



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# موجک‌ها بر روی گراف‌ها با به کارگیری نظریه طیفی گراف

اسماعیل دکایی

استادان راهنما

دکتر نادر جعفری راد و دکتر علی اکبر عارفی جمال

آذر ۱۳۹۳



پروردگارا...

نه می توانم مویشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست های پینه بسته شان  
که شمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم  
و ثانیه های عمرم را در عصبای دست بودنتان بگذارم.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه ندانستن هاست...

تقدیم بہ مادر عزیزم

## سپاس‌گزاری

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند، و سلام و مورد بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است. به نشانه سپاس از الطافش، دستان مهربان‌ترین بندگانش، پدر و مادر عزیزم را بوسه می‌زنم.

اینک که این مرحله را پشت سر می‌گذارم، از تلاش‌ها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف و ارزشمند استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب دکتر نادر جعفری راد کمال تشکر را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

اسماعیل دکایی  
آذر ۱۳۹۳

## تعمدنامه

اینجانب اسماعیل ذکایی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان موجک‌ها بر روی گراف‌ها با به کارگیری نظریه طیفی گراف، تحت راهنمایی دکتر نادر جعفری راد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

اسماعیل ذکایی

آذر ۱۳۹۳

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

چ

- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

## چکیده

یک روش نوین برای ساخت تبدیل موجک روی توابع تعریف شده بر راس‌های گراف وزن‌دار متناهی دلخواه پیشنهاد می‌کنیم. روش کار ما بر پایه تعریف مقیاس‌گذار توسط شباهت گراف و دامنه فوریه است، یعنی تجزیه طیفی لاپلاسی گسسته گراف  $\mathcal{L}$  می‌باشد. هسته مولد موجک  $g$  و پارامتر مقیاس  $t$  مفروض است، عملگر موجک مقاس‌گذاری شده  $T_g^t = g(t\mathcal{L})$  را تعریف می‌کنیم. سپس موجک‌های طیفی گراف با موضعی‌سازی این عملگر به کمک اعمال آن روی یک تابع مشخصه به دست می‌آید. این روش یک تبدیل وارون پذیر تعریف می‌کند منوط به اینکه  $g$  شرط پذیرفتگی را دارا باشد. ویژگی‌های موضعی‌سازی موجک‌ها را در کران مقیاس‌های ریز مطالعه می‌نماییم. همچنین الگوریتم چندجمله‌ای تقریبی چبیشف سریعی برای محاسبه تبدیل معرفی می‌کنیم، که نیازی به قطری‌سازی  $\mathcal{L}$  ندارد. در پایان توانایی‌های این تبدیل را توسط مثال‌هایی از موجک‌ها روی گراف‌ها در حوزه‌های گوناگون به نمایش می‌گذاریم.

کلمات کلیدی: نظریه گراف، موجک‌ها، نظریه طیفی گراف، قاب‌های موجک ابرکامل



# فهرست مطالب

خ	فهرست مطالب
۱	پیش‌نیازها ۱
۱	۱.۱ فضای هیلبرت . . . . .
۴	۲.۱ عملگرها در فضای هیلبرت . . . . .
۷	۳.۱ آشنایی با عملگر خطی لاپلاسی یک-بعدي . . . . .
۹	۲ تبدیل فوريه
۱۰	۱.۲ آشنایی با تبدیل فوريه . . . . .
۱۱	۲.۲ ویژگی‌های بنیادین تبدیل فوريه . . . . .
۱۳	۳.۲ تبدیل فوريه در $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .
۱۴	۴.۲ تبدیل موجک . . . . .
۱۷	۵.۲ قاب‌ها در فضای هیلبرت . . . . .
۱۹	۳ نظریه گراف
۱۹	۱.۳ آشنایی با گراف . . . . .
۲۱	۲.۳ نظریه طیفی گراف . . . . .
۲۵	۴ تبدیل موجک گراف
۲۵	۱.۴ تبدیل موجک کلاسیک . . . . .
۲۸	۲.۴ تبدیل فوريه گراف . . . . .
۲۹	۳.۴ تبدیل موجک طیفی گراف . . . . .

۳۰	.....	موجک‌ها	۴.۴
۳۲	.....	تابع مقیاس‌گذار	۵.۴
۳۵		<b>ویژگی‌های تبدیل</b>	<b>۵</b>
۳۵	.....	وارون تبدیل موجک طیفی گراف پیوسته	۱.۵
۳۷	.....	موضعی‌سازی در کران مقیاس کوچک	۲.۵
۴۲	.....	قاب‌های موجک طیفی گراف	۳.۵
۴۳	.....	تقریب چندجمله‌ای و تبدیل موجک طیفی گراف سریع	۴.۵
۴۸	.....	محاسبه سریع الحاقی	۱.۴.۵
۵۰	.....	بازسازی	۵.۵
۵۳		<b>پیاده‌سازی و چند کاربرد</b>	<b>۶</b>
۵۳	.....	جزئیات طراحی تبدیل موجک طیفی گراف	۱.۶
۵۴	.....	کاربردها: گالری موجک‌های طیفی گراف	۲.۶
۵۶	.....	نتیجه‌گیری و کارهای آینده	۱.۲.۶
۶۳		<b>مراجع</b>	
۶۵		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۶۷		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	

# فصل ۱

## پیش‌نیازها

در این فصل با فضاهاى هیلبرت و عملگرهاى این فضاها آشنا می‌شویم که می‌توانید مباحث تکمیلی آن را در [۴] ببینید.

### ۱.۱ فضای هیلبرت

اگر  $p \geq 1$  عددی حقیقی و دلخواه باشد، فضای برداری همه تابع‌های مختلط مقدار انتگرال‌پذیر لبگ روی  $\mathbb{R}$  با  $L^p(\mathbb{R})$  نمایش داده می‌شود و به ازای هر  $f \in L^p(\mathbb{R})$  نرم  $f$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_p = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1.1.1)$$

در این جا با فضای  $L^1(\mathbb{R})$ ، فضای توابع انتگرال‌پذیر لبگ روی  $\mathbb{R}$  و فضای  $L^2(\mathbb{R})$ ، فضای توابع مربعی انتگرال‌پذیر روی  $\mathbb{R}$  سروکار داریم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ، پیچش<sup>۱</sup>  $f$  و  $g$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy. \quad (2.1.1)$$

پیچش دارای ویژگی جابجایی است پس می‌توان نوشت  $(f \star g) = (g \star f)$ .

---

<sup>۱</sup>Convolution

تعریف ۲.۱.۱ (دلتای دیراک). تابعی با ویژگی‌های زیر است

$$\begin{cases} \delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \end{cases} \quad (۳.۱.۱)$$

تعریف دیگر آن بر پایه این ایده است که اگر  $f$  تابعی پیوسته در نقطه  $x = a$  باشد آن‌گاه  $\delta(x)$  باید ویژگی زیر را داشته باشد

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (۴.۱.۱)$$

یا

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0). \quad (۴.۱.۱ ب)$$

تابع دلتای دیراک را تابع تکانه<sup>۲</sup> نیز گویند.

تعریف ۳.۱.۱. تکیه‌گاه تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  را با  $\text{supp}(f)$  نشان می‌دهند و  $\text{supp}(f) = \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}$ . تابع  $f$  تکیه‌گاه کراندار دارد هرگاه  $a, b$  عضو  $\mathbb{R}$  چنان وجود داشته باشند که  $\text{supp}(f) \subset (a, b)$ . هرگاه  $\text{supp}(f)$  فشرده باشد گوئیم  $f$  با تکیه‌گاه فشرده است.

تعریف ۴.۱.۱. تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  را هموار گوئیم هرگاه بی‌شمار بار مشتق‌پذیر بوده و مشتق‌های آن از هر مرتبه‌ای پیوسته باشند.

تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ،  $n$  بار پیوسته مشتق‌پذیر گفته می‌شود هرگاه  $n$  مشتق اول آن پیوسته باشد.

تعریف ۵.۱.۱. تابع حقیقی  $\|\cdot\|$  تعریف شده بر فضای برداری  $X$  را نُرم نامیم اگر در سه خاصیت زیر صدق کند:

آ. به ازای هر  $x \in X$ ،  $\|x\| \geq 0$ ، و  $\|x\| = 0$  اگر و فقط اگر  $x = 0$

ب. به ازای هر  $x$  و  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

پ. به ازای هر  $x, y \in X$  و  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

<sup>۲</sup>impulse

تعریف ۶.۱.۱. فضای برداری  $X$  (حقیقی یا مختلط) مجهز به تابع

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$$

یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود هرگاه برای هر  $x, y, z \in X$  و عددهای ثابت  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  داشته باشیم

$$\text{آ. } \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\text{ب. } \langle x, x \rangle = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0$$

$$\text{پ. } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\text{ت. } \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

دوتایی  $(X, \|\cdot\|)$  را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم.

مثال ۷.۱.۱. فضای تابعی پیوسته مختلط مقدار روی بازه  $[a, b]$  با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (5.1.1)$$

یک فضای ضرب داخلی است.

مثال ۸.۱.۱. فضای  $L^2(\mathbb{R})$  همه توابع مربعی انتگرال‌پذیر روی  $\mathbb{R}$  با ضرب داخلی (۵.۱.۱) یک فضای ضرب داخلی است.

تعریف ۹.۱.۱. فضای ضرب داخلی تام را فضای هیلبرت می‌نامند.

مثال ۱۰.۱.۱. فضاهای برداری  $\mathbb{R}^n$  و  $\mathbb{C}^n$  فضاهای هیلبرت هستند.

در  $\mathbb{C}^n$  ضرب داخلی به این صورت تعریف می‌شود  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ . ضرب داخلی در  $\mathbb{R}^n$  نیز همانند ضرب داخلی در  $\mathbb{C}^n$  تعریف می‌شود و در هر دو نرم القاء شده عبارتند از

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

از این رو فضاهای  $\mathbb{R}^n$  و  $\mathbb{C}^n$  تام و در نتیجه فضای هیلبرت می‌باشند.

مثال ۱۱.۱.۱. فضای تابعی  $L^2([a, b])$  با ضرب داخلی معرفی شده در (۵.۱.۱) یک فضای هیلبرت است.

## ۲.۱ عملگرها در فضای هیلبرت

در این بخش برخی از ویژگی‌های عملگرها در فضای هیلبرت را بررسی می‌کنیم.

**تعریف ۱.۲.۱.** عملگر  $T$  از فضای برداری  $X$  به فضای برداری  $Y$  که  $X$  و  $Y$  میدان‌های اسکالر یکسانی دارند عملگر خطی نامیده می‌شود هرگاه برای اسکالرهایی دلخواه  $\alpha$  و  $\beta$  و بردارهای  $x_1, x_2 \in X$  داشته باشیم

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2. \quad (1.2.1)$$

**مثال ۲.۲.۱.** در اینجا عملگر خطی  $T$  را روی  $\mathbb{C}^n$  بررسی می‌کنیم، فرض کنیم  $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  پایه استاندارد  $\mathbb{C}^n$  باشد، به طوری که

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

برای  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  تعریف کنید  $a_{ij} = \langle T e_j, e_i \rangle$  آن‌گاه برای عضو  $x \in \mathbb{C}^n$  داریم

$$T x = \sum_{j=1}^n a_j T e_j \quad (2.2.1)$$

و بنابراین

$$\langle T x, e_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle T e_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_j. \quad (3.2.1)$$

پس هر عملگر خطی  $T$  روی فضای  $\mathbb{C}^n$  با ماتریس  $n \times n$  معرفی می‌شود.

از سوی دیگر، برای هر ماتریس  $(a_{ij})_{n \times n}$  رابطه (۳.۲.۱)، یک عملگر روی  $\mathbb{C}^n$  تعریف می‌کند. بنابراین تناظری یک به یک میان عملگرها روی فضای برداری  $n$ -بعدی و ماتریس‌های  $n \times n$  داریم. **تعریف ۳.۲.۱.** عملگر  $T : X \rightarrow X$  کراندار نامیده می‌شود، هرگاه  $k$  ای وجود داشته باشد به طوری که برای هر  $x \in X$  داشته باشیم

$$\|T x\| \leq k \|x\|.$$

اگر  $T : x \rightarrow x$  کراندار باشد نرم آن به صورت  $\|T\| = \inf\{k \mid \|T x\| \leq k \|x\|, x \in X\}$  تعریف می‌شود. همچنین می‌توان ثابت کرد

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T x\|. \quad (4.2.1)$$

اگر  $T$  عملگر تعریف شده با ماتریس  $(a_{ij})$  در مثال (۲.۲.۱) باشد، آن‌گاه

$$\|T\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

این برای هر عملگر روی  $\mathbb{C}^n$  درست است، بنابراین هر عملگر روی فضای هیلبرت با بعد متناهی، کراندار است.

**تعریف ۴.۲.۱ (عملگر الحاقی).** اگر  $T$  عملگری کراندار و خطی بر روی فضای هیلبرت  $H$  باشد، آن‌گاه عملگر  $T^* : H \rightarrow H$  با ویژگی

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in H \quad (۵.۲.۱)$$

عملگر الحاقی نامیده می‌شود.

اگر  $T = T^*$  آن‌گاه  $T$  خود-الحاق نامیده می‌شود، یعنی  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ .

**تعریف ۵.۲.۱.** گوئیم عملگر  $T$  مثبت است هرگاه  $T$  خود-الحاق باشد و برای هر  $x \in H$  داشته باشیم  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ .

**تعریف ۶.۲.۱ (بردار ویژه).** فرض کنیم  $T$  عملگری روی فضای برداری  $X$  باشد. عدد مختلط  $\lambda$  مقدار ویژه  $T$  نامیده می‌شود هرگاه برداری ناصفر مانند  $u$  وجود داشته باشد به طوری که

$$Tu = \lambda u. \quad (۶.۲.۱)$$

هر برداری مانند  $u$  که در رابطه (۶.۲.۱) صدق کند، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه  $\lambda$ ی عملگر  $T$  نامیده می‌شود. اگر  $X$  فضای توابع باشد به بردارهای ویژه تابع ویژه نیز می‌گویند.

**قضیه ۷.۲.۱.** هر مقدار ویژه عملگر خود-الحاق روی فضای هیلبرت حقیقی است.

**برهان.** فرض کنیم  $\lambda$  مقدار ویژه عملگر خود-الحاق  $T$  باشد و  $u$  بردار ویژه ناصفر متناظر با مقدار ویژه  $\lambda$  باشد، آن‌گاه

$$\lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle Tu, u \rangle = \langle u, Tu \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle.$$

□

بنابراین  $\lambda = \bar{\lambda}$  زیرا  $\langle u, u \rangle > 0$ .

**قضیه ۸.۲.۱.** اگر  $T$  عملگری مثبت باشد آن‌گاه مقدارهای ویژه آن نامنفی‌اند.

## فصل ۱. پیش‌نیازها

برهان. فرض کنیم  $T$  عملگری مثبت باشد، و برای  $x \neq 0$  داشته باشیم  $Tx = \lambda x$  چون  $T$  مثبت است داریم

$$0 \leq \langle Tx, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2.$$

□

بنابراین  $0 \leq \lambda$ .

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید  $H$  یک فضای ضرب داخلی باشد،  $x$  و  $y$  از  $H$  را برهم عمود گوئیم هرگاه  $\langle x, y \rangle = 0$ .

قضیه ۱۰.۲.۱. بردارهای ویژه متناظر با مقدارهای ویژه متمایز عملگر خود-الحاق  $T$  روی فضای هیلبرت  $X$ ، برهم عمودند.

برهان. فرض کنیم  $\lambda_1, \lambda_2$  دو مقدار ویژه متمایز عملگر  $T$  باشند چون  $T$  خود الحاق است بنابه قضیه ۷.۲.۱ هر دو حقیقی‌اند. فرض کنیم برداری‌های ناصفر  $u$  و  $v$  وجود داشته باشند به طوری که

$$Tu = \lambda_1 u, \quad Tv = \lambda_2 v$$

حال داریم

$$\lambda_1 \langle u, v \rangle = \langle \lambda_1 u, v \rangle = \langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = \langle u, \lambda_2 v \rangle = \lambda_2 \langle u, v \rangle.$$

□

پس باید  $\langle u, v \rangle = 0$  زیرا  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  و این یعنی  $u$  و  $v$  برهم عمودند.

اگر  $X$  فضای توابع باشد آنگاه توابع ویژه متناظر با مقدارهای ویژه متمایز برهم عمودند، به عبارت دیگر

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx = 0. \quad (7.2.1)$$

قضیه ۱۱.۲.۱. فرض کنیم  $T$  عملگری خطی روی فضای ضرب داخلی  $X$  باشد و برای هر  $x, y$  در  $X$  داشته باشیم  $\langle Tx, y \rangle = 0$  آنگاه  $T = 0$ .

بنابه قضیه ۱۱.۲.۱ می‌توان گفت که اگر برای هر  $x, y$  در  $X$  داشته باشیم  $\langle T_1 x, y \rangle = \langle T_2 x, y \rangle$ ، آنگاه  $T_1 = T_2$ .



### ۳.۱ آشنایی با عملگر خطی لاپلاسی یک-بعدی

در این بخش به بررسی عملگر خطی لاپلاسی<sup>۳</sup> یک-بعدی می‌پردازیم. انگیزه ما از این کار شناسایی تبدیل فوریه بر پایه این عملگر است و به دنبال آن با یافتن شباهت‌هایی میان عملگر خطی لاپلاسی یک-بعدی و عملگر لاپلاسی گراف که در ادامه به آن خواهیم پرداخت راهی برای تعریف تبدیل فوریه گراف می‌یابیم.

**تعریف ۱.۳.۱** (عملگر خطی لاپلاسی). اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی حقیقی و دوبار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه  $\Delta\varphi = -\frac{d^2}{dx^2}\varphi$  را عملگر خطی لاپلاسی یک-بعدی گوئیم و با  $\Delta$  نشان می‌دهیم.

**قضیه ۲.۳.۱**. برای توابع دوبار مشتق‌پذیر  $f$  و  $g$  با تکیه‌گاه‌های فشرده عملگر لاپلاسی  $\Delta$  خود-الحاق است، یعنی  $\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle$ .

**برهان**. اگر  $x \rightarrow \pm\infty$  آن‌گاه  $g(x) \rightarrow 0$ ،  $f(x) \rightarrow 0$  زیرا توابع  $f$  و  $g$  با تکیه‌گاه‌های فشرده هستند اینک با دو بار انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= - \left[ \frac{d}{dx} f(x) g(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} f(x) \frac{d}{dx} \overline{g(x)} dx \\ &= \left[ f(x) \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d^2}{dx^2} \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Delta \overline{g(x)} dx \\ &= \langle f, \Delta g \rangle. \end{aligned}$$

□

**قضیه ۳.۳.۱**. عملگر  $\Delta$  روی فضای توابع دوبار مشتق‌پذیر با تکیه‌گاه فشرده مثبت است.

**برهان**. گیریم تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  دوبار مشتق‌پذیر با تکیه‌گاه فشرده باشد با انتگرال‌گیری جزء به جزء

---

<sup>۳</sup>Laplacian

داریم

$$\begin{aligned}
\langle \Delta f, f \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta f(x) \overline{f(x)} dx \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} f(x) \overline{f(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} f(x) \frac{d}{dx} \overline{f(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dx} f(x) \right|^2 dx \geq 0.
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۴.۳.۱. چون  $\Delta$  مثبت است از قضیه ۸.۲.۱ می‌توان گفت مقادیرهای ویژه عملگر  $\Delta$  حقیقی هستند.

