ آنگاه با توجه به اینکه

$c_i c_j = c_i e_\circ c_j = \circ = c_{ij} a e_\circ$ نتیجه می گیریم $c_{ij} e_\circ = \circ$ و $e_\circ c_{ij} = c_{ij}$. با ادامه این روند نتیجه مورد نظر بدست می آید. در نتیجه $e_\circ \Delta = e\Delta$.

عکس گزاره از لم ۳-۳ نتیجه می شود. ■

۳-۵ لم ([۱۵]- لم ۱-۷): فرض کنید R یک حلقه باشد و $T = [x, x^{-1}]$ یا $T = [\![x, x^{-1}]\!]$. اگر $e \in S_l(T)$ آنگاه $e_\circ \in S_l(R)$ که $e_\circ$ جمله ثابت e است. بعلاوه $e_\circ T = eT$.

۳-۶ قضیه: فرض کنید Γ هر یک از توسیع های زیر از R باشد. در این صورت $e \in S_l(\Gamma)$ اگر و فقط اگر $e_\circ \in S_l(R)$ و $e_\circ \Gamma = e\Gamma$.

(۱) $\Gamma = R[G]$ حلقه منوئیدی که G یک منوئید آزاد و $e_\circ$ ضریب μ در e است.

(۲) $\Gamma = R[G]$ حلقه منوئیدی که G یک $u.p$- منوئید و R یک حلقه شبه بئر اصلی راست و $e_\circ$ ضریب μ در e است.

(۳) $\Gamma = R[x, x^{-1}]$ یا $\Gamma = R[\![x, x^{-1}]\!]$ و $e_\circ$ جمله ثابت e است.

برهان: برهان قسمت (۱) مشابه قضیه ۳-۴ (۲) است.

(۲) فرض کنید $e \in S_l(R[G])$ باشد و $e = e_\circ \mu + e_1 g_1 + \ldots + e_n g_n$. پس $(e-1)R[G]e = \circ$ و لذا برای هر $b \in R$ ، $(e-1)be = \circ$. در نتیجه

$$[(e_\circ - 1)\mu + e_1 g_1 + \ldots + e_n g_n]R(e_\circ \mu + e_1 g_1 + \ldots + e_n g_n) = \circ$$

حال چون R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است لذا $(e_\circ - 1)\mathrm{Re}_\circ = \circ$ و برای هر $1 \le i \le n$ ، $(e_\circ - 1)\mathrm{Re}_i = \circ$ و $e_i \mathrm{Re}_\circ = \circ$. در نتیجه $e_\circ \in S_l(R)$ ، $e_\circ e = e$ و $ee_\circ = e_\circ$. برهان عکس از لم ۳-۳ بدست می آید.

قسمت (۳) نیز به همین صورت اثبات می شود. ■

۳-۷ قضیه: فرض کنید ۱_M عضو همانی $Mat_n(R)$ باشد و $\overline{R}=R.۱_M$. در این صورت $e=(e_{ij})\in S_l(Mat_n(R))$ اگر و فقط اگر $e_\circ \in S_l(\overline{R})$ و $e_\circ Mat_n(R)=eMat_n(R)$ که $e_\circ = e_{۱۱}.۱_M$.

برهان: فرض کنید E_{ij} ماتریس یکه باشد یعنی درایه (i,j) ام آن ۱ و بقیه درایه های آن صفر هستند. همچنین فرض کنید $e=(e_{ij})\in S_l(Mat_n(R))$ باشد و $a\in R$. چون $aE_{۱۱}e=eaE_{۱۱}e$ پس $e_{۱۱}\in S(R)$. لذا $e_{۱۱}.۱_M=e_\circ \in S_l(\overline{R})$. برای هر $i=۱,\ldots,n$ ، $E_{i۱}e=eE_{i۱}e$. لذا برای $i\neq k$ ، $e_{ki}e_{11}=\circ$ و برای هر $۱\leq i\leq n$ ، $e_{ii}e_{۱۱}=e_{۱۱}$. بنابراین $ee_\circ=e_\circ$. حال چون برای هر $i=۱,\ldots,n$ ، $E_{۱i}e=eE_{۱i}e$ لذا برای هر i داده شده و برای هر $k=۱,\ldots,n$ داریم $e_{ik}=e_{۱۱}e_{ik}$. در نتیجه $e_\circ e=e$. بنابراین $e_\circ Mat_n(R)=eMat_n(R)$. برهان عکس از لم ۳-۳ نتیجه می شود. ■

از قضیه ۳-۴(۱) نتیجه می گیریم که اگر $b\in S_l(R)$ باشد به طوری که $\sigma(bR)\subseteq bR$ ، آنگاه $b\in S_l(\Gamma)$ که $\Gamma=R[x;\sigma]$ یا $\Gamma=R[[x;\sigma]]$.

حال مثال هایی در این رابطه بیان می کنیم.

۳-۸ مثال:(۱) فرض کنید $b\in S_l(R)$. نگاشت $\sigma:R\to R$ را با ضابطه $\sigma(p)=pb$ تعریف می کنیم که $p\in R$. در این صورت σ یک همریختی است و $\sigma(bR)\subseteq bR$.

(۲) در مثال های زیر R یک توسیع از حلقه A و σ یک همریختی از R است به طوری که برای هر $b\in S_l(R)$ ، $\sigma(bR)\subseteq bR$ و $b_\circ\in \mathrm{A}$ وجود دارد به طوری که $bb_\circ=b_\circ$ و $b_\circ b=b$.

(الف) فرض کنید $R=A[X]$ یا $R=A[[X]]$ که X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجایی است. نگاشت $\sigma:R\to R$ را با ضابطه $\sigma(p)=p_\circ$ تعریف می کنیم که $p_\circ$ جمله ثابت p است.

(ب) فرض کنید $R=A[x]$ و a یک خودتوان نیم مرکزی راست A و σ یک همریختی از R با ضابطه $\sigma(p)=ap$ باشد.

(ج) فرض کنید $R=A[x_1,x_2,...]$ و σ یک همریختی از R با ضابطه $\sigma(x_i)=x_{i+1}$ باشد.

(د) فرض کنید $R=Mat_2(A)$. نگاشت $\sigma:R\to R$ را با ضابطه $\sigma\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11}\end{pmatrix}$

تعریف می کنیم. در این صورت σ یک خودریختی است.

۳-۹ گزاره: فرض کنید Γ توسیعی از R باشد به طوری که برای هر ایده ال I از R ، $\Gamma I\subseteq I\Gamma$ (برای مثال Γ می تواند هر توسیع مرکزی از R باشد) و اگر $b\in S_l(\Gamma)$ آنگاه $b_0\in S_l(R)$ وجود داشته باشد به طوری که $bb_0=b_0$ و $b_0b=b$. در این صورت اگر Γ شبه بئر (شبه بئر اصلی چپ) باشد آنگاه R نیز شبه بئر (شبه بئر اصلی چپ) است.

برهان: فرض کنید I یک ایده ال از R و $\bar{I}$ ایده ال تولید شده توسط I باشد. $\bar{I}$ یک ایده ال از Γ است. طبق فرض چون Γ شبه بئر است لذا خودتوان $c\in S_r(\Gamma)$ وجود دارد به طوری که $l_\Gamma(\bar{I})=\Gamma c$. پس $b=1-c\in S_l(\Gamma)$. در نتیجه $(1-b)(1-b_0)=(1-b)$ و $(1-b_0)(1-b)=(1-b_0)$. لذا $\Gamma c=\Gamma(1-b)=\Gamma(1-b_0)$. پس برای هر $s\in R$ داریم $sb_0=sbb_0=bsbb_0=b_0bsbb_0=b_0sbb_0=b_0sb_0$. لذا $b_0\in S_l(R)$ و $1-b_0\in S_r(R)$. در نتیجه $l_R(I)=R\cap l_\Gamma(\bar{I})=R\cap\Gamma(1-b_0)=R(1-b_0)$. بنابراین R شبه بئر است. برهان برای حالت شبه بئر اصلی چپ به صورت مشابه است.■

اگر Γ یک توسیع مرکزی از R باشد در گزاره قبل می توان شرط شبه بئر اصلی چپ بودن را با شرط شبه بئر اصلی راست بودن جایگزین کرد.

فصل چهارم

نمایش ماتریسی مثلثی

در این فصل مفهوم یک مجموعه از خودتوان های مثلثی و بعد مثلثی را بیان می کنیم. همچنین رابطه بین بعد مثلثی و تعداد ایده ال های اول مینیمال یک حلقه شبه بئر اصلی راست را بررسی می کنیم.

۴-۱ تعریف: مجموعه مرتب $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ از خودتوان های متمایز حلقه R را یک مجموعه از *خودتوان های مثلثی چپ*[۱] R گویند اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) $b_1 + \ldots + b_n = 1$ ،

(۲) $b_1 \in S_l(R)$ و

(۳) $b_{k+1} \in S_l(c_k R c_k)$ که برای هر $1 \le k \le n-1$ ، $c_k = 1-(b_1 + \ldots + b_k)$.

مجموعه خودتوان های مثلثی راست به صورت مشابه تعریف می شود یعنی $b_1 \in S_r(R)$ و $b_{k+1} \in S_r(c_k R c_k)$. از قسمت (۳) تعریف بالا نتیجه می گیریم که خودتوان های مثلثی چپ (راست) دو به دو متعامد هستند. مجموعه $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ از خودتوان های مثلثی چپ را کامل گویند اگر هر b_i تقلیل یافته نیم مرکزی باشد.

[۱] - left triangulating idempotents

۴-۲ تعریف: گوییم حلقه R یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی[۱] دارد اگر یک مجموعه متناهی از خودتوان های ابتدایی دو به دو متعامد مانند $\{e_1,...,e_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که $1 = e_1 + ... + e_n$. هر مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ برای R تعیین می کند.

در مثال زیر نشان می دهیم که یک حلقه شبه بئر وجود دارد که هیچ مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی ندارد.

۴-۳ مثال: فرض کنید F یک میدان و R یک حاصلضرب مستقیم نامتناهی از F باشد. در این صورت R یک حلقه شبه بئر است اما هیچ مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی ندارد.

همچنین یک حلقه شبه بئر با یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی وجود دارد که هیچ مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی ندارد.

۴-۴ مثال: فرض کنید V یک فضای برداری نامتناهی بعد روی میدان F باشد و $R = End_F(V)$. در این صورت R یک حلقه اول و لذا شبه بئر و تقلیل یافته نیم مرکزی است. در نتیجه یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی دارد اما هیچ مجموعه کاملی از خودتوان های ابتدایی ندارد.

اگر R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ داشته باشد آنگاه یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مرکزی دارد. در مثال زیر نشان می دهیم عکس این مطلب برقرار نیست.

۴-۵ مثال: فرض کنید R حلقه ماتریسی بالا مثلثی $\mathrm{N}_0 \times \mathrm{N}_0$ با سطرهای متناهی روی یک میدان باشد. بوضوح $\{1\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مرکزی R است. فرض کنید E_{nn} ماتریسی در R باشد که درایه (n, n) ام آن ۱ و سایر درایه های آن صفر است. برای هر عدد صحیح مثبت n ، $e_1 + ... + e_n$ یک خودتوان نیم مرکزی چپ R است. از طرفی برای هر n ،

---

[۱] - primitive idempotents

$(e_1+\dots+e_n)R \subset (e_1+\dots+e_n+e_{n+1})R$. لذا نتیجه می شود که R نمی تواند هیچ مجموعه کاملی از خودتوان های مثلثی چپ داشته باشد.

۴-۶ لم: فرض کنید $\{b_1,\dots,b_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های ناصفر R باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) $\{b_1,\dots,b_n\}$ یک مجموعه از خودتوانهای مثلثی چپ است.

(۲) $\{b_1,\dots,b_n\}$ یک مجموعه مرتب است به طوری که $1=b_1+\dots+b_n$ و برای هر $i<j\le n$ ، $b_jRb_i=0$.

اثبات: (۱)←(۲) از اینکه $b_1\in S_l(R)$ و $b_2\in(1-b_1)R(1-b_1)$ نتیجه می گیریم $b_2b_1=0$ و لذا $b_2Rb_1=b_2b_1Rb_1=0$. به همین صورت برای هر $j>1$ می توان نشان داد که $b_jRb_1=0$. طبق فرض $b_2\in S_l((1-b_1)R(1-b_1))$. حال قرار دهید $R_1=(1-b_1)R(1-b_1)$ و $c_1=1-b_1$. در نتیجه $b_3\in S_l((c_1-b_2)R_1(c_1-b_2))$. با توجه به محاسبات بالا و جایگذاری R_1 به جای R و b_2 به جای b_1 ، برای هر $j>2$ بدست می آوریم $b_jb_2=0$ و $b_jR_1b_2=0$. لذا برای هر $r\in R$ داریم

$$b_j[(1-b_1)r(1-b_1)]b_2=[b_j(1-b_1)r-b_j(1-b_1)rb_1]b_2=0$$

چون $b_j(1-b_1)Rb_1=0$ ، پس $b_j(1-b_1)rb_2=b_jrb_2-b_jb_1rb_2=b_jrb_2=0$. در نتیجه $b_jRb_2=0$. با ادامه این روند و با جایگذاری $R_2=(1-b_1-b_2)R(1-b_1-b_2)$ به جای R_1 و $c_2=1-b_1-b_2$ به جای c_1 در مرحله بعد نتیجه بدست می آید. اگر به همین صورت ادامه دهیم برای هر $j>i\ge 1$ داریم $b_jRb_i=0$.

(۲)←(۱) از اینکه $(1-b_1)Rb_1=(b_2+\dots+b_n)Rb_1=0$ نتیجه می شود $b_1\in S_l(R)$. همچنین داریم $(1-b_1)b_2(1-b_1)=(b_2+\dots+b_n)b_2(1-b_1)=b_2(1-b_1)=b_2$ و نیز از اینکه $(1-b_2)(1-b_1)=(b_1+b_3+\dots+b_n)(1-b_1)=b_3+b_4+\dots+b_n$ ، نتیجه می گیریم

$(۱-b_۲)[(۱-b_۱)R(۱-b_۱)]b_۲=\sum_{i=۳}^{n} b_i R(۱-b_۱)b_۲=\sum_{i=۳}^{n} b_i R b_۲=\circ$. در نتیجه

$b_۲ \in S_l((۱-b_۱)R(۱-b_۱))$. با ادامه این روند نتیجه مورد نظر بدست می آید. ■

نشان می دهیم R یک مجموعه (کامل) از خودتوان های مثلثی چپ دارد اگر و فقط اگر یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته (کامل) داشته باشد.

۴-۷ گزاره: حلقه R یک مجموعه (کامل) از خود توانهای مثلثی چپ دارد اگر و فقط اگر یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته (کامل) داشته باشد.

برهان: فرض کنید $\{b_۱,...,b_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ R باشد. با استفاده از لم قبل و یک محاسبه ساده می توان نشان داد نگاشت

$$\Phi : R \to \begin{pmatrix} b_۱Rb_۱ & b_۱Rb_۲ & . & . & . & b_۱Rb_n \\ \circ & b_۲Rb_۲ & . & . & . & b_۲Rb_n \\ . & \circ & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ \circ & \circ & . & . & \circ & b_nRb_n \end{pmatrix}$$

که با ضابطه $\Phi(r)=\lfloor r_{ij} \rfloor$ تعریف می شود یک یکریختی است که در آن $r_{ij}=b_i r b_j$. به عبارتی قرار دهید $R_i=b_iRb_i$ و برای هر $i<j$ ، $R_{ij}=b_iRb_j$. برای هر $i<j$ ، R_{ij} یک R_i-مدول چپ و R_j - مدول راست است.

بعکس ، فرض کنید

$$\theta : R \to \begin{pmatrix} R_1 & R_{12} & . & . & . & R_{1n} \\ \circ & R_2 & . & . & . & R_{2n} \\ . & \circ & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ \circ & \circ & . & . & \circ & R_n \end{pmatrix}.$$

یک یکریختی باشد. با یک محاسبه ساده می توان نشان داد که $\{\theta^{-۱}(e_۱),...,\theta^{-۱}(e_n)\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ حلقه R است که در آن E_{ii} یک ماتریس $n\times n$ است به طوری که درایه (i,i)ام آن عضو همانی R_i است و بقیه درایه های آن صفر هستند. ■

۴-۸ لم : فرض کنید $e\in S_l(R)$ و f یک خودتوان از R باشد. در این صورت:

(۱) $S_l(e\mathrm{Re})\subseteq S_l(R)$

(۲) $fS_l(R)f\subseteq S_l(fRf)$

(۳) اگر f یک خودتوان اولیه از R باشد به طوری که $fe\neq 0$ ، آنگاه $fef=f$ و efe یک خودتوان از حلقه $e\mathrm{Re}$ است.

