دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

**پایان‌نامه کارشناسی ارشد**

# دستگاه‌های همیلتونی با بعد متناهی منتج شده ازتقارن‌های معادلات دیفرانسیل

آمنه جلالی

استاد راهنما

**دکتر سید رضا حجازی**

استاد مشاور

**دکتر ابراهیم هاشمی**

۱۳۹۴/۰۵/۰۵

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم ، دو فرشته آسمانی که زندگی و انسان بودن را برایم معنی کردند.

همسر عزیزم که در سایه همیاری و بردباری او اتمام این پایان نامه حاصل شد.

و فرزندانم که بهترین هدایای زندگانی ام هستند

# سپاس گزاری:

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمودمان کرد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت با سپاس از استاد شایسته و گرانقدر، جناب آقای دکتر حجازی که در کمال سعه صدر، حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این امر از من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند سپاس از استاد صبور جناب آقاب دکتر هاشمی که زحمت مشاوره این رساله را برعهده گرفتند. در پایان از جناب آقای دکتر حسن آبادی و آقای دکتر پسندیده که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل نمودند کمال تشکر را دارم.

آمنه جلالی

۱۳۹۴/۰۵/۰۵

# تعهدنامه

اینجانب **آمنه جلالی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **دستگاه‌های همیلتونی با بعد متناهی منتج شده از تقارن‌های معادلات دیفرانسیل** ، تحت راهنمایی **دکتر سید رضا حجازی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " University of Shahrood" به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

آمنه جلالی

**۱۳۹۴/۰۵/۰۵**

# مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

# چکیده

مفهوم اصلی دستگاه‌های همیلتونی تولید شده توسط معادلات دیفرانسیل در مباحثی چون مکانیک کلاسیک، معادلات حرکت اجسام، مکانیک حرکت اجرام آسمانی و... تبلور می‌یابد. همچنین اخیرا نیز دستگاه‌های همیلتونی به یکی از مفاهیم اصلی در مکانیک پیوسته، مکانیک شاره ها، پلاسما و... تبدیل شده است. معادلات دستگاه‌های همیلتونی به روش‌های مختلفی قابل محاسبه می‌باشند، در این پایان‌نامه به یکی از این روش‌ها که برگرفته از تقارن‌های یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مفروض است اشاره شده است. این روش مستقل از دستگاه مختصات است و برای هرگونه دستگاه معادلات دیفرانسیل خواه معادلات جزئی (PDE) یا معادلات معمولی (ODE) کاربردیست.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل، فرم‌های دیفرانسیلی، امتداد دادن، تقارن‌ها، کروشه پواسون، دستگاه همیلتونی

# لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. *سید رضا حجازی*، *پریسا بابائی جناقرد* و *آمنه جلالی*، برخی جواب‌های جدید برای معادله برگر، دوازدهمین سمینار معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی، ۱۳۵-۱۳۹، دانشگاه تبریز، ۶-۸ خرداد ۱۳۹۴.

# فهرست مطالب

# مقدمه

روش حل معادلات دیفرانسیل به‌خصوص معادلات دیفرانسیل معمولی مانند معادلات جدایی پذیر، همگن، دقیق و ...همگی حالت‌های خاصی از یک روش کلی به‌نام انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل به‌وسیله ناورداهای دیفرانسیلی هستند که اولین بار در میانه قرن نوزدهم توسط سوفوس لی[۱] پایه گذاری شد. این روش بر پایه بهره‌گیری از دسته خاصی از گروه‌های جبری که بعدها از آن به عنوان گروه‌های لی یاد شده است، می‌باشد. چنان‌چه می‌توان دید این گروه‌ها کاربرد بسیار گسترده‌ای در ریاضیات، فیزیک، مهندسی و... دارند.