گیریم  $f \neq 0$  تابع ویژه عملگر  $\Delta$  باشد. داریم

$$\lambda \langle f, f \rangle = \langle \lambda f, f \rangle = \langle \Delta f, f \rangle \geq 0 \quad (1.3.1)$$

از آن جایی که  $\langle f, f \rangle \neq 0$  پس

$$\lambda = \frac{\langle \Delta f, f \rangle}{\langle f, f \rangle} \geq 0 \quad (2.3.1)$$

و سرانجام  $\lambda = 0$  اگر و تنها اگر

$$\langle \Delta f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dx} f(x) \right|^2 dx = 0 \quad (3.3.1)$$

به طور معادل آن  $\lambda = 0$  اگر و تنها اگر  $f(x) = c$  (برای هر  $x$ ).

## فصل ۲

# تبدیل فوریه

در این بخش تبدیل‌های فوریه را در فضاها  $L^1(\mathbb{R})$  و  $L^2(\mathbb{R})$  و همچنین ویژگی‌های بنیادی آن‌ها را واکاوی می‌کنیم. سپس با قاب‌ها آشنا می‌شویم و سرانجام به معرفی تبدیل موجک می‌پردازیم. پیش از پرداختن به تبدیل فوریه عملگرهای انتقال<sup>۱</sup>، تلفیق<sup>۲</sup> و گسترش<sup>۳</sup> را معرفی می‌کنیم

$$T_a f(x) = f(x - a) \quad (\text{انتقال})$$

$$M_b f(x) = e^{ibx} f(x) \quad (\text{تلفیق})$$

$$D_c f(x) = \frac{1}{\sqrt{|c|}} f\left(\frac{x}{c}\right) \quad (\text{گسترش})$$

این عملگرها نرم  $L^2(\mathbb{R})$  را حفظ می‌کنند. برای مثال

$$\begin{aligned} \|D_c f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{|c|}} \left| f\left(\frac{x}{c}\right) \right| \right)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|c|} \left| f\left(\frac{x}{c}\right) \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

---

<sup>۱</sup>translation

<sup>۲</sup>modulation

<sup>۳</sup>dilation

## ۱.۲ آشنایی با تبدیل فوریه

فرض کنیم  $f$  تابع انتگرال‌پذیر لبگ روی  $\mathbb{R}$  باشد. چون  $\exp(-i\omega t)$  پیوسته و کراندار است بنابراین  $\exp(-i\omega t)f(t)$  برای هر  $\omega \in \mathbb{R}$  انتگرال‌پذیر موضعی است. همچنین برای هر  $\omega$  و  $t$  حقیقی،  $|\exp(-i\omega t)| \leq 1$ . بنابراین درباره انتگرال

$$\langle f, e^{i\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (1.1.2)$$

به روشنی می‌توان دید

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1 < \infty. \quad (2.1.2)$$

این نشان می‌دهد انتگرال (۱.۱.۲) برای هر  $\omega \in \mathbb{R}$  موجود است.

تعریف ۱.۱.۲ (تبدیل فوریه در  $L^1(\mathbb{R})$ ). فرض کنیم  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ، در این صورت تبدیل فوریه  $f(t)$  را چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{F}\{f\} = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (3.1.2)$$

از دیدگاه فیزیکی، انتگرال فوریه (۳.۱.۲) نوسان‌های  $f$  را در بسامد  $\omega$  اندازه‌گیری می‌کند.  $\hat{f}(\omega)$  طیف بسامدی سیگنال یا شکل موج  $f(t)$  نامیده می‌شود. همانگونه که  $f(t)$  شکل موج در دامنه زمان است هم ارز آن  $\hat{f}(\omega)$  شکل موج در دامنه بسامد می‌باشد.

مثال ۲.۱.۲ (تابع مشخصه). تابع  $\chi_\tau$  این چنین تعریف می‌شود

$$\chi_\tau(t) = \begin{cases} 1 & , -\tau < t < \tau \\ 0 & , \text{در غیر این صورت} \end{cases}. \quad (4.1.2)$$

تبدیل فوریه تابع مشخصه در زیر آمده است

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_\tau(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \chi_\tau(t) dt \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{i}{\omega} (\cos \omega t - i \sin \omega t) \Big|_{-\tau}^{\tau} \\ &= \left( \frac{2}{\omega} \right) \sin \omega \tau. \end{aligned}$$

می‌توان دید که  $\chi_\tau$  در  $L^1(\mathbb{R})$  قرار دارد ولی تبدیل فوریه آن  $\hat{\chi}_\tau$  در  $L^1(\mathbb{R})$  قرار ندارد. زیرا

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right| d\omega &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right| d\omega \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{k} \right| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin \omega| d\omega \\ &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{k} \right| = \infty. \end{aligned}$$

که این نشان می‌دهد  $\hat{\chi}_\tau$  در  $L^1(\mathbb{R})$  نیست.

## ۲.۲ ویژگی‌های بنیادین تبدیل فوریه

**قضیه ۱.۲.۲** (خطی بودن تبدیل فوریه). اگر  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  و  $\alpha, \beta$  عددهای ثابت مختلط باشند آن‌گاه

$$(\alpha f + \beta g)^\wedge(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega). \quad (۱.۲.۲)$$

**قضیه ۲.۲.۲**. اگر  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ، آن‌گاه داریم

$$\mathcal{F}\{T_a f(t)\} = M_{-a} \hat{f}(\omega), \quad (۲.۲.۲)$$

$$\mathcal{F}\{D_a f(t)\} = D_a \hat{f}(\omega), \quad (۳.۲.۲)$$

$$\mathcal{F}\{\overline{D_{-1} f(t)}\} = \overline{\hat{f}(\omega)}, \quad (۴.۲.۲)$$

$$\mathcal{F}\{M_a f(t)\} = T_a \hat{f}(\omega). \quad (۵.۲.۲)$$

**قضیه ۳.۲.۲**. اگر  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ، آن‌گاه  $\hat{f}$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.

برهان. برای هر  $\omega, h$  حقیقی داریم

$$\left| \hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} (e^{-iht} - 1) f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iht} - 1| |f(t)| dt \quad (۶.۲.۲)$$

از آن جایی که برای هر  $t$  حقیقی داریم

$$|e^{-iht} - 1| |f(t)| \leq 2 |f(t)|$$

و

$$\lim_{h \rightarrow 0} |e^{-iht} - 1| = 0$$

نتیجه می‌گیریم که اگر  $h \rightarrow 0$  آن‌گاه

$$|\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)| \rightarrow 0$$

□

از این رو  $\hat{f}$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته است.

**تعریف ۴.۲.۲** (وارون تبدیل فوریه). اگر  $f \in L^1(\mathbb{R})$  و تبدیل فوریه آن  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ، آن‌گاه وارون تبدیل فوریه  $\hat{f}(\omega)$  چنین تعریف می‌شود

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \hat{f}(\omega) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (7.2.2)$$

اگر  $f$  پیوسته باشد آن‌گاه (۷.۲.۲) برای هر  $t$  برقرار است.

**قضیه ۵.۲.۲** (قضیه پیچش). فرض کنید  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  آن‌گاه

$$\mathcal{F}\{(f \star g)(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \mathcal{F}\{g(t)\} = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \quad (8.2.2)$$

بطور معادل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) d\omega. \quad (9.2.2)$$

و یا

$$(f \star g)(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) \}. \quad (10.2.2)$$

### ۳.۲ تبدیل فوریه در $L^2(\mathbb{R})$

در این بخش به توسیع تبدیل فوریه بر روی فضای  $L^2(\mathbb{R})$  می‌پردازیم.

**قضیه ۱.۳.۲.** فرض کنیم  $f$  تابع پیوسته روی  $\mathbb{R}$  باشد که بیرون یک بازه کراندار صفر می‌شود، آنگاه  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  و

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2. \quad (1.3.2)$$

فضای همه تابع‌های پیوسته در  $\mathbb{R}$  با تکیه‌گاه فشرده چگال در  $L^2(\mathbb{R})$  هستند. قضیه ۱.۳.۲ نشان می‌دهد تبدیل فوریه نگاشتی پیوسته، از آن فضا، به فضای  $L^2(\mathbb{R})$  است. از آن جایی که این نگاشت، خطی است دارای توسیعی یکتا به نگاشتی از  $L^2(\mathbb{R})$  به توی خودش است. این توسیع را تبدیل فوریه در  $L^2(\mathbb{R})$  نامند.

**تعریف ۲.۳.۲** (تبدیل فوریه در  $L^2(\mathbb{R})$ ). اگر  $f \in L^2(\mathbb{R})$  و  $\{\phi_n\}$  دنباله‌ای از تابع‌های پیوسته با تکیه‌گاه فشرده همگرا به  $f$  در  $L^2(\mathbb{R})$  باشد، یعنی  $\|f - \phi_n\|_2 \rightarrow 0$  هنگامی که  $n \rightarrow \infty$  در این صورت تبدیل فوریه  $f$  چنین تعریف می‌شود

$$\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\phi}_n. \quad (2.3.2)$$

این حد نسبت به نرم  $L^2(\mathbb{R})$  گرفته می‌شود.

قضیه ۱.۳.۲ نشان می‌دهد که این حد وجود دارد و وابسته به دنباله ویژه‌ای که  $f$  را تقریب می‌زند نیست. باید یادآور شویم که همگرایی در نرم  $L^2(\mathbb{R})$  که همگرایی نقطه‌ای را نتیجه نمی‌دهد و بنابراین بر خلاف تبدیل فوریه تابع انتگرال‌پذیر، تبدیل فوریه تابع مربعی انتگرال‌پذیر بر روی یک نقطه تعریف نشده است. می‌توانیم ثابت کنیم  $\hat{f}$  تبدیل فوریه تابع  $f \in L^2(\mathbb{R})$  تقریباً همه جا روی  $\mathbb{R}$  تعریف می‌شود و  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ . از این رو نمی‌توانیم بگوییم که اگر  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  آنگاه تبدیل فوریه تعریف شده در (۳.۱.۲) و تبدیل فوریه (۲.۳.۲) یکسان هستند. دقیقتر بگوییم، تبدیل تعریف شده در (۳.۱.۲) به رده هم‌ارزی از تابع‌های مربعی انتگرال‌پذیر تعریف شده در (۲.۳.۲) تعلق دارد. به هر حال یک نماد یکسان برای هر دو تبدیل به کار می‌بریم.

**قضیه ۳.۳.۲** (رابطه پارسوال). اگر  $f \in L^2(\mathbb{R})$  آنگاه

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2. \quad (3.3.2)$$

قضیه ۴.۳.۲. اگر  $f \in L^2(\mathbb{R})$  آن گاه

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{iwt} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (۴.۳.۲)$$

این همگرایی نسبت به نرم  $L^2(\mathbb{R})$  است.

برهان. برای  $n = 1, 2, 3, \dots$  تعریف می‌کنیم

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < n \\ 0, & |t| \geq n \end{cases}. \quad (۵.۳.۲)$$

به وضوح، اگر  $n \rightarrow \infty$  آن گاه  $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$  و بنابراین  $\|\hat{f} - \hat{f}_n\|_2 \rightarrow 0$ .

اگر ضریب  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  را در تعریف تبدیل فوریه به کار گیریم آن گاه تبدیل فوریه و وارون آن به یک فرم نوشته می‌شوند، یعنی

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (۶.۳.۲)$$

قضیه ۵.۳.۲. اگر  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  آن گاه

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \quad (۷.۳.۲)$$

## ۴.۲ تبدیل موجک

تبدیل انتگرالی عملگری است مانند  $T$  بر روی فضایی از توابع روی  $X$  که چنین تعریف می‌شود

$$(Tf)(x) = \int_X K(x, y) f(y) dy. \quad (۱.۴.۲)$$

ویژگی‌های تبدیل، وابسته به تابع  $K$  است که هسته تبدیل نامیده می‌شود. برای نمونه در تبدیل فوریه هسته تبدیل  $K(x, y) = e^{-ixy}$  است. می‌بینیم که  $y$  را می‌توان همچون عامل مقیاس‌گذار در نظر گرفت. تابع نمایی  $\phi(x) = e^{ix}$  را در نظر گرفته و خانواده‌ای از توابع با مقیاس‌گذاری تابع  $\phi$  می‌سازیم، یعنی برای هر  $\alpha$  در  $\mathbb{R}$  می‌نویسیم  $\phi_\alpha = e^{-i\alpha x}$ . تبدیل موجک پیوسته همانند تبدیل فوریه است زیرا بر پایه یک تابع  $\psi$  است که مقیاس‌گذاری شده است ولی برخلاف تبدیل فوریه این تابع را انتقال داده‌ایم. بنابراین خانواده‌ای دو پارامتری از توابع  $\psi_{a,b}$  ساخته می‌شود، یعنی



$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (۲.۴.۲)$$

تابع  $\psi$  موجک مادر<sup>۴</sup> نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۴.۲ (موجک). تابع  $\psi$  در  $L^2(\mathbb{R})$  که در شرط زیر صدق کند را یک موجک می‌نامیم

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (۳.۴.۲)$$

در این جا  $\hat{\psi}$  تبدیل فوریه  $\psi$  است.

اگر  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ، آن‌گاه برای هر  $a, b$  در  $\mathbb{R}$  و  $a \neq 0$  داریم  $\psi_{a,b} \in L^2(\mathbb{R})$  زیرا

$$\|\psi_{a,b}(t)\|^2 = |a|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \quad (۴.۴.۲)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \quad (۵.۴.۲)$$

$$= \|\psi\|^2. \quad (۶.۴.۲)$$

تبدیل فوریه  $\psi_{a,b}$  در زیر داده شده است

$$\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = |a|^{\frac{1}{2}} e^{-ib\omega} \hat{\psi}(a\omega). \quad (۷.۴.۲)$$

تعریف ۲.۴.۲ (تبدیل موجک پیوسته).  $\psi_{a,b}(t)$  در (۲.۴.۲) داده شده است، اگر  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  آن‌گاه

تبدیل انتگرالی  $\mathcal{W}_\psi$  تعریف شده روی  $L^2(\mathbb{R})$  با

$$\mathcal{W}_\psi[f](a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (۸.۴.۲)$$

تبدیل موجک پیوسته  $f(t)$  نامیده می‌شود.

نخست دیده می‌شود که هسته  $\psi_{a,b}(t)$  در (۴.۴.۲) رفتاری همانند هسته  $\exp(-i\omega t)$  در تبدیل

فوریه دارد. هرچند برخلاف تبدیل فوریه، تبدیل موجک پیوسته تبدیلی یکتا<sup>۵</sup> نیست ولی هر تبدیل دیگر

<sup>۴</sup>mother wavelet

<sup>۵</sup>Single Transform

به همین روش به دست می‌آید. همانند تبدیل فوریه، تبدیل موجک پیوسته خطی است. سپس می‌بینیم  $\mathcal{W}_\psi[f](a, b)$  همچون تابعی از  $b$  برای یک مقدار ثابت  $a$ ، جزئیات داده‌هایی که درون سیگنال  $f$  در مقیاس  $a$  هستند را نمایش می‌دهد.

برای اینکه موجک‌ها در آنالیز تابعی کارآمد باشند، موجک مادر باید ویژگی‌هایی داشته باشد. یکی از این ویژگی‌ها که در شرط (۳.۴.۲) آمده است که وجود فرمولی برای وارون تبدیل موجک پیوسته را دربر دارد. شرط (۳.۴.۲) همواره به شرط پذیرفتگی موجک مادر اشاره می‌کند. اگر  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$  آن‌گاه تبدیل فوریه آن  $\hat{\psi}$  پیوسته است. چون  $\hat{\psi}$  پیوسته است و  $C_\psi$  کراندار است، نتیجه می‌گیریم  $\hat{\psi}(0) = 0$  که این معادل است با  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ .

دیگر ویژگی برجسته درباره موجک‌ها ویژگی به نام خوش-موضعی شده<sup>۶</sup> است. می‌خواهیم که  $\psi$  در هر دو بخش زمان و بسامد خوش-موضعی شده باشد. یعنی  $\psi$  و مشتق‌هایش بسیار سریع میرا شوند. در بخش بسامد هنگامی که  $\omega \rightarrow \infty$  تبدیل فوریه آن  $\hat{\psi}$  به اندازه کافی زود میرا شود و در همسایگی  $\omega = 0$  هموار باشد. همواری در  $\omega = 0$  وابسته به تعداد زمان‌های صفرشدگی<sup>۷</sup>  $\psi$  است.  $k$ امین زمان صفرشدگی  $\psi$  با

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt \quad (9.4.2)$$

تعریف می‌شود. می‌گویند موجکی دارای  $n$  زمان صفرشدگی است اگر برای  $n, \dots, 1, 0$   $k$  داشته باشیم

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0. \quad (10.4.2)$$

هرگاه بسامد  $\omega$  کوچک باشد و زمان صفرشدگی موجک‌ها بیشتر باشد آن‌گاه موجک‌ها هموارتر می‌باشند. از در هم آمیختن ویژگی‌های همواری و موضعی موجک  $\psi$  و شرط پذیرفتگی به این نکته‌ها پی می‌بریم

- موجک‌های فیلترهای میان‌گذر<sup>۸</sup> هستند. یعنی زمانی که  $\omega \rightarrow \infty$  و یا  $\omega \rightarrow 0$  پاسخ‌های بسامدی آن‌ها روز میرا می‌شوند.

<sup>۶</sup>well-localized

<sup>۷</sup>vanish moment

<sup>۸</sup> فیلترهای پایین‌گذر تنها بسامدهای پایین سیگنال را عبور می‌دهند و فیلترهای بالاگذر بسامدهای بالایی سیگنال را عبور می‌دهند. یک فیلتر میان‌گذر را می‌توان با ترکیب یک فیلتر بالاگذر و یک پایین‌گذر ساخت.

•  $\psi(t)$  پاسخ تکانه‌ای پالایه‌ای است یعنی هنگامی که  $t$  افزایش می‌یابد  $\psi(t)$  بسیار زود میرا می‌شود نوسان‌ساز با میانگین صفر است. همواره موجک‌ها تابع‌های مربعی انتگرال‌پذیر فرض می‌شوند یعنی  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ .

قضیه ۳.۴.۲ (تبدیل موجک وارون). اگر  $f \in L^2(\mathbb{R})$  آن‌گاه داریم

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{W}_\psi f)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (11.4.2)$$

که این رابطه تقریباً همه‌جا برقرار است.

## ۵.۲ قاب‌ها در فضای هیلبرت

تعریف ۱.۵.۲. دنباله  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  از عناصر  $\mathcal{H}$  قابی برای  $\mathcal{H}$  است هرگاه  $A, B > 0$  چنان وجود داشته باشند که

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (1.5.2)$$

$A, B$  کران‌های قاب نامیده می‌شوند ولی آن‌ها یکتا نیستند. کران بالای بهینه قاب، اینفیمم همه کران‌های بالای قاب و کران پایین بهینه قاب، سوپریمم همه کران‌های پایین قاب است.

تعریف ۲.۵.۲. دنباله  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  در  $\mathcal{H}$  یک قاب چسبان<sup>۹</sup> است هرگاه  $A > 0$  چنان وجود داشته باشد که

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = A \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (2.5.2)$$

$A$  کران قاب نامیده می‌شود.

---

<sup>۹</sup>tight



## فصل ۳

# نظریه گراف

در این فصل با مفهوم گراف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا می‌شویم سپس قضیه‌های از نظریه طیفی گراف را ارائه می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۲] مراجعه نمایید.

### ۱.۳ آشنایی با گراف

در این بخش به معرفی گراف می‌پردازیم و با برخی از مفاهیم در نظریه گراف آشنا می‌شویم.