(۴) اگر $f\in S_r(R)$ و X یک ایده ال از R باشد آنگاه eXf یک ایده ال از R است.

برهان : (۱) فرض کنید $g\in S_l(e\mathrm{Re})$. پس $gRg=ge\mathrm{Re}\,g=e\mathrm{Re}\,g=Rg$. در نتیجه $g\in S_l(R)$.

(۲) فرض کنید $g\in S_l(R)$ و $r\in R$. لذا داریم $(fgf)(frf)(fgf)=(ff)(fef)(fgf)=(frf)(fgf)$. بنابراین $fgf\in S_l(fRf)$.

(۳) فرض کنید $fe=fefe\neq 0$. پس $fef\neq 0$. اولیه بودن f ایجاب می کند که $fef=f$. فرض کنید u یک خودتوان ناصفر در $(efe)(e\mathrm{Re})(efe)$ باشد. از اینکه $e\in S_l(R)$ و f یک خودتوان از R است نتیجه می گیریم که $ue=u$ ، $fu=u$ ، $uf=fuf$ و $(uf)(uf)=(uf)$. از طرفی $uf=0$ ایجاب می کند که $u=ufe=0$. پس uf یک خودتوان ناصفر در fRf است. از اولیه بودن f نتیجه می شود که $uf=f$. در نتیجه $u=ufe=fe=efe$. بنابراین efe یک خودتوان از حلقه $e\mathrm{Re}$ است.

(۴) با استفاده از اینکه $R(eXf)R=e\mathrm{Re}\,XfRf\subseteq eXf$ نتیجه مورد نظر بدست می آید.

۴-۹ لم : (۱) فرض کنید R و A دو حلقه و $h:R\to A$ یک همریختی باشد. در این صورت $h(S_l(R))\subseteq S_l(h(R))$.

(۲) فرض کنید $e\in S_l(R)\cup S_r(R)$ و $f\in S_l(e\mathrm{Re})\cup S_r(e\mathrm{Re})$. فرض کنید برای هر $r\in R$ ، تابع $h:R\to fRf$ با ضابطه $h(r)=frf$ تعریف شود. در این صورت تابع h یک همریختی است.

برهان: (۱) با استفاده از تعریف به سادگی اثبات می شود.

(۲) چون $f\in e\mathrm{Re}$ پس $ef=f=fe$. لذا برای هر $x,y\in R$ ، $fxyf=fexyef$. از اینکه $e\in S_l(R)\bigcup S_r(R)$ و $f\in S_l(e\mathrm{Re})\bigcup S_r(e\mathrm{Re})$ ، نتیجه می گیریم $fxyf=fexeyef=fexefeyef=fxyxf$. در نتیجه $h(xy)=fxf^2yf=h(x)h(y)$. بنابراین h یک همریختی است. ■

در نتیجه زیر نشان می دهیم که R یک مجموعه (کامل) از خودتوان های مثلثی چپ دارد اگر و فقط اگر متناظرا یک مجموعه (کامل) از خودتوان های مثلثی راست داشته باشد.

۴-۱۰ نتیجه: مجموعه مرتب $\{b_1,\ldots,b_n\}$ یک مجموعه (کامل) از خودتوان های مثلثی چپ R است اگر و فقط اگر مجموعه مرتب $\{b_n,\ldots,b_1\}$ مجموعه (کامل) از خودتوان های مثلثی راست R باشد.

اثبات: فرض کنید $\{b_1,\ldots,b_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ R باشد. داریم $1-(b_1+\ldots+b_{n-1})=b_n\in S_r(R)$. نشان می دهیم که $b_{n-1}\in S_r((1-b_n)R(1-b_n))$. قرار دهید $R'=(1-b_n)R(1-b_n)$. فرض کنیم $d=b_1+\ldots+b_{n-2}$. پس $d\in S_l(R)$ و $d=(1-b_n)d(1-b_n)$. لذا $(1-b_n)S_l(R)(1-b_n)\subseteq S_l((1-b_n)R(1-b_n))$. در نتیجه $d\in S_l(R')$. بنابراین $b_{n-1}=(1-b_n)-d\in S_r(R')$. با تکرار این روند و با جایگذاری $R''=(1-b_n-b_{n-1})R(1-b_n-b_{n-1})$ به جای R' و $d'=b_1+b_2+\ldots+b_{n-3}$ به جای d بدست می آوریم $d'\in S_l(R'')$ و لذا $b_{n-2}\in S_r(R'')$. به همین صورت برای b_1 ،...، b_{n-1} و b_n نتیجه مورد نظر بدست می آید.

عکس گزاره نیز به همین صورت اثبات می گردد. حال از اینکه $S_l(b_iRb_i)=\{0,b_i\}$ اگر و فقط اگر $S_r(b_iRb_i)=\{0,b_i\}$ ، کامل بودن مجموعه های فوق نتیجه می شود. ■

۴-۱۱ گزاره: حلقه ای مانند A وجود دارد به طوری که $R\cong T_n(A)$ اگر و فقط اگر یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ مانند $\{b_1,\ldots,b_n\}$ از حلقه R وجود داشته باشد به طوری که:

(۱) برای هر $1\le j\le n$ یکریختی $\phi_j:b_jRb_j\to b_1Rb_1$ وجود داشته باشد و

(۲) یکریختی گروهی $\theta_{ij}: b_iRb_j \to b_1Rb_1$ وجود داشته باشد به طوری که

(الف) $b_1Rb_1 \cdot (\theta_{ij}(b_isb_j)) = \theta_{ij}(\phi_i^{-1}(b_1rb_1)\cdot b_isb_j)$ و

(ب) برای هر $1 \le i, j \le n$ و $r, s \in R$ ، $(\theta_{ij}(b_isb_j))\cdot b_1rb_1 = \theta_{ij}(b_isb_j \cdot (\phi_j^{-1}(b_1rb_1)))$.

برهان: فرض کنید E_{ij} ماتریسی $n \times n$ باشد که عنصر همانی A در مکان (i, j)ام آن و سایر درایه های آن صفر است. فرض کنید $b_i = \psi(e_{ij})$. در نتیجه $\{b_1,\ldots,b_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ است. برای هر $r \in R$ نگاشت $\phi_j: b_jRb_j \to b_1Rb_1$ را با ضابطه $\phi_j(b_jrb_j) = \psi(e_{1j}\psi^{-1}(r)e_{j1})$ و نگاشت $\theta_{ij}: b_iRb_j \to b_1Rb_1$ را با ضابطه $\theta_{ij}(b_irb_j) = \psi(e_{1i}\psi^{-1}(r)e_{j1})$ تعریف می کنیم. به راحتی می توان نشان داد که ϕ_j و θ_{ij} در شرایط خواسته شده صدق می کنند.

بعکس ، نگاشت $\Phi: R \to T_n(b_1Rb_1)$ را با ضابطه
$$\Phi: r \mapsto \begin{pmatrix} r_1 & r_{12} & . & . & . & r_{1n} \\ \circ & r_2 & . & . & . & r_{2n} \\ . & \circ & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ \circ & \circ & . & . & \circ & r_n \end{pmatrix}$$
تعریف کنید که در آن $r_j = \phi_j(b_jrb_j)$ و $r_{ij} = \theta_{ij}(b_irb_j)$. یک محاسبه ساده نشان می دهد که Φ یک یکریختی است. ■

۴-۱۲ لم: (۱) R در شرط $D.C.C$ روی $\{bR | b \in S_l(R)\}$ صدق می کند اگر و فقط اگر R در شرط $A.C.C$ روی $\{Rc | c \in S_r(R)\}$ صدق کند.

(۲) R در شرط $A.C.C$ روی $\{bR | b \in S_l(R)\}$ صدق می کند اگر و فقط اگر R در شرط $D.C.C$ روی $\{Rc | c \in S_r(R)\}$ صدق کند.

(۳) اگر R در شرط $D.C.C$ روی $\{Rc | c \in S_r(R)\}$ صدق کند آنگاه R در شرط $D.C.C$ روی $\{cR | c \in S_r(R)\}$ صدق می کند.

اثبات: (۱) فرض کنید R در شرط $D.C.C$ روی $\{bR | b \in S_l(R)\}$ صدق کند. زنجیر صعودی $Rc_1 \subseteq Rc_2 \subseteq \ldots$ را که در آن $c_i \in S_r(R)$ در نظر بگیرید. چون $1 - c_i \in S_l(R)$ ، لذا

$$(1-c_1)R \supseteq (1-c_2)R \supseteq \ldots$$

طبق فرض این زنجیر پایاست پس وجود دارد n به طوری که برای هر $j \geq 1$ ، $(1-c_n)R = (1-c_{n+j})R$. در نتیجه $c_{n+j}(1-c_n)R = 0$ و لذا $c_{n+j} = c_{n+j}c_n$. بنابراین $Rc_{n+j} = Rc_n$. قسمت عکس نیز به همین صورت اثبات می شود.

(۲) برهان این قسمت مشابه قسمت (۱) است.

(۳) فرض کنید R در شرط $D.C.C$ روی $\{Rc | c \in S_r(R)\}$ صدق کند. زنجیر نزولی $c_1R \supseteq c_2R \supseteq \ldots$ را که در آن $c_i \in S_r(R)$ در نظر بگیرید. داریم $c_{i+1} = c_ic_{i+1} = c_ic_{i+1}c_i$. با ضرب c_i از سمت راست نتیجه می شود که $c_{i+1}c_i = c_ic_{i+1}c_i$. پس $c_{i+1} = c_ic_{i+1} = c_{i+1}c_i$ و لذا $Rc_i \supseteq Rc_{i+1}$. بنابراین زنجیر نزولی $Rc_1 \supseteq Rc_2 \supseteq \ldots$ را خواهیم داشت. طبق فرض n ای وجود دارد به طوری که $Rc_n = Rc_{n+1}$. لذا $(1-c_n)R = (1-c_{n+1})R$. پس $(1-c_n)Rc_n = (1-c_{n+1})Rc_{n+1}$. در نتیجه $Rc_n = c_nRc_n + (1-c_n)Rc_n = c_nR + (1-c_n)Rc_n$ و $Rc_{n+1} = c_{n+1}Rc_{n+1} + (1-c_{n+1})Rc_{n+1} = c_{n+1}R + (1-c_{n+1})Rc_{n+1}$. چون $c_nR \supseteq c_{n+1}R$ و $c_nR + (1-c_n)Rc_n = c_{n+1}R + (1-c_{n+1})Rc_{n+1}$ نتیجه می گیریم $c_nR = c_{n+1}R$. بنابراین نتیجه حاصل است. ■

۴-۱۳ لم: فرض کنید $\{b_1, \ldots, b_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ R باشد. در این صورت:

(۱) اگر $e \in S_l(R)$ آنگاه $eR = \oplus_{i \in I} b_iR$ ، مجموع مستقیمی از ایده ال های راست R است که $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

(۲) حداکثر 2^n ایده ال راست مجزا به فرم eR وجود دارد که $e \in S_l(R)$.

اثبات: فرض کنید $\circ \neq e \in S_l(R)$. اندیس i را طوری در نظر بگیرید که $b_i e \neq \circ$. نشان می دهیم $b_i eR = b_i R$. از اینکه $b_i eb_i e = b_i e \neq \circ$ نتیجه می گیریم $b_i eb_i \neq \circ$. از طرفی $b_i S_l(R) b_i \subseteq S_l(b_i R b_i)$ ، لذا $b_i eb_i \in S(b_i R b_i) = \{\circ, b_i\}$. پس $b_i eb_i = b_i$ و $b_i R = b_i eb_i R \subseteq b_i eR \subseteq b_i R$ و لذا $b_i eR = b_i R$. دو به دو متعامد بودن b_i ها و اینکه $b_i eb_j e = b_i b_j e$ ایجاب می کند که $b_1 e$ و . . . و $b_n e$ خودتوان های دو به دو متعامد باشند. فرض کنید $I = \{i | 1 \leq i \leq n, b_i e \neq \circ\}$. لذا $eR = \oplus_{i \in I} b_i eR = \oplus_{i \in I} b_i R$. توجه داریم که چنین مجموع های مستقیمی نمی توانند بیش از 2^n تا باشند. اگر تمام b_i ها مرکزی باشند آنگاه 2^n یک کران بالا خواهد بود. ■

شرط داشتن یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ معادل با داشتن چند شرط دیگر است از جمله اینکه $\{bR | b \in S_l(R)\}$ و $\{cR | c \in S_r(R)\}$ هر دو در شرط $D.C.C$ صدق کنند که در لم زیر آن را توضیح می دهیم.

۴-۱۴ لم: فرض کنید R در شرط $D.C.C$ روی $\{bR | b \in S_l(R)\}$ و $\{cR | c \in S_r(R)\}$ صدق کند، در این صورت R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ دارد.

اثبات : اگر $S_l(R) = \{\circ, 1\}$ آنگاه برهان کامل است. فرض کنید $e_1 \in S_l(R)$ یک خودتوان غیر بدیهی R باشد. اگر e_1 تقلیل یافته نیم مرکزی نباشد آنگاه یک خودتوان غیر بدیهی $e_2 \in S_l(e_1 \mathrm{Re}_1)$ وجود دارد و لذا $e_1 R \supseteq e_2 R$. بوضوح $e_2 \in S_l(R)$. حال اگر e_2 تقلیل یافته نیم مرکزی نباشد آنگاه یک خودتوان غیر بدیهی $e_3 \in S_l(e_2 \mathrm{Re}_2)$ وجود دارد و لذا $c_2 R \supseteq c_3 R$. بوضوح $e_3 \in S_l(R)$. با ادامه این روند یک زنجیر نزولی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$e_1 R \supseteq e_2 R \supseteq e_3 R \supseteq \ldots$$

شرط $D.C.C$ روی $\{bR | b \in S_l(R)\}$ ایجاب می کند که این زنجیر متوقف شود. پس $e_n \in S_l(R)$ وجود دارد به طوری که e_n تقلیل یافته نیم مرکزی است. حال اگر $b_1 = e_n$ آنگاه $1 - b_1 \in S_r(R)$. اگر $1 - b_1$ تقلیل یافته نیم مرکزی باشد آنگاه $\{b_1, 1 - b_1\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی

چپ است. اگر $1-b_1$ تقلیل یافته نیم مرکزی نباشد حلقه $R_1=(1-b_1)R(1-b_1)$ را در نظر بگیرید. R_1 در شرط $D.C.C$ روی $\{dR_1 | d\in S_l(R_1)\}$ صدق می کند. لذا با استفاده از بحثی مشابه بالا داریم $b_2\in S_l(R_1)$ به طوری که $S_l(b_2R_1b_2)=\{0,b_2\}$. $1-b_1$ عضو همانی R_1 است و چون $b_2\in R_1$ پس $b_2R_1b_2=b_2Rb_2$. لذا $S_l(b_2R_1b_2)=\{0,b_2\}$. همچنین $(1-b_1)-b_2\in S_r(R_1)$. از طرفی $S_r(R_1)\subseteq S_r(R)$. اگر $1-b_1-b_2$ تقلیل یافته نیم مرکزی در R باشد آنگاه $\{b_1,b_2,1-b_1-b_2\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ است. اگر این طور نباشد با ادامه این روند یک زنجیر نزولی از اعضای $\{cR | c\in S_r(R)\}$ تشکیل می شود. شرط $D.C.C$ ایجاب می کند که این زنجیر متوقف شود و لذا R یک مجموعه کامل از خود توان های مثلثی چپ دارد. ■

۴-۱۵ قضیه (قضیه یکتایی[1]): فرض کنید $\{c_1,\ldots,c_k\}$ و $\{b_1,\ldots,b_n\}$ دو مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ R باشند. در این صورت $n=k$ و یک عنصر وارون پذیر مانند $\alpha\in R$ و یک جایگشت روی $\{1,\ldots,n\}$ مانند σ وجود دارد به طوری که برای هر i ، $b_{\sigma(i)}=\alpha^{-1}c_i\alpha$. بنابراین به عنوان R- مدول ، برای هر i ، $c_iR\cong b_{\sigma(i)}R$ و به عنوان K-جبر ، $c_iRc_i\cong b_{\sigma(i)}Rb_{\sigma(i)}$.