یکی از اساسی ترین این گروه‌ها، گروه‌های تقارنی می‌باشد که در توپولوژی جبری، هندسه دیفرانسیل، نظریه ناورداها، آنالیز عددی، مکانیک پیوسته و...بسیار فراوان دیده می‌شوند. این گروه‌ها یکی از مهمترین ابزارها در تحلیل هندسی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل می‌باشند اگر بخواهیم یک تعریف اجمالی از گروه تقارنی معادلات دیفرانسیل داشته باشیم باید بگوییم این گروه‌ها جواب‌های داده شده از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را به بقیه جواب‌ها می‌نگارند به این معنا که اگر یک جواب از یک دستگاه معادله دیفرانسیل داشته باشیم می‌توان با داشتن گروه تقارن و این جواب اولیه دسته وسیعی از جواب‌های دیگر را بدست آورد. دقیق تر بگوییم این گروه‌ها تبدیلاتی هستند که روی فضای تمام متغیرهای مستقل و وابسته عمل کرده و گراف‌های جواب‌های موجود در این فضا را به یکدیگر تبدیل می‌کنند، همچنین این تقارن‌ها کاربرد فراوان دیگری دارند از جمله اینکه هنگامی که با یک دستگاه غیر خطی پیچیده مواجه هستیم توابع ناوردایی که از این تقارن‌ها استخراج می‌شوند به کمک فرآیندی که در پایان‌نامه بررسی خواهد شد به یک دستگاه خطی و یا ساده‌تر تبدیل می‌شوند که دستگاه مذکور هم‌ارز همان دستگاه پیچیده اولیه است و کار با آن بسیار ساده‌تر خواهد بود.

در فصل اول این پایان‌نامه به ارائه چند مفهوم وقضایای مهمی که در ادامه نیازخواهد بود، می‌پردازیم در فصل دوم ابتدا یک تعریف جامع هندسی از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بیان می‌کنیم ، در این فصل ابتدا گروه تقارن را به عنوان یک گروه از تبدیلات که روی فضای متغیرهای دستگاه عمل کرده معرفی می‌کنیم و سپس مفهوم امتداد عمل گروه موردنظر و مولد بی‌نهایت کوچک متناظر با آن را ارائه خواهیم کرد که یک روش محاسباتی در محاسبه جبر لی گروه تقارنی موردنظر است. این فصل با چندین مثال از کاربرد گروه‌های تقارنی در یافتن صورت کلی جواب‌های معادلات دیفرانسیل به پایان می‌رسد. فصل سوم که بخش اصلی این پایان‌نامه می‌باشد به کاربرد گروه‌های تقارن برای یافتن دستگاه همیلتونی یک دستگاه معادله دیفرانسیل می‌پردازد. این دستگاه‌ها در فیزیک و مکانیک کاربرد فراوانی دارند و روش‌های متفاوتی برای دست یابی به آن‌ها وجود دارد. اما یکی از بهترین این روش‌ها استفاده از جبر لی تقارن‌های دستگاه اصلی می‌باشد.

برای مطالعه این دستگاه‌ها لازم است که ساختار لی- پواسون روی یک منیفلد تعریف شده سپس به کمک یک فرمول‌بندی خاص دستگاه همیلتونی مورد نظر را به کمک این ساختار به‌دست آوریم.

[۱] Sophus Lie

# فصل ۱

## مفاهیم اولیه و پیش نیازها

## ۱.۱ مفاهیم بنیادی هندسهٔ منیفلدها

در این فصل مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعد توضیح داده شده است.

**تعریف ۱.۱.۱.** فرض می‌کنیم $M$ یک فضای توپولوژیک باشد، $M$ را یک منیفلد توپولوژیکی $n$-بعدی گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

- $M$ ها سدورف باشد، یعنی برای هر دو نقطه $p,q \in M$ زیرمجموعه‌های باز جدا از هم مانند $U,V$ از$M$ وجود داشته باشد به‌طوریکه $p \in U$ و $q \in V$.
- $M$ شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه شمارا داشته باشد.
- $M$ موضعا اقلیدسی از بعد $n$ باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همئومورف با یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد.

**تعریف ۲.۱.۱.** نگاشت $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ را هموار ($C^\infty$ یا دیفرانسیل‌پذیر) گویند هرگاه مشتقات آن از هر مرتبه‌ای موجود و پیوسته باشد.

**تعریف ۳.۱.۱.** فرض کنیم $M$ و $N$ دو منیفلد هموار باشند و$F : M \to N$ نگاشتی هموار باشند $F$ را دیفئومورفیسم گوییم هرگاه $F$ دوسوئی باشد و$F$ و $F^{-1}$ هموار باشند.

**تعریف ۴.۱.۱.** اگر $M$ و $N$ منیفلدهایی هموار باشند، نگاشت $F : M \to N$ را نگاشتی هموار گوییم هرگاه برای هر چارت مختصاتی $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ روی $M$ و هر چارت $\psi_\beta : \tilde{U}_\alpha \to \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^m$ روی $N$ نگاشت مرکب $\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار باشد.