**تعریف ۱.۱.۳.** گراف  $G$  یک سه‌تایی  $(E(G), V(G), \psi_G)$  که در آن  $V(G)$  مجموعه‌ی راس‌ها،  $E(G)$  گرایه‌ی یال‌ها و  $\psi_G$  رابطه‌ای است که هر یال گراف را با دو راسی که دو سر یال نامیده می‌شوند وابسته می‌سازد. مجموعه راس‌ها و یال‌های گراف را به ترتیب با  $V(G)$  و  $E(G)$  نیز نمایش می‌دهند.

گرافی که مجموعه راس‌ها و مجموعه یال‌های آن پایان‌پذیر باشند را **گراف متناهی** گوئیم. طوقه یالی که دو سر آن یکی باشد. چند یال با دو سر یکسان را **یال چندگانه** می‌گوئیم. **گراف ساده**، گرافی است که طوقه و یال چندگانه نداشته باشد.

برای یال  $e$  با دو سر  $u$  و  $v$  می‌نویسیم  $e = uv$  یا  $e = vu$ . هنگامی که  $u$  و  $v$  دو سر یک یال باشند می‌گوئیم **همسایه یکدیگرند**. برای  $(u$  که همسایه  $v$  است) می‌نویسیم  $u \leftrightarrow v$  یا  $u \sim v$ .

**تعریف ۲.۱.۳.** یک **گشت**<sup>۱</sup> در گراف  $G$  دنباله‌ای متناوب از راس‌ها و یال‌ها است، مانند

$$W = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n \quad (1.1.3)$$

---

<sup>۱</sup>walk

به طوری که برای  $j = 1, \dots, n$  راس‌های  $v_j$  و  $v_{j-1}$  دو سر یال  $e_j$  هستند. در گراف ساده، یک گشت با دنباله‌ای از راس‌ها نمایش داده می‌شود، مانند  $W = v_0, v_1, \dots, v_n$ ، به طوری که برای هر  $j = 1, \dots, n$  راس‌های  $v_j$  و  $v_{j-1}$  همسایه هستند.  $v_0$  را راس شروع و  $v_n$  را راس پایانی می‌نامند. طول یک گشت برابر تعداد یال‌های آن می‌باشد. یک گشت بسته<sup>۲</sup> است اگر راس شروع و پایان آن یکی باشد. یک گذر<sup>۳</sup> در گراف گشتی است که یال تکراری نداشته باشد. یک مسیر<sup>۴</sup> گذری است راس‌های میانی تکرار نشده اند. یک دوره<sup>۵</sup> مسیر بسته‌ای به طول ناکمتر از یک است. یک گشت، گذر یا مسیر بدیهی شامل تنها یک راس و بدون یال است.

**تعریف ۳.۱.۳** (زیرگراف). گراف  $H$  زیرگراف  $G$  است هرگاه  $E(H) \subseteq E(G)$ ،  $V(H) \subseteq V(G)$  و  $\psi_H = \psi_G|_{E(H)}$ ، و می‌نویسیم  $H \subseteq G$ ، اگر  $H \neq G$  می‌نویسیم  $H \subset G$  و  $H$  را زیرگراف سره  $G$  گوئیم.

دو راس  $u$  و  $v$  ی  $G$  را همبند نامند اگر مسیری از  $u$  به  $v$  در گراف  $G$  موجود باشد. همبندی، یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه  $V$  است. بنابراین افزایی از  $V$  به زیر مجموعه‌های ناتهی  $V_1, V_2, \dots, V_m$  وجود دارد که به طوری که دو راس  $u$  و  $v$  همبندند اگر و تنها اگر  $u$  و  $v$  در یک مجموعه  $V_i$  باشند. زیرگراف‌های  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_m]$  را مؤلفه‌های  $G$  می‌نامند. اگر  $G$  دارای تنها یک مؤلفه باشد،  $G$  همبند است؛ در غیر این صورت  $G$  را ناهمبند است.

**تعریف ۴.۱.۳**. فرض کنید با هر یال  $uv$  ی  $G$  عدد حقیقی  $\omega(uv)$  که وزن آن یال نامیده می‌شود، همراه باشد. در این صورت  $G$  را همراه با وزن‌های روی یال‌هایش گراف وزن‌دار<sup>۶</sup> می‌نامند. تابع

$$\begin{aligned}\omega : E &\rightarrow R \\ uv &\mapsto \omega(uv)\end{aligned}$$

را تابع وزن گراف می‌نامند.

**تعریف ۵.۱.۳** (ماتریس همسایگی گراف وزن‌دار). به گراف ساده و وزن‌دار  $G$  با تابع وزن  $\omega$  ماتریس

---

<sup>۲</sup>closed

<sup>۳</sup>trail

<sup>۴</sup>path

<sup>۵</sup>cycle

<sup>۶</sup>weighted graph

را وابسته می‌سازیم به طوری که  $A = [a_{uv}]_{N \times N}$

$$a_{uv} = \begin{cases} w(uv) & uv \in E \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}. \quad (2.1.3)$$

به ماتریس  $A$  ماتریس همسایگی گفته می‌شود. ماتریس همسایگی گراف ساده، متقارن است.

در این نوشته تمام قضیه‌ها برای گراف‌های طوقه‌دار نیز قابل اثبات می‌باشند؛ بنابراین در ادامه  $G$  را گرافی در نظر می‌گیریم که تنها یال چندگانه ندارد. ماتریس چنین گرافی متقارن می‌باشد.

**تعریف ۶.۱.۳.**  $\deg(v)$ ، درجه راس  $v$  در  $G$  تعداد یال‌های  $G$  است که  $v$  یک سر آن‌هاست و هر طوقه دو یال شمرده می‌شود. درباره گراف وزن‌دار  $\deg(v)$  مجموع وزن یال‌هایی است که  $v$  یک سر آن‌هاست

$$\deg(v) = \sum_{vu \in E} \omega(uv). \quad (3.1.3)$$

در گراف  $G$  با ماتریس همسایگی  $A = [a_{uv}]$  درجه هر راس برابر است با

$$\deg(v) = \sum_{u \in V} a_{uv}. \quad (4.1.3)$$

## ۲.۳ نظریه طیفی گراف

تابع حقیقی مقدار دلخواه  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  می‌تواند همچون برداری در  $\mathbb{R}^n$  در نظر گرفته شود که مقدار  $f$  روی هر راس یک مختص از بردار را تعریف می‌کند. به عبارتی این تعریف راس‌های گراف به گونه‌ای شماره‌گذاری می‌کند؛ و مقدار تابع روی راس  $m$  را با  $f(m)$  نشان می‌دهیم.

همان‌گونه که در مثال ۲.۲.۱ گفته شد. عملگرها روی فضای هیلبرت  $\mathbb{R}^n$  ماتریس‌های مربعی  $n \times n$  هستند. در ادامه با عملگر لاپلاسی گراف آشنا خواهیم شد.

عملگر لاپلاسی <sup>۷</sup> گراف در پیشبرد نظریه ما ارزش کلیدی دارد. عملگر لاپلاسی نرمال نشده <sup>۸</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{L} = D - A$$

<sup>۷</sup>laplacian

<sup>۸</sup>non-normalized

که در آن  $D$  ماتریسی قطری درجه راس‌های گراف است. برای هر  $f \in \mathbb{R}^N$  می‌توان بررسی کرد که برای هر  $v \in V(G)$  داریم

$$(\mathcal{L}f)(v) = \sum_{u \sim v} w(uv) \cdot (f(u) - f(v)). \quad (1.2.3)$$

در این جا  $u \sim v$  بیانگر مجموع روی راس‌های همسایه راس  $v$  می‌باشد. بنا به تعریف، ماتریس عملگر  $\mathcal{L}$  متقارن و حقیقی مقدار است. از این رو  $\mathcal{L}$  یک عملگر خود-الحاقی است.

گزاره ۱.۲.۳. عملگر لاپلاسی گراف  $\mathcal{L}$  مثبت است.

برهان. از آن جایی که  $\mathcal{L}$  خود-الحاقی است تنها باید نشان داد برای هر  $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \langle x, \mathcal{L}x \rangle &= x^T \mathcal{L}x \\ &= \sum_{u \in V(G)} x(u) \sum_{u \sim v} w(uv)(x(u) - x(v)) \\ &= \sum_{u \in V(G)} \sum_{u \sim v} w(uv)(x(u)^2 - x(u)x(v)) \\ &= \sum_{u \in V(G)} \left[ \sum_{u \sim v} w(uv)x(u)^2 - \sum_{u \sim v} w(uv)x(u)x(v) \right] \\ &= \sum_{uv \in E(G)} w(uv)(x(u) - x(v))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

تساوی آخر اثبات پس باز کردن سری‌ها و مرتب‌سازی مجدد اندیس‌ها با در نظر گرفتن این که در گراف ساده بی سو<sup>۹</sup> رابطه همسایگی، رابطه‌ای متقارن است، نتیجه می‌شود. برای بردار دلخواه  $x \in \mathbb{R}^N$  شکل مربعی عملگر لاپلاسی گراف چنین تعریف می‌شود

$$x^T \mathcal{L}x = \sum_{uv \in E(G)} w(uv)(x(u) - x(v))^2. \quad (2.2.3)$$

اگر  $x \neq 0$  بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه  $\lambda$  باشد آنگاه

<sup>۹</sup>undirected



$$\begin{aligned}\lambda \langle x, x \rangle &= \langle x, \lambda x \rangle = \langle x, \mathcal{L}x \rangle \geq 0 \\ \lambda &= \frac{\langle x, \mathcal{L}x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq 0\end{aligned}$$

همچنین  $\lambda = 0$  اگر و تنها اگر  $x$  بردار ثابت<sup>۱۰</sup> باشد. زیرا  $\lambda = 0$  اگر و تنها اگر برای هر  $u, v$  داشته باشیم  $x(u) = x(v)$  یعنی این که برداری ثابت باشد.

$$\lambda = \frac{\langle x, \mathcal{L}x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\sum_{uv \in E(G)} w(uv)(x(u) - x(v))^2}{\langle x, x \rangle} = 0. \quad (3.2.3)$$

بنابراین صفر مقدار ویژه لاپلاسی گراف است.

گزاره ۲.۲.۳. گراف  $G$  همبند است اگر و تنها اگر  $\lambda_1 > 0$ .

همچنین می‌توان نشان داد تعداد بردارهای ویژه عمود برهم متناظر با مقدار ویژه صفر برابر تعداد مولفه‌های گراف است. ولی در این نوشته ما تنها با گراف‌های همبند سروکار داریم از این رو همواره می‌توان فرض کرد  $\lambda_1 > 0$ . در ادامه دنباله مقدرهای ویژه گراف را این چنین اندیس‌گذاری می‌کنیم

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N-1}$$

برخی دیگر از نویسندگان عملگر لاپلاسی گراف را این گونه تعریف می‌کنند

$$\mathcal{L}^{\text{نرمال}} = D^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L} D^{-\frac{1}{2}} = I - D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.2.3)$$

نکته ۳.۲.۳. عملگرهای  $\mathcal{L}$  و  $\mathcal{L}^{\text{نرمال}}$  یکسان نمی‌باشند و به ویژه بردارهای ویژه آن‌ها یکسان نمی‌باشد. ولی هر دوی این عملگرها را می‌توان برای تعریف تبدیل موجک طیفی گراف به کار برد ولی نتیجه‌های آن‌ها یکسان نخواهند بود. در این نوشته شکل لاپلاسی نرمال نشده را به کار خواهیم برد مگر این که اشاره کرده باشیم. ولی بسیاری از قضیه‌ها در این نوشته برای هر دو یکسان هستند. نوع عملگر لاپلاسی متناسب با مساله‌ای معینی است که در دست بررسی داریم و باید وابسته به کاربرد آن انتخاب شود.

<sup>۱۰</sup> برداری که همه مختص‌های آن با هم برابر باشد. بردار ثابت ویژگی‌هایی مانند تابع ثابت دارد.



## فصل ۴

# تبدیل موجک گراف

تبدیل موجک کلاسیک بر پایه انتقال و مقیاس‌گذاری تابع موجک مادر ساخته می‌شود. با ضرب داخلی موجک‌های انتقال یافته و مقیاس‌گذاری شده در تابع مفروض ضریب‌های موجک به دست می‌آیند. گسترش این دستور کار بر روی گراف وزن دار دلخواه چالش برانگیز است زیرا چگونگی تعریف انتقال و مقیاس‌گذاری یک گراف نابهنجار مشخص نیست. رویکرد ما برای کنار آمدن با این چالش کار در بخش طیفی گراف یا همان فضای توابعی ویژه عملگر لاپلاسی گراف  $\mathcal{L}$  است. این ابزار از نظریه طیفی گراف تبدیل فوریه توابع روی راس‌های گراف وزن دار را مشابه تبدیل فوریه کلاسیک فراهم می‌کنند.

### ۱.۴ تبدیل موجک کلاسیک

نخست تبدیل موجک پیوسته را بررسی کرده و با وارون آن آشنا می‌شویم، سرانجام نشان می‌دهیم که چگونه مقیاس‌گذاری می‌تواند در بخش فوریه تعریف شود. به طور کلی تبدیل موجک پیوسته با انتخاب  $\psi$  موجک مادر، ساخته می‌شود. موجک‌ها در مکان‌ها و در مقیاس‌های دیگر با انتقال و مقیاس‌گذاری این موجک مادر به وجود می‌آیند. داریم

$$\psi_{s,a} = \frac{1}{s} \psi \left( \frac{x-a}{s} \right)$$

که  $s$  پارامتر مقیاس‌گذاری و  $a$  پارامتر انتقال است. این شیوه مقیاس‌گذاری نرم  $L^1$  را حفظ می‌کند،

یعنی

$$\|\psi_{s,a}\| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \psi\left(\frac{x-a}{s}\right) dx \quad (1.1.4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt \quad \{t = (x-a)/s\} \quad (2.1.4)$$

$$= \|\psi\|. \quad (3.1.4)$$

دیگر شیوه‌های مقیاس‌گذاری نیز به گونه‌ای هستند که نرم را حفظ می‌کنند. به ویژه آن‌هایی که نرم  $L^2(\mathbb{R})$  را حفظ می‌کنند. به هر حال، روشی که نرم  $L^1(\mathbb{R})$  را حفظ می‌کند مناسب کار ماست. همچنین، ما در این نوشته خود را به مقیاس‌های مثبت، یعنی  $s > 0$  محدود می‌کنیم.

برای سیگنال مفروض  $f$ ، ضریب‌های موجک در مقیاس  $s$  و مکان  $a$  با به کارگیری ضرب داخلی  $f$  در موجک  $\psi_{s,a}$  به دست می‌آید، از این رو

$$W_f(s, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \bar{\psi}\left(\frac{x-a}{s}\right) f(x) dx. \quad (4.1.4)$$

هرگاه موجک  $\psi$  شرط پذیرفتگی زیر را داشته باشد تبدیل موجک پیوسته وارون‌پذیر خواهد بود

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty. \quad (5.1.4)$$

دوباره یادآور می‌شویم، این شرط آشکار می‌سازد اگر  $\psi$  پیوسته مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه  $\hat{\psi}(0) = 0$  است؛ پس  $\hat{\psi}(0) = \int \psi(x) dx = 0$  از این رو باید  $\psi$  تابعی با میانه صفر باشد. وارون تبدیل موجک پیوسته از این رابطه به دست می‌آید

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi[f](s, a) \psi_{s,a}(x) \frac{dads}{s}. \quad (6.1.4)$$

در این روش تبدیل موجک به طور مستقیم از ساختن موجک‌ها در بخش سیگنال با مقیاس‌گذاری و انتقال به دست می‌آید. به کارگیری مستقیم این دستور کار بر روی گراف‌ها چالش برانگیز است. برای تابع تعریف شده  $\psi(x)$  روی راس‌های گراف وزن‌دار، روشن نیست چگونه  $\psi(sx)$  را تعریف کنیم و اگر  $x$  راسی از گراف باشد، برای عدد حقیقی  $s$  هیچ برداشتی از  $sx$  نداریم. چاره ما برای کنار آمدن با این مشکل یافتن راه حلی در بخش فوریه گراف است. نخست نشان می‌دهیم مقیاس‌گذاری در تبدیل موجک

کلاسیک می‌تواند در بخش فوریه تعریف شود. این گفته‌ها سرانجام چارچوبی برای تعریف تبدیل موجک بر روی گراف‌ها فراهم می‌کنند.

در ادامه، حالتی از تبدیل را که پارامتر مقیاس گسسته و پارامتر انتقال پیوسته چپ را بررسی می‌کنیم. با اینکه این تبدیل کاربردی گسترده ندارد، نزدیکترین شباهت به تبدیل موجک طیفی گراف را برایمان فراهم خواهد کرد. برای مقیاس ثابت  $s$ ، می‌توان تبدیل موجک را همچون عملگری فرض کرد که روی تابع  $f$  عملکرده و تابع  $T^s f(a) = W_\psi[f](s, a)$  را بر می‌گردانند. یعنی پارامتر انتقال را همچون متغیر مستقل تابع به دست آمده از عملگر  $T^s$  تصور می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$\psi_s^*(x) = \frac{1}{s} \bar{\psi}\left(\frac{-x}{s}\right). \quad (7.1.4)$$

می‌بینیم که این عملگر را می‌توان به صورت پیچش دو تابع بیان نمود، یعنی

$$(T^s f)(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \bar{\psi}\left(\frac{x-a}{s}\right) f(x) dx \quad (8.1.4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s^*(a-x) f(x) dx \quad (9.1.4)$$

$$= (\psi_s^* \star f)(a). \quad (10.1.4)$$

با گرفتن تبدیل فوریه و به کارگیری قضیه پیچش به دست می‌آید

$$\widehat{T^s f}(\omega) = \hat{\psi}_s^*(\omega) \hat{f}(\omega). \quad (11.1.4)$$

و با به کارگیری (۳.۲.۲)، ویژگی مقیاس‌گذاری تبدیل فوریه و تعریف (۷.۱.۴) داریم

$$\hat{\psi}_s^*(\omega) = \hat{\psi}(s\omega) \quad (12.1.4)$$

با ساده کردن و گرفتن تبدیل وارون می‌توان نوشت

$$(T^s f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{\psi}(s\omega) \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (13.1.4)$$

در رابطه (۱۳.۱.۴) مقیاس‌گذار  $s$  تنها در شناسه<sup>۱</sup>  $\hat{\psi}(s\omega)$  ظاهر شده است. این نشان می‌دهد که عملگر مقیاس‌گذار می‌تواند یکجا به بخش فوریه واگذار شود. رابطه (۱۳.۱.۴) بیان می‌کند که تبدیل

<sup>۱</sup>argument

موجک در هر مقیاس  $s$  می‌تواند همچون عملگر افزایشده<sup>۲</sup> فوریه نگریسته شود که از فیلترهایی که با مقیاس‌گذاری تنها یک فیلتر  $\hat{\psi}(w)$  مشتق می‌شوند، به دست می‌آید؛ که می‌تواند همانند یک فیلتر میان‌گذر تصور شود، زیرا برای موجک‌های پذیرفتنی داریم  $\hat{\psi}(0) = 0$ . رابطه (۱۳.۱.۴) همان شباهتی است که در ادامه برای تعریف تبدیل موجک طیفی گراف از آن بهره خواهیم گرفت.

انتقال موجک‌ها را می‌توان با موضعی‌سازی عملگر موجک تعریف کرد؛ می‌نویسیم  $\delta_a(x) = \delta(x - a)$  داریم

$$(T^s \delta_a)(x) = \frac{1}{s} \bar{\psi} \left( \frac{a - x}{s} \right) \quad (14.1.4)$$

که برای  $\psi$  مقدار حقیقی و زوج به  $T^s \delta_a = \psi_{a,s}(x)$  ساده می‌شود.