اثبات: فرض کنید $U=\sum_{i<j} b_iRb_j$. لذا U با زیر حلقه ای از حلقه ماتریس های بالا مثلثی $T_n(R)$ متناظر است که توسط $\{b_1,\ldots,b_n\}$ ایجاد شده است. U ایده الی از R است و $U^n=0$. فرض کنید $\overline{R}=R/U$ و $\varphi:R\to\overline{R}$ همریختی طبیعی و $\overline{x}$ تصویر x تحت این همریختی باشد. چون برای $i=1,\ldots,n$ ، $(b_iRb_i)\cap U=0$ نتیجه می گیریم که هر b_iRb_i یکریخت با $\overline{b_i}\overline{R}\overline{b_i}$ است. لذا $\overline{R}$ مجموع مستقیمی از $\overline{b_i}\overline{R}\overline{b_i}$ ها است و در نتیجه $\{\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های اولیه مرکزی برای $\overline{R}$ است. توجه داریم که $\overline{c_1}\in S_l(\overline{R})$. لذا $\overline{c_1}=\sum_{i=1}^{n}\overline{b_i}\,\overline{c_1}$. از اینکه $\overline{b_i}$ تقلیل یافته نیم مرکزی است پس $\overline{b_i}\,\overline{c_1}\in\{0,\overline{b_i}\}$. لذا $\overline{c_1}\in B(\overline{R})$ و در

---

[1] - uniqueness

نتیجه $S((\bar{1}-\overline{c_1})\bar{R}(\bar{1}-\overline{c_1}))\ni\overline{c_2}$. حال از اینکه $\bar{1}-\overline{c_1}\in B(\bar{R})$ نتیجه می گیریم که $\overline{c_2}\in S_l(\bar{R})$. با استفاده از بحث بالا و با جایگذاری $\overline{c_2}$ به جای $\overline{c_1}$ نتیجه می شود $\overline{c_2}\in B(\bar{R})$. با ادامه این روند نتیجه می گیریم $\{\overline{c_1},\ldots,\overline{c_k}\}$ یک مجموعه از خودتوان های مرکزی ناصفر دو به دو متعامد $\bar{R}$ است. پس برای هر $i<j$ ، $\overline{c_i}\,\overline{R}\,\overline{c_j}=0$. لذا برای هر $1\le i<j\le k$ ، $c_iRc_j\subseteq U$. فرض کنید $V=\sum_{i<j}c_iRc_j$. لذا V با زیر حلقه ای از حلقه ماتریس های بالا مثلثی $T_k(R)$ متناظر است که توسط $\{c_1,\ldots,c_k\}$ ایجاد شده است. با استفاده از بحثی شبیه بالا برای هر $1\le i<j\le n$ نتیجه می گیریم که $b_iRb_j\subseteq V$. در نتیجه $U=V$. بنابراین $\{\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}\}$ و $\{\overline{c_1},\ldots,\overline{c_k}\}$ دو مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مرکزی $\bar{R}$ هستند. لذا $n=k$ و یک جایگشت مانند σ روی $\{1,\ldots,n\}$ وجود دارد به طوری که $\overline{c_i}=\bar{b}_{\sigma(i)}$ و یک عنصر وارون پذیر α در R وجود دارد به قسمی که برای هر i ، $b_{\sigma(i)}=\alpha^{-1}c_i\alpha$. بنابراین به عنوان R- مدول ، $c_iR\cong b_{\sigma(i)}R$. حال از اینکه $End_R(c_iR)\cong c_iRc_i$ و $End_R(b_jR)\cong b_jRb_j$ نتیجه می شود که به عنوان K- جبر ، $c_iRc_i\cong b_{\sigma(i)}Rb_{\sigma(i)}$. ■

مثال زیر نشان می دهد که یکریختی $c_iR\cong b_{\sigma(i)}R$ که در قضیه بالا آمده است نمی تواند با تساوی جایگزین شود. در حقیقت حلقه ای مانند R وجود دارد به طوری که تعداد نامتناهی مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی دارد.

۴-۱۶ مثال: فرض کنید F یک میدان با مشخصه غیر از ۲ باشد و $R=\begin{pmatrix}F & F\\ 0 & F\end{pmatrix}$. فرض کنید $0\neq x\in F$ ، $f_x=\begin{pmatrix}0 & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ، $e_x=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ، $b_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ و $b_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. در این صورت برای هر x ، $\{e_x,f_x\}$ و $\{b_1,b_2\}$ مجموعه هایی کامل از خودتوان های مثلثی چپ برای R هستند که اگر F نامتناهی باشد تعداد آن ها نیز نامتناهی است. بعلاوه $b_1R=e_xR$ و $b_2R\neq f_xR$ اما $b_2R\cong f_xR$ و $(1-b_1)f_xR=b_2R$.

۴-۱۷ نتیجه : فرض کنید A و B دو $K-$جبر نیم مرکزی تقلیل یافته باشند. اگر به عنوان $K-$جبر ، برای برخی m و n ، $T_m(A) \cong T_n(B)$ آنگاه $m=n$ و به عنوان $K-$جبر ، $A \cong B$.

برهان : چون A نیم مرکزی تقلیل یافته است لذا ماتریس های یکه E_{ii} برای $T_m(A)$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ تشکیل می دهند. همین نتیجه را برای $T_n(B)$ داریم. خاصیت داشتن یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ تحت یکریختی ثابت است. حال از قضیه یکتایی و نیز از اینکه $T_m(A) \cong T_n(B)$ نتیجه می گیریم که $m=n$ و $A \cong B$. ■

۴-۱۸ لم : فرض کنید $\{e_1,...,e_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی R باشد. اگر b یک خودتوان غیر بدیهی از $S_l(R) \cup S_r(R)$ باشد آنگاه زیر مجموعه $P \subseteq \{e_1,...,e_n\}$ وجود دارد به طوری که $\{be_jb \mid e_j \in P\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی حلقه bRb است و این مجموعه کمتر از n عضو دارد.

برهان: فرض کنید $c_k \in S_l(R)$ و P مجموعه همه e_j ها باشد به طوری که عناصر be_jb متمایز و ناصفر هستند. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $P = \{e_1,...,e_n\}$. برای هر $j = 1,...,m$ ، be_jb خودتوان های ابتدایی در bRb هستند و $e_jbe_j = e_j$. از $b = (e_1 + ... + b_n)b = e_1b + ... + e_nb = be_1b + ... + be_nb = be_1b + ... + be_mb$ نتیجه می گیریم که $\{be_jb \mid j = 1,...,m\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی حلقه bRb است.

فرض کنید $n = m$. در نتیجه

$$1 = e_1 + ... + e_n = e_1be_1 + ... + e_nbe_n = be_1be_1 + ... + be_nbe_n = b(e_1be_1 + ... + e_nbe_n)$$

$$= b(e_1 + ... + e_n) = b$$

که یک تناقض است. بنابراین $m < n$. ■

۴-۱۹ تعریف: رادیکال ژاکوبسن حلقه R را با علامت $radR$ نمایش می دهیم و با اشتراک همه ایده ال های چپ ماکزیمال R برابر است.

۴-۲۰ تعریف : R را یک *حلقه نیم موضعی*[۱] نامیم هر گاه $R/radR$ یک حلقه آرتینی چپ باشد یا به طور معادل اگر $R/radR$ نیم ساده باشد.

۴-۲۱ تعریف: گوییم حلقه R *نیم کامل*[۲] است اگر R نیم موضعی باشد و خودتوان های $R/radR$ را بتوان به R انتقال داد.

به عنوان مثال اگر R آرتینی چپ یا راست باشد آنگاه R نیم موضعی است و چون $radR$ پوچ توان است لذا خودتوان های $R/radR$ را می توان به R انتقال داد. بنابراین R نیم کامل است. همچنین هر حلقه موضعی R' همیشه نیم کامل است زیرا $R'/radR'$ یک حلقه تقسیم است که خودتوان های غیر بدیهی ندارد. لذا حلقه های نیم کامل را می توان به عنوان تعمیمی از حلقه های موضعی و حلقه آرتینی چپ یا راست در نظر گرفت.

۴-۲۲ تعریف: حلقه R را *نیم اولیه*[۳] می نامیم هر گاه $R/radR$ نیم ساده و $radR$ پوچ توان باشد.

۴-۲۳ گزاره: اگر R در هر یک از شرایط زیر صدق کند آنگاه

$R \cong \begin{pmatrix} R_1 & R_{12} & . & . & . & R_{1n} \\ \circ & R_2 & . & . & . & R_{2n} \\ . & \circ & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ \circ & \circ & . & . & . & R_n \end{pmatrix}$ به طوری که هر R_i تقلیل یافته نیم مرکزی است و همان خاصیت R را دارد، R_{ij} یک R_i- مدول چپ و R_j- مدول راست است و حلقه های R_1 ، . . . و R_n در حد یکریختی منحصر به فرد هستند.

(۱) R یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی داشته باشد.

---

[۱] - Semilocal

[۲] - Semiperfect

[۳] - Semi primary

(۲) R هیچ مجموعه نامتناهی از خودتوان های متعامد نداشته باشد.

(۳) R در شرط $D.C.C$ روی ایده ال هایش (ایده ال های تولید شده توسط خودتوان ها ، اصلی و یا با تولید متناهی) صدق کند.

(۴) R در شرط $D.C.C$ روی ایده ال های راستش (ایده ال های تولید شده توسط خودتوان ها ، اصلی و یا با تولید متناهی) صدق کند.

(۵) R در شرط $A.C.C$ روی ایده ال هایش (ایده ال های تولید شده توسط خودتوان ها ، اصلی و یا با تولید متناهی) صدق کند.

(۶) R در شرط $A.C.C$ روی ایده ال های راستش (ایده ال های تولید شده توسط خودتوان، اصلی یا با تولید متناهی) صدق کند.

(۷) R در شرط $A.C.C$ یا $D.C.C$ روی پوچسازهای راستش صدق کند.

(۸) R یک حلقه نیم موضعی باشد.

(۹) R یک حلقه نیم کامل باشد.

(۱۰) R یک حلقه نیم اولیه باشد.

اثبات: (۱) فرض کنید $\{e_1,\dots,e_k\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی R باشد. پس برای هر $b\in S_l(R)$ ، $b=e_1b+\dots+e_kb$ و هر e_jb یک خودتوان است. بدون کاستن از کلیت مسئله مجموعه همه e_jb ها که ناصفر هستند را با $j=1,\dots,m$ اندیس گذاری کنید. لذا $bR\subseteq e_1bR+\dots+e_mbR=be_1bR+\dots+be_mbR\subseteq bR$ و در نتیجه $bR=e_1R+\dots+e_mbR$. اگر $e_jb\neq 0$ آنگاه ابتدایی بودن e_j ایجاب می کند که $e_jbR=e_jR$. پس $bR=e_1bR+\dots+e_mR$. بنابراین تعداد کل ایده ال های راست به فرم bR که $b\in S_l(R)$ کمتر از 2^k است. در نتیجه R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ دارد. حال فرض کنید $\{b_1,\dots,b_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ R باشد. مانند لم ۴-۷ قرار دهید $R_i=b_iRb_i$ و برای هر $i<j$ ،

$R_{ij}=b_iRb_j$. برای هر $i<j$ ، R_{ij} یک R_i - مدول چپ و R_j - مدول راست است. هر R_i یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی دارد.

(۲) اگر R در شرط (۲) صدق کند آنگاه یک مجموعه کامل از خود توان های ابتدایی دارد، لذا طبق قسمت (۱) یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته یکتا دارد. هر R_i هیچ مجموعه نامتناهی از خودتوان های متعامد ندارد.

(۳)-(۷) اگر $b\in S_l(R)$ و $c\in S_r(R)$ ، آنگاه bR و Rc ایده ال هایی از R هستند. طبق لم قبل تحت هر کدام از شرط های زنجیره ای ، R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ دارد. مانند قسمت (۱) ، R یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته یکتا دارد. شرط های زنجیره ای همراه با تصویر همریختی و نیز با زیر حلقه هایی به فرم $e\mathrm{Re}$ که e یک خودتوان است انتقال داده می شوند. هر R_i در همان شرط زنجیره ای صدق می کند.

(۸)- (۱۰) تحت هر کدام از این شرایط ، R یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی دارد. طبق قسمت (۱) ، R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی و لذا یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته یکتا دارد. کلاس حلقه های نیم موضعی و کلاس حلقه های نیم کامل تحت تصویر همریختی بسته هستند. لذا اگر R یک حلقه نیم موضعی (نیم کامل) باشد آنگاه هر R_i نیز نیم موضعی (نیم کامل) است و اگر R نیم اولیه باشد آنگاه هر R_i نیز نیم اولیه است. ■

۴-۲۴ مثال: فرض کنید Z حلقه اعداد صحیح و p یک عدد اول باشد. برای $n=۱,۲,...$ قرار دهید $A_n=Z/pZ$ و $A=\prod_{n=۱}^{\infty}A_n$. فرض کنید $R=<۱,\oplus_{n=۱}^{\infty}A_n>$. بوضوح R زیر حلقه ای از A است. R یک حلقه جابجایی و فون نیومن منظم است اما آرتینی نیست. پس R نمی تواند یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ داشته باشد.

۴-۲۵ نتیجه: فرض کنید $\{e_1,...,e_w\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی حلقه R باشد. در این صورت یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی $\{b_1,...,b_n\}$ وجود دارد به طوری که برای

هر b_i ، $1\le i\le n$ ، یک زیر مجموعه ناتهی Λ_i از $\{1,\dots,w\}$ وجود دارد به قسمی که $b_iR=\sum_{j\in\Lambda_i} e_jR$

و $\{\Lambda_i \mid i=1,\dots,n\}$ یک بخش از $\{1,\dots,w\}$ است.

برهان: طبق گزاره ۴-۲۳(۱) حلقه R یک نمایش ماتریسی مثلثی دارد و لذا طبق قضیه ۴-۷ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ مانند $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ دارد. چون $\beta_1\in S_l(R)$ در نتیجه $e_j\beta_1$ یک خودتوان است. ابتدایی بودن e_j ایجاب می کند که اگر $e_j\beta_1\neq \circ$ ، آنگاه $e_j\beta_1R=e_jR$ باشد. فرض کنید $\Lambda_1=\{j \mid 1\le j\le w \text{ و } e_j\beta_1\neq\circ\}$. از اینکه β_1R یک ایده ال از R است داریم $\beta_1R\subseteq\sum_{j\in\Lambda_1}e_j\beta_1R=\sum_{j\in\Lambda_1}e_jR\subseteq\beta_1R$. لذا $\beta_1R=\sum_{j\in\Lambda_1}e_jR$. فرض کنید $b_1=\sum_{j\in\Lambda_1}e_j$. پس $\beta_1R=b_1R$. در نتیجه $b_1\in S_l(R)$ و b_1 نیم مرکزی تقلیل یافته است. واضح است که $(1-\beta_1)R(1-\beta_1)\cong R/\beta_1R=R/b_1R\cong(1-b_1)R(1-b_1)$. چون $\beta_2\in S_l((1-\beta_1)R(1-\beta_1))$ لذا متناظرا عضو $d_2\in S_l((1-b_1)R(1-b_1))$ وجود دارد. فرض کنید $R_1=(1-b_1)R(1-b_1)$. توجه داریم که $\{e_j \mid j\in\{1,\dots,w\}\setminus\Lambda_1\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی برای R_1 است.

مشابه بحث بالا $\Lambda_2\subseteq\{1,\dots,w\}\setminus\Lambda_1$ وجود دارد به طوری که $d_2R=\sum_{j\in\Lambda_2}e_jR_1$. بنابراین $d_2R=\sum_{j\in\Lambda_2}e_jR$. قرار دهید $b_2=\sum_{j\in\Lambda_2}e_j$. در نتیجه $b_2\in S_l((1-b_1)R(1-b_1))$ و b_2 نیم مرکزی تقلیل یافته است. با ادامه همین روند نتیجه مورد نظر بدست می آید. ■

تعداد عناصر یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ برای حلقه R یکتاست و با تعداد عناصر هر مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی راست R برابر است. این مساله منجر به تعریف زیر می شود.