**تعریف ۵.۱.۱.** فرض می‌کنیم $\{U_\alpha\}_\alpha$ گردایه‌ای شما را از زیرمجموعه‌های باز منیفلد $M$ و $V_\alpha$ها زیرمجموعه‌های باز از $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ و $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ همئومورفیسم باشد آن‌گاه ($U_\alpha$،$\phi_\alpha$) را چارت مختصاتی روی منیفلد $M$ می‌نامیم. اگر $(U,\phi)$ و $(V,\psi)$ دو چارت روی منیفلد $M$ باشند نگاشت

$$\psi \circ \phi^{-1} \colon \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V).$$

را نگاشت گذر از $\phi$ به $\psi$ می‌نامیم. دوچارت فوق را به‌طور هموار سازگار می‌نامیم هرگاه $\psi \circ \phi^{-1}$ دیفئومورفیسم باشد.

**تعریف ۶.۱.۱.** مجموعه $A = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ را یک اطلس روی $M$ می‌نامیم هرگاه اعضای $A$ دوبدو به‌طور هموار سازگار باشند. اطلس $A$ ماکسیمال است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد و دامنه چارت‌ها $M$ را بپوشانند.

**تعریف ۷.۱.۱.** یک ساختار هموار روی منیفلد توپولوژیکی $M$، یک اطلس ماکسیمال هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی مجهز به یک ساختار هموار $A$ را یک منیفلد هموار نامیده و با $(M,A)$ نشان می‌دهیم.

**مثال ۸.۱.۱.** • کره واحد $n$-بعدی $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \| x \| = 1\}$ منیفلد هموار $n$- بعدی است.

• هر فضای برداری $n$ -بعدی مانند $V = span_{\mathbb{R}}\{e_1, \cdots, e_n\}$ یک منیفلد هموار $n$ -بعدی است.

• کلیه ماتریس‌های $M(m \times n, \mathbb{R})$ منیفلد هموار $(mn)$ -بعدی و ماتریس‌های $M(m \times n, \mathbb{C})$ منیفلد هموار $2mn$ -بعدی است.

**تعریف ۹.۱.۱.** نگاشت $F : M \to N$ دیفئومورفیسم موضعی است، اگر هر نقطه $p \in M$ دارای یک همسایگی باز مانند $U$ باشد که $F(U) \subset N$ باز و $F|_U : U \to F(U)$ دیفئومورفیسم باشد.

**لم ۱۰.۱.۱.** *اگر $F : M \to N$ یک دیفئومورفیسم موضعی و دو سوئی باشد، در این‌صورت به ازای هر $p \in M$ یک همسایگی باز مانند $U$ شامل $p$ و $V$ شامل $F(p)$ موجود است که $F : U \to V$ دیفئومورفیسم است.*

***برهان.*** [۱۲]. □

**تعریف ۱۱.۱.۱.** یک برش از نگاشت پیوسته $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ نگاشت پیوسته‌ای مانند $\sigma : M \longrightarrow \tilde{M}$ است که $\pi \circ \sigma = Id_M$. اگر $U \subset M$ باشد و $\sigma : U \longrightarrow \tilde{M}$ در شرط $\pi \circ \sigma = Id_U$ صدق کند $\sigma$ یک برش موضعی است.

**تعریف ۱۲.۱.۱.** اگر $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ پایه‌ای استاندارد و $\mathbf{v} = (v^1, \cdots, v^n)$ برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد. بردار مماس در نقطه $a$ را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\mathbf{v}_a = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i\big|_a.$$

**تعریف ۱۳.۱.۱.** فرض کنید $a \in \mathbb{R}^n$ ، مجموعه بردارهای مماس را در نقطه $a$ به‌صورت $\mathbb{R}^n_a = \{\mathbf{v}_a : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$ در نظر می‌گیریم، روابط زیر بین این بردارها برقرار است:

$$\mathbf{v}_a + \mathbf{w}_a = (\mathbf{v} + \mathbf{w})_a \qquad , \qquad k(\mathbf{v}_a) = (k\mathbf{v})_a.$$

با توجه به روابط فوق $\mathbb{R}^n_a$ یک فضای برداری $n$-بعدی است.

**تعریف ۱۴.۱.۱.** نگاشت خطی $X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $a$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر

$$f.g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$X(fg)(a) = Xf.g(a) + f(a)X(g)$$

فضای تمام عملگرهای مشتق در نقطه $a$ را با

$$T_a\mathbb{R}^n = \{X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \text{عملگر مشتق است } X\},$$

نشان می‌دهیم و به آن فضای مماسی $\mathbb{R}^n$ در نقطه $a$ گوییم.