## ۲.۴ تبدیل فوریه گراف

بر روی خط حقیقی، توابع نمایی‌های مختلط  $e^{i\omega x}$  که تبدیل فوریه را تعریف می‌کنند، توابع ویژه عملگر لاپلاسی یک بعدی  $\Delta = -\frac{d^2}{dx^2}$  هستند. از فرمول وارون تبدیل فوریه داریم

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \hat{f}(w) e^{i\omega x} dw. \quad (1.2.4)$$

یعنی، تابع  $f$  توسط جمله‌هایی از توابع ویژه عملگر لاپلاسی بسط داده شده است.

تبدیل فوریه گراف درست همانند عبارت پیش تعریف خواهد شد. چون  $\mathcal{L}$  عملگر لاپلاسی گراف ماتریسی متقارن است همانگونه که در فصل ۳ بررسی شد مقدارهای ویژه  $\mathcal{L}$  حقیقی و نامنفی‌اند و هم‌چنین دیدیم اگر گراف همبند باشد  $\mathcal{L}$  تنها یک مقدار ویژه صفر دارد. یاد آوری می‌کنیم، مقدارهای ویژه را به صورت زیر مرتب می‌کنیم

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-1}. \quad (2.2.4)$$

در اینجا  $\chi_\ell$  بردار ویژه متناظر با  $\lambda_\ell$  است. می‌توان گفت

$$\mathcal{L}\chi_\ell = \lambda_\ell \chi_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, n. \quad (3.2.4)$$

<sup>۲</sup>multiplier operator

برای تابع دلخواه  $f \in \mathbb{R}^N$  تعریف شده بر روی راس‌های گراف  $G$ ، تبدیل فوریه این گراف چنین تعریف شده است

$$\hat{f}(\ell) = \langle \chi_\ell, f \rangle = \sum_{n=1}^N \bar{\chi}_\ell(n) f(n). \quad (۴.۲.۴)$$

همچنین وارون تبدیل به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(n) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{f}(\ell) \chi_\ell(n). \quad (۵.۲.۴)$$

قضیه ۱.۲.۴ (رابطه پارسوال تبدیل فوریه گراف). برای هر  $f, h \in \mathbb{R}^N$  داریم

$$\langle f, h \rangle = \langle \hat{f}, \hat{h} \rangle. \quad (۶.۲.۴)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \langle f, h \rangle &= \sum_{n=1}^N f(n) h(n) \\ &= \sum_{n=1}^N \left( \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{f}(\ell) \chi_\ell(n) \right) \left( \sum_{\ell'=0}^{N-1} \hat{h}(\ell') \chi_{\ell'}(n) \right) \\ &= \sum_{\ell, \ell'} \hat{f}(\ell) \hat{h}(\ell') \sum_{n=1}^N \chi_\ell(n) \chi_{\ell'}(n) \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{f}(\ell) \hat{h}(\ell) = \langle \hat{f}, \hat{h} \rangle. \end{aligned}$$

□

## ۳.۴ تبدیل موجک طیفی گراف

با داشتن تبدیل فوریه مشابه برای توابع تعریف شده بر روی راس‌های گراف وزن‌دار، اینک آماده‌ایم تبدیل موجک طیفی گراف را تعریف کنیم. این تبدیل با انتخاب یک تابع هسته  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  به دست خواهد آمد. این درست همانند آن چیزی است که در رابطه (۱۳.۱.۴) دیدیم. باید  $g$  همانند فیلتر میان‌گذر رفتار کند. پس ویژگی‌های  $g(\circ) = \circ$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \circ$  را برای  $g$  در نظر می‌گیریم. به هنگام به کارگیری هسته‌ی  $g$  رفتارهای آن را بیشتر بررسی می‌کنیم.

<sup>۳</sup>band-pass filter

## ۴.۴ موجک‌ها

تبدیل موجک طیفی گراف توسط عملگرهای موجک که توابعی مقدار-عملگر لاپلاسی هستند، ساخته می‌شود. با به کارگیری حساب تابع‌های پیوسته<sup>۴</sup> [۱۱] می‌توان یک تابع اندازه‌پذیر از عملگرهای خطی خود-الحاقی روی فضای هیلبرت تعریف نمود. این کار به کمک نمایش طیفی یک عملگر انجام می‌پذیرد که در زمینه کار ما هم ارز با تبدیل فوریه گراف است که پیشتر تعریف شد. به ویژه برای هسته موجک طیفی گراف  $g$ ، عملگر موجک  $T_g = g(\mathcal{L})$  بر روی تابع مفروض  $f$  با زیر و بم کردن<sup>۵</sup> هر بسامد<sup>۶</sup> فوریه رفتار می‌کند، به طوری که

$$\widehat{T_g f}(\ell) = g(\lambda_\ell) \hat{f}(\ell). \quad (1.4.4)$$

مثال ۱.۴.۴. اگر  $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$  چندجمله‌ای باشد، نخست عملگر  $T_g = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathcal{L}^i$  را بر روی تابع  $f$  اعمال کرده؛ سپس تبدیل فوریه آن را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \widehat{T_g f}(\ell) &= \langle \chi_\ell, T_g f \rangle \\ &= \langle T_g \chi_\ell, f \rangle \quad \{ \text{خود-الحاقی } T_g \text{ که از خود-الحاقی } \mathcal{L} \text{ نتیجه می‌شود.} \} \\ &= \left\langle \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathcal{L}^i \right) \chi_\ell, f \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathcal{L}^i \chi_\ell, f \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_\ell^i \chi_\ell, f \right\rangle \\ &= \langle g(\lambda_\ell) \chi_\ell, f \rangle \\ &= g(\lambda_\ell) \langle \chi_\ell, f \rangle = g(\lambda_\ell) \hat{f}(\ell). \end{aligned}$$

برای تابع دلخواه  $g$ ، می‌توان  $g$  را با یک چند جمله‌ای تقریب زد. در این باره در آینده بیشتر سخن خواهیم گفت.

<sup>۴</sup>Continuous Functional Calculus

<sup>۵</sup>modulating

<sup>۶</sup>mode



با به کارگیری وارون تبدیل فوریه نتیجه می‌شود

$$(T_g f)(m) = \sum_{\ell=0}^{N-1} g(\lambda_\ell) \hat{f} \chi_\ell(m). \quad (۲.۴.۴)$$

عملگرهای موجک در مقیاس  $t$  با  $T_g^t = g(t\mathcal{L})$  تعریف می‌شوند. باید خاطر نشان کنیم که دامنه فضایی گراف گسسته ولی دامنه هسته  $g$  پیوسته است. بنابراین مقیاس‌گذار می‌تواند برای هر عدد حقیقی مثبت  $t$  تعریف شود. در ادامه موجک‌های طیفی گراف از راه موضعی‌سازی این عملگرها با به کارگیری آن‌ها روی تابع تکانه برای یک راس به دست می‌آیند. یعنی

$$\psi_{t,n} = T_g^t \delta_n. \quad (۳.۴.۴)$$

گسترش صریح این به بخش گراف نشان می‌دهد

$$\begin{aligned} \psi_{t,n}(m) &= (T_g^t \delta_n)(m) \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} g(t\lambda_\ell) \hat{\delta}_n \chi_\ell(m) \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} g(t\lambda_\ell) \bar{\chi}_\ell(n) \chi_\ell(m). \end{aligned} \quad (۴.۴.۴)$$

سرانجام ضریب‌های موجک تابع داده شده  $f$  با ضرب داخلی آن با این موجک‌ها به دست می‌آیند.

$$\mathcal{W}_G[f](t, n) = \langle \psi_{t,n}, f \rangle \quad (۵.۴.۴)$$

همچنین از ویژگی خود-الحاقی  $T_g^t$  می‌توان دید که ضریب‌های موجک به طور مستقیم از عملگرهای موجک به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_G[f](t, n) &= \langle T_g^t \delta_n, f \rangle \\ &= \langle \delta_n, T_g^t f \rangle \\ &= (T_g^t f)(n) \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} g(t\lambda_\ell) \hat{f}(\ell) \chi_\ell(n). \end{aligned} \quad (۶.۴.۴)$$



شکل ۱۰۴: تابع مقیاس‌گذار (آبی)، تابع هسته  $g$  در چند مقیاس نمونه (سبز، قرمز، فیروزه‌ای، بنفش)، تابع  $G$  (مشکی)، کران‌های بالا و پایین  $A, B$  (قرمز و سبز)

## ۵.۴ تابع مقیاس‌گذار

بنابره روش ساخت، موجک‌های طیفی گراف همه بر  $\chi_0$  بردار ویژه پوچ عمودند و برای  $\lambda_l$  نزدیک به صفر، تقریباً عمودند. به منظور نمایش پایدار درونمایه بسامد پایین  $f$  تابع تعریف شده روی راس‌های گراف، همانند پسمانده پایین‌گذر توابعی مقیاس‌گذار از آنالیز موجک کلاسیک شناسایی رده دوم شکل موج‌ها آسانتر است. این توابعی مقیاس‌گذار طیفی گراف ساختاری همانند موجک‌های طیفی گراف دارند. آن‌ها با تابع یک مقدار-حقیقی  $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  که همانند یک فیلتر پایین‌گذر رفتار می‌کند به دست می‌آیند و از  $h(0) > 0$  و  $h(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$  پیروی می‌کند. آنگاه توابعی مقیاس‌گذار با  $\phi_n = T_h \delta_n = h(\mathcal{L})\delta_n$  و ضرب‌ها توسط  $S[f](n) = \langle \phi_n, f \rangle$  داده شده‌اند.

مطرح کردن توابعی مقیاس‌گذار زمانی که پارامتر  $t$  در چند مقدار گسسته  $t_j$  نمونه‌گیری شده‌اند کمک

می‌کند تا سیگنال اصلی را از روی ضریب‌های موجک بازیابی کنیم. همان‌گونه که در بخش ۱.۶ خواهیم دید بازیابی پایدار تضمین شده خواهد بود هرگاه مقدار  $G(\lambda) = h(\lambda)^2 + \sum_{j=1}^J g(t_j \lambda)^2$  به دور از صفر در طیف  $\mathcal{L}$  محدود شده باشد. انتخاب  $g$  و  $h$  در شکل ۱.۴ نمایش داده شده‌اند. تعیین دقیق  $g$  و  $h$  به بخش ۱.۶ واگذار می‌شود.

متذکر می‌شویم توابعی مقیاس‌گذاری که از این روش تعریف شده‌اند هم‌اکنون تنها برای به نمایش درونمایه بسامد پایین روی گراف هستند. آن‌ها موجک‌ها را از روش رابطه دو-مقیاسی همچون برای موجک‌های سنتی<sup>۷</sup> به وجود نمی‌آورند. طراحی مولد تابع مقیاس‌گذار  $h$  مستقل از انتخاب تابع هسته  $g$  است.

---

<sup>۷</sup>traditional



## فصل ۵

# ویژگی‌های تبدیل

در این فصل برخی از ویژگی‌های تبدیل موجک طیفی گراف را معرفی می‌کنیم. نخست نشان می‌دهیم فرمول وارون برای این تبدیل نیز مشابه فرمول وارون تبدیل موجک پیوسته وجود دارد. کران‌های مقیاس بزرگ و مقیاس کوچک را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که موجک‌ها در کران مقیاس کوچک موضعی شده‌اند. سرانجام نمونه‌برداری از پارامتر مقیاس و نتیجه‌های قاب‌های موجک را در میان می‌گذاریم.

### ۱.۵ وارون تبدیل موجک طیفی گراف پیوسته

برای اینکه تبدیل نه تنها در آنالیز سیگنال، در پردازش سیگنال هم سودمند باشد نیاز است که بازسازی سیگنال منتظر از روی مجموعه‌ای از ضریب‌های تبدیل امکان‌پذیر باشد، نشان می‌دهیم تبدیل موجک طیفی گراف فرمول وارونی مشابه فرمول (۶.۱.۴) برای تبدیل موجک پیوسته را داراست.

به طور طبیعی می‌توان به این نکته پی‌برد که ضریب‌های موجک  $\mathcal{W}_G[f](t, n)$  ایزاری فراهم می‌کنند تا بسنجیم به چه مقدار سیگنال  $f$  دارای موجک  $\psi_{t,n}$  است. این نشان می‌دهد که سیگنال اصلی می‌تواند با ضرب موجک‌های  $\psi_{t,n}$  در تک‌تک ضریب‌های  $\mathcal{W}_G[f](t, n)$  بازیابی شود. همانا فرمول بازسازی زیر به شرط غیر ثابت بودن وزن  $dt/t$  این مورد را نشان می‌دهد.

لم ۱.۱.۵. اگر  $g$  هسته تبدیل موجک طیفی گراف دارای شرط پذیرفتگی زیر باشد و  $g(\circ) = \circ$

$$\int_0^\infty \frac{g^2(x)}{x} dx = C_g < \infty \quad (1.1.5)$$

آن‌گاه

$$\frac{1}{C_g} \sum_{n=1}^N \int_0^{\infty} \mathcal{W}_G[f](t, n) \psi_{t,n}(m) \frac{dt}{t} = f^\#(m). \quad (2.1.5)$$

در این جا  $\chi_0 = f - \langle \chi_0, f \rangle \chi_0$  و  $f^\# = f - \langle \chi_0, f \rangle \chi_0$  به ویژه فرمول بازیابی کامل این چنین است  $f = f^\# + \hat{f}(0) \chi_0$ .

برهان. با به کارگیری رابطه‌های (۴.۴.۴) و (۶.۴.۴) برای بیان  $\psi_{t,n}$  و بیان  $\mathcal{W}_G[f](t, n)$  در پایه فوریه گراف، از طرف چپ رابطه بالا داریم

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_g} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \sum_n \left( \sum_l g(t\lambda_l) \chi_l(n) \hat{f}(l) \sum_{\ell'} g(t\lambda_{\ell'}) \bar{\chi}_{\ell'}(n) \chi_{\ell'}(m) \right) dt \\ &= \frac{1}{C_g} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \left( \sum_{\ell, \ell'} g(t\lambda_\ell) g(t\lambda_{\ell'}) \hat{f}(l) \chi_{\ell'}(m) \sum_n \bar{\chi}_{\ell'}(n) \chi_\ell(n) \right) dt. \quad (3.1.5) \end{aligned}$$

متعامد یکه بودن  $\chi_\ell$  نتیجه می‌دهد

$$\sum_n \bar{\chi}_{\ell'}(n) \cdot \chi_\ell(n) = \langle \chi_\ell, \chi_{\ell'} \rangle = 0$$

با جایگذاری این در رابطه (۳.۱.۵) و جمع‌گیری روی  $\ell'$  به دست می‌آید

$$= \frac{1}{C_g} \sum_{\ell} \left( \int_0^{\infty} \frac{g^\vee(t\lambda_\ell)}{t} dt \right) \hat{f}(\ell) \chi_\ell(m). \quad (4.1.5)$$

اگر  $g$  دارای شرط پذیرفتگی باشد، آن‌گاه با جایگذاری  $u = t\lambda_\ell$  در بالا داریم

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{C_g} \sum_{\ell} \left( \int_0^{\infty} \frac{g^\vee(u)}{\frac{u}{\lambda_\ell}} \frac{du}{\lambda_\ell} \right) \hat{f}(\ell) \chi_\ell(m) \\ &= \frac{1}{C_g} \sum_{\ell} \left( \int_0^{\infty} \frac{g^\vee(u)}{u} du \right) \hat{f}(\ell) \chi_\ell(m). \end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد  $\int \frac{g^\vee(t\lambda_\ell)}{t} dt = C_g$  مستقل از  $\ell$  است؛ مگر برای  $\lambda_\ell = 0$  در  $\ell = 0$  که انتگرال صفر است. عبارت (۴.۱.۵) می‌تواند همانند وارونی برای تبدیل فوریه دیده می‌شود که روی هر راس  $m$  سنجیده می‌شود؛ در آن جمله  $\ell = 0$  جا افتاده است. این جمله جا افتاده است درست برابر  $\chi_0 = \hat{f}(0) \chi_0$  و این آن چه را که می‌خواستیم اثبات می‌کند.  $\square$

به یاد داشته باشید که در لاپلاسی نرمال نشده،  $\chi$  روی هر راس ثابت است و  $f^\#$  مانند برداشتن میانه‌ی  $f$  است. فرمول (۲۰۱.۵) نشان می‌دهد که میانه  $f$  از روی موجک میانه-صفر بازیابی نمی‌شود. در این جا با دستور بازسازی معادل آن برای تبدیل موجک پیوسته یک ناهماهنگی وجود دارد. که این هم پیامدی ناخواسته را نشان می‌دهد؛ می‌توان تابع با میانه ناصفر را با جمع کردن موجک‌ها با میانه صفر بازیابی کرد. چون روی خط حقیقی بسامدهای فوریه پیوسته‌اند این کار شدنی است. ولی این کار برای تبدیل موجک طیفی گراف امکان‌پذیر نیست. این هم نتیجه‌ای از ساختار گسسته دامنه گراف است.

## ۲.۵ موضعی سازی در کران مقیاس کوچک

یکی از انگیزه‌های اصلی در به کارگیری موجک‌ها، اینست که آن‌ها موضعی سازی همزمان در بخش بسامد و زمان (یا فضا) را فراهم می‌کنند. بنابر روش ساخت تبدیل، روشن است که اگر هسته  $g$  در دامنه طیفی موضعی سازی شود - به طور نه چندان دقیق، همان طور که عبارت فیلتر میان‌گذر را برای تشریح آن به کار بردیم- آن گاه موجک‌های وابسته طیفی گراف در بسامد موضعی سازی خواهند شد. به هر حال برای اینکه بتوانیم ادعا کنیم موجک‌های طیفی گراف می‌توانند هم در زمان و هم در فضا موضعی سازی شوند باید رفتارهای آن‌ها در دامنه فضا دقیقتر واکاوی کنیم.

برای موجک‌های کلاسیک روی خط حقیقی، موضعی سازی به سادگی دریافت می‌شود. اگر موجک مادر  $\psi(x)$  در بازه  $[-\epsilon, \epsilon]$  خوش موضعی سازی شده باشد آن‌گاه موجک  $\psi_{t,a}(x)$  درون  $[a-\epsilon t, a+\epsilon t]$  خوش موضعی شده است. علاوه بر این در حد هنگامیکه  $t \rightarrow \infty$ ،  $\psi_{t,a}(x) \rightarrow \delta(x-a)$  برای  $x \neq a$ . این وضعیت را برای موجک‌های طیفی گراف به سادگی نمی‌توان واکاوی کرد. زیرا مقیاس‌گذاری به طور ضمنی در دامنه فوریه گراف تعریف شده است. با این وجود نشان می‌دهیم که برای  $g$  به اندازه کافی نزدیک به صفر، موجک طیفی گراف نرمال شده  $\|\psi_{t,j}\|/\psi_{t,j}$  برای راس‌های به اندازه کافی دور از  $j$  و در کران مقیاس‌های ریز یعنی زمانی که  $t \rightarrow \infty$ ، به صفر میل می‌کنند. این نتیجه‌ها بیانی کمی از ویژگی‌های موضعی سازی موجک‌های طیفی گراف فراهم می‌کنند.