۴-۲۶ تعریف: گوییم R دارای *بعد مثلثی*[۱] n است و می نویسیم $\mathrm{Tdim}(R)=n$ هر گاه R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ با دقیقا n عضو داشته باشد. توجه داریم R نیم مرکزی

---

[۱] - triangulating dimension

تقلیل یافته است اگر و فقط اگر $\mathrm{T}\dim(R)=1$. اگر R هیچ مجموعه کاملی از خودتوان های مثلثی چپ نداشته باشد گوییم R بعد مثلثی نامتناهی دارد و می نویسیم $\mathrm{T}\dim(R)=\infty$.

۴-۲۷ لم: اگر $\{e_1,\ldots,e_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی R باشد آنگاه $\mathrm{T}\dim(R)\leq n$.

اثبات: طبق قسمت (۱) از لم قبل R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ دارد. فرض کنید $\{b_1,\ldots,b_m\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ R باشد. برای هر $1\leq k<m$ قرار دهید $c_k=1-(b_1+\ldots+b_k)$. لذا برای هر $1\leq k<m$، $c_k\in S_l(R)$. طبق لم ۴-۱۸ حلقه c_1Rc_1 نیز یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی دارد و این مجموعه تعداد n_1 عضو دارد به طوری که $n_1<n$. در این صورت $c_2\in c_1Rc_1$ و c_2Rc_2 نیز یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی با تعداد n_2 عضو دارد که $n_2<n_1$. اگر $m>n$ آنگاه این روند را می توان تا جایی ادامه داد که به یک تناقض برسیم. بنابراین $m\leq n$. ■

۴-۲۸ گزاره: فرض کنید $\{b_1,\ldots,b_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ R باشد. در این صورت

(۱) $c\in \mathrm{B}(R)\setminus\{0,1\}$ اگر و فقط اگر $I\subset\{1,\ldots,n\}$ وجود داشته باشد به طوری که $c=\sum_{i\in I}b_i$ و برای هر $i\in I$ و $j\notin I$ ، $b_iRb_j=b_jRb_i=0$.

(۲) R یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مرکزی دارد.

(۳) $\{b_1,\ldots,b_n\}\subseteq S_l(R)$ اگر و فقط اگر $\{b_1,\ldots,b_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مرکزی باشد.

برهان: (۱) فرض کنید $c\in \mathrm{B}(R)\setminus\{0,1\}$. لذا $c=c(b_1+\ldots+b_n)=cb_1+\ldots+cb_n$. همچنین برای هر i داریم $cb_i\in S_l(b_iRb_i)$ و $S_l(b_iRb_i)=\{0,b_i\}$. در نتیجه $I\subset\{1,\ldots,n\}$ وجود دارد به طوری

که $c=\sum_{i\in I} b_i$. فرض کنید $i\in I$ و $j\notin I$. پس $b_iRb_j = cb_iRb_j = b_iRb_j = ۰$. بطور مشابه $b_jRb_i = ۰$.

بعکس ، فرض کنید $r\in R$. لذا $r\in \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_iRb_j$. یک محاسبه ساده نشان می دهد که $cr=rc$. برای قسمت عکس کافی است فرض کنیم که $\{b_۱,\ldots,b_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ است.

(۲): با استفاده از قسمت (۱) ، $\mathrm{B}(R)$ یک مجموعه متناهی است. در نتیجه $\mathrm{B}(R)$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مرکزی می باشد.

(۳): فرض کنید $\{b_1,\ldots,b_n\}\subseteq S_l(R)$. بوضوح b_i ها دو به دو متعاند هستند. همچنین داریم $b_1+\ldots+b_n=1$. بنابراین $\{b_1,\ldots,b_n\}\subseteq \mathrm{B}(R)$. قسمت عکس برهان نیز واضح است. ■

۴-۲۹ لم: فرض کنید $\{b_۱,b_۲,\ldots,b_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ R و $\{b_{(i,۱)},\ldots,b_{(i,k_i)}\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ حلقه b_iRb_i باشد. در این صورت $\{b_{(۱,۱)},\ldots,b_{(۱,k_۱)},b_{(۲,۱)},\ldots,b_{(۲,k_۲)},\ldots,b_{(n,۱)},\ldots,b_{(n,k_n)}\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ R است.

برهان: واضح است که $\sum_{i=1}^{k_1} b_{(1,i)}+\ldots+\sum_{i=1}^{k_n} b_{(n,i)}=1$. فرض کنید r عضو دلخواهی از R باشد. در نتیجه:

$$rb_{(۱,۱)} = rb_۱b_{(۱,۱)} = b_۱rb_۱b_{(۱,۱)} = b_{(۱,۱)}b_۱rb_۱b_{(۱,۱)} = b_{(۱,۱)}rb_۱b_{(۱,۱)} = b_{(۱,۱)}rb_{(۱,۱)}$$

پس $b_{(۱,۱)}\in S_l(R)$. ادعا می کنیم $b_{(i,j+۱)}\in S_l\left(c_{(i,j)}Rc_{(i,j)}\right)$ به طوری که $c_{(i,j)} = ۱-\sum_{\alpha=۱}^{i-۱} b_\alpha - \sum_{\gamma=۱}^{j} b_{(i,\gamma)}$. وجود دارد $c_j = b_i - \sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}$ به طوری که $b_{(i,j+۱)}\in S_l\left(c_j\left(b_iRb_i\right)c_j\right) = S_l\left(c_jRc_j\right)$. اگر فرض کنیم $r\in R$ باشد آنگاه

$$\left(c_j\left(b_irb_i\right)c_j\right)b_{(i,j+1)} = c_j\left(b_irb_i\right)\left(b_i-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)b_{(i,j+1)}$$

$$=c_j\left(b_i r b_i\right)\left(b_i b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)} b_{(i,j+1)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=c_j\left(b_i r b_i\right)\left(b_{(i,j+1)}-b_{(i,j+1)} \sum_{r=1}^{j} b_{(i,r)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=c_j\left(b_i r b_i\right) b_{(i,j+1)}\left(b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=\left(b_i-\sum_{r=1}^{j} b_{(i,r)}\right) b_{(i,j+1)}\left(b_i r b_i\right) b_{(i,j+1)}\left(b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=\left(b_i b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,r)} b_{(i,j+1)}\right)\left(b_i r b_i\right) b_{(i,j+1)}\left(b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=\left(b_{(i,j+1)}-b_{(i,j+1)} \sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)\left(b_i r b_i\right) b_{(i,j+1)}\left(b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=b_{(i,j+1)}\left(b_{(i,j+1)}-b_{(i,j+1)} \sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)\left(b_i r b_i\right) b_{(i,j+1)}\left(b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=b_{(i,j+1)}\left(b_i b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)} b_{(i,j+1)}\right)\left(b_i r b_i\right) b_{(i,j+1)}\left(b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=b_{(i,j+1)}\left(b_i-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}\left(b_i r b_i\right) b_{(i,j+1)}\left(b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=b_{(i,j+1)} c_j\left(b_i r b_i\right) b_{(i,j+1)}\left(b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=b_{(i,j+1)} c_j\left(b_i r b_i\right)\left(b_{(i,j+1)}-b_{(i,j+1)} \sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=b_{(i,j+1)} c_j\left(b_i r b_i\right)\left(b_i b_{(i,j+1)}-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)} b_{(i,j+1)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=b_{(i,j+1)} c_j\left(b_i r b_i\right)\left(b_i-\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right) b_{(i,j+1)}$$

$$=b_{(i,j+1)}\left(c_j\left(b_i r b_i\right) c_j\right) b_{(i,j+1)}$$

لذا $b_{(i,j+1)} \in S_l\left(c_j\left(b_iRb_i\right)c_j\right)$. حال فرض کنید $x \in S_l\left(c_j\left(b_iRb_i\right)c_j\right)$. در نتیجه

$$xc_jRc_jx = xc_jR\left(b_i - \sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)x = xc_jR\left(b_i - b_i\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)x$$

$$= xc_jRb_i\left(b_i - \sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)x = xc_jb_iRb_i\left(b_i - \sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)x$$

$$= c_jb_iRb_i\left(b_i - \sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)x = c_jRb_i\left(b_i - \sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)x$$

$$= c_jR\left(b_i - b_i\sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)x = c_jR\left(b_i - \sum_{\gamma=1}^{j} b_{(i,\gamma)}\right)x = c_jRc_jx$$

پس $x \in S_l\left(c_jRc_j\right)$ و لذا $b_{(i,j+1)} \in S_l\left(c_j\left(b_iRb_i\right)c_j\right) = S_l\left(c_jRc_j\right)$. بنابراین

$c_{(i,j)} = ۱ - \sum_{\alpha=۱}^{i} b_\alpha + c_j$ و

$$c_{(i,j)}b_{(i,j+1)} = c_{(i,j)}b_ib_{(i,j+1)} = \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{i} b_\alpha + c_j\right)b_ib_{(i.j+1)} = c_jb_ib_{(i,j+1)} = c_jb_{(i,j+1)}.$$

پس برای هر $r \in R$ داریم

$$\left(c_{(i,j)}rc_{(i,j)}\right)b_{(i,j+۱)} = \left(۱ - \sum_{\alpha=۱}^{i} b_\alpha + c_j\right)rc_jb_{(i,j+۱)} = \left(۱ - \sum_{\alpha=۱}^{i} b_\alpha\right)rc_jb_{(i,j+۱)} + c_jrc_jb_{(i,j+۱)}$$

حال از اینکه $۱ - \sum_{\alpha=۱}^{i} b_\alpha \in S_r(R)$ نتیجه می گیریم

$$\left(1 - \sum_{\alpha=1}^{i} b_\alpha\right)rc_jb_{(i,j+1)} = \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{i} b_\alpha\right)r\left(1 - \sum_{\alpha=1}^{i} b_\alpha\right)c_jb_{(i,j+1)} = ۰$$

در نتیجه

$$\left(c_{(i,j)}rc_{(i,j)}\right)b_{(i,j+1)} = \left(c_jrc_j\right)b_{(i,j+1)} = b_{(i,j+1)}\left(c_jrc_j\right)b_{(i,j+1)} = b_{(i,j+1)}\left(c_{(i,j)}rc_{(i,j)}\right)b_{(i,j+1)}$$

بنابراین $b_{(i,j+۱)} \in S_l\left(c_{(i,j)}Rc_{(i,j)}\right)$. ■

۴-۳۰ لم: فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی داشته باشد در این صورت برای هر خودتوان نیم مرکزی چپ (یا راست) e از R ، حلقه $e\mathrm{Re}$ نیز یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی دارد.

برهان: فرض کنید e یک خودتوان نیم مرکزی چپ باشد. اگر $b \in S_l(R)$ آنگاه $ebe \in S_l(R)$. تابع $\lambda : \{bR \mid b \in S_l(R)\} \to \{d(e\mathrm{Re}) \mid d \in S_l(e\mathrm{Re})\}$ را با ضابطه $\lambda(bR) = (ebe)(e\mathrm{Re})$ تعریف کنید. چون $S_l(e\mathrm{Re}) \subseteq S_l(R)$ در نتیجه λ پوشاست. از اینکه $\{bR \mid b \in S_l(R)\}$ متناهی است نتیجه می گیریم که $\{d(e\mathrm{Re}) \mid d \in S_l(e\mathrm{Re})\}$ نیز متناهی است. بنابراین حلقه $e\mathrm{Re}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی دارد. اگر e یک خودتوان نیم مرکزی راست باشد به طور مشابه می توان نتیجه گرفت که حلقه $e\mathrm{Re}$ نیز یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی دارد. ■

۴-۳۱ گزاره: فرض کنید $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ R باشد. در این صورت $T\dim(R) = \sum_{i=1}^{n} T\dim(b_i R b_i)$. بویژه $T\dim(R) \geq n$.

برهان: ابتدا فرض کنید $T\dim(R) = \infty$. لذا $1 \leq j \leq n$ وجود دارد به طوری که $T\dim(b_i R b_i) = \infty$. زیرا در غیر این صورت با استفاده از لم ۴-۲۹ به یک تناقض می رسیم.

حال فرض کنید $T\dim(R) < \infty$. چون b_1 یک خودتوان نیم مرکزی R است لذا طبق لم قبل ، $T\dim(b_1 R b_1) < \infty$. از طرفی $(1-b_1) \in S_r(R)$ لذا از لم قبل $T\dim((1-b_1)R(1-b_1)) < \infty$. از اینکه $b_2 \in S_l((1-b_1)R(1-b_1))$ و از لم قبل نتیجه می شود $T\dim(b_2 R b_2) < \infty$. با ادامه این روند می توان نشان داد برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $T\dim(b_i R b_i) < \infty$. حال طبق لم ۴-۲۹ داریم $T\dim(R) = \sum_{i=1}^{n} T\dim(b_i R b_i)$. چون برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $T\dim(b_i R b_i) \geq 1$ لذا $T\dim(R) \geq n$. ■

۴-۳۲ نتیجه: فرض کنید حلقه R یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته داشته باشد یعنی $R \cong \begin{pmatrix} R_1 & R_{12} & . & . & . & R_{1n} \\ \circ & R_2 & . & . & . & R_{2n} \\ . & \circ & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ \circ & \circ & . & . & \circ & R_n \end{pmatrix}$. در این صورت $T\dim(R)=\sum_{i=1}^{n} T\dim(R_i)$. بویژه اگر $R=T_n(A)$ آنگاه $T\dim(R)=nT\dim(A)$.

برهان: یک نتیجه مستقیم از گزاره قبل است. ■

۴-۳۳ لم: اگر $T\dim(R)<\infty$ آنگاه R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است اگر و فقط اگر شبه بئر باشد.

اثبات: فرض کنید R یک حلقه شبه بئر اصلی راست باشد. چون R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ دارد لذا $\{bR | b\in s_l(R)\}$ یک مجموعه متناهی است. پس هر زیر شبکه از شبکه ایده ال های اصلی آن کامل است. نشان می دهیم R شبه بئر است. فرض کنید I یک ایده ال از R باشد پس $I=\sum_{i\in I} Rx_iR$. چون R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است لذا خودتوان های $e_i\in S_l(R)$ وجود دارند به طوری که $r_R(I)=\bigcap_{i\in I} r_R(Rx_iR)=\bigcap_{i\in I} e_iR$. پس $c\in S_l(R)$ وجود دارد به طوری که $cR\subseteq \bigcap_{i\in I} e_iR$ و cR بزرگترین کران پایین برای $\{e_iR | i\in I\}$ در $LS_l(R)$(یعنی شبکه ایده ال های اصلی تولید شده توسط خودتوان های نیم مرکزی R) است. برای اثبات رابطه $\bigcap_{i\in I} e_iR\subseteq cR$ از فرض خلف استفاده می کنیم. فرض کنید $a\in \bigcap_{i\in I} e_iR$ اما $a\notin cR$. چون R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است لذا $b\in S_l(R)$ وجود دارد به طوری که $RaR\subset rl(RaR)=bR$. چون $RaR\subseteq e_iR$ پس برای هر $i\in I$ ، $R(1-e_i)\subseteq l(RaR)$. در نتیجه $bR=rl(RaR)\subseteq r(R(1-e_i))=e_iR$. لذا $bR\subseteq \bigcap_{i\in I} e_iR$. حال از اینکه $a\in bR$ و $a\notin cR$ نتیجه

می گیریم $R\subset cR+bR=(c+b-cb)R\subseteq\bigcap_{i\in I}e_iR$ که در آن $c+b-cb\in S_l(R)$. این نتیجه با فرض اینکه cR بزرگترین کران پایین برای $\{e_iR|i\in I\}$ در $LS_l(R)$ بود در تناقض است و لذا فرض خلف باطل و $\bigcap_{i\in I}e_iR=cR$. بنابراین $r(I)=cR$. در نتیجه R یک حلقه شبه بئر است.

بعکس ، فرض کنید R شبه بئر باشد. نشان می دهیم $LS_l(R)$ یک زیر شبکه کامل از شبکه ایده ال های R است. فرض کنید $\{e_i\}_{i\in I}\subseteq S_l(R)$. برای هر $i\in I$ ، $R(1-e_i)$ یک ایده ال از R است. لذا خودتوان e وجود دارد به طوری که $\bigcap_{i\in I}e_iR=\bigcap_{i\in I}r(R(1-e_i))=r\left(\sum_{i\in I}R(1-e_i)\right)=eR$. بنابراین هر زیر مجموعه از $LS_l(R)$ بزرگترین کران پایین دارد. لذا $LS_l(R)$ کامل است. از طرفی چون R شبه بئر است لذا شبه بئر اصلی راست نیز هست. لذا نتیجه حاصل است. ■

۴-۳۴ قضیه ([۱۳]- قضیه ۳-۷): فرض کنید R یک حلقه با یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) R شبه بئر اصلی راست است.