**لم ۱.۱.۱۵.** *اگر $X$ و $Y$ دو عملگر مشتق در نقطه $a \in \mathbb{R}^n$ باشند داریم:*

$$(X+Y)f = Xf + Yf, \qquad C(Xf) = (CX)f.$$

*طبق دو ویژگی بالا $T_a\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری است.*

**برهان.** [۱۷]. □

فرض کنیم $\mathbf{v}_a \in \mathbb{R}^n_a$باشد عملگر خطی $D_{\mathbf{v}}|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_{\mathbf{v}}|_a f = D_{\mathbf{v}} f(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |_{t=0}\ f(a+t\mathbf{v}),$$

که مشتق جهتی تابع $f$ در راستای بردار $\mathbf{v}$ در نقطه $a$ می باشد.حال یک ایزومورفیسم به‌صورت زیر تغریف می‌کنیم:

$$\mathbb{R}^n_a \longrightarrow T_a\mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{v}_a \longrightarrow D_{\mathbf{v}}|_a f.$$

اگر $\mathbf{v}_a = \sum_{i=1}^n v^i e_i|_a$ یک بردار در $\mathbb{R}^n$ با پایه استاندارد $e_i$ باشد، آن‌گاه طبق قاعده زنجیری مشتق داریم:

$$f = f(x^1, \cdots, x^n), \quad a = (a^1, \cdots, a^n), \quad a + t\mathbf{v} = (a^1 + tv^1, \cdots, a^n + tv^n).$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} f(a+t\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a^1+tv^1, \cdots, a^n+v^n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} \\ &= v^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + \cdots + v^n \frac{\partial f}{\partial x^n} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = D_{\mathbf{v}}|_a f. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به ضابطه ایزومورفیسم تعریف شده که هر بردار به شکل $\sum_{i=1}^n v^i e_i|_a$ به یک بردار به صورت $\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_a$ نگاشته می‌شود بنابراین یک تناظر یک به یک بین پایه‌ها وجود دارد و در نتیجه: مجموعه $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_a, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_a\}$ یک پایه برای $T_a\mathbb{R}^n$ می‌سازد.

**تعریف ۱.۱.۱۶.** اگر $M$ یک منیفلد هموار باشد، $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $p \in M$ می‌نامیم اگر

$$X(fg)(p) = f(p)Xg + g(p)Xf,$$

مجموعه تمام عملگرهای مشتق در نقطه $p \in M$ را با

$$T_pM = \{X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} | X \text{مشتق است}\},$$

نشان داده و به آن فضای مماسی $M$ در نقطه $p$ گفته می‌شود. به اعضای $T_pM$ بردارهای مماس بر منیفلد گفته می‌شود.

**لم ۱۷.۱.۱.** *فرض کنید $a \in T_a\mathbb{R}^n$ و $X \in T_a\mathbb{R}^n$ باشد:*

- *اگر $f$ ثابت باشد آن‌گاه $Xf = 0$ .*
- *اگر $f(a) = g(a) = 0$ آن‌گاه $X(fg) = 0$*

***برهان.*** [۱۲]. □

**تعریف ۱۸.۱.۱.** اجتماع مجزای $T_pM$ را کلاف مماسی منیفلد $M$ گوییم و به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

.

**تعریف ۱۹.۱.۱.** فرض کنید $\pi : E \longrightarrow M$ نگاشتی دلخواه باشد. تصویر معکوس $\pi^{-1}(p) := \pi^{-1}(\{p\})$ هر نقطه $p \in M$ را تار در $p$ می‌نامیم. اغلب تار در $p$ را با نماد $E_p$ نشان می‌دهیم. به ازای هر دو نگاشت مفروض $M, \pi : E \longrightarrow M$ ، $\pi' : E' \longrightarrow M$ نگاشت $\phi : E \longrightarrow E'$ را در صورتی حافظ تار گوییم که به ازای هر $p \in M$ ای:

$$\phi(E_p) \subseteq E'_p.$$

**لم ۲۰.۱.۱.** *اگر $M$ یک منیفلد هموار $n$ - بعدی باشد آن‌گاه $TM$ یک منیفلد هموار $2n$ - بعدی است به‌طوری که نگاشت زیر هموار است.*

$$\pi : TM \longrightarrow M$$
$$(p, x) \longrightarrow p.$$

***برهان.*** فرض می‌کنیم $(U, \varphi)$ با مختصات $x = (x^1, \cdots, x^n)$ یک چارت برای $M$ باشد نگاشت $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\varphi}\Big(\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i|_p}\Big) = \Big(x^1(p), \cdots, x^n(p), X^1, \cdots, X^n\Big)$$