یک مفهوم ساده از موضعی سازی برای  $\psi_{t,n}$  توسط مقدار آن روی راس فاصله دار  $m$  ارائه شده است. برای نمونه باید انتظار داشت که هرگاه  $m$  و  $n$  جدا از هم باشند و  $t$  کوچک باشد،  $\psi_{t,n}(m)$  نیز کوچک باشد. یاد آور می‌شویم که  $\langle T_g^t \delta_n, \delta_m \rangle = \langle \psi_{t,n}, \delta_m \rangle = \psi_{t,n}(m)$ . عملگر  $T_g^t = g(t\mathcal{L})$  خود الحاقی است؛ زیرا  $\mathcal{L}$  خود-الحاقی است. این نشان می‌دهد که  $\langle \delta_n, T_g^t \delta_m \rangle = \psi_{t,n}(m)$ .

به عبارتی  $\psi_{t,m}(m)$  درایه‌های ماتریس عملگر  $T_g^t$  است.

شگرد ما هنگامی که  $t \rightarrow 0$ ، بر پایه تقریب زدن  $g(t\mathcal{L})$  با یک چندجمله‌ای از درجه پایین از  $\mathcal{L}$  است. همان گونه که با بررسی معادله (۲.۴.۴) به آسانی دیده می‌شود، عملگر  $T_g^t$  تنها وابسته به مقدارهای  $g_t(\lambda)$  در گستره‌ی طیف  $\{\lambda_\ell\}_{\ell=0}^{N-1}$  از  $\mathcal{L}$  است. به ویژه به مقدارهای  $g_t(\ell)$  برای  $\lambda > \lambda_{N-1}$  حساس نیست. اگر  $g(\lambda)$  در همسایگی مبدا هموار باشد، آنگاه زمانی که  $t$  به  $0$  نزدیک می‌شود رشد سریع در  $g_t(\lambda)$  می‌تواند روی بازه  $[0, \lambda_{N-1}]$  به همراه چندجمله‌ای تیلر  $g$  در مبدا تقریب زده شود. به منظور واگذار کردن بررسی ویژگی موضعی‌سازی از  $g$  به یک چند جمله‌ای تقریبی، نیاز داریم پایداری موجک‌ها را تحت آشفتگی‌های تابع مولد بیازماییم. این‌ها به همراه تقریب تیلر اجازه می‌دهند تا ما ویژگی‌های موضعی‌سازی توان‌های صحیح لاپلاسی  $\mathcal{L}$  را بیازماییم.

به منظور فرمولبندی دستاوردهای موضعی‌سازی خواسته شده، باید برداشتی از فاصله میان راس‌های  $m$  و  $n$  روی گراف وزن‌دار داشته باشیم. ما از اندازه کوتاهترین مسیر بهره خواهیم گرفت، یعنی مینیم تعداد یال‌های هر مسیری که میان  $m$  و  $n$  باشد

$$d_G(u, v) = \arg \min_s \{v_1, v_2, \dots, v_s\}. \quad (1.2.5)$$

$$u = v_1, v = v_s, \quad \omega_{v_r, v_{r+1}} > 0, \quad 1 \leq r < s$$

به یاد داشته باشید که در رابطه (۱.۲.۵)، مقدار وزن یال‌ها را نادیده گرفته شده‌اند. همچنین فاصله‌ی یکسانی بر تابع روی گراف  $G$  هنگامی که گراف دودویی شده باشد، تعریف می‌کند؛ یعنی گرافی که در آن وزن همه یال‌های ناصفر برابر یکای وزن است.

اینک نتیجه‌های موضعی‌سازی روی توان‌های صحیح لاپلاسی را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۲.۵. گیریم  $G$  گرافی وزن‌دار و  $\mathcal{L}$  لاپلاسی نرمال شده یا نرمال نشده گراف باشد و عدد صحیح  $s > 0$ . برای هر دو راس دلخواه  $v_m, v_n$  هرگاه  $d_G(v_m, v_n) > s$  باشد، آنگاه  $(\mathcal{L}^s)_{m,n} = 0$ .

برهان. نخست یادآور می‌شویم که  $\mathcal{L}_{i,j} = 0$  اگر  $i$  و  $j$  راس‌های ناهمبند باشند و یال ناصفری آن دو را متصل نکرده باشد. با پیایی نوشتن ضرب ماتریسی توسط جمع داریم

$$(\mathcal{L}^s)_{m,n} = \sum \mathcal{L}_{m,k_1} \mathcal{L}_{k_1,k_2} \cdots \mathcal{L}_{k_{s-1},k_n} \quad (2.2.5)$$

در اینجا جمع‌گیری روی هر  $(s-1)$ -دنباله‌های  $k_1, k_2, \dots, k_r$  برای  $1 \leq k_r \leq N$  انجام می‌شود. فرض خلف، گیریم  $(\mathcal{L}^s)_{m,n} \neq 0$  این تنها زمانی رخ می‌دهد که دست‌کم یکی از جمله‌های

<sup>۲</sup>دنباله‌ای با  $s-1$  جمله.



بالا ناصفر باشد. پس دنباله  $k_1, k_2, \dots, k_{s-1}$  چنان وجود دارد که  $L_{k_1, k_2} \neq 0, \dots, L_{k_{s-1}, n} \neq 0$ ، اینک با از حذف مقادیرهای تکراری ممکن  $k_r$ ، مسیری با طول کمتر یا برابر  $s$  از  $m$  به  $n$  به دست می آید. بنابراین  $d(m, n) \leq s$  و این با فرض خلف ناسازگار است.

□

اینک آزمونی را انجام می دهیم که نشان می دهد چگونه آشفتگی های هسته  $g$ ، روی موجک ها در بخش راس ها اثر می گذارند. اگر هسته های  $g$  و  $\bar{g}$  در برخی از ویژگی ها مشابه باشند، آنگاه موجک های به دست آمده نیز باید مشابه باشند. به طور دقیقتر لم زیر را بیان می نماییم.

لم ۲.۲.۵. فرض کنید  $\psi_{t,n} = T_g^t \delta_n$  و  $\tilde{\psi}_{t,n} = T_{\bar{g}}^t \delta$  موجک هایی باشند که در مقیاس  $t$  با هسته های  $g$  و  $\bar{g}$  ساخته شده اند. اگر برای هر  $\lambda$  در  $[\circ, \lambda_{N-1}]$  داشته باشیم  $|g(t\lambda) - \bar{g}(t\lambda)| \leq M(t)$  آنگاه برای هر  $m$ ،  $|\psi_{t,n}(m) - \tilde{\psi}_{t,n}(m)| \leq M(t)$ ، همچنین  $|\psi_{t,n} - \tilde{\psi}_{t,n}|_p \leq \sqrt{NM}(t)$ . برهان. نخست یادآور می شویم که  $\psi_{t,n}(m) = \langle \delta_m, g(t\mathcal{L})\delta_n \rangle$  بنابراین

$$\begin{aligned} |\psi_{t,n}(m) - \tilde{\psi}_{t,n}(m)| &= |\langle \delta_m, (g(t\mathcal{L}) - \bar{g}(t\mathcal{L}))\delta_n \rangle| \\ &= \left| \sum_{\ell} \chi_{\ell}(m)(g(t\lambda_{\ell}) - \bar{g}(t\lambda_{\ell}))\bar{\chi}_{\ell}(n) \right| \\ &\leq M(t) \sum_{\ell} |\chi_{\ell}(m)\bar{\chi}_{\ell}(n)| \end{aligned} \quad (۳.۲.۵)$$

سطر دوم با استفاده از رابطه پارسوال (۶.۲.۴) به دست می آید. کران بالای مجموع روی  $\ell$ ، با به کارگیری نامساوی کشی-شوارتز کمتر مساوی ۱ می شود، زیرا

$$\sum_{\ell} |\chi_{\ell}(m)\bar{\chi}_{\ell}(n)| \leq \left( \sum_{\ell} |\chi_{\ell}(m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\ell} |\bar{\chi}_{\ell}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۴.۲.۵)$$

و برای هر  $m$  داریم  $\sum_{\ell} |\chi_{\ell}(m)|^2 = 1$  زیرا  $\chi_{\ell}$  یک پایه متعامد کامل می سازد. با به کارگیری این کران در (۳.۲.۵) گزاره نخست اثبات می شود. گزاره دوم هم بی درنگ به دست می آید، زیرا

$$\|\psi_{t,n} - \tilde{\psi}_{t,n}\|_p^2 = \sum_m \left( \psi_{t,n}(m)\tilde{\psi}_{t,n}(m) \right)^2 \leq \sum_m M(t)^2 = NM(t)^2 \quad (۵.۲.۵)$$

□

اینک آخرین پیامد موضعی‌سازی برای هسته‌های  $g$  را اثبات می‌کنیم؛ که نشان می‌دهد یک صفر با چندگانی صحیح در مبدا داریم. چنین هسته‌هایی را می‌توان با یک تک جمله‌ای برای مقیاس‌های کوچک تقریب زد.

لم ۳.۲.۵. فرض کنید  $g$ ،  $K + 1$  بار پیوسته مشتق‌پذیر باشد و برای هر  $r \leq K$  داشته باشیم  $g^{(r)}(\circ) = \circ$ ،  $g(\circ) = \circ$  و  $g^{(K)}(\circ) = C \neq \circ$ . همچنین فرض کنید برای هر  $\lambda$  در  $[\circ, t'\lambda_{N-1}]$  وجود دارد  $t' > \circ$  به گونه‌ای که  $|g^{(K+1)}(\lambda)| \leq B$ . آنگاه برای هر  $t \leq t'$  و برای

$$\tilde{g}(t\lambda) = (C/K!)(t\lambda)^K$$

$$M(t) = \sup_{\lambda \in [\circ, \lambda_{N-1}]} |g(t\lambda) - \tilde{g}(t\lambda)| \leq t^{K+1} \frac{\lambda_{N-1}^{K+1}}{(K+1)!} B. \quad (۶.۲.۵)$$

برهان. چون  $K - 1$  مشتق نخست  $g$  صفر است، بسط تیلور به همراه جمله باقیمانده نشان می‌دهد برای هر مقدار  $t$  و  $\lambda$  وجود دارد  $x^*$  در  $[\circ, t\lambda]$  به طوری که

$$g(t\lambda) = C \frac{(t\lambda)^K}{K!} + g^{K+1}(x^*) \frac{(t\lambda)^{K+1}}{(K+1)!}. \quad (۷.۲.۵)$$

اینک  $t \leq t'$  را ثابت بگیرید. برای هر  $\lambda$  عضو  $[\circ, \lambda_{N-1}]$  داریم  $t\lambda \leq t'\lambda_{N-1}$  و چون  $x^*$  در  $[\circ, t'\lambda_{N-1}]$  است و  $|g^{(K+1)}(x^*)| \leq B$ ، از این رو داریم

$$|g(t\lambda) - \tilde{g}(t\lambda)| \leq B \frac{t^{K+1} \lambda^{K+1}}{(K+1)!} \leq B \frac{t^{K+1} \lambda_{N-1}^{K+1}}{(K+1)!}. \quad (۸.۲.۵)$$

از آن‌جا که رابطه بالا برای هر  $\lambda$  در  $[\circ, \lambda_{N-1}]$  برقرار است. با گرفتن سوپریم روی  $\lambda$  نتیجه خواسته شده به دست می‌آید.  $\square$

اکنون آماده‌ایم نتیجه موضعی‌سازی کامل را بیان کنیم. به یاد داشته باشد که بنا به انتخاب نرمال‌سازی برای موجک‌ها، به طور کلی برای هر  $m$  و  $n$  هنگامی که  $t \rightarrow \circ$  داریم  $\psi_{t,n}(m) \rightarrow \circ$ . از این رو یک گزاره ناپوچ<sup>۳</sup> از موضعی‌سازی باید دربر دارنده عامل بازنرمال‌سازی در مرز مقیاس‌های کوچک باشد.

قضیه ۴.۲.۵. فرض کنید  $G$  گرافی وزن‌دار با لاپلاسی  $\mathcal{L}$  باشد. و همچنین فرض می‌کنید  $g$  هسته‌ای باشد که فرض‌های لم ۳.۲.۵ با اعداد ثابت  $t'$  و  $B$  داراست. فرض کنیم  $m$  و  $n$  راس‌های از  $G$  به گونه‌ای باشند که  $d_G(m, n) > K$ . آنگاه برای هر  $t < \min(t', t'')$ ، ثابت‌های  $D$  و  $t''$  وجود دارند به طوری که

$$\frac{\psi_{t,n}(m)}{\|\psi_{t,n}\|} \leq Dt. \quad (۹.۲.۵)$$

<sup>۳</sup>گزاره‌ای که ارزش درستی داشته باشد.

برهان. قرار دهید  $\tilde{g}(\lambda) = \frac{g^{(K)}(\circ)}{K!} \lambda^K$  و  $\tilde{\psi}_{t,n} = T_{\tilde{g}}^t \delta_n$  داریم

$$\tilde{\psi}_{t,n}(m) = g^{(K)}(\circ) K! t^K \langle \delta_m, \mathcal{L}^K \delta_n \rangle = \circ \quad (۱۰.۲.۵)$$

بنابه لم ۱۰.۲.۵ چون  $d_G(m, n) > K$  برای  $C' = \frac{\lambda_{N-1}^{K+1}}{(K+1)!} B$  بنابه نتیجه های لم های ۲.۲.۵ و ۳.۲.۵ داریم

$$|\psi_{t,n}(m) - \tilde{\psi}_{t,n}(m)| = |\psi_{t,n}(m)| \leq t^{K+1} C'. \quad (۱۱.۲.۵)$$

قرار دهید  $\psi_{t,n} = \tilde{\psi}_{t,n} + (\psi_{t,n} - \tilde{\psi}_{t,n})$  با استفاده از نامساوی مثلث به دست می آید

$$\|\tilde{\psi}_{t,n}\| - \|\psi_{t,n} - \tilde{\psi}_{t,n}\| \leq \|\psi_{t,n}\|. \quad (۱۲.۲.۵)$$

می توانیم بی درنگ  $\|\tilde{\psi}_{t,n}\| = t^K \frac{g^{(K)}(\circ)}{K!} \|\mathcal{L}^K \delta_n\|$  را محاسبه کنیم. و از لم ۳.۲.۵ داریم

$$\|\psi_{t,n} - \tilde{\psi}_{t,n}\| \leq \sqrt{N} t^{K+1} \frac{\lambda_{N-1}^{K+1}}{(K+1)!} B.$$

این ها با هم بر این دلالت دارند که سمت چپ (۱۱.۲.۵) بزرگتر مساوی عبارت زیر است

$$t^K \left( \frac{g^{(K)}(\circ)}{K!} \|\mathcal{L}^K \delta_n\| - t \sqrt{N} \frac{\lambda_{N-1}^{K+1}}{(K+1)!} B \right).$$

به استفاده از رابطه (۱۱.۲.۵) و با فرض  $a = \frac{g^{(K)}(\circ)}{K!} \|\mathcal{L}^K \delta_n\|$  و  $b = \sqrt{N} \frac{\lambda_{N-1}^{K+1}}{(K+1)!} B$  نشان می دهند

$$\frac{\psi_{t,n}(m)}{\|\psi_{t,n}\|} \leq \frac{tC'}{a - tb}. \quad (۱۳.۲.۵)$$

یک محاسبه ساده نشان می دهد  $\frac{C't}{a-tb} \leq \frac{C't}{a}$  اگر  $t \leq \frac{a}{tb}$ . با قرار دادن  $D = \frac{C'K!}{g^{(K)}(\circ) \|\mathcal{L}^K \delta_n\|}$  و

□

$$t'' = \frac{g^{(K)}(\circ) \|\mathcal{L}^K \delta_n\| (K+1)}{2\sqrt{N} \lambda_{N-1}^{K+1} B}$$

نکته ۵.۲.۵. همان طور که دیدیم، پیامدهای موضعی سازی - بی آنکه از وزن یال ها بهره گیرند - کوتاه ترین اندازه مسیر تعریف شده را به کار می گیرند. این روش تنها برای گراف های وزن دار تنگ که در آن ها تعداد چشمگیری از یال ها دقیقا صفر هستند، کارآمد خواهد بود. بسیاری از گراف ها در مسائل کاربردی تنگ هستند؛ بنابراین رده گراف های وزن دار اهمیت کاربردی دارند.

### ۳.۵ قاب‌های موجک طیفی گراف

موجک‌های طیفی گراف وابسته به پارامتر مقیاس پیوسته‌ی  $t$  هستند. در هر محاسبه کاربردی، باید  $t$  در چند مقیاس نمونه‌برداری شده باشد. با گزینش گردایه‌ای  $J$  تایی  $\{t_j\}_{j=1}^J$  از مقیاس‌ها، دسته‌ای  $NJ$  تایی از موجک  $\psi_{t_j, n}$  و همچنین  $N$  تا تابع مقیاس‌گذار به دست می‌آید.

طبیعی است که بپرسیم این گردایه از بردارها چگونه برای نمایش تابع‌های روی راس‌های گراف رفتار خواهند کرد. ما موجک‌ها را در مقیاس‌های گسسته همچون یک قاب در نظر می‌گیریم و رفتارهای آن را با به دست آوردن کران‌های قاب بررسی می‌کنیم.

کران‌های قاب  $A$  و  $B$ ، اطلاعاتی درباره پایداری عددی بازیابی بردار  $f$  از ضرب داخلی مقادیر  $\langle f, \Gamma_k \rangle$  فراهم می‌سازند. کران‌های پایین و بالا به ضریب‌های تابع مقیاس‌گذار  $S[f](n)$  و ضریب‌های موجک  $W_G[f](t_j, n)$  برای قابی که شامل تابع‌های مقیاس‌گذار و موجک‌های طیفی گراف در مقیاس‌های نمونه‌برداری شده، وابسته‌اند. همان‌گونه که در بخش ۵.۵ خواهیم دید سرعت همگرایی الگوریتم‌های به کار رفته برای وارون تبدیل موجک طیفی گراف وابسته به کران‌های قاب خواهند بود.

قضیه ۱.۳.۵. گردایه‌ای از مقیاس‌های  $\{t_j\}_{j=1}^J$  مفروض است، گردایه  $\{\phi_n\}_{n=1}^N \cup \{\psi_{t, n}\}_{j=1}^J, n=1, \dots, N$  با در نظر گرفتن  $G(\lambda) = h^2(\lambda) + \sum_j g(t_j \lambda)^2$ ، یک قاب با کران‌های  $A$  و  $B$  می‌سازد به طوری که

$$A = \min_{\lambda \in [0, \lambda_{N-1}]} G(\lambda) \quad (1.3.5)$$

$$B = \max_{\lambda \in [0, \lambda_{N-1}]} G(\lambda) \quad (2.3.5)$$

برهان.  $f$  را ثابت می‌گیریم؛ با به کارگیری (۶.۴.۴) و پس از بازاریابی و  $\delta_{\ell, \ell'} = \overline{\chi_{\ell}(n) \chi_{\ell'}(n)}$ ، داریم

$$\begin{aligned} \sum_n |W_G[f](t, n)|^2 &= \sum_n \sum_{\ell} g(t\lambda_{\ell}) \chi_{\ell}(n) \hat{f}(\ell) \sum_{\ell'} \overline{g(t\lambda_{\ell'}) \chi_{\ell'}(n) \hat{f}(\ell')} \\ &= \sum_{\ell} |g(t\lambda_{\ell})|^2 |\hat{f}(\ell)|^2. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

به همین روش

$$\sum_n |S_f(n)|^2 = \sum_{\ell} |h(\lambda_{\ell})|^2 |\hat{f}(\ell)|^2 \quad (4.3.5)$$

مجموع مربعات ضرب داخلی  $f$  در بردارهای درون قاب  $F$  را با  $Q$  نشان می‌دهیم. با به کارگیری (۳.۳.۵) و (۴.۳.۵) داریم

$$Q = \sum_{\ell} \left( |h(\lambda_{\ell})|^2 + \sum_{j=1}^J |g(t_j \lambda_{\ell})|^2 \right) |\hat{f}(\ell)|^2 = \sum_{\ell} G(\lambda_{\ell}) |\hat{f}(\lambda_{\ell})|^2 \quad (۵.۳.۵)$$

آن‌گاه بنا به تعریف  $A$  و  $B$  داریم

$$A \sum_{\ell=0}^{N-1} |\hat{f}(\ell)|^2 \leq Q \leq B \sum_{\ell=0}^{N-1} |\hat{f}(\ell)|^2 \quad (۶.۳.۵)$$

□ با به کارگیری رابطه پارسوال،  $\|f\|^2 = \sum_{\ell} |\hat{f}(\ell)|^2$  قضیه اثبات می‌شود.