(۲) R شبه بئر اصلی چپ است.

(۳) R شبه بئر است.

(۴) R یک حلقه PWP است.

۴-۳۵ لم: فرض کنید $\{b_1,\dots,b_n\}$ یک مجموعه از خود توان های مثلثی چپ R باشد. در این صورت:

(۱) P یک ایده ال اول R است اگر و فقط اگر یک ایده ال اول مانند P_m از حلقه b_mRb_m وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i,j=1,\dots,n$ و $(i,j)\neq(m,m)$ ، $P=P_m+\sum b_iRb_j$. بعلاوه P یک ایده ال اول مینیمال R است اگر و فقط اگر P_m ایده ال اول مینیمالی از b_mRb_m باشد.

(۲) اگر I ایده ال مینیمالی از R باشد آنگاه $i,j\in\{1,\dots,n\}$ وجود دارد به طوری که $I=b_iIb_j$. بعلاوه اگر $I^2\neq 0$ ، آنگاه $i=j$.

برهان: (۱): چون R یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ دارد لذا یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته دارد. واضح است که مجموعه همه ماتریس هایی که قطر اصلی آنها صفر است یک ایده ال پوچ توان است. با این توضیحات ، برای $i, j = 1,...,n$ که $i \neq j$ ، $S = \sum b_i R b_j$ یک ایده ال پوچ توان از R است. همچنین برای هر m و برای $i, j = 1,...,n$ که $(i, j) \neq (m, m)$ ، $D_m = \sum b_i R b_j$ یک ایده ال از R است. فرض کنید P یک ایده ال اول از R باشد. لذا $S \subseteq P$. چون $b_1R + ... + b_nR = R$ در نتیجه m وجود دارد به طوری که $b_m R \not\subset P$. اگر $k \neq m$ و $b_k R \not\subset P$ آنگاه هم $(b_m R)(b_k R)$ و هم $(b_k R)(b_m R)$ مشمول در P نیستند که متناقض با صفر بودن یکی از آنها است. در نتیجه برای هر $i \neq m$ ، $b_i R \subseteq P$ و لذا برای هر $i \neq m$ که $(i, j) \neq (m, m)$ ، $b_i R b_j \subseteq P$. طبق تعریف نمایش ماتریسی مثلثی برای حلقه R ، P برابر با مجموع همه $b_i R b_j \subseteq P$ ها است و لذا $P = b_m P b_m + D_m$. چون P ایده ال اولی از R است در نتیجه $b_m P b_m$ ایده ال اولی از $b_m R b_m$ است.

بعکس ، فرض کنید P_m یک ایده ال اول از حلقه $b_m R b_m$ باشد. واضح است که $P_m + D_m$ ایده الی از R است. چون $b_m R b_m / P_m$ یک حلقه اول است و $R/(P_m + D_m) \cong b_m R b_m / P_m$ نتیجه می گیریم $P_m + D_m$ یک ایده ال اول از R است.

(۲): فرض کنید k بزرگترین عضو از مجموعه $\{1,...,n\}$ باشد به طوری که $Ib_k \neq ۰$. برای $t \in \{1,...,n\}$ تعریف کنید $d_t = \sum_{i=۱}^{t} b_i$. داریم $d_k \in S_l(R)$. در نتیجه $I = d_k I$. از طرفی داریم $b_k \in S_r(d_k R d_k)$. فرض کنید $r \in R$. پس $r = rd_k + r\sum_{i=k+۱}^{n} b_i$. در نتیجه $Ib_k r = Ib_k rd_k = Ib_k rd_k b_k \subseteq Ib_k$. بنابراین $I = d_k Ib_k$. اگر $d_{k-۱} Ib_k = ۰$ آنگاه $I = b_k Ib_k$ و لذا نتیجه حاصل است. فرض کنید $d_{k-۱} Ib_k \neq ۰$. مانند توضیحات بالا داریم $d_{k-۱} \in S_l(R)$ و لذا $I = d_{k-۱} Ib_k$ ، $I^۲ = ۰$ و $d_k Ib_k = ۰$. اگر $d_{k-2} Ib_k = ۰$ آنگاه $b_{k-۱} Ib_k = I$ و لذا برهان کامل است.

در غیر این صورت $d_{k-2}Ib_k \neq 0$ و بنابراین $I = d_{k-2}Ib_k$. با ادامه این روند نتیجه مورد نظر بدست می آید. ■

با استفاده از توضیحات لم قبل ، برای هر ایده ال اول P از R می توانیم نگاشت $\Phi : Spec(R) \to Spec(V)$ را با ضابطه $\Phi(P) = P_m$ تعریف کنیم که در آن $V = b_1Rb_1 + \ldots + b_nRb_n$. Φ یک نگاشت دو سویی است. از لم قبل نتیجه می گیریم

$$\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(V) + \sum_{i<j} b_iRb_j = \mathrm{P}(b_1Rb_1) + \ldots + \mathrm{P}(b_nRb_n) + \sum_{i<j} b_iRb_j.$$

۴-۳۶ قضیه: فرض کنید R یک حلقه شبه بئر باشد و $T\dim(R) = n$. در این صورت $R = A \oplus B$ ، مجموع مستقیمی از حلقه هاست ، به طوری که

(۱) $A = \oplus_{i=1}^{k} A_i$ مجموع مستقیمی از حلقه های اول است.

(۲) یک یکریختی مانند

$$\varphi : B \to \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} & . & . & . & B_{1m} \\ 0 & B_2 & . & . & . & B_{2m} \\ . & 0 & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & B_m \end{pmatrix}$$

وجود دارد به طوری که هر B_i یک حلقه اول است ، B_{ij} یک B_i - مدول چپ و B_j - مدول راست و $k = m + n$.

(۳) برای هر $i \in \{1,\ldots,m\}$ ، $j \in \{1,\ldots,m\}$ وجود دارد به طوری که $B_{ij} \neq 0$ یا $B_{ji} \neq 0$.

(۴) با صرف نظر از ترتیب B_i ها ، حلقه های B_1 ، ... و B_m در حد یکریختی منحصر به فرد هستند.

(۵) B دقیقا m ایده ال اول مینیمال مانند P_1 ، ... و P_m دارد. R دقیقا n ایده ال اول مینیمال به فرم $A \oplus P_i$ یا $C_i \oplus B$ دارد به طوری که $C_i = \oplus_{j \neq i} A_j$ ، $\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(B)$ و $(\mathrm{P}(R))^m = 0$.

(۶) اگر I ایده الی مینیمال از R باشد آنگاه $I^۲ \neq ۰$ و برای برخی $۱ \leq i \leq k$ ، $I \subseteq A_i$ یا $I^۲ = ۰$ و برای برخی $۱ \leq i < m$ و $۱ < j \leq m$ ، $\varphi(I) \subseteq (B_{ij})$ که (B_{ij}) مجموعه ماتریس های $m \times m$ ای است که درایه (i , j) ام آن عنصری از B_{ij} است و سایر درایه های آن صفر هستند.

برهان: فرض کنید $E = \{b_1,\ldots,b_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ R باشد.

(۱): فرض کنید $\{e_1,\ldots,e_k\} = E \cap \mathrm{B}(R)$. قرار دهید $A_i = e_i R$. چون هر A_i شبه بئر و تقلیل یافته نیم مرکزی است در نتیجه یک حلقه اول است.

(۲): فرض کنید $\{f_۱,\ldots,f_m\} = E \setminus \{e_۱,\ldots,e_k\}$. در نتیجه $\{f_۱,\ldots,f_m\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ B است. نگاشت ϕ را مانند لم ۴-۷ تعریف کنید و قرار دهید $B_i = f_i B f_i$ و $B_{ij} = f_i B f_j$. هر B_i یک حلقه اول است.

(۳): یک نتیجه مستقیم از گزاره ۴-۲۸(۱) است.

(۴): برهان این قسمت از قضیه یکتایی نتیجه می شود.

(۵): با استفاده از لم ۴-۳۵(۱) نتیجه مورد نظر بدست می آید.

(۶): اگر $I^۲ = ۰$ آنگاه از اینکه $\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(B)$ نتیجه می گیریم برای برخی $i, j \in \{۱,\ldots,m\}$ ، $I \subseteq f_i B f_j$. حال فرض کنید $I^۲ \neq ۰$. طبق لم ۴-۳۵(۲) عنصر $b_v \in E$ وجود دارد به طوری که $I = b_v I b_v$. شرایط زیر را در نظر بگیرید:

مورد ۱: فرض کنید $v = ۱$. در این صورت $e \in S_l(R)$ وجود دارد به طوری که $r_R(R) = eR$. پس $(۱-b_۱)R \subseteq eR$. چون $eb_۱ \in r_{b_۱Rb_۱}(I)$ و $b_۱Rb_۱$ یک حلقه اول است نتیجه می گیریم $eb_۱ = ۰$. در نتیجه $e = eb_۱ + e(۱-b_۱) = e(۱-b_۱) = ۱-b_۱$. از طرفی می دانیم $۱-b_۱ \in S_r(R)$. در نتیجه $۱-b_۱ \in S_l(R) \cap S_r(R)$. بنابراین $۱-b_۱$ یک خودتوان مرکزی است. در نتیجه $b_۱$ نیز یک خودتوان مرکزی است.

مورد ۲: فرض کنید $\nu > 1$. قرار دهید $g = \sum_{i=1}^{\nu} b_i$ و $\Gamma = gRg$. واضح است که $g \in S_l(R)$. Γ یک حلقه شبه بئر است و یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ مانند $\{b_1, \dots, b_\nu\}$ دارد. در نتیجه $c \in S_l(\Gamma)$ وجود دارد به طوری که $l_\Gamma(I) = \Gamma c$. پس $R(g - b_\nu) \subseteq \Gamma c$. چون $b_\nu c \in l_\Gamma(I)$ و نیز از اینکه $b_\nu R b_\nu = b_\nu \Gamma b_\nu$ یک حلقه اول است نتیجه می گیریم $b_\nu c = 0$. بنابراین $c = b_\nu c + (g - b_\nu)c = (g - b_\nu)c = g - b_\nu$. واضح است که $g - b_\nu \in S_l(\Gamma)$. پس داریم $g - b_\nu \in S_l(R) \cap S_r(R)$. در نتیجه b_ν در Γ مرکزی است. لذا برای هر $j < n$ ، $b_j \Gamma b_\nu = b_j R b_\nu = 0$. بنابراین $b_\nu \in S_l(R)$.

حال فرض کنید $h = \sum_{i=\nu}^{n} b_i$ و $\Lambda = hRh$. لذا $h \in S_r(R)$ و Λ یک حلقه شبه بئر است و یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ مانند $\{b_\nu, \dots, b_n\}$ دارد. در نتیجه $d \in S_l(\Lambda)$ وجود دارد به طوری که $r_\Lambda(I) = d\Lambda$. پس $(h - b_\nu)\Lambda \subseteq d\Lambda$. چون $db_\nu \in r_{b_\nu \Lambda b_\nu}(I)$ و نیز از اینکه $b_\nu \Lambda b_\nu = b_\nu R b_\nu$ یک حلقه اول است نتیجه می گیریم که $db_\nu = 0$. لذا $d = db_\nu + d(h - b_\nu) = d(h - b_\nu) = h - b_\nu$. از طرفی داریم $h - b_\nu \in S_r(\Lambda)$. پس داریم $h - b_\nu \in S_l(\Lambda) \cap S_r(\Lambda)$. در نتیجه b_ν در Λ مرکزی است. لذا برای هر $j > \nu$ ، $b_\nu \Lambda b_j = b_\nu R b_j = 0$. داریم $b_\nu \in S_r(R)$. در نتیجه $b_\nu \in S_l(R) \cap S_r(R)$. بنابراین b_ν در R مرکزی است.

۴-۳۷ قضیه: فرض کنید R یک حلقه شبه بئر اصلی راست باشد. در این صورت $T\dim(R) = n$ اگر و فقط اگر R دقیقا n ایده ال اول مینیمال داشته باشد.

برهان: فرض کنید R یک حلقه شبه بئر اصلی راست باشد. اگر $T\dim(R) = n$ آنگاه طبق لم ۴-۳۳ ، R یک حلقه شبه بئر است. در نتیجه بنابر قضیه ۴-۳۶ ، R دقیقا n ایده ال اول مینیمال دارد.

بعکس ، فرض کنید R دقیقا n ایده ال اول مینیمال داشته باشد. استقرا روی n را به کار می بریم.

فرض کنید $n=۱$. اگر $T\dim(R)\neq ۱$ آنگاه R تقلیل یافته نیم مرکزی نیست. پس خودتوان $\circ\neq b\in S_l(R)$ وجود دارد به طوری که $b\neq ۱$. لذا حلقه های bRb و $(۱-b)R(۱-b)$ نیز هر کدام حداقل یک ایده ال ماکزیمال (و لذا اول) دارند. در نتیجه R حداقل ۲ ایده ال اول مینیمال دارد که متناقض با فرض مساله است. بنابراین $T\dim(R)=۱$.

فرض کنید $n>۱$ باشد و اگر A یک حلقه شبه بئر اصلی راست با دقیقا k ایده ال اول مینیمال برای $k<n$ باشد آنگاه $T\dim(A)=k$. داریم $T\dim(R)\geq n$. چون R تقلیل یافته نیم مرکزی نیست لذا خودتوان $\circ\neq d\in S_l(R)$ وجود دارد به طوری که $d\neq ۱$. چون شبه بئر اصلی راست بودن یک خاصیت موریتا پایا (خاصیت موریتا پایا برای حلقه R یعنی زیر حلقه هایی به فرم $e\mathrm{Re}$ که e یک خودتوان از R است و $Mat_n(R)$ نیز همان خاصیت را داشته باشند.) است لذا حلقه های dRd و $(۱-d)R(۱-d)$ نیز شبه بئر اصلی راست هستند. پس dRd و $(۱-d)R(۱-d)$ به ترتیب $k_۱$ و $k_۲$ ایده ال اول مینیمال دارند به طوری که $k_۱,k_۲\geq ۱$ و $k_۱+k_۲=n$. بنابراین $T\dim(dRd)+T\dim((۱-d)R(۱-d))=k_۱+k_۲=n$. حال با استفاده از گزاره ۴-۳۱ نتیجه می گیریم $T\dim(R)=n$. بنابراین برهان کامل است. ■

شرط شبه بئر اصلی راست در گزاره قبل قابل حذف نیست. در مثال ۲-۳۵ چون ۰ و ۱ تنها خودتوان های R هستند لذا $T\dim(R)=۱$ ، اما R بیش از یک ایده ال اول مینیمال دارد.

۴-۳۸ نتیجه: خاصیت PWP یک خاصیت موریتا پایا است.

برهان: فرض کنید R و S حلقه های معادل موریتا باشند. فرض کنید که R یک حلقه PWP باشد و $T\dim(R)=n$. در نتیجه R یک حلقه شبه بئر و لذا شبه بئر اصلی است و $T\dim(R)=n$. پس طبق قضیه قبل R دقیقا n ایده ال اول مینیمال دارد. حال چون خاصیت شبه بئر اصلی راست یک خاصیت موریتا پایا است لذا S نیز شبه بئر اصلی راست است. از طرفی چون R و S حلقه های

معادل موریتا هستند لذا شبکه ایده ال های آنها یکریخت است. بنابراین ایده ال های اول R در تناظر با ایده ال های اول S هستند. لذا S نیز دقیقا n ایده ال اول مینیمال دارد. پس S یک حلقه شبه بئر اصلی راست با دقیقا n ایده ال اول مینیمال است. لذا از قضیه قبل داریم $T\dim(S)=n$. پس S یک حلقه شبه بئر اصلی راست است و $T\dim(S)=n$. لذا از لم ۴-۳۳ نتیجه می گیریم که S نیز شبه بئر است. در نتیجه S یک حلقه شبه بئر است و $T\dim(S)=n$. بنابراین S نیز یک حلقه PWP است. ■

۴-۳۹ نتیجه: شرایط زیر معادلند:

(۱) R یک حلقه PWP نیم اول است.

(۲) R یک حلقه شبه بئر اصلی راست نیم اول با فقط تعداد متناهی ایده ال اول مینیمال است.