می‌توان دید که:

$$\tilde{\varphi}^{-1} = (x^1, \cdots, x^n, X^1, \cdots, X^n) = \sum_{i=1}^{n} X^I \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi^{-1}(x)}$$

بنابراین $\Big(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}\Big)$ یک چارت روی $TM$ تعریف می‌کند اگر $(V, \psi)$ یک چارت روی $M$ باشد آن‌گاه مطابق تعریف بالا $\Big(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi}\Big)$ نیز یک چارت روی $TM$ است.

$$\tilde{\varphi}\Big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\Big) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$
$$\tilde{\psi}\Big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\Big) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

اگر $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^n)$ مختصات $\psi$ باشد داریم:

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$
$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x^1, \cdots, x^n, X^1, \cdots, X^n) = \Big(\tilde{x}^1(x), \cdots, \tilde{x}^n(x)$$
$$, \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j}(x) X^j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}(x) X^j\Big)$$

چون مولفه‌های آن هموار است پس $\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ هموار است
چون $M$ شمارای نوع دوم است بنابراین اگر $\{U_i\}$ یک پوشش شمارا برای $M$ باشد آن‌گاه $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ نیز یک پوشش شمارا برای $TM$ است، اگر $X_p$ و $Y_q$ دو عضو شمول در یک تار از $TM$ باشد چون $M$ هاسدورف است بازهایی مجزا مانند $U$ و $V$ یر $M$ شامل $p$ و $q$ وجود دارند به‌طوریکه $\pi^{-1}(U)$ و $\pi^{-1}(V)$ دو همسایگی مجزا در $TM$ شامل $X_p$ و $Y_q$ هستند پس منیفلد هموار $2n^2$-بعدی است و

$$\varphi\pi\circ\tilde{\varphi}^{-1}\Big(x^1,\cdots,x^n,X^1,\cdots,X^n\Big)=(x^1,\cdots,x^n).$$

□

**تعریف ۲۱.۱.۱.** اگر $F:M\longrightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد، آن‌گاه به ازای هر $p\in M$ نگاشت $F_{*p}:T_pM\longrightarrow T_{F(p)}N$ را مشتق نگاشت $F$ در نقطه $p$ می‌نامیم. به $F_*$ نگاشت پیش برنده گوییم. نگاشت مشتق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(F_{*p}\mathbf{v})f=\mathbf{v}(f\circ F),\quad f\in C^\infty(N).$$

ویژگی‌های نگاشت مشتق:

- $$F_{*p}(a\mathbf{v}+b\mathbf{w})f=a(F_{*p}\mathbf{v})f+b(F_{*p}\mathbf{w})f,$$
- $$(F_{*p}\mathbf{v})(fg)=f(F(p))(F_{*p}\mathbf{v})g+g(F(p))(F_{*p}\mathbf{v})f.$$

**لم ۲۲.۱.۱.** *دو نگاشت هموار $F:M\longrightarrow N$ و $G:N\longrightarrow P$ مفروض هستند در این‌صورت:*

- $$(G\circ F)_*=G_*\circ F_*,$$
- $$(Id_M)_*=Id_{T_pM},$$
- *اگر $F$ دیفئومورفیسم باشد آن‌گاه $F_{*p}:T_pM\longrightarrow T_{F(p)}N$ ایزومورفیسم است.*

***برهان.*** [۱۷] □

**تعریف ۲۳.۱.۱.** پایه‌های فضای مماسی بر منیفلد را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p=(\varphi_{*p})^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\right)=(\varphi^{-1})_{*\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\right).$$

آن‌گاه فضای مماسی $T_pM$ نیز یک فضای برداری $n$- بعدی است و $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$ پایه‌ای برای $T_pM$ در مختصات موضعی داده شده تشکیل می‌دهد .

**تعریف ۲۴.۱.۱.** اگر $M$ یک منیفلد هموار باشد، یک خم هموار در $M$ نگاشتی مانند $\alpha : [a,b] \longrightarrow M$ است به‌طوریکه $\alpha$ تابعی هموار است.