## ۴.۵ تقریب چندجمله‌ای و تبدیل موجک طیفی گراف سریع

به طور صریح تبدیل موجک طیفی گراف را روی فضای تابع‌های ویژه لاپلاسی گراف تعریف کردیم. یک روش ساده و بی دردسر برای به دست آوردن تبدیل، به کارگیری مستقیم رابطه (۶.۴.۴) است. که این نیازمند به محاسبه مستقیم همه بردارها و ویژه و مقادیرهای ویژه  $L$  است. این روش کار برای گراف‌های بزرگ کارآمد نیست. روال‌های چند منظوره مقادیرهای ویژه مانند الگوریتم QR دارای پیچیدگی محاسباتی  $O(N^3)$  است و نیازمند  $O(N^2)$  حافظه است [۱۳]. محاسبه مستقیم تبدیل موجک طیفی گراف از روش قطری‌سازی تنها برای گراف‌هایی که کمتر از پانصد راس دارند شدنیست. از سوی دیگر مسائل پیرامون پردازش سیگنال و تصویر درگیر داده‌هایی با صدها هزار یا هزاران هزار بُعد هستند. به روشنی، تبدیلی سریع که از محاسبه طیف کامل  $L$  پرهیز کند، برای تبدیل موجک طیفی گراف نیاز است تا ابزاری سودمند برای کاربردهای محاسباتی باشد.

ما الگوریتمی سریع برای محاسبه تبدیل موجک طیفی گراف معرفی می‌کنیم. که بر پایه تقریب‌زدن هسته‌های مولد مقیاس‌گذاری شده  $g$  با چندجمله‌هایی از درجه پایین است. سپس با داشتن این تقریب، ضرب‌های موجک در هر مقیاس می‌توانند مانند یک چندجمله‌ای بر حسب  $L$  که روی داده‌های ورودی <sup>۴</sup> به کار بسته می‌شود، محاسبه شوند. این‌ها می‌توانند با استفاده از روشی که تنها با ضرب پی‌درپی ماتریس-بردار  $L$  را بردار - گذار<sup>۵</sup> می‌کند محاسبه شوند. این پیامدها در یک الگوریتم کارآمد زمانی که گراف تنک است - یعنی دارای تعداد کمی یال است - سودمندند.

<sup>۴</sup>input data

<sup>۵</sup>access، در علم رایانه به عمل خواندن و یا نوشته داده‌های ذخیره شده گفته می‌شود.

نخست نشان می‌دهیم که تقریب چندجمله‌ای می‌تواند بر روی بازه کراندار در بردارنده طیف  $\mathcal{L}$  به دست آورده شود.

لم ۱.۴.۵. فرض می‌کنیم  $\lambda_{\max} \geq \lambda_{N-1}$  کران بالایی برای طیف  $\mathcal{L}$  باشد. برای  $t > 0$  ثابت، فرض کنیم  $p(x)$  تقریبی چندجمله‌ای از  $g(tx)$  با خطای  $L_\infty$  باشد و  $B = \sup_{x \in [0, \lambda_{\max}]} |g(tx) - p(x)|$ . آن‌گاه ضریب‌های موجک تقریبی  $\tilde{W}_G[f](t, n) = (p(\mathcal{L})f)_n$  در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\left| W_G[f](t, n) - \tilde{W}_G[f](t, n) \right| \leq B \|f\|. \quad (1.4.5)$$

برهان. از رابطه (۶.۴.۴) و با به کارگیری نامساوی کشی شوارتز و متعامد یک‌بودن  $\chi_\ell$ ها به دست آید

$$\begin{aligned} \left| W_G[f](t, n) - \tilde{W}_G[f](t, n) \right| &= \left| \sum_{\ell} g(t\lambda_{\ell}) \hat{f}(\ell) \chi_{\ell}(n) - \sum_{\ell} p(\lambda_{\ell}) \hat{f}(\ell) \chi_{\ell}(n) \right| \\ &\leq \sum_{\ell} |g(t\lambda_{\ell}) - p(\lambda_{\ell})| \left| \hat{f}(\ell) \chi_{\ell}(n) \right| \\ &\leq B \|f\|. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

□

نکته ۲.۴.۵. پیامدهای بالا برای هر  $\lambda_{\max} \geq \lambda_{N-1}$  برقرار می‌باشد. محاسبه مقدارهای ویژه اکسترمال عملگر خود-الحاق مساله‌ای است که به خوبی مطالعه شده است و الگوریتم‌های کارآمدی وجود دارند که تنها با ضرب ماتریس-بردار به  $\mathcal{L}$  دستیابی دارند. به عنوان مثال فرآیند آرنولد یا روش ژاکوبی-دیویدسون [۱۲، ۱۳] را می‌توان نامبرد. همچنین یک تقریب خوب برای  $\lambda_{N-1}$  می‌تواند بسیار کم هزینه‌تر از به دست آوردن سراسر طیف  $\mathcal{L}$  باشد.

برای یک چندجمله‌ای از درجه  $M$ ، اگر  $p$  چندجمله‌ای مینیماکس<sup>۶</sup> از درجه  $M$  روی بازه  $[0, \lambda]$  باشد، کران بالای خطا لم ۱.۶ مینیمم خواهد شد. چندجمله‌ای‌های تقریبی مینیماکس به خوبی بررسی شده‌اند. همچنین می‌توان نشان داده موجود و یکتا می‌باشند [۱]. چندین الگوریتم برای محاسبه چندجمله‌ای مینیماکس وجود دارد، برای مثال می‌توان الگوریتم ریمز<sup>۷</sup> را نام برد [۵].

با این حال، در اینجا ما از چندجمله‌ای تقریبی به دست آمده از بسط مختوم چبیشف برای  $g(tx)$  استفاده خواهیم کرد. می‌توان نشان داد که برای تابع‌های تحلیلی در بیضی شامل بازه تقریب، بسط چبیشف مختوم خود یک چندجمله‌ای تقریبی مینیماکس است [۶]. چندجمله‌ای‌های مینیماکس از درجه

<sup>۶</sup>Minimax Polynomial

<sup>۷</sup>Remez Algorithm

$m$  به دلیل این که خطای تقریب‌شان به مقدار اکستریمال یکسان برای  $m + 2$  نقطه در دامنه‌شان نزدیک می‌شود، متمایز شده‌اند. زیرا آن‌ها خطای تقریب را در سراسر بازه پخش می‌کنند. ما این نکته را برای هسته‌های موجک مشاهده کردیم و در این کار از آن استفاده کردیم. نتیجه بسط چبیشف مختوم در خطای ماکسیم تنها کمی بیشتر از خطای چندجمله‌ای مینیماکس بود؛ و خطای تقریب بسیار اندکی داشت. همچنین در جایی که هسته موجک تقریب زده شود تغییرات هموار خواهد بود. یک مثال از آن در شکل ۱.۵ نشان داده شده است. مشاهده کردیم هر کجا که موجک‌ها را بتوان به روش مستقیم در دامنه طیفی محاسبه کرد مانند گراف‌های وزن دار کوچک، بسط چبیشف مختوم اندکی خطای تقریبی کمتری نسبت چند جمله‌ای‌های تقریبی مینیماکس محاسبه شده توسط الگوریتم رمز دارد.

یک دلیل دیگر که از چندجمله‌ای تقریبی به دست آمده از بسط چبیشف مختوم استفاده می‌کنیم به کارگیری رفتار بازگشتی چندجمله‌ای‌های چبیشف برای محاسبه کارآمد ضریب‌های موجک تقریبی است. نمایی کلی درباره تقریب چندجمله‌ای‌های چبیشف را می‌تواند در [۱۰] یافت. در این جا برخی از ویژگی‌های کلیدی آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

با فرض  $T_0 = 1$  و  $T_1 = y$ ، چندجمله‌ای  $T_k(y)$  را با دستور بازگشتی  $T_k(y) = 2yT_{k-1}(y) - T_{k-2}(y)$  می‌سازیم. برای هر  $y$  در  $[-1, 1]$  در مثلثاتی  $T_k(y) = \cos(k \cos^{-1}(y))$  صدق می‌کنند و این نشان می‌دهد برای هر  $y$  در  $[-1, 1]$ ،  $T_k(y)$  میان  $-1$  و  $1$  قرار می‌گیرد. چندجمله‌ای‌های چبیشف یک پایه متعامد یکه برای  $\mathcal{L}^2\left([-1, 1], \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)$  یعنی فضای هیلبرت توابع مربعی انتگرال‌پذیر نسبت به اندازه  $dy/\sqrt{1-y^2}$  می‌سازند. همچنین در رابطه زیر نیز صدق می‌کنند

$$\int_{-1}^1 \frac{T_l(y)T_m(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = \begin{cases} \delta_{l,m}\pi/2 & m, l > 0 \\ \pi & m = l = 0 \end{cases} \quad (3.4.5)$$

هر تابع  $h$  در  $\mathcal{L}^2\left([-1, 1], \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)$  یک سری چبیشف همگرا (با نرم  $L^2$ ) دارد، یعنی

$$h(y) = \frac{1}{\pi}c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(y) \quad (4.4.5)$$

با ضریب‌های چبیشف

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(y)h(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\theta)h(\cos(\theta))d\theta. \quad (5.4.5)$$

اینک گردایه‌ای ثابت از مقیاس‌های  $t_n$  را در نظر می‌گیریم. برای هر  $n$ ، با انتقال دامنه به صورت  $x = a(y + 1)$  با  $a = \lambda_{max}/2$  می‌توان برای هر  $x$  در  $[\circ, \lambda_{max}]$  تقریب  $g(t_n x)$  را به دست آورد. چند جمله‌ای چبیشف انتقال یافته را با  $\bar{T}_k(x) = T_k(\frac{x-a}{a})$  نشان می‌دهیم. پس می‌توانیم برای هر  $x$  در  $[\circ, \lambda_{max}]$  بنویسیم

$$g(t_n x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_{n,\circ} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} \bar{T}_k(x). \quad (۶.۴.۵)$$

$$c_{n,k} = \frac{2}{\pi} \int_{\circ}^{\infty} \cos(k\theta) g(t_n(a(\cos(\theta) + 1))) d\theta \quad (۷.۴.۵)$$

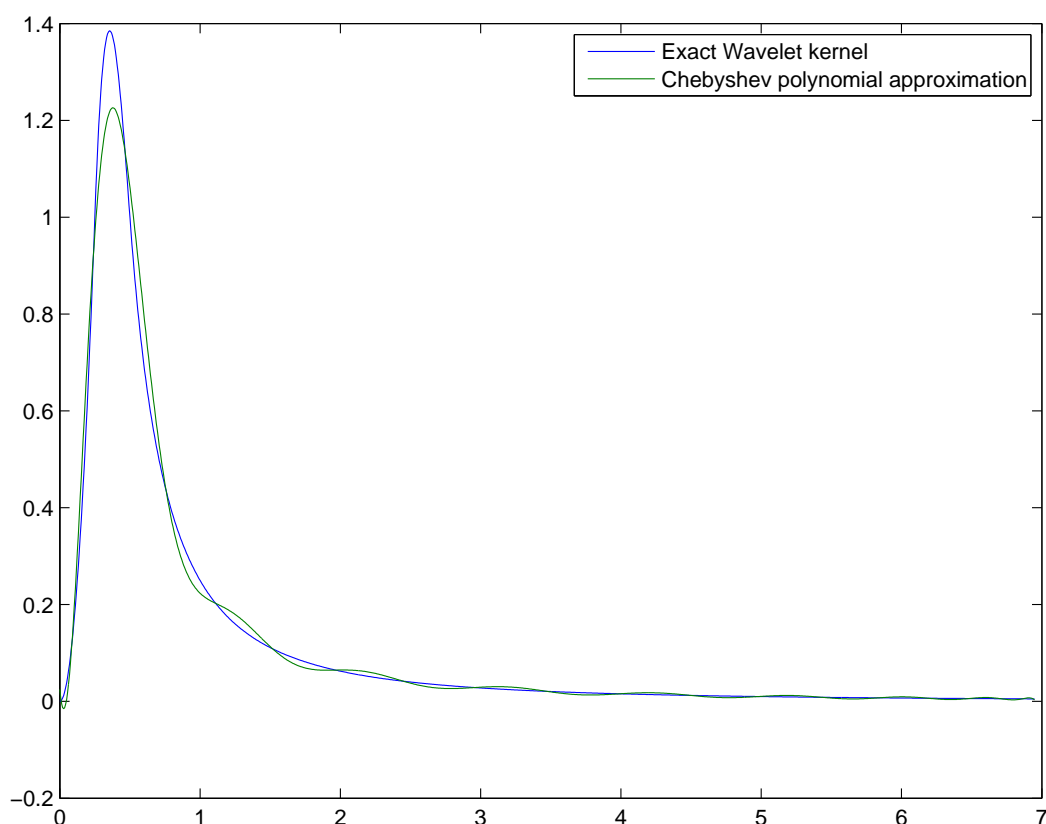
برای هر مقیاس  $t_j$ ، چند جمله‌ای تقریبی با بریدن  $M_j$  جمله از چند جمله‌ای (۶.۴.۵) به دست می‌آید. با به کارگیری همین رویه هسته تابع مقیاس‌گذار  $h$  را با  $p$  تقریب می‌زنیم. انتخاب کردن مقدارهای  $M_j$  می‌تواند چالشی در طراحی مطرح شود، سبک-سنگین کردن میان هزینه محاسبات و درستی پاسخ‌ها در این جا خودنمایی می‌کند. تبدیل موجک طیفی گراف سریع ضریب‌های موجک و تابع مقیاس‌گذار را به صورت زیر تقریب می‌زند

$$\begin{aligned} \tilde{W}[f](t_j, n) &= \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_{j,\circ} f + \sum_{k=1}^{M_j} c_{j,k} \bar{T}_k(\mathcal{L}) f \right)_n \\ \tilde{S}[f](n) &= \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_{\circ,\circ} f + \sum_{k=1}^{M_{\circ}} c_{\circ,k} \bar{T}_k(\mathcal{L}) f \right)_n \end{aligned} \quad (۸.۴.۵)$$

کاربردپذیری این روش را کارآمدی محاسبه  $\bar{T}_k(\mathcal{L}) f$  تضمین می‌کند. مهمتر از همه، می‌توانیم بازگشتی چبیشف را که برای هر  $k < M_j$  به کار ببریم، که در هر محاسبه تنها برای ضرب ماتریس-بُردار،  $\mathcal{L}$  بُردار-گُزار می‌شود. چون چند جمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته شده در این رابطه بُردار-گُزار می‌شود.  $\bar{T}_k(x) = \frac{1}{a}(x - a)\bar{T}_{k-1}(x) - \bar{T}_{k-2}(x)$  صدق می‌کنند، برای هر  $f \in \mathbb{R}^N$  داریم

$$\bar{T}_k(\mathcal{L}) f = \frac{1}{a}(\mathcal{L} - aI)(\bar{T}_{k-1}(\mathcal{L}) f - \bar{T}_{k-2}(\mathcal{L}) f). \quad (۹.۴.۵)$$





شکل ۱۰۵: هسته موجک (آبی)، چندجمله‌ای تقریبی چبیشف (سبز)

با فرض هر  $\bar{T}_k(\mathcal{L})f$  به عنوان یک نماد، این دستور نشان می‌دهد که بردار  $\bar{T}_k(\mathcal{L})f$  می‌تواند از بردارهای  $\bar{T}_{k-1}(\mathcal{L})f$  و  $\bar{T}_{k-2}(\mathcal{L})f$  به دست آید، که هزینه محاسباتی آن با یک ضرب ماتریس-بردار در  $\mathcal{L}$  کنترل می‌شود.

بسیاری از گراف‌های وزن‌دار دلخواه تنگ هستند، یعنی که تعداد کمی یال ناصفر دارند. با بهره‌گیری از نمایش ماتریس تنگ هزینه محاسباتی به کار بستن  $\mathcal{L}$  روی یک بردار متناسب با  $|E|$  یعنی تعداد یال‌های ناصفر گراف است. برای  $k \leq M$ ، پیچیدگی محاسباتی به دست آوردن چند جمله‌ای  $T_k(\mathcal{L})$  برابر با  $O(M|E|)$  است. تابع مقیاس‌گذار و ضریب‌های موجک در مقیاس‌های گوناگون از یک مجموعه یکسان از  $T_k(\mathcal{L})f$  تشکیل شده‌اند ولی آن‌ها را با دیگر ضریب‌های  $c_{j,k}$  متفاوت تولید کرده‌ایم. بنابراین محاسبه چندجمله‌ای چبیشف با استفاده از این روش نیاز به تکرار ندارد؛ به جای اینکه ضریب‌ها در هر مقیاس محاسبه شوند، می‌توان با ذخیره سازی هر جمله به شکل  $c_{j,k}T_k(\mathcal{L})f$  مثل  $T_k(\mathcal{L})$  که برای هر  $k \leq M$  آن‌ها را محاسبه کرد. این کار نیازمند  $O(N)$  عمل در هر مقیاس  $j$  برای  $k \leq M_j$  است.

پیچیدگی کلی محاسباتی توسط  $O(M|E| + N \sum_{j=0}^J M_j)$  برای تبدیل موجک طیفی گراف سریع به دست می‌آید، که  $J$  تعداد مقیاس‌های موجک است. همچنین برای رده‌ای از گراف‌هایی که  $|E|$  رابطه خطی با  $N$  دارد، همانند گراف‌هایی که درجه ماکسیمال آن‌ها محدود شده است، تبدیل موجک طیفی گراف سریع پیچیدگی محاسباتی  $O(N)$  دارد. توجه کنید، اگر بتوان پیچیدگی محاسبه را با  $T_k(\mathcal{L})f$  کنترل کرد، از این که انتخاب  $M_j$  با  $j$  تغییر می‌کند، کمی سود خواهیم برد.

به کارگیری بازگشتی (۸.۴.۵) نیاز به حافظه‌ای به اندازه  $3N$  دارد. در کل حافظه مورد برای پیاده‌سازی مستقیم تبدیل موجک طیفی گراف سریع برابر  $N(J+1) + 3N$  می‌شود.

## ۱.۴.۵ محاسبه سریع الحاقی

گردایه ثابتی از مقیاس‌ها  $\{t_j\}_{j=1}^J$  داده شده است، تابع‌های مقیاس‌گذار را هم به آن می‌افزاییم. می‌توانیم تبدیل موجک را همانند یک نگاشت خطی از  $W : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N(J+1)}$  بررسی کنیم به طوری که

$$Wf = ((T_h f)^T, (T_g^t f)^T, \dots, (T_g^{t_j} f)^T)^T.$$

فرض کنید  $\tilde{W}$  متناظر با تبدیل موجک تقریبی که با تقریب زدن تبدیل موجک سریع گراف تعریف می‌شود باشد. یعنی  $\tilde{W}f = ((p_0(\mathcal{L})f)^T, (p_1(\mathcal{L})f)^T, \dots, (p_J(\mathcal{L})f)^T)^T$  نشان می‌دهیم  $\tilde{W}^* : \mathbb{R}^{N(J+1)} \rightarrow \mathbb{R}^N$  و  $W^*W : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  هر دو می‌توانند با به کارگیری چند جمله‌ای تقریب چیشف به طور کارآمد محاسبه شوند. این موضوع مهم است، زیرا چندین روش برای وارون کردن تبدیل موجک وجود دارد و یا به کارگیری تبدیل طیفی گراف در یکنواخت سازی <sup>۸</sup> را می‌توان با عملگر خود-الحاقی فرمول بندی کرد. در بخش ۵.۵ در این باره بیشتر صحبت خواهیم کرد.