(۳) R یک مجموع مستقیم متناهی از حلقه های اول است.

بویژه R یک حلقه دو منظم با $T\dim(R)<\infty$ است اگر و فقط اگر یک مجموع مستقیم متناهی از حلقه های ساده باشد.

برهان: (۱)$\leftarrow$ (۲) چون R یک حلقه PWP است لذا شبه بئر و از بعد مثلثی متناهی است یعنی یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ دارد لذا شبه بئر اصلی راست است. پس طبق قضیه 4-۳۳ حلقه R دقیقا n ایده ال اول مینیمال دارد.

(۲)$\leftarrow$(۱) فرض کنید R یک حلقه شبه بئر اصلی راست با فقط تعداد متناهی ایده ال اول مینیمال باشد، لذا طبق قضیه ۴-۳۳ یک حلقه شبه بئر اصلی راست است و $T\dim(R)<\infty$. پس R یک حلقه شبه بئر است و $T\dim(R)<\infty$. لذا طبق قضیه ۴-۳۶ به صورت مجموع مستقیمی از حلقه های اول است.

(۳)$\leftarrow$(۱) فرض کنید I یک ایده ال از R باشد به طوری که $I^{۲}=۰$. لذا یک خودتوان مرکزی e وجود دارد به طوری که $r(I)=eR$. از طرفی $I\subseteq r(I)$. لذا $I=eI=Ie=۰$. در نتیجه R نیم اول است.

(۱)$\leftarrow$(۳) چون R نیم اول است لذا با یک مجموع مستقیم متناهی از حلقه های اول برابر است. همچنین هر حلقه دو منظم یک حلقه شبه بئر اصلی راست است. لذا نتیجه از توضیحات داده شده بدست می آید.■

فصل پنجم

کاربردهایی برای توسیع های حلقه

در این فصل برای برخی از توسیع های یک حلقه ، نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته تعیین می کنیم و نیز بعد مثلثی را برای این توسیع ها بیان می کنیم. همچنین معیاری بـرای داشـتن خاصـیت PWP برای برخی توسیع های یک حلقه ارائه می دهیم. در انتهای این فصـل تعـدادی مسـاله تحـت عنوان مسائل باز آورده شده که می تواند برای علاقه مندان به این موضوع جالب باشد.

۵-۱ تعریف: فرض کنید B یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ حلقه R و Γ توسیعی از R باشد.

(الف) گوئیم Γ *به طور B- مثلثی متصل*[۱] با R است اگر $b \in B$ و $\circ \neq c \in S_l(b\Gamma b)$ آنگاه خودتوان $\circ \neq c_\circ \in S_l(bRb)$ وجود داشته باشد به طوری که $c_\circ\Gamma \subseteq c\Gamma$.

(ب) گوییم Γ *به طور B- مثلثی سازگار*[۲] با R است اگر B یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ Γ باشد.

اگر Γ برای هر مجموعه B از خودتوان های مثلثی چپ حلقه R ، $B-$مثلثی متصل ($B-$مثلثی سازگار) با R باشد گوئیم Γ *مثلثی متصل*[۱] (*مثلثی سازگار*[۲]) با R است.

---

[۱] - B-triangularly linked

[۲] - B-triangularly compatible

۵-۲ تعریف: گوئیم $b \in R$ یک *خودتوان مثلثی*[۳] از R است اگر b عضوی از یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ R باشد.

۵-۳ گزاره: فرض کنید Γ توسیعی از R و $B=\{b_1,..b_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ R باشد.

(۱) فرض کنید Γ به عنوان یک R-مدول توسط مجموعه T تولید شود. اگر برای هر $b \in B$ و برای هر $t \in T$ ، $tb = btb$ آنگاه Γ ، B-مثلثی سازگار با R است. به ویژه اگر Γ یک توسیع مرکزی از R باشد آنگاه Γ سازگار مثلثی با R است.

(۲) اگر Γ هم B-مثلثی پیوسته و هم B-مثلثی سازگار با R و B در R کامل باشد آنگاه B در Γ نیز کامل است.

(۳) اگر Γ هم مثلثی پیوسته و هم مثلثی سازگار با R باشد آنگاه $T\dim(R)=T\dim(\Gamma)$.

برهان:(۱) واضح است که $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$ و $b_1 \in S_l(\Gamma)$. برای هر $1 \le k \le n-1$ با فرض $c_k = 1-\sum_{i=1}^{k} b_i$ داریم $b_{k+1} \in S_l(c_k R c_k)$. باید نشان دهیم که $b_{k+1} \in S_l(c_k \Gamma c_k)$. فرض کنید $\alpha \in \Gamma$. در نتیجه $a_j \in R$ و $t_j \in T$ وجود دارند به طوری که $\alpha = \sum_{j\in J} a_j t_j$ که در آن J یک مجموعه متناهی است.

پس

$$c_k \alpha c_k b_{k+1} = c_k \alpha b_{k+1} = c_k\left(\sum_{j\in J} a_j t_j b_{k+1}\right) b_{k+1} = \sum_{j\in J}\left(c_k a_j b_{k+1} t_j b_{k+1}\right) b_{k+1}$$

$$= \sum_{j\in J}\left(b_{k+1} c_k a_j b_{k+1} t_j b_{k+1}\right) b_{k+1} = b_{k+1} c_k\left(\sum_{j\in J} a_j t_j b_{k+1}\right) b_{k+1}$$

---

۱ - triangularly linked

۲ - triangularly compatible

۳ - triangulating idempotent

$$=b_{k+1}c_k\left(\sum_{j\in J}a_jt_j\right)b_{k+1}=b_{k+1}c_k\alpha b_{k+1}=b_{k+1}c_k\alpha c_kb_{k+1}$$

بنابراین B یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ Γ است.

(۲) بنابر فرض B یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ Γ است. فرض کنید $b\in B$ باشد و $0\neq c\in S_l(b\Gamma b)$. پس $0\neq c_0\in S_l(bRb)$ وجود دارد به طوری که $c_0\Gamma\subseteq c\Gamma$. چون bRb تقلیل یافته نیم مرکزی در R است لذا $c_0=b$. پس $c=cb=cc_0=c_0=b$. در نتیجه b در Γ تقلیل یافته نیم مرکزی است. بنابراین B یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ Γ است.

(۳) اگر $T\dim(\Gamma)=\infty$ باشد آنگاه بنابر قسمت (۲) ، $T\dim(R)=\infty$. پس فرض کنید $T\dim(\Gamma)=n<\infty$. اگر $T\dim(R)>n$ آنگاه یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ B از R وجود دارد به طوری که $|B|>n$. B یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ Γ نیز هست. طبق گزاره ۴-۳۱ ، $T\dim(\Gamma)\geq|B|>n$ که یک تناقض است. لذا $T\dim(R)\leq n$. اگر $T\dim(R)<n$ آنگاه مجموعه کامل B_1 از خودتوان های مثلثی چپ R وجود دارد به طوری که $|B_1|<n$. در این حالت نیز B_1 یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ Γ است و این با یکتا بودن بعد مثلثی در تناقض است. در نتیجه $T\dim(R)=n$.■

۴-۵ قضیه: فرض کنید X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجایی ، σ یک همریختی حلقه ای روی R و G یک منوئید باشد. در این صورت توسیع های زیر مثلثی متصل و مثلثی سازگار با R هستند و لذا همان بعد مثلثی R را دارند.

(۱) $R[G]$ که G یک $u.p$-منوئید و R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است.

(۲) $R[G]$ که G یک منوئید آزاد است.

(۳) $R[X]$.

(۴) $R[[X]]$.

(۵) $R[x,x^{-1}]$.

(۶) $R[[x,x^{-1}]]$.

(۷) $R[x;\sigma]$ که σ یک همریختی از R است به طوری که برای هر خودتوان مثلثی چپ $b\in R$ ، $\sigma(bR)\subseteq bR$.

(۸) $R[[x;\sigma]]$ که σ یک همریختی از R است به طوری که برای هر خودتوان مثلثی چپ $b\in R$ ، $\sigma(bR)\subseteq bR$.

(۹) $Mat_n(R)$.

برهان: فرض کنید T با مجموعه G یا مجموعه {همه ضرب های متناهی از عناصر X } یا مجموعه { x^k | k یک عدد صحیح است } برابر باشد. در این صورت برای موارد (۱) تا (۸) برای هر $t\in T$ و برای هر خودتوان مثلثی $b\in R$ داریم $tb=btb$. با استفاده از گزاره ۵-۳(۱) و برهان آن نتیجه می شود که توسیع های موارد (۱) تا (۸) مثلثی سازگار با R هستند. بعلاوه موارد (۱) تا (۳) و (۵) و (۷) توسیع های شبه نرمالگر چپ از R هستند.

(۹): فرض کنید $B=\{b_1,...,b_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ R باشد و $\Gamma=Mat_n(R)$. نشان می دهیم B یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ Γ نیز هست . قرار دهید

$$E_1=\begin{pmatrix} b_1 & \circ & . & . & . & \circ \\ \circ & b_1 & \circ & . & . & \circ \\ . & \circ & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & \circ \\ \circ & . & . & . & \circ & b_1 \end{pmatrix} \text{ ، . . . و } E_n=\begin{pmatrix} b_n & \circ & . & . & . & \circ \\ \circ & b_n & \circ & . & . & \circ \\ . & \circ & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & \circ \\ \circ & . & . & . & \circ & b_n \end{pmatrix}$$

. نشان می دهیم $\{E_1,...,E_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های مثلثی چپ Γ است. واضح است که $\sum_{i=1}^{n}E_i=1_M$. فرض کنید $x\in\Gamma$. در نتیجه $E_1xE_1=(b_1.1_M)x(b_1.1_M)=1_M.b_1xb_1.1_m=(1_M)x(b_1.1_M)=x.E_1$. پس $E_1\in S_l(\Gamma)$. حال نشان می دهیم $E_{k+1}\in S_l(c_k\Gamma c_k)$ که $c_k=1_M-(E_1+...+E_k)$ و

$1 \le k \le n-1$. فرض کنیم $\alpha \in \Gamma$. چون $c_k \in S_r(\Gamma)$ لذا با فرض $x = 1-(b_1+...+b_k)$ نتیجه می گیریم:

$$c_k \alpha c_k E_{k+1} = c_k \alpha E_{k+1} = (c_k \alpha E_{k+1}) E_{k+1} = (1-(b_1+...+b_k)).1_M \alpha E_{k+1} E_{k+1}$$
$$= (x.1_M)\alpha(b_{k+1}.1_M)(b_{k+1}.1_M) = (x.b_{k+1}.1_M).\alpha(b_{k+1}.1_M)(b_{k+1}.1_M)$$
$$= (b_{k+1} x b_{k+1}.1_M)\alpha(b_{k+1}.1_M)(b_{k+1}.1_M)$$
$$= b_{k+1}(x.1_M)\alpha(b_{k+1}.1_M) = (b_{k+1}.1_M)(x.1_M)\alpha(b_{k+1}.1_M)$$
$$= E_{k+1}(x.1_M)\alpha(x.1_M)E_{k+1} = E_{k+1} c_k \alpha c_k E_{k+1}$$

بنابراین نتیجه حاصل می شود .

(۱) و (۲): فرض کنید $p \in R[G]$ و p_0 ضریب μ ،عضو همانی G، باشد. فرض کنید b یک خودتوان مثلثی از R باشد و $0 \ne e \in S_l(bR[G]b)$. در نتیجه $bR[G]b = bRb[G]$. اگر R یک حلقه شبه بئر اصلی راست باشد آنگاه bRb نیز شبه بئر اصلی راست است. از قضیه ۵-۲ (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $0 \ne e_0 \in S_l(bRb)$ ، $e_0 e = e$ و $ee_0 = e_0$. بنابراین $e_0 R[G] = eR[G]$. در نتیجه $R[G]$ مثلثی متصل با R است.

(۳) تا (۶): برهان این قسمت مشابه قسمت (۱) است. فرض کنیم $p \in R[X]$ یا $p \in R[[X]]$ یا $p \in R[[x,x^{-1}]]$ و p_0 جمله ثابت p باشد. با استفاده از قضایای ۳-۴ و ۳-۵(۳) نتیجه حاصل است.

(۷) و (۸): فرض کنید $\Gamma = R[x;\sigma]$ و b یک خودتوان مثلثی چپ از R باشد و $0 \ne e \in S_l(b\Gamma b)$. فرض کنید $e = e_0 + e_1 x + ... + e_n x^n$. لذا $e_0 = be_0 b$ ، $e_1 = be_1$ ، ... و $e_n = be_n$. با یک تغییر جزئی در برهان قضیه ۳-۴(۱) ادعا می کنیم $e_0 \in S_l(bRb)$ و $e_0\Gamma = e\Gamma$. برای این منظور فرض کنید $bab \in bRb$ باشد که $a \in R$. پس $babe = ebabe$. لذا برای هر $bab \in bRb$ و برای هر $k = 0,1,...,n$ داریم $\sum_{m=0}^{k} e_m \sigma^m(babe_{k-m}) = babe_k$. برای $k = 0$ و برای هر $bab \in bRb$ داریم $e_0 babe_0 = babe_0$. لذا $e_0 \in S_l(bRb)$. در حالت $k = 1$ اگر در معادله به جای a از e_0 استفاده کنیم آنگاه $e_0 be_0 be_1 + e_1\sigma(be_0 be_0) = be_0 be_1$. از اینکه $be_0 b = e_0$ و

$be_1 = e_1$ نتیجه می شود $e_\circ e_1 + e_1\sigma(e_\circ) = e_\circ e_1$ و لذا $e_1\sigma(e_\circ) = \circ$. اگر در حالت $k=1$ در معادله $a=1$ در نظر گرفته شود آنگاه داریم $e_\circ e_1 + e_1\sigma(e_\circ) = be_1 = e_1$. حال از اینکه $e_1\sigma(e_\circ) = \circ$ نتیجه می شود که $e_\circ e_1 = e_1$. با ادامه این روند و با استدلالی مشابه برهان قضیه ۳-۴(۱) نتیجه می گیریم $e_\circ e = e$ و $ee_\circ = e_\circ$. در نتیجه $\circ \neq e_\circ \in S_l(bRb)$ و $e_\circ\Gamma = e\Gamma$. بنابراین $R[x;\sigma]$ مثلثی متصل با R است. برای حالت $R[[x;\sigma]]$ به صورت مشابه اثبات می شود.

(۹): R را با $\bar{R} = R.1_M$ یکسان در نظر بگیرید که 1_M عضو همانی $Mat_n(R)$ است. برای $p = (p_{ij}) \in Mat_n(R)$ قرار دهید $p_\circ = p_{11}.1_M$. فرض کنید b یک خود توان مثلثی از R باشد و $\circ \neq e \in S_l(Mat_n(R))$. داریم $(b.1_M)Mat_n(R)(b.1) = Mat_n(bRb)$. از قضیه ۳-۷ نتیجه می گیریم $\circ \neq e_\circ \in S_l\left(b\bar{R}b\right)$ ، $e_\circ e = e$ و $ee_\circ = e_\circ$. در نتیجه $e_\circ Mat_n(R) = eMat_n(R)$. بنابراین $Mat_n(R)$ مثلثی متصل با R است. ■

از گزاره ۵-۳ و برهان قضیه ۵-۴ (۷) و (۸) نتیجه می گیریم که اگر B یک مجموعه (کامل) از خودتوان های مثلثی چپ R باشد به طوری که $\sigma(bR) \subseteq bR$ آنگاه B یک مجموعه (کامل) از خودتوان های مثلثی چپ $R[x;\sigma]$ و $R[[x;b]]$ است.

۵-۵ لم ([۳۳] - لم ۱): گزاره های زیر معادلند:

(۱) حلقه R هیچ مجموعه نامتناهی از خودتوان های متعامد ندارد.

(۲) ایده ال های راست (چپ) به فرم eR (Re) که e یک خودتوان است در شرط زنجیر افزایشی و در شرط زنجیر کاهشی صدق می کنند.

۵-۶ قضیه: فرض کنید R یک حلقه باشد به طوری که هر ایده ال راست اصلی آن پروژکتیو باشد و هیچ مجموعه نامتناهی از خودتوان های متعامد نداشته باشد. دراین صورت هر پوچساز راست و هر پوچساز چپ توسط یک عنصر خودتوان تولید می شود. بویژه هر ایده ال چپ اصلی آن پروژکتیو است.