**تعریف ۲۵.۱.۱.** فرض کنید $I \subset \mathbb{R}$ تابع هموار $\alpha : I \longrightarrow M$ یک خم هموار روی منیفلد $M$ است و

$$\alpha'(t_\circ) = \dot{\alpha}(t_\circ) = \alpha_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=t_\circ} \in T_{\alpha(t_\circ)}M$$

**قضیه ۲۶.۱.۱.** *نقطه $p \in M$ مفروض است، اگر $X \in T_pM$ باشد آن‌گاه هر بردار مماس مانند $X$، مماس بر یک خم هموار مثل $\alpha$ است به‌طوریکه:*

$$\alpha(\circ) = p, \qquad \alpha'(\circ) = X.$$

***برهان.*** [۱۲]. □

**تعریف ۲۷.۱.۱.** فرض کنیم $F : M$ یک نگاشت هموار باشد آن‌گاه رتبه نگاشت $F$ در نقطه $p \in M$ برابر با رتبه نگاشت $F_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ است و با به عبارتی

$$\mathrm{rank}F = \dim \quad \mathrm{Img}F_{*p} \subseteq T_{F(p)}N.$$

اگر به ازای هر $p \subseteq M$ رتبه نگاشت $F$ برابر با $K$ باشد آن‌گاه گوئیم رتبه $F$ ثابت است.

**تعریف ۲۸.۱.۱.** اگر $M$ یک منیفلد هموار و $U$ یک زیرمجموعه باز $M$ باشد و به $U$ یک زیرمنیفلد باز $M$ می‌گوییم هرگاه $U$ با ساختار همواری $M$ یک منیفلد باشد.

**تعریف ۲۹.۱.۱.** نگاشت $F : M \longrightarrow N$ یک سابمرژن نام دارد هرگاه $\mathrm{rank}F = \dim N$ یعنی $F_*$ پوشا باشد.

**تعریف ۳۰.۱.۱.** نگاشت $F : M \longrightarrow N$ یک ایمرژن نام دارد هرگاه $\mathrm{rank}F = \dim M$ یعنی $F_*$ یک به یک باشد.

**مثال ۳۱.۱.۱.** نگاشت $\alpha : (\circ, ۲\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ با ضابطه $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ مفروض است. رتبه این تابع در تمامی نقاط برابر ۱ است. بنابراین این تابع ایمرژن است.

**تعریف ۳۲.۱.۱.** میدان برداری $\mathbf{v}$ روی $M$ بردار مماس $\mathbf{v}|_x \in T_xM$ در هر نقطه $x \in M$ می‌باشد که $\mathbf{v}|_x$به طور هموار از نقطه ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند. در مختصات موضعی $(x^۱ \cdots x^m)$ میدان برداری برای هر تابع هموار$\xi^i(x)$ از $x$ دارای فرم

$$\mathbf{v}|_x = \xi^۱ \frac{\partial}{\partial x^۱} + \xi^۲ \frac{\partial}{\partial x^۲} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m}. \qquad (۱.۱)$$

می‌باشد. مجموعه تمام میدان های برداری هموار روی $M$ را با$\chi(M)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۳۳.۱.۱.** اگر v و w دو میدان برداری روی $M$ باشند،کروشه لی آن‌ها، [v،w] نیز یک میدان برداری است که برای همه توابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f)). \tag{۲.۱}$$

همچنین در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{۳.۱}$$

بنابراین داریم:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \sum_{i=1}^{m}(\mathbf{v}(\eta^i) - \mathbf{w}(\xi^i))\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\xi^j\frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۴.۱}$$

**گزاره ۳۴.۱.۱.** *میدان‌های برداری* $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}$ *روی* $M$ *و ثابت‌های* $c$ *و* $c'$ *را درنظر می‌گیریم. کروشه لی آن‌ها در خواص زیر صدق می‌کند:*

- *دوخطی*

$$[c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}', \mathbf{w}] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}', \mathbf{w}],$$

$$[\mathbf{v}, c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}'] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}, \mathbf{w}'].$$

- *پادمتقارن*

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}].$$

- *اتحاد ژاکوبی*

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = 0.$$

***برهان.*** با استفاده از (۲.۱) و (۳.۱) به آسانی ثابت می‌شود. □

**تعریف ۳۵.۱.۱.** فرض کنیم $V_1, \ldots, V_k, W$ فضاهای برداری باشند. نگاشت $F : V_1 \times \cdots \times V_k \longrightarrow W$ را یک نگاشت $k$-خطی (چندخطی) می‌گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$F(\mathbf{v}_1, \ldots, a\mathbf{v}_i + b\mathbf{v}'_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = aF(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) + bF(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

**تعریف ۳۶.۱.۱.** نگاشت $k$-خطی $F : V_1 \times \cdots \times V_k \longrightarrow \mathbb{R}$ یک $k$-تانسور کواریان روی فضای برداری $V$ نام دارد.