برای هر  $\eta$  در  $\mathbb{R}^{N(J+1)}$ ، آن را همچون چندتایی مرتب در نظر می‌گیریم یعنی  $\eta = (\eta_0^T, \eta_1^T, \dots, \eta_J^T)^T$  که برای  $J \geq 1$  هر  $\eta_j$  در  $\mathbb{R}^N$  است. هر یک از  $\eta_j$ ‌ها برای  $j \geq 1$  متناظر با مقیاس  $t_j$  و نمایش

<sup>۸</sup>regularization

ضریب‌های تابع مقیاس‌گذار توسط  $\eta_0$  می‌تواند همانند یک زیر بانده<sup>۹</sup> تصور شود. داریم

$$\begin{aligned} \langle \eta, Wf \rangle_{N(J+1)} &= \langle \eta_0, T_h f \rangle + \sum_{j=0}^J \langle \eta_j, T_g^{t_j} f \rangle_N \\ &= \langle T_h^* \eta_0, f \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^J (T_g^{t_j}) \star \eta_j, f \right\rangle \\ &= \left\langle T_h \eta_0 + \sum_{j=1}^J T_g^{t_j} \eta_j, f \right\rangle_N \end{aligned} \quad (10.4.5)$$

زیرا  $T_h$  و هر یک از  $T_g^{t_j}$ ها خود الحاق‌اند. چون (۱۰.۴.۵) برای هر  $f$  در  $\mathbb{R}^N$  برقرار است، داریم

$$W^* \eta = T_h \eta_0 + \sum_{j=1}^J T_g^{t_j} \eta_j. \quad (11.4.5)$$

یعنی عملگر الحاقی با به کارگیری دوباره عملگر موجک یا تابع مقیاس‌گذار متناظر بر روی هر زیر بانده و جمع همه مقیاس‌ها به دست می‌آید.

فرمول (۱۱.۴.۵) می‌تواند مانند رابطه (۸.۴.۵) برای تبدیل پیشرو توسط چندجمله‌ای تقریبی چبیشف سریع محاسبه شود. به عنوان مثال  $\tilde{W}^* \eta = \sum_{j=0}^J p_j(\mathcal{L}) \eta_j$ . یاد آور می‌شویم این روش همان الحاقی از تبدیل پیشرو تقریبی را محاسبه می‌کند، به طوری که می‌توان با جایگذاری  $P_0(\mathcal{L})$  بجای  $T_h$  و  $P_j(\mathcal{L})$  بجای  $T_g^{t_j}(\mathcal{L})$  در (۱۰.۴.۵) این را بررسی کرد.

همچنین می‌توانیم روشی چندجمله‌ای برای بدست آوردن  $\tilde{W}^* \tilde{W}$  نیز بیابیم. به زبان ساده، نخست  $\tilde{W}$  و سپس  $\tilde{W}^*$  را اعمال می‌کنیم. توسط روش تبدیل موجک طیفی گراف سریع شامل محاسبه بسط چند جمله‌ای چبیشف با  $2J$  جمله خواهد بود. پیش محاسبه مجموع مربعات ضریب‌های چند جمله‌ای می‌تواند به کارگیری چند جمله‌ای چبیشف را دو درجه بکاهد و در نتیجه هزینه محاسبه را با ضریبی از  $J$  می‌کاهد. نخست، داریم

$$\tilde{W}^* \tilde{W} = \sum_{j=0}^J p_j(\mathcal{L}) (p_j(\mathcal{L}) f) = \left( \sum_{j=0}^J (p_j(\mathcal{L}))^2 \right) f \quad (12.4.5)$$

<sup>۹</sup>subband

فرض کنید  $P(x) = \sum_{j=0}^J (p_j(x))^2$  باشد که درجه  $M' = 2 \max\{M_j\}$  دارد. هدف ما نمایش  $P$  بر پایه چیشف انتقال یافته است، مانند  $P(x) = \frac{1}{4}d_0 + \sum_{k=1}^{M'} d_k \bar{T}_k(x)$ . چند جمله‌ای‌های چیشف رفتار ضربی زیر را دارند<sup>۱۰</sup>

$$T_k(x)T_l(x) = \frac{1}{4}(T_{k+l}(x) + T_{|k-l|}(x)). \quad (۱۳.۴.۵)$$

این رفتار ضربی را برای به دست آوردن ضریب‌های چیشف  $d_k$  برحسب جمله‌ای‌هایی توسط ضریب‌های چیشف  $c_{j,k}$  برای هر از  $p_j$  به کار خواهیم برد. بیان صریح موضوع این کمی بغرنج است، زیرا در  $k=0$  ضریب‌های چیشف در عبارت (۶.۴.۵) دو قسمت شده‌اند. برای ساده‌تر شدن، برای هر  $k \geq 1$  قرار می‌دهیم  $c'_{j,k} = c_{j,k}$  و  $c'_{j,0} = \frac{1}{4}c_{j,0}$ ، پس  $p_j(x) = \sum_{k=0}^{M_n} c'_{j,k} \bar{T}_k(x)$ . با نوشتن  $(p_j(x))^2 = \sum_{k=0}^{2M_n} d'_{j,k} \bar{T}_k(x)$  و به کار بستن (۱۳.۴.۵) به دست می‌آوریم

$$d'_{j,k} = \begin{cases} \frac{1}{4}(c'_{j,0})^2 + \sum_{i=0}^{M_n} (c'_{j,k})^2 & k=0 \\ \frac{1}{4} \left( \sum_{i=0}^k c'_{i,j} c'_{j,k-i} + \sum_{i=0}^{M_j-k} c'_{j,i} c'_{j,k+i} + \sum_{i=k}^{M_j} c'_{j,i} c'_{j,i-k} \right) & 0 < k \leq M_j \\ \frac{1}{4} \left( \sum_{i=k-M_j}^{M_j} c'_{i,j} c'_{j,k-i} \right) & M_j < k \leq 2M_j \end{cases} \quad (۱۴.۴.۵)$$

سرانجام برای هر  $k \leq 1$  با جایگذاری  $d_{j,k} = d'_{j,k}$  و  $d_{n,0} = 2d'_{j,0}$  جایگذاری  $d_k = \sum_{j=0}^J d_{j,k}$  ضریب‌های چیشف را برای  $P(x)$  به دست می‌آید. آنگاه بنابر (۸.۴.۵) به دست می‌آید

$$\tilde{W}^* \tilde{W} f = P(\mathcal{L})f = \frac{1}{4}d_0 f + \sum_{k=1}^{M'} d_k \bar{T}_k(\mathcal{L})f. \quad (۱۵.۴.۵)$$

## ۵.۵ بازسازی

در بیشتر کاربردهای پردازش سیگنال تنها به دست آوردن ضریب‌های موجک کافی نیست. رده گسترده‌ای کاربردهای پردازش سیگنال بر پایه دستکاری کردن ضریب‌های یک سیگنال در یک تبدیل معین و سپس تبدیل وارون گرفتن از ضریب‌های دستکاری شده است. برای اینکه تبدیل موجک طیفی گراف بیش از<sup>۱۱</sup> با به کارگیری دستور  $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$  و دستور مثلثاتی چندجمله‌ای چیشف  $T_k(y) = \cos(k \arccos(y))$  به سادگی می‌توان به این را نشان داد.

یک پردازش ساده سیگنال سودمند باشد، بسیار ضروری است که بتوانیم سیگنال را از روی ضریب‌های داده شده بازسازی کنیم.

تبدیل موجک طیفی گراف یک تبدیل اَبَر کامل<sup>۱۱</sup> است زیرا تعداد  $\psi_{t_j, n}$  بیش از راس‌های اصلی گراف هستند. با گنجاندن تابع‌های مقیاس‌گذار  $\phi_n$  در قاب موجک، تبدیل موجک طیفی گراف بردار  $f$  با اندازه  $N$  را به  $N(J+1)$  ضریب  $c = Wf$  می‌نگارد. چنان‌که پیداست،  $W$  بی‌شمار وارون چپ مانند  $M$  دارد، به طوری که  $MWf = f$ . یک انتخاب طبیعی میان وارون‌های ممکن، به کارگیری شبه وارون  $L = (W^*W)^{-1}W^*$  است. شبه وارون در ویژگی نرم-مینیم صدق می‌کند

$$Lc = \arg \min_{f \in \mathbb{R}^N} \|c - Wf\|_2. \quad (۱۰.۵.۵)$$

برای کاربردهایی که با دست کاری ضریب‌های موجک سروکار دارند، بی شک نیاز به به اعمال وارون بر روی مجموعه‌ای از ضریب‌هاست که دیگر در بُرد  $W$  قرار نمی‌گیرند. ویژگی بالا اشاره دارد که در این مورد شبه وارون هم ارز با تصور متعامد روی برد  $W$  است، به پیروی از وارون روی برد  $W$ .

گردایه‌ای از ضریب‌های  $c$  داده شده است، شبه وارون با حل معادله ماتریسی مربعی  $(W^*W)f = W^*c$  به دست خواهد آمد. این دستگاه بیش از اندازه برای وارون کردن مستقیم بزرگ است. حل آن می‌تواند با چندین روش تکرار پذیر انجام گیرد، مانند الگوریتم قالب‌های کلاسیک [۳] و روش سریعتر شیب مزدوج<sup>۱۲</sup> [۷]. این روش‌ها ویژگی دارند که هر گام از محاسبه با اعمال  $W^*W$  روی یک بردار یکه کنترل شده‌اند. ما روش شیب مزدوج و چندجمله‌ای تقریبی سریع (۱۵.۴.۵) را برای محاسبه  $W^*W$  به کار می‌گیریم.

<sup>۱۱</sup> هرگاه در یک قاب دسته تابع‌های سازنده قاب بیش از عنصرهای پایه فضا باشند، قاب را ابر کامل گویند.

<sup>۱۲</sup> conjugate gradients



## فصل ۶

### پیاده سازی و چند کاربرد

در این بخش نخست به جزئیات هسته‌های موجک و تابع مقاس‌گذار به کار گرفته شده و به چگونگی انتخاب مقیاس‌ها می‌پردازیم. سپس نمونه‌هایی از موجک‌های طیفی گراف بر روی دسته داده‌های<sup>۱</sup> گوناگون و دسته داده‌های آمیخته<sup>۲</sup> را نشان می‌دهیم.

#### ۱.۶ جزئیات طراحی تبدیل موجک طیفی گراف

انگیزه ما در انتخاب هسته مولد موجک  $g$  رسیدن به موضعی‌سازی بر روی کران مقیاس‌های ریز است. بنا به قضیه ۵.۵ اگر  $g$  همانند تک جمله‌ای<sup>۳</sup> در مبدا رفتار کند، موضعی‌سازی تضمین خواهد شد.  $g$  را چنان انتخاب می‌کنیم که در مبدا دقیقاً تک جمله‌ای باشد و برای  $x$  های بزرگ با نرخ نمایی میرا شود. بنابراین  $g$  را اسپلاین مکعبی قرار می‌دهیم به طوری که  $g$  و  $g'$  پیوسته باشند. شکل پارامتری شده  $g$  با مقدارهای صحیح ثابت  $\alpha$  و  $\beta$  به صورت زیر است که در آن  $x_1$  و  $x_2$  مرز میان بازه‌های افراز دامنه هستند.

$$g(x, \alpha, \beta, x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^{-\alpha} x^\alpha, & x < x_1 \\ s(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ x_2^\beta x^{-\beta}, & x > x_2 \end{cases} \quad (1.1.6)$$

---

<sup>۱</sup>dataset

<sup>۲</sup>synthetic

<sup>۳</sup>monic polynomial

یادآور می‌شویم که  $g$  نرمال شده است به طوری که  $g(x_1) = g(x_2) = 1$ . ضریب‌های چندجمله‌ای درجه سه  $s(x)$  با قیدهای پیوستگی  $s'(x_1) = \alpha/x_1$  و  $s(x_1) = s(x_2) = 1$ ،  $s'(x_2) = -\beta/x_2$  معین می‌شوند. در همه مثال‌ها این نوشته  $1, x_1 = 1, \alpha = \beta = 1$  و  $x_2 = 2$  تابع  $s(x)$  را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$s(x) = -5 + 11x - 6x^2 + x^3.$$

$t_j$ ها مقیاس‌های موجک، چنان انتخاب شده‌اند که در میان مینیم و ماکسیم مقیاس  $t_1$  و  $t_J$  نمایی‌وار برابرند، یعنی لگاریتم مقیاس‌های  $t_j$  یک تصاعد حسابی است. آن‌ها خود را با  $\lambda_{max}$  کران بالای طیف  $\mathcal{L}$  سازگار کرده‌اند. جایگاه ماکسیم مقیاس  $t_1$  و همچنین هسته تابع مقیاس‌گذار  $h$  با انتخاب  $\lambda_{min} = \lambda_{max}/K$  تعیین می‌شود،  $K$  پارامتری در طراحی تبدیل است. سپس  $t_1$  را چنان انتخاب می‌کنیم که برای  $x > \lambda_{min}$  تابع  $g(t_1 x)$  به طور نمایی میرا<sup>۴</sup> شود.  $t_J$  را طوری انتخاب می‌کنیم که برای  $x < \lambda_{max}$  تابع  $g(t_J x)$  تبدیل به یک تک جمله‌ای شود؛ این کار با جای‌گذاری  $t_1 = x_2/\lambda_{min}$  و  $t_J = x_2 \lambda_{max}$  انجام می‌پذیرد.

هسته تابع مقیاس‌گذار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x) = \gamma \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda_{min}}\right)^4\right)$$

با انتخاب  $\gamma$  مناسب  $h(0)$  برابر با ماکسیم مقدار  $g$  می‌شود.

این مجموعه از تابع مقیاس‌گذار و هسته‌های مولد برای پارامترهای  $J = 4$  و  $\lambda = 10$ ،  $K = 20$ ،  $\alpha = \beta = 2$ ،  $x_1, x_2 = 2$  نمایش داده شده است.

## ۲.۶ کاربردها: گالری موجک‌های طیفی گراف

در نخستین مثال، ساختار موجک‌ها در دامنه ابر نقطه‌وار<sup>۵</sup>، موجک‌های طیفی گراف ساخته شده بر روی پیچه سویسی<sup>۶</sup> را مطالعه می‌کنیم. دسته داده‌های این مثال شامل نقطه‌هایی در یک منیفلد دو بعدی است که به طور تصادفی نمونه برداری و در  $\mathbb{R}^3$  جاساز شده است. منیفلد گفته شده به صورت پارامتری برای  $1 \leq s \leq 4\pi - 1$  و  $\pi \leq t \leq 4\pi$

<sup>۴</sup> power-law: هرگاه وابستگی دو چیز با یکدیگر توسط یک تابع نمایی مانند  $f(x) = kx^a$  سنجیده شود.

<sup>۵</sup>point cloud

<sup>۶</sup>Swiss Roll



چنین تعریف می‌شود  $\vec{x}(s, t) = (t \cos(t)/4\pi, s, t \sin(t)/4\pi)$ . در این مثال  $50^\circ$  نقطه به طور یکنواخت در منیفلد نمونه برداری شده‌اند.

دسته‌ای از  $x_i$ ها مفروض است، با این نقاط گرافی وزن‌دار می‌سازیم که وزن هر یال آن  $a_{i,j} = \exp(-\|x_j - x_i\|^2 / 2\sigma^2)$  است. برای دسته داده‌های بزرگتر این گراف را می‌توان با آستانه‌بندی<sup>۷</sup> وزن یال‌ها تبدیل به گرافی تُنک<sup>۸</sup> کرد؛ هر چند در اینجا این کار را انجام نمی‌دهیم. در شکل ۱۰۶ دسته داده پیچه سوییسی و موجک طیفی گراف در چهار مقیاس که در مکانی یکسان موضعی‌سازی شده است را نمایش می‌دهیم. ما از  $\sigma = 0.1$  برای به دست آوردن وزن درونی گراف و همچنین از  $J = 4$  تا مقیاس و  $K = 20$  برای به دست آوردن موجک‌های طیفی گراف استفاده کرده‌ایم. در بسیاری از نمونه‌های وابسته به ماشین‌های آموزنده داده‌ها در فضای با بُعد بالا داده شده‌اند که به طور ذاتی در منیفلد با بعد پایین نهفته‌اند. این شکل نشان می‌دهد که چگونه موجک‌ها می‌توانند با ساختار منیفلد نهفته در داده‌ها به طور ضمنی سازگار شوند. به ویژه توجه کنید که تکیه‌گاه موجک‌های مقیاس درشت موضعی‌وار در درازای منیفلد پراکنده شده‌اند و به بخش بالایی پیچه پَرش نکرده‌اند.

مثال دوم برای یک شبکه ترابری تهیه شده است. در شکل ۲۰۶ گرافی که شبکه راهی شهر مینسوتا<sup>۹</sup> را نمایش می‌دهد را ملاحظه می‌کنیم. در این دسته داده، یال‌ها راه‌های بزرگ و راس‌ها چهارراه‌ها را نشان می‌دهند، که اغلب معادل شهرها و روستاها است ولی نه همواره. در این مثال گراف بی‌وزن است، یعنی که همه یال‌ها برابر با یک هستند بی آن که وابسته به طول فیزیکی تکه راه‌ها باشند. همچنین مختصات فضایی هر راس تنها برای نمایش گراف و موجک‌ها همتای آن به کار رفته است و در وزن‌های یال تاثیری ندارند. برای این مثال ما موجک‌های ساخته شده با  $K = 100$  و مقیاس‌های  $J = 4$  را نشان داده‌ایم. در مثال سوم تبدیل موجک طیفی گراف روی گراف زمینه تصویر-گرافی که راس‌های آن پیکسل‌ها<sup>۱۰</sup> هستند و میان هر راس (به جز در لبه‌های) با نزدیک‌ترین چهار همسایه خود در تصویر یالی متناظر در گراف وجود دارد- را می‌سازیم. وزن همه یال‌ها برابر یک و تابع تعریف شده بر روی گراف رنگ هر پیکسل است. این مثال ضریب‌ها را مانند یک تصویر در هر مقیاس نمایش می‌دهد. برای این کاربرد ضریب‌های به دست آمده را به بازه صفر تا یک نگاشت می‌دهیم. در هر تصویر دیجیتالی رنگ هر پیکسل در بازه صحیح  $0$  تا  $255$  قرار دارد. نخست رنگ هر پیکسل را بر  $255$  تقسیم می‌کنیم و پس از پردازش

<sup>۷</sup>thresholding

<sup>۸</sup>sparse

<sup>۹</sup>Minnesota

<sup>۱۰</sup>اکوتاه شده picture + element

تصویر رنگ‌ها را به بازه صحیح  $[0, 255]$  بر می‌گردانیم.

سپس وارون تبدیل از روی ضریب‌های اصلی و همچنین ضریب‌های دستکاری شده که تنها یک مقیاس را نشان می‌دهند محاسبه می‌شود. این نشان می‌دهد که تبدیل موجک طیفی گراف می‌تواند تجزیه چند رزولوشنی برای تصویرها بسازد. ادعا نمی‌کنیم این تبدیل ویژه برپایه همسایگی موضعی برای پردازش تصویر از دیگر روش‌های تجزیه موجک بهتر است، ولی گستردگی کاربرد تبدیل موجک طیفی گراف را نشان می‌دهد. نتیجه‌های این بررسی در شکل ۲.۶ و شکل ۲.۶ نشان داده شده است.