برهان: فرض کنید $S \subseteq R$ و $(\circ) \neq T = r_R(S)$. اگر $s \in S$ آنگاه $T \subseteq r_R(S)$. لذا $T \subseteq hR$ که h یک خودتوان است. حال فرض کنید L یک پوچساز چپ دلخواه باشد. لذا $r_R(L) \subseteq gR$ که g یک خودتوان است. اما در این صورت $L = l_R(r_R(L)) \supseteq l_R(gR) = R(\text{۱} - g)$. در نتیجه هر پوچساز چپ L ، شامل یک خودتوان غیر بدیهی است. با استفاده از لم قبل می توانیم خودتوان $e \in L$ را به طوری انتخاب کنیم که $l_R(e)$ در بین پوچساز های چپ خودتوان های L ، مینیمال باشد. ادعا می کنیم $l_R(e) \bigcap L = (\circ)$. فرض کنید این طور نباشد. پس $l_R(e) \bigcap L \neq (\circ)$ و این یک پوچساز چپ است که شامل یک خودتوان ناصفر f می باشد. قرار دهید $e^* = e + f - ef$. عنصر e^* یک خودتوان در L است. چون $e^* e = e$ پس $e^* \neq \circ$ و $l_R(e^*) \subseteq l_R(e)$. از طرفی داریم $fe = \circ$ و $fe^* = f \neq \circ$. در نتیجه $l_R(e^*) \not\subset l_R(e)$ که با مینیمال بودن $l_R(e)$ تناقض دارد. بنابراین $l_R(e) \bigcap L = (\circ)$. حال فرض کنید $x \in L$. پس $x - xe \in L$ و $(x - xe)e = \circ$. در نتیجه $x - xe = \circ$ و $L = \mathrm{Re}$. اگر K یک پوچساز راست باشد آنگاه $l_R(K) = \mathrm{Re}$ که e یک خودتوان است. اما در این صورت $K = r_R(l_R(K)) = (\text{۱} - e)R$. ■

با استفاده از قضیه ۵-۴ و نتایج قبل از آن نشان می دهیم که اگر R یک حلقه PWP باشد آنگاه بسیاری از توسیع های R نیز PWP است و بنابراین یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل دارند که هر حلقه روی قطر اصلی آن ، R_i ، یک حلقه اول است. به علاوه از قضیه ۵-۳(۲) نتیجه می گیریم که یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ R می تواند برای تعیین نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل برای توسیع های R به کار رود. هر حلقه موروثی چپ ، PP چپ است و اگر هیچ مجموعه نامتناهی از خودتوان های دو به دو متعامد نداشته باشد آنگاه یک حلقه بئر است. کلاس حلقه های PWP شامل حلقه های شبه بئری که یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی دارند می باشد. همچنین هر حلقه PWD ' هر حلقه PP راست نیم کامل (بنابراین حلقه های ابتدایی موروثی (طبق قضیه ۵-۶)) و هر حلقه PP راست نوتری راست (بنابراین هر حلقه نوتری راست موروثی راست (طبق قضیه ۵-۶)) نیز PWP است.

۵-۷ لم : فرض کنید $\{e_1,...,e_n\}$ یک مجموعه از خودتوان های متعامد حلقه R باشد به طوری که $e_1+...+e_n=1$. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) اگر $e_ixe_j\operatorname{Re}_jye_k=\circ$ برای تعدادی $x,y\in R$ و تعدادی $1\le i,j,k\le n$، آنگاه $e_ixe_j=\circ$ یا $e_jye_k=\circ$.

(۲) اگر $xe_j\operatorname{Re}_jy=\circ$ برای تعدادی $x,y\in R$ و تعدادی $1\le j\le n$ ، آنگاه $xe_j=\circ$ یا $e_jy=\circ$.

(۳) اگر $Ke_jL=\circ$ برای برخی ایده ال های K و L از R و برخی $1\le j\le n$ ، آنگاه $Ke_j=\circ$ یا $e_jL=\circ$.

برهان : (۱) ← (۲) فرض کنید $xe_j\operatorname{Re}_jy=\circ$. اگر برای هر $i=1,...,n$ ، $e_ixe_j=\circ$ آنگاه $1xe_j=\sum e_ixe_j=\circ$. در نتیجه $xe_j=\circ$ و لذا برهان کامل است. پس فرض کنید برای برخی $m\in\{1,...,n\}$ ، $e_mxe_j\neq\circ$. لذا برای هر $k=1,...,n$ داریم $e_jye_k=\circ$. بنابراین $e_jy=e_jy1=(e_jy)\sum e_i=\circ$.

(۲) ← (۳) فرض کنید $Ke_jL=\circ$ و $e_jL\neq\circ$. فرض کنید $y\in L$ باشد به طوری که $e_jy\neq\circ$. لذا برای هر $x\in K$ ، $xe_j\operatorname{Re}_jy=\circ$. لذا برای هر $x\in K$ ، $xe_j=\circ$. بنابراین $Ke_j=\circ$.

(۳) ← (۱) فرض کنید $e_ixe_j\operatorname{Re}_jye_k=\circ$. از اینکه $e_jR=e_j\operatorname{Re}_jR$ نتیجه می گیریم $(\operatorname{Re}_ixe_jR)e_j(\operatorname{Re}_jye_kR)=\circ$. لذا $\operatorname{Re}_ixe_jR=\circ$ یا $\operatorname{Re}_jye_kR=\circ$. چون R یکدار است بنابراین $e_ixe_j=\circ$ یا $e_jye_k=\circ$. ■

۵-۸ قضیه : فرض کنید R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ داشته باشد و $T\dim(R)=n$. در ای ن صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) R یک حلقه شبه بئر است.

(۲) برای هر مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ مانند $\{b_1,...,b_n\}$ ، اگر $b_ixb_jRb_jyb_k=\circ$ برای برخی $x,y\in R$ و تعدادی $1\le i,j,k\le n$، آنگاه $b_ixb_j=\circ$ یا $b_jyb_k=\circ$.

(۳) یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ مانند $\{c_1,...,c_n\}$ وجود دارد به طـوری کـه اگـر $c_i x c_j R c_j y c_k = \circ$ بـــرای برخـــی $x, y \in R$ و تعـــدادی $1 \le i, j, k \le n$، آنگـــاه $c_i x c_j = \circ$ یـــا $c_j y c_k = \circ$.

(۴) برای هر مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ مانند $\{b_1,...,b_n\}$ ، اگر $x b_j R b_j y = \circ$ بـرای تعدادی $x, y \in R$ و تعدادی $1 \le j \le n$ ، آنگاه $x b_j = \circ$ یا $b_j y = \circ$.

(۵) برای هر مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چـپ ماننـد $\{b_1,...,b_n\}$ ، اگـر $K b_j L = \circ$ بـرای برخی ایده ال های K و L از R و برخی $1 \le j \le n$ ، آنگاه $K b_j = \circ$ یا $b_j L = \circ$.

برهـــــان : (۱) $\leftarrow$ (۲) فـــرض کنیـــد $r_R(b_i x b_j R) = fR$ کـــه در آن $f \in S_l(R)$. پـــس $b_j f b_j \in S_l(b_j R b_j)$. چون $\{b_1,...,b_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثـی چـپ اسـت لـذا $S_l(b_j R b_j) = \{\circ, b_j\}$. در نتیجـــه $b_j f b_j = \circ$ یـــا $b_j f b_j = b_j$. اگـــر $b_j f b_j = \circ$ انگـــاه چـــون $b_j y b_k \in r_R(b_i x b_j R) = fR$ لـــــــــــذا داریـــــــــــم $b_j y b_k = f b_j y b_k$. بنــــــــــــابراین $b_j y b_k = b_j b_j y b_k = b_j f b_j y b_k = \circ$. از سوی دیگر اگر $b_j f b_j = b_j$ آنگاه چون $b_i x b_j f = \circ$ نتیجه می گیریم که $\circ = b_i x b_j f b_j = b_i x b_j$.

(۲) $\leftarrow$ (۳) چون R یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی دارد لذا تیجه مورد نظر فورا بدسـت می آید.

(۳) $\leftarrow$ (۱) با یک محاسبه بدست می آید.

(۲) $\leftrightarrow$ (۴) $\leftrightarrow$ (۵) با استفاده از لم قبل نتیجه مورد نظر بدست می آید. ■

۵-۹ قضیه : فرض کنید R یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی داشته باشد. در این صـورت داریم:

(۱) R یک حلقه شبه بئر است.

(۲) برای هر مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مانند $\{e_1,...,e_n\}$ ، اگر $e_i x e_j Re_j y e_k = 0$ برای برخی $x,y \in R$ و تعدادی $1 \le i,j,k \le n$، آنگاه $e_i x e_j = 0$ یا $e_j y e_k = 0$.

(۳) یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مانند $\{f_1,...,f_m\}$ وجود دارد به طوری که اگر $f_i x f_j R f_j y f_k = 0$ برای برخی $x,y \in R$ و تعدادی $1 \le i,j,k \le m$، آنگاه $f_i x f_j = 0$ یا $f_j y f_k = 0$.

(۴) برای هر مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مانند $\{g_1,...,g_p\}$ ، اگر $x g_j R g_j y = 0$ برای تعدادی $x,y \in R$ و تعدادی $1 \le j \le p$ ، آنگاه $x g_j = 0$ یا $g_j y = 0$.

(۵) برای هر مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مانند $\{g_1,...,g_p\}$ ، اگر $K g_j L = 0$ برای برخی ایده ال های K و L از R و برخی $1 \le j \le p$ ، آنگاه $K g_j = 0$ یا $g_j L = 0$.

برهان : برای خودتوان $f \in S_l(R)$ و خودتوان ناصفر e داریم $efe \in S_l(eRe)$. بویژه اگر e یک خودتوان اولیه باشد آنگاه $S_l(eRe) = \{0,e\}$ و این نتیجه می دهد که $efe = 0$ یا $efe = e$. با استفاده از بحثی شبیه قضیه قبل برهان کامل می شود. ■

۵-۱۰ نتیجه : هر حلقه PWD یک حلقه شبه بئر است.

برهان : یک نتیجه مستقیم از قضیه قبل است.

۵-۱۱ لم: فرض کنید R یک حلقه PWD باشد و $0 \ne e \in S_l(R) \cup S_r(R)$. در این صورت eRe نیز یک حلقه PWD است.

اثبات: فرض کنید R یک حلقه PWD و $\{e_1,...,e_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی R باشد. چون $e \in S_l(R)$ لذا برای هر i ، $e_i e = e e_i e$ یک خودتوان است. از ابتدایی بودن e_i و اینکه $e_i e R \subseteq e_i R$ نتیجه می شود که $e_i e = 0$ یا $e_i e R = e_i R$. مجموعه $\{e_1,...,e_n\}$ را دوباره اندیس گذاری می کنیم به طوری که $J = \{1,...,r\}$ مجموعه همه اندیس هایی باشد که برای هر $i \in J$ ، $e_i e \ne 0$. در نتیجه $e = (e_1 + ... + e_n)e = e_1 e + ... + e_r e$ و

$eR = e_1 eR + ... + e_r eR = e_1 R + ... + e_r R$. بعلاوه $\{ee_1e, ..., ee_re\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی حلقه $e\mathrm{R}e$ است. نگاشت $\varphi : e\mathrm{R}e \to \lfloor e_i \mathrm{R} e_j \rfloor$ که با ضابطه $\varphi(exe) = \lfloor e_i x e_j \rfloor$ تعریف شود یک یکریختی است. در ادامه از E_{ij} برای ماتریس های یکه $r \times r$ استفاده می کنیم. حال فرض کنید $x \in (ee_ie)(e\mathrm{R}e)(ee_je)$ و $y \in (ee_je)(e\mathrm{R}e)(ee_ke)$ به طوری که برای هر $1 \le i, j, k \le r$ ، $xy = 0$. فرض کنید $x = (ee_ie)(eae)(ee_je)$ و $y = (ee_je)(ebe)(ee_ke)$. پس $0 = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = e_i ae_j be_k E_{ik}$ و لذا $(e_i ae_j)(e_j be_k) = 0$. چون R یک حلقه PWD است پس $e_i ae_j = 0$ یا $e_j be_k = 0$. لذا $\varphi(x) = 0$ یا $\varphi(y) = 0$. بنابراین $x = 0$ یا $y = 0$. در نتیجه $e\mathrm{R}e$ یک حلقه PWD است و $\{ee_1e, ..., ee_re\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی آن است. ■

۵-۱۲ نتیجه: فرض کنید R یک حلقه PWD باشد. در این صورت:

$$R \cong \begin{pmatrix} R_1 & R_{12} & . & . & . & R_{1n} \\ 0 & R_2 & . & . & . & R_{2n} \\ . & 0 & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & R_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

به طوری که هر R_i یک حلقه PWD اول و هر R_{ij} یک R_i-مدول چپ و R_j-مدول راست است.

بعلاوه

$$R_i \cong \begin{pmatrix} D_1 & . & . & . & D_{1n_i} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ D_{n_i 1} & . & . & . & D_{n_i} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

که هر D_j یک دامنه و هر D_{jk} به عنوان یک D_k - مدول راست یکریخت با یک ایده ال راست ناصفر در D_k و به عنوان یک D_j - مدول چپ یکریخت با یک ایده ال چپ ناصفر در D_j است. عدد صحیح n یکتاست و حلقه R_i در حد یکریختی منحصر به فرد است.

برهان: فرض کنید R یک حلقه PWD و $\{e_1,\ldots e_m\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی آن باشد. چون R شبه بئر است لذا طبق قضایای ۴-۳۶ عدد صحیح n یکتاست و حلقه R_i در حد یکریختی یکتاست. با استفاده از قضیه ۴-۲۳(۱) یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ مانند $\{b_1,\ldots,b_n\}$ وجود دارد. یکریختی (۱) از قضیه ۴-۳۶ نتیجه می شود که $R_i = b_i R b_i$ یک حلقه اول است. از لم قبل نتیجه می شود که حلقه های $R_1 = b_1 R b_1$ و $(1-b_1)R(1-b_1)$ نیز PWD هستند. چون $0 \neq b_2 \in S_l((1-b_1)R(1-b_1))$ ، لم قبل ایجاب می کند که $R_2 = b_2 R b_2 = b_2(1-b_1)R(1-b_1)b_2$ نیز PWD باشد. به همین صورت می توان نشان داد که برای هر $i=1,\ldots,n$ هر $R_i = b_i R b_i$ یک حلقه PWD است. در نتیجه برای R_i یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی مانند $\{c_1,\ldots,c_{n_i}\}$ وجود دارد به طوری که $c_j x c_k y c_q = 0$ ایجاب می کند که برای هر $x,y \in R_i$ ، $c_j x c_k = 0$ یا $c_k y c_q = 0$. بنابراین یکریختی (۲) فورا نتیجه می شود به طوری که D_{jk} با $c_j R_i c_k$ برابر است. در نتیجه هر D_j یک دامنه است. حال فرض کنید $0 \neq x \in c_j R_i c_k$. بنابراین $c_k R_i c_j$ به عنوان یک $c_j R_i c_j$-مدول راست یکریخت با ایده ال راست ناصفر $x c_k R_i c_j$ از $c_j R_i c_j$ است. ■

۵-۱۳ گزاره: فرض کنید Γ هر یک از توسیع های زیر از R باشد. در این صورت R شبه بئر است و $T\dim(R) = n$ اگر و فقط اگر Γ شبه بئر باشد و $T\dim(\Gamma) = n$.

(۱) $R[G]$ که G یک $u.p$-منوئید است.

(۲) $R[X]$ که X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجایی است.

(۳) $R[[X]]$ که X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجایی است.

(۴) $R[x, x^{-1}]$.

(۵) $R[[x, x^{-1}]]$.

(۶) $Mat_n(R)$.

برهان: برای حالت $R[x,x^{-1}]$ بررسی می کنیم. فرض کنید $T=R[x,x^{-1}]$ شبه بئر باشد. نشان می دهیم R نیز شبه بئر است. فرض کنید I یک ایده ال از R باشد. خودتوان $e\in S_l(T)$ وجود دارد به طوری که $r_T(IT)=eT$. از اینکه $Ie=0$ نتیجه می گیریم $Ie_0=0$ و لذا $e_0R\subseteq r_R(I)$ که e_0 جمله ثابت e است.