مجموعه تمام $k$-تانسورهای کواریان روی فضای برداری $V$ را با $T^k(V)$ نشان می‌دهیم و به طور نمادین $T^k(V)$ را به شکل

$$T^k(V) = V^* \otimes \cdots \otimes V^*,$$

نشان می‌دهند.

**تعریف ۳۷.۱.۱.** اگر $V$ یک فضای برداری و $T \in T^k(V), S \in T^l(V)$ آن‌گاه ضرب تانسوری $T, S$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T \otimes S : V \times \cdots \times V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(T \otimes S)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{k+l}) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \cdot S(\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{k+l}).$$

**تعریف ۳۸.۱.۱.** اگر $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_i\}_{i=1}^n$ یک فضای برداری باشد، دوگان این فضا یک فضای برداری به شکل $V^* = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi^i\}_{i=1}^n$ است که پایه‌های آن با یکدیگر به‌صورت $\varphi^i(e_j) = \delta_{ij}$ در رابطه هستند.

**لم ۳۹.۱.۱.** *اگر $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_i\}_{i=1}^n$ یک فضای برداری $n$- بعدی و $V^* = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi^i\}_{i=1}^n$ دوگان آن باشد آن‌گاه $T^k(V)$ یک فضای برداری $n^k$- بعدی تولید شده توسط پایه*

$$\left\{\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k} \middle| 1 \leq i_1, \ldots, \ldots, i_k \leq n\right\},$$

*است.*

***برهان.*** [۱۷]. □

**تعریف ۴۰.۱.۱.** اگر $V$ یک فضای برداری $n$- بعدی باشد، به نگاشت $k$- خطی $T : V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ یک $k$- تانسور کنتراواریان روی فضای برداری $V$ می‌گوییم.

**تعریف ۴۱.۱.۱.** مجموعه تمام $k$- تانسورهای کنتراواریان را با $T_k(V)$ نشان می‌دهیم و به طور نمادین $T_k(V)$ را به شکل

$$T_k(V) := V \otimes \cdots \otimes V.$$

نشان می‌دهند.

**تعریف ۴۲.۱.۱.** $k$- تانسور کواریان $T : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ روی فضای برداری $V$ متقارن است هرگاه :

$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

فضای تمام $k$- تانسورهای متقارن روی فضای برداری $V$ را با $\Sigma^k(V^*)$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۴۳.۱.۱.** $k$- تانسور کواریان $T : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ روی فضای برداری $V$ متناوب است هرگاه :

$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_k) = -T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

**تعریف ۴۴.۱.۱.** فضای تمام $k$- تانسورهای متناوب روی فضای برداری $V$ را با $\Lambda^k(V^*)$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۴۵.۱.۱.** هرگاه $M$ یک منیفلد هموار باشد. مجموعه تمام $k$- تانسورهای کوواریان روی $M$ در نقطه $p$ را با $T^k(T_p^*M)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۴۶.۱.۱.** اگر $\pi : T^k(T^M) \longrightarrow M$ کلاف $k$ -تانسورها کواریان روی $M$ باشد به نگاشت $\delta : M \longrightarrow T^k(T^*M)$ یک برش از $T^k(T^*M)$ می‌گوییم هرگاه:

$$\pi \circ \delta = \mathrm{Id}_M.$$

**تعریف ۴۷.۱.۱.** اجتماع مجزای $T^k(T_p^*M)$ را کلاف $k$-تانسورهای متناوب روی $M$ می‌نامند که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{p\in M} \Lambda^k(T_p^*M).$$

**تعریف ۴۸.۱.۱.** یک برش از$\Lambda^k(T^*M)$ یک $k$- فرم دیفرانسیلی روی $M$ نام دارد مجموعه تمام $k$- فرم‌های دیفرانسیلی روی $M$ را با

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k(T^*M)),$$

نشان می‌دهیم.

**تعریف ۴۹.۱.۱.** اگر $\mathbf{v}$ یک میدان برداری با بعد متناهی باشد، نگاشت $\mathrm{Alt} : T^k(\mathbf{v}^*) \longrightarrow \Lambda^k(\mathbf{v})$ را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathrm{Alt}(T) = \frac{۱}{k!}\sum_{\delta}(\mathrm{sgn}\delta)T(\mathbf{v}_{\delta(۱)}, \ldots, \mathbf{v}_{\delta(k)}).$$

$\delta$ تمام جایگشتهای ممکن روی $k$-تایی، $\{\mathbf{v}_۱, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ است.