## ۱.۲.۶ نتیجه‌گیری و کارهای آینده

ما یک چهارچوب برای ساخت موجک‌ها بر روی گراف‌های وزن‌دار دلخواه را معرفی کردیم. با قیاس کردن عملگرهای موجک کلاسیک در بخش فوریه نشان دادیم که مقیاس‌گذاری در دامنه طیفی لاپلاسی گراف می‌تواند پیاده‌سازی شود. نشان داده‌ایم که موجک‌های طیفی گراف به دست آمده در کران مقیاس‌های کوچک موضعی‌سازی شده‌اند و یک قاب با کران‌هایی که به آسانی محاسبه می‌شوند، تشکیل می‌دهند. الگوریتمی که برای محاسبه موجک‌ها بر پایه چندجمله‌ای‌های تقریبی چبیشف را که از محاسبه قطری‌سازی لاپلاسی گراف پرهیز می‌کند را تشریح کردیم، که جازه می‌داد تبدیل را بر روی گراف‌های بزرگ به کار بگیریم. سرانجام نمونه‌هایی از موجک‌ها روی گراف‌ها را که از زمینه‌های کاری با پتانسیل‌های گوناگون می‌آمدند را نشان دادیم.

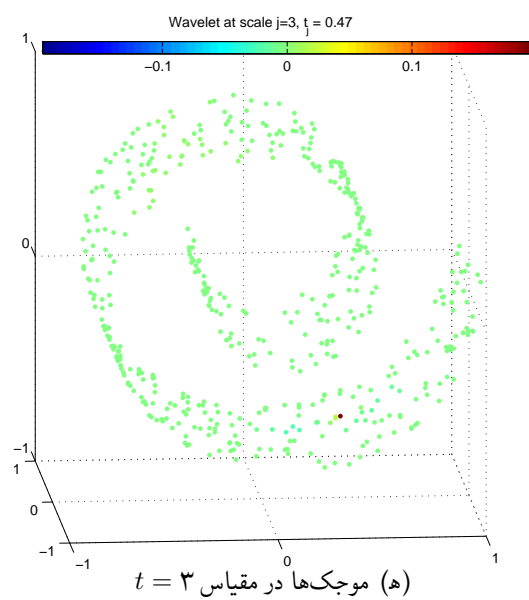
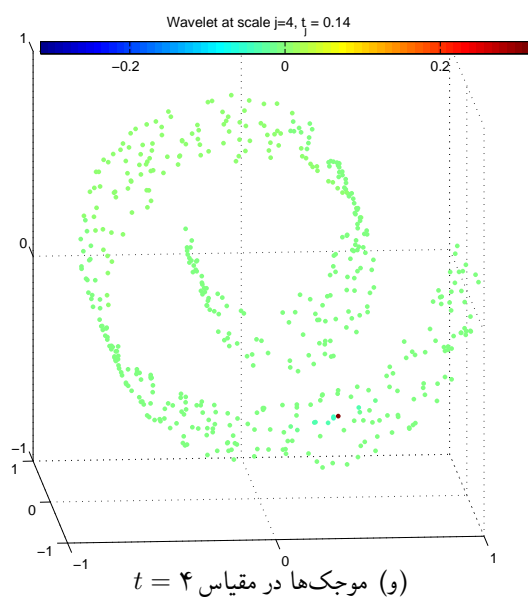
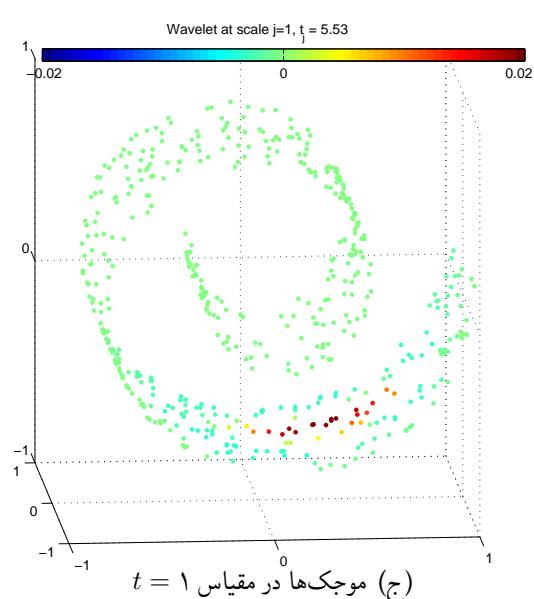
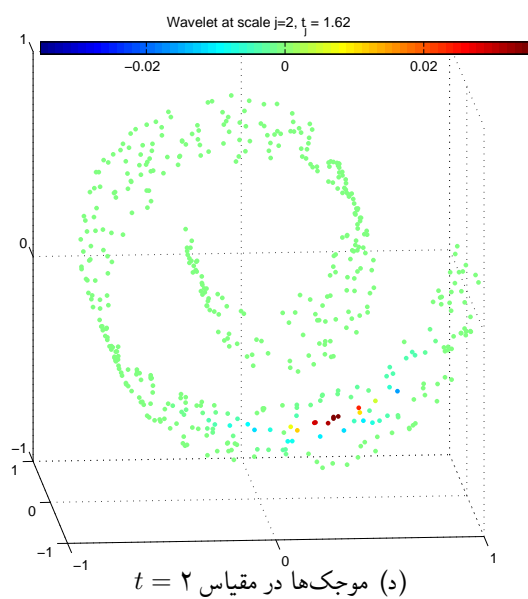
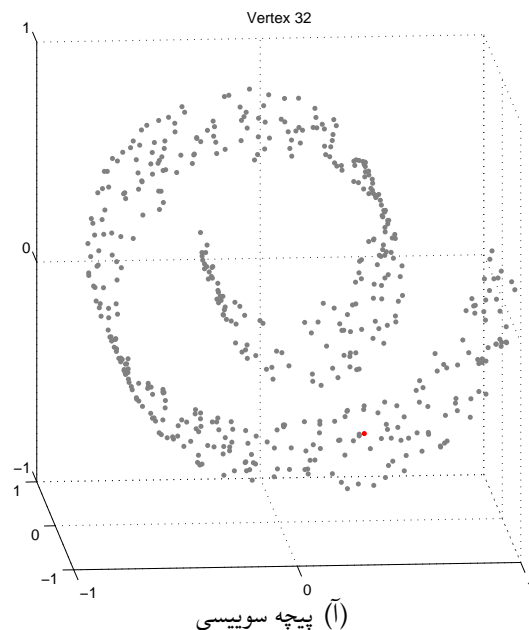
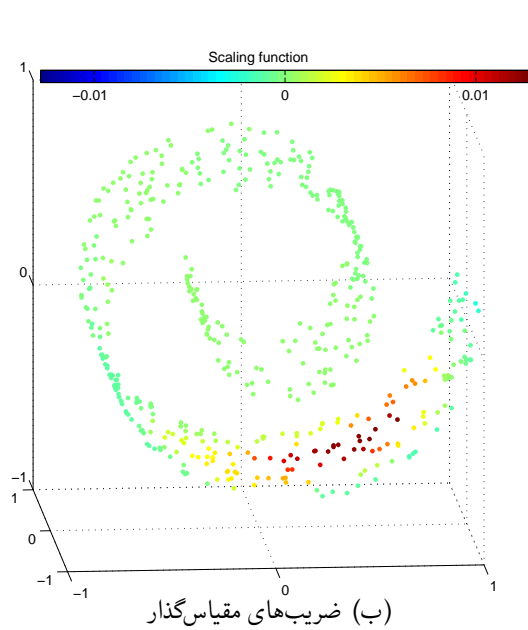
چندین راه ممکن برای پژوهش‌های آینده وجود دارد که در راستای بهبود یا گسترش تبدیل موجک طیفی گراف هستند. یکی از ویژگی‌هایی که در این جا معرفی شد، برخلاف تبدیل‌های متعامد کلاسیک تبدیل را در مقیاس‌های فضایی درشت زیر نمونه برداری نمی‌کنیم. به عنوان یک نتیجه تبدیل موجک طیفی گراف ابرکامل است با مضربی از  $J + 1$  که  $J$  تعداد مقیاس‌های موجک است. زیر نمونه بردای از تبدیل موجک طیفی گراف می‌تواند با انتخاب یک ماسک از راس‌ها در هر مقیاس متناسب با مرکزهای موجک با شرط حفظ آن‌ها تعیین شود. این یک مساله بسیار پیچیده‌تر از گراف‌های وزن دار دلخواه است که با یک مش منظم به دست می‌آیند زیرا در این جا می‌توان از هندسه منظم مش برای انجام زیر نمونه برداری دوتایی در هر مقیاس بهره‌مند شد. یک پرسش قابل توجه برای پژوهش‌های آینده می‌تواند بررسی تعیین ضابطه مناسب جهت انتخاب خوب موجک‌ها به منظور حفظ آن‌ها پس از زیر نمونه برداری باشد.

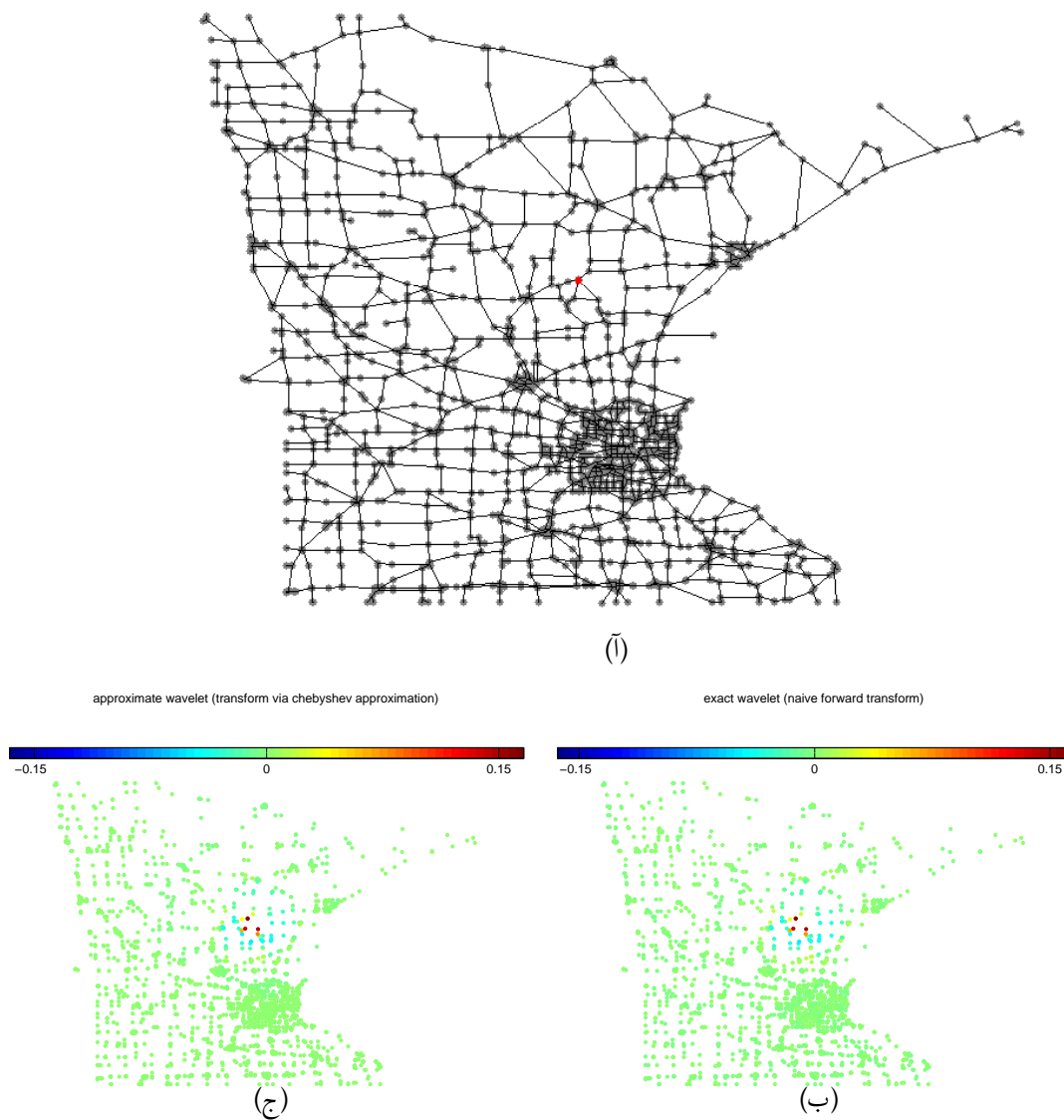
پرسشی دیگر در این باره عبارت است از این که تبدیل موجک طیفی گراف چگونه با همفشرده‌گی

گراف در تعامل است. گراف وزن دار می‌تواند با افراز راس‌های آن به مجموعه‌های جدا از هم فشرده شود به طوری که گراف فشرده به دست آمده راس‌هایی برابر با تعداد افرازا داشته باشد. وزن هر یال جدید از جمع وزن هر یک از یال‌هایی که دو بخش را به هم متصل می‌کنند به دست می‌آید. با همفشرده‌گی چندباره گراف وزن دار مفروض می‌توان یک نمایش چند مقیاسی از گراف وزن دار تعریف نمود. با محاسبه یک مقایس واحد از تبدیل موجک طیفی گراف برای هر یک از این گراف‌های همفشرده یک آنالیز موجک چند مقیاسی به دست می‌آید. این رویه پیشنهادی به طور مفهومی از تبدیل موجک سریع برای موجک‌های متعامد کلاسیک که بر پایه فیلتر کردن<sup>۱۱</sup> بازگشتی و زیر نمونه برداری است القاء شده. مساله این است که چگونه به طور خودکار یک همفشرده‌گی در هر مقیاس بر روی گراف دلخواه بی‌قاعده تعریف کنیم که این خود یک چالش پژوهشی دشوار است.

---

<sup>۱۱</sup>filtering





شکل ۲۰۶: (A) گراف شهر مینسوتا، (B) ضریب‌های موجک به روش مستقیم، (C) ضریب‌های موجک به روش تقریبی - خطای دو روش  $10^{-7534}$  می‌باشد

original image



(آ)

reconstruction only from wavelets at scale 2



(ج)

reconstruction from all coefficients



(ب)

شکل ۳۰۶: (آ) تصویر نخست، (ب) تصویر بازسازی شده، (ج) تصویر بازسازی شده از مقیاس دوم

Wavelet coefficients at scale 1



Scaling function coefficients



Wavelet coefficients at scale 3



Wavelet coefficients at scale 2



Wavelet coefficients at scale 5



Wavelet coefficients at scale 4



شکل ۴۰۶: ضرایب تابع مقایس‌گذار و ضرایب موجک در پنج مقیاس





## مراجع

- [1] E. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw–Hill, New York, 1966. [44](#)
- [2] F.K. Chung, *Spectral Graph Theory*, *CBMS Reg. Conf. Ser. Math.*, vol. 92, AMS Bookstore, 1997. [19](#)
- [3] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. [51](#)
- [4] L. Debnath, *Wavelet Transforms and Their Applications*, Birkhäuser; 2002 edition. [1](#)
- [5] W. Fraser, *A survey of methods of computing minimax and near-minimax polynomial approximations for functions of a single independent variable*, *J. Assoc. Comput. Mach.* 12 (1965) 295–314. [44](#)
- [6] K.O. Geddes, *Near-minimax polynomial approximation in an elliptical region*, *SIAM J. Numer. Anal.* 15 (6) (1978) 1225–1233. [44](#)
- [7] K. Grochenig, *Acceleration of the frame algorithm*, *IEEE Trans. Signal Process.* 41 (12) (1993) 3331–3340. [51](#)
- [8] C.E. Heil, D.F. Walnut, *Continuous and discrete wavelet transforms*, *SIAM Rev.* 31 (4) (1989) 628–666.
- [9] A. Grossmann, *J. Morlet, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*, *SIAM J. Math. Anal.* 15 (4) (1984) 723–736.

- [10] G.M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials*, CMS Books Math., Springer-Verlag, 2003. 45
- [11] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 1: Functional Analysis*, Academic Press, 1980. 30
- [12] G.L.G. Sleijpen, H.A.V. der Vorst, A Jacobi–Davidson iteration method for linear eigenvalue problems, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 17 (2) (1996) 401–425. 44
- [13] D. Watkins, *The Matrix Eigenvalue Problem – GR and Krylov Subspace Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. 43, 44

## واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

band	باند
band-pass	میان‌گذر
basis	پایه
coefficient	ضریب
component	مولفه
connected	همبند
convolution	پیچش
disjoint	متمایز
edge	یال
filter	فیلتر
filtering	فیلتر کردن
frame	قاب
graph	گراف
high-pass	بالاگذر
image	تصویر
impulse	تکانه
laplacian operator	عملگر لاپلاسی
low-pass	پایین‌گذر
map	نگاشت
mask	ماسک
modulation	زیر و بم کردن

mother wavelet	موجک مادر
operator	عملگر
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد یکه
sampling	نمونه برداری
scaling function	تابع مقیاس‌گذار
signal	سیگنال
spars	تُنک
spectral	طیفی
subsampling	زیر نمونه برداری
tight frame	قاب چسبان
transform	تبدیل
translation	انتقال
vector	بردار
vertex	راس
wavelet	موجک

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

translation	انتقال
high-pass	بالا گذر
band	باند
vector	بردار
basis	پایه
low-pass	پایین گذر
convolution	پیچش
scaling function	تابع مقیاس‌گذار
transform	تبدیل
image	تصویر
impulse	تکانه
spars	تُنک
vertex	راس
subsampling	زیر نمونه برداری
modulation	زیر و بم کردن
signal	سیگنال
spectral	طیفی
operator	عملگر
filtering	فیلتر کردن
filter	فیلتر
tight frame	قاب چسبان

frame	قاب
graph	گراف
set	گردایه
mask	ماسک
orthonormal	متعامد یکه
orthogonal	متعامد
conjugate	مزدوج
mother wavelet	موجک مادر
wavelet	موجک
component	مولفه
band-pass	میان گذر
map	نگاشت
sampling	نمونه برداری
connected	همبند
edge	یال
single	یکه

## **Aabstract**

We propose a novel method for constructing wavelet transforms of functions defined on the vertices of an arbitrary finite weighted graph. Our approach is based on defining scaling using the graph analogue of the Fourier domain, namely the spectral decomposition of the discrete graph Laplacian  $\mathcal{L}$ . Given a wavelet generating kernel  $g$  and a scale parameter  $t$ , we define the scaled wavelet operator  $T_g^t = g(tL)$ . The spectral graph wavelets are then formed by localizing this operator by applying it to an indicator function. Subject to an admissibility condition on  $g$ , this procedure defines an invertible transform. We explore the localization properties of the wavelets in the limit of fine scales. Additionally, we present a fast Chebyshev polynomial approximation algorithm for computing the transform that avoids the need for diagonalizing  $\mathcal{L}$ . We highlight potential applications of the transform through examples of wavelets on graphs corresponding to a variety of different problem domains.

Keywords: Graph theory, Wavelets, Spectral graph theory, Overcomplete wavelet frames



**University of Shahrood**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

**Wavelets on graphs via spectral graph  
theory**

**Esmael Zekae**

**Supervisors**

**Dr. Nader Jafari Rad and Dr. Ali Akbar  
Arefee-Jamal**

**2014**