بعکس ، فرض کنید $b\in r_R(I)$. پس $b\in r_T(IT)$ و لذا $b=eb$. پس $b=e_0b\in e_0R$. در نتیجه $r_R(I)=e_0R$. از اینکه $e\in S_l(T)$ نتیجه می گیریم e_0 یک خودتوان از R است. بنابراین R یک حلقه شبه بئر است.

حال برای حالت $T=R[X]$ بررسی می کنیم. فرض کنید $T=R[X]$ شبه بئر باشد. نشان می دهیم R شبه بئر است. فرض کنید I یک ایده ال از R باشد. چون T شبه بئر است خودتوان $e\in T$ وجود دارد به طوری که $l_T(TI)=Te$. فرض کنید e_0 جمله ثابت e باشد. لذا $e_0^2=e_0$. از اینکه $eI=0$ نتیجه می شود $e_0I=0$. لذا $e_0\in l_R(I)$. بنابراین $e_0R\subseteq l_R(I)$.

بعکس ، فرض کنیم $b\in l_R(I)$. لذا $b\in l_T(TI)\bigcap R=Te\bigcap R$. پس برای برخی $h\in T$ داریم $b=he$. در نتیجه $b=e_0h_0$ که h_0 جمله ثابت h است و لذا $b\in \mathrm{Re}_0$. در نتیجه $l_R(I)\subseteq \mathrm{Re}_0$. بنابراین $l_R(I)=\mathrm{Re}_0$ و در نتیجه R یک حلقه شبه بئر است.

حال نشان می دهیم R شبه بئر است اگر و فقط اگر $Mat_n(R)$ شبه بئر باشد.

فرض کنید R شبه بئر و I ایده الی از $Mat_n(R)$ باشد. می دانیم I به فرم $Mat_n(K)$ است که K یک ایده ال از R است. پوچساز چپ I در $Mat_n(R)$ یک ایده ال مانند L به فرم $Mat_n(P)$ است که P یک ایده ال از R و P پوچساز چپ K در R است. در نتیجه $P=\mathrm{Re}$ ، $e=e^2$ و $L=Mat_n(R)E$ که $E=[e_{ij}]$ یک ماتریس $n\times n$ است و $e_{ii}=e$ و برای هر $i\neq j$ ، $e_{ij}=0$. بوضوح E یک خودتوان از $Mat_n(R)$ است.

بعکس ، فرض کنید $Mat_n(R)$ شبه بئر باشد. چون $E_{11}Mat_n(R)E_{11}$ شبه بئر است و $R\approx E_{11}M(R)E_{11}$ لذا R نیز شبه بئر است.

سایر موارد نیز به صورت مشابه اثبات می شوند.

حال چون تمام توسیع های بالا پیوسته مثلثی و سازگار مثلثی با R هستند لذا طبق گزاره ۵-۴ دارای بعد مثلثی یکسان هستند. ■

۵-۱۴ نتیجه: فرض کنید Γ مانند گزاره قبل باشد. در این صورت R یک حلقه اول است اگر و فقط اگر Γ یک حلقه اول باشد.

برهان: توجه داریم که R یک حلقه اول است اگر و فقط اگر شبه بئر و تقلیل یافته نیم مرکزی باشد. لذا نتیجه مورد نظر از گزاره قبل به دست می آید.■

فرض کنید F یک میدان و G یک گروه باشد. جبر گروهی شبه بئر $F[G]$ وجود دارد به طوری که $T\dim(F[G])>۱=T\dim(F)$. بنابراین شرط u.p- منوئید بودن در گزاره ۵-۱۳(۱) قابل حذف نیست.

۵-۱۵ مثال: فرض کنید C میدان اعداد مختلط و $S_۳$ گروه متقارن و $C[S_۳]$ جبر گروهی باشد. در این صورت $C[S_۳]$ یک حلقه آرتینی نیم ساده (بنابراین شبه بئر) است و $T\dim(C[S_۳])=۳$.

۵-۱۶ گزاره: حلقه R شبه بئر است و $T\dim(R)=m$ ، اگر و فقط اگر $T_n(R)$ شبه بئر باشد و $T\dim(T_n(R))=mn$.

برهان: ابتدا نشان می دهیم اگر R شبه بئر باشد آنگاه برای هر $n\geq ۲$ ، $T_n(R)$ شبه بئر است. فرض کنید I ایده الی از $T_n(R)$ باشد. زیر مجموعه $E_{ii}IE_{jj}$ را با I_{ij} نشان دهید. فرض کنید K پوچساز چپ I باشد لذا $KI_{ij}=۰$. قرار دهید $I_i=\sum_j I_{ij}$. هر I_{ij} می تواند به طور طبیعی توسط یک ایده ال از R تعیین شود. فرض کنید K_i پوچساز چپ I_i در R باشد. پس برای هر j ، $T_n(R)E_{ii}K_i+T_n(R)(1-E_{ii})$ پوچساز I_{ij} است. لذا $\sum_i T_n(R)E_{ii}K_i=K$. بنابراین اگر f_i یک خودتوان تولید کننده K_i باشد آنگاه $f=\sum_i E_{ii}f_i$ یک خودتوان تولید کننده K است. در نتیجه برای هر $n\geq ۲$ ، $T_n(R)$ شبه بئر است . حال برهان با استفاده از نتیجه ۴-۳۲ کامل می شود. ■

۵-۱۷ قضیه: فرض کنید R یک حلقه شبه بئر و $B=\{b_1,\ldots b_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی چپ آن باشد. اگر Γ هر یک از توسیع های زیر باشد آنگاه Γ شبه بئر است و B یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل برای Γ تعیین می کند که هر حلقه روی قطر اصلی آن ، R_i ، یک حلقه اول است:

(۱) $R[G]$ که G یک $u.p$-منوئید است.

(۲) $R[X]$ که X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجایی است.

(۳) $R[[X]]$ که X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجایی است.

(۴) $R[x,x^{-1}]$.

(۵) $R[[x,x^{-1}]]$.

(۶) $R[x;\alpha]$ که α یک خودریختی از R است به طوری که برای هر $b\in B$ ، $\alpha(bR)\subseteq bR$.

(۷) $R[[x;\alpha]]$ که α یک خود ریختی از R است به طوری که برای هر $b\in B$ ، $\alpha(bR)\subseteq bR$.

(۸) $T_n(R)$.

(۹) $Mat_n(R)$.

برهان: نتیجه ای از گزاره های۵-۳ ، ۵-۴ ، ۵-۱۳ و توضیحات برهان گزاره ۵-۱۶ است.■

به عنوان مثال برای حالت های (۶)و(۷) می توانید مثال ۳-۸ را ببینید.

در زیر مسائلی را مطرح می کنیم که می تواند برای علاقه مندان جالب باشد و می توانند تحقیقاتی را در این زمینه انجام دهند.

مسائل باز:

(۱) تعیین همه جبرهای گروهی شبه بئر.

(۲) تعیین همه جبر های گروهی منظم که شبه بئر اصلی (شبه بئر) هستند.

(۳) پیدا نمودن توسیع هایی از حلقه هایی که بعد مثلثی متناهی دارند به طوری که این توسیع ها نیز بعد مثلثی متناهی داشته باشند.

(۴) پیدا نمودن توسیع های دیگری از حلقه های PWP که این توسیع ها نیز PWP باشند.

فهرست راهنما

واژه نامه فارسی به انگلیسی

Ascending	chain	condition			A.C.C
A.C.C					A.C.C
	on ideals			روی ایده الها	
	on annihilators			روی پوچسازها	
Biregular					دو منظم
Dimension					بعد
	triangulating			مثلثی	
Baer					بئر
Annihilator					پوچساز
	right			چپ	
	left			راست	
Extension					توسیع
	quasi-normalizing			شبه نرمالگر	
	central			مرکزی	
	normalizing			نرمالگر	
Idempotent					خودتوان
	primitive			اولیه	
	trivial			بدیهی	
	orthogonal			متعامد	
	triangulating			مثلثی	
	central			مرکزی	
	semi central			نیم مرکزی	
		left	چپ		
		right	راست		
descending	chain	Condition			D.C.C
D.C.C					D.C.C
	on ideals			روی ایده الها	

	on annihilators			روی پوچسازها	
Quasi-Baer					شبه بئر
	principal			اصلی	
		left	چپ		
		right	راست		
Quasi-Frobnius					شبه فربنیوس
Condition					شرط
	chain			زنجیر	
		ascending	افزایشی		
		descending	کاهشی		
Element					عنصر
	torsion			تابدار	
	nilpotent			پوچ توان	
	invertible			وارون پذیر	
	trivial			همانی	
Theorem					قضیه
	Hilbert basis			پایه هیلبرت	
	Connell			کنل	
	Cohen			کوهن	
	Maschke			مشکه	
Hereditary					موروثی
Nonsingular					نامنفرد
Semi prime					نیم اول
Semi primitive					نیم ابتدایی
Semi simple					نیم ساده
Semi local					نیم موضعی
Semi hereditary					نیم موروثی

واژه نامه انگلیسی به فارسی

A.C.C			شرط زنجیرافزایشی
	on annihilators	روی پوچسازها	
	on ideals	روی ایده الها	
Annihilator			پوچساز
Baer			بئر
Biregular			دو منظم
Block decomposition			تجزیه بلوکی
Central			مرکزی
	idempotent	خودتوان	
	extension	توسیع	
Cohen			کوهن
	theorem	قضیه	
Connell			کنل
	theorem	قضیه	
D.C.C			شرط زنجیرنزولی
	on annihilators	روی پوچسازها	
	on ideals	روی ایده الها	
Dietzmann			دیتزمن
Dimension			بعد
	triangulating	مثلثی	
Hereditary			موروثی
Hilbert basis			پایه هیلبرت
	theorem	قضیه	
Idempotent			خودتوان
	central	مرکزی	
	triangulating	مثلثی	
	trivial	بدیهی	
Invertible			وارون پذیر
	element	عنصر	
Left			چپ
	semi central	نیم مرکزی	
	idempotent	خودتوان	

Maschke					مشکه
	theorem			قضیه	
Minimal					مینیمال
	ideal			ایده ال	
	prime			اول	
		ideal	ایده ال		
Monoid					منوئیدی
	ring			حلقه	
Nilpotent					پوچ توان
	element			عنصر	
	group			گروه	
	ideal			ایده ال	
Nonsingular					غیر منفرد
Normal					نرمال
	extension			توسیع	
	sub group			زیر گروه	
Normalizing					نرمالگر
	extension			توسیع	
Orthogonal					متعامد
	idempotents			خودتوان های	
Quasi-Frobenius					شبه فربنیوس
Quasi-Baer					شبه بئر
Quasi-normalizing					شبه نرمالگر
	extension			توسیع	
Right					راست
	annihilator			پوچساز	
	semi central			نیم مرکزی	
		idempotent	خودتوان		
Semi hereditary					نیم موروثی
Semi local					نیم موضعی
Semi perfect					نیم کامل
Semi primary					نیم اولیه
Semi prime					نیم اول
Semi primitive					نیم ابتدایی
Semi simple					نیم ساده
Sub monoid					زیر منوئید
	generated by			تولید شده با	
Sub ring					زیر حلقه

	generated by	تولید شده با	
Torsion			تابدار
	element	عنصر	
Torsion free			فارغ از تاب
	element	عنصر	
	group	گروه	
Trivial			بدیهی
	element	عنصر	
	idempotent	خودتوان	
Von Neumann regular			فون نیومن منظم

References

[1] E.P. Armendariz, A note on extension of Baer and p.p.-rings, J. Austral. Math. Soc. 18 (1974) 470-473.

[2] E.P. Armendariz, H.K. Koo, J.K. Park, Ore extension of von Neumann regular rings, Preprint.

[3] A.Behn, Polycyclic group rings whose principal ideals are projective, J. Algebra 232 (2000) 697-707.

[4] S.K. Berberian, Baer -Rings, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[5] G.F. Birkenmeier, Bear rings and quasi-continuous rings have a MDSN, Pacific J. Math. 97 (1981) 283-292.

[6] G.F.Birkenmeier, Idempotents and completely semiprime ideals, Comm. Algebra 11 (1983) 567-580.

[7] G.F. Birkenmeier, Decomposition of Baer-like rings, Acta Math. Hungar.59 (1992) 319-326.

[8] G.F. Birkenmeier, H.E. Heatherly, J.Y.Kim, J.K.Park, Traingular matrix representation, J. Algebra 230 (2000) 558-595.

[9] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim, J.K. Park, Quasi-Bear ring extension biregular rings, Bull. Austral. Math.Soc. 61 (2000) 39-52.

[10] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim, J.K. Park, A sheaf representation of quasi-Baer rings, J. Pure Appl. Algebra 146 (2000) 209-223.

[11] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim, J.K. Park, on quasi-Baer rings, in: D.V.Huynh, S.K. Jain, S.R. Lopez-Permouth (Eds.), Algebras and Its Application, in: Contemp. Math., Vol. 259, Amer. Math. Soc., Providence, 2000, pp. 67-92.

[12] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim, J.K. Park, On polynomial extension of principally quasi-Baer rings, Kyungpook Math. J. 40 (2000) 247-253.

[13] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim, J.K. Park, Principally quasi-Baer rings, Comm. Algebra 29 (2001) 639-660.

[14] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim, J.K. Park, Semi central reduced algebras, in: G.F. Birkenmeier, J.K. Park, Y.S. Park (Eds.), The International Symposium on Ring Theory, in: Trends in Math., Birkhäuser, Boston, 2001, pp. 67-84.
[15] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim, J.K. Park, on polynomial extension of Baer and quasi-Bear rings, J. Pure Appl. Algebra. 159 (2001) 25-42.
[16] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim, J.K. Park, Triangular matrix representations of semiprimary rings, J. Algebra and Its Appl. 1 (2002) 123-131.
[17] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim, J.K. Park, Prime ideals of principally quasi-Baer rings, Acta Math Hungar. 98 (2003) 217-225.
[18] K.A. Brown, The singular ideals of group rings, Quart. J. Math. Oxford 28 (1977) 41-60.
[19] V.P. Camillo, S polynomial rings, Proc. Amer. Math. Soc. 45(1974) 173-174.
[20] S. Chase, A generalization of the ring of triangular matrices, Nagoya Math. J. 18 (1961) 13-25.
[21] W.E. Clark, Twisted matrix units semigroup algebras, Duke Math. J. 34 (1967) 417-424.
[22] R. Gordon, L.W. small, Piecewise domains, J. Algebra 23 (1972) 553-564.
[23] N. Groenewald, A note on extensions of Baer and p.p.–rings, Publ. L'institute Math. 34 (1983) 71-72.
[24] Y. Hirano, on ordered monoid rings over a quasi-Baer ring, Comm. Algebra 29 (2001) 2089-2095.
[25] S. Jøndrup, p.p.-rings and finitely generated flat ideals, Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971) 431-435.
[26] I. Kaplansky, Rings of Operators, Benjamin, New York, 1965.
[27] J. Krempa, D. Niewieczerzal, Rings in which annihilators are ideals and their application to semigroup rings, Bull. Acad. Polon. Sci. Math and Astronom. Phys. 25 (1977) 851-856
[28] T.Y. Lam, Lectures on Modulees and Rings, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1998.
[29] J. Okninski, Semigroup Algebras, Marcel Dekker, New York, 1991.
[30] D.S. Passman, The Algebraic Structure of Group Rings, Wiley. New York, 1977.
[31] P. Pillay, On semihereditary noncommutative polynomial rings, Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980) 473-474.

[32] A. Polligher, A. Zaks, on Baer and quasi-Baer rings, Duke Math. J. 37 (1970) 127-138.

[33] L.W. Small, Semi-hereditary rings, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 656-658.

[34] M.K. Smith, Group algebras, J. Algebra 18 (1971) 477-499.

Abstract

In this paper we intruducing the concept of a set of left triangulating idempotents and investigate related condition between a ring and various ring extension. These idempotents determine a generalized tringular matix representation for a ring. Aslo we investigate the class of piecewise prime, PWP, rings which includes all piecewise domains (hence all right hereditary rings which are semiprimary or right Noetherian). For a PWP ring we determine a large class of ring extensions which have a generalized triangular matrix representation for which the diagonal rings are prime.

Keywords: Generalized triangular matrix representation; Ring extension; Centralizing extension; Normalizing extension; Quasi normalizing extenion; Piecewise domain; Piecewise prime ring; Principally quasi-Baer ring; Quasi-Baer ring; Semi central idempotent; Triangulating dimension; Triangulating idempotent; U.p.-monoid ring.