**تعریف ۵۰.۱.۱.** اگر $V$ یک فضای برداری با بعد متناهی باشد و $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ و $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ باشد ضرب وج به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

**گزاره ۵۱.۱.۱** (ویژگیهای ضرب وج ). *فرض کنید $\omega$ ، $\omega'$ ، $\eta$ ، $\eta'$ و $\xi$ چند فرم دیفراتسیلی روی فضای برداری با بعد متناهی $\mathbf{V}$ باشند، آن‌گاه :*

- *دو خطی است: به ازای $a, a' \in R$،*

$$\forall a, a' \in \mathbb{R}$$
$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta),$$
$$\eta \wedge (a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').$$

- *شرکت پذیر است:*

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.$$

- *تعویض ناپذیر است: یعنی اگر $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ و $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ آن‌گاه:*

$$\omega \wedge \eta = (-۱)^{kl}\eta \wedge \omega.$$

***برهان.*** [۱۲]. □

ابتدا باید نشان داده شود در یک چارت مثل $(x^i)$، پایه فضای هم مماس $T_p^*M$ به‌صورت $\mathrm{d}x^i$ می‌باشد. طبق لم(۳۹.۱.۱) اگر $(x^i)$ یک چارت روی $M$ باشد، آن‌گاه مجموعه $\{\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} | 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n\}$ یک پایه برای $\Omega^k(M)$ می سازد. بنابراین $\omega$ یک $k$ -فرم دیفرانسیلی روی $M$ باشد آن‌گاه $\omega$ به‌صورت:

$$\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \omega_{i_1\cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \in c^\infty(M)$$

نوشته می‌شود به‌طوریکه $\omega_{i_1,\cdots,i_k}$ توابعی هموار روی $M$ هستند.

**تعریف ۵۲.۱.۱.** اگر $F : M \longrightarrow N$ نگاشتی هموار بین منیفلدها باشد، به‌ازای هر $p \in M$ نگاشت پولبک (پس کشنده) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F^* : T^k(T^*_{F(p)}N) \longrightarrow T^k(T^*_pM)$$
$$(F^*T)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(F_*\mathbf{v}_1, \ldots, F_*\mathbf{v}_k).$$

ویژگی‌های نگاشت پس کشنده: اگر $F : M \longrightarrow N$ و$G : N \longrightarrow P$ دو نگاشت هموار و$p \in M$ و$T \in T^k(T^*_{F(p)})$ و $T \in T^l(T^*_{F(p)})$ آن‌گاه:

۱. $F^*(S \otimes T) = F^*S \otimes F^*T$

۲. $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$

۳. $(Id_N)^*T = T$

**تعریف ۵۳.۱.۱.** اگر $F : M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد، به‌ازای هر $p \in M$ نگاشت پولبک را به‌صورت زیر تعریف می‌کنبم:

$$F^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$$
$$\big(F^*(\omega)\big)(u_1 \cdots u_k) = \omega\big(F_*(u_1) \cdots F_*(u_k)\big), \qquad (\forall_i \quad u_i \in T_pM)$$

ویژگی‌ها:

فرض می‌کنیم $F : M \longrightarrow N$ هموار باشد آن‌گاه:

۱. $F^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^*(M)$ خطی است.

۲. $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$

**لم ۵۴.۱.۱.** *اگر $F : M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد و $f \in C^\infty(N)$ باشد آن‌گاه:*

۱. $F^*\mathrm{d}f = \mathrm{d}(f \circ F).$

۲. $F^*(fT) = (f)F^*T.$

***برهان.*** [۱۲]. □

## ۲.۱ گروه‌های لی

**تعریف ۱.۲.۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه جبری با ساختار هموار است. ($G$ یک منیفلد هموار باشد) به‌طوریکه نگاشت‌های زیر هموار باشند:

$$m : G \times G \longrightarrow G, \qquad i : G \longrightarrow G,$$
$$m(g,h) = g.h, \qquad i(g) = g^{-۱}.$$

آن‌گاه $G$ یک گروه لی نام دارد.

**مثال ۲.۲.۱.** مجموعه اعداد صحیح با عمل جمع، یک گروه و با توپولوژی گسسته منیفلد صفربعدی است، نگاشت‌های زیر

$$m : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},$$
$$(x,y) \longmapsto x+y, \qquad x \longmapsto -x,$$

هموارند بنابراین $\mathbb{Z}$ یک گروه لی صفر بعدی است.

- گروه خطی عمومی (گروه تبدیلات خطی وارون پذیر از مرتبه $n$)

$$\mathrm{GL(n)} = \{A \in M(n \times n) : \det A \neq ۰\},$$

شامل همه ماتریس‌های $n \times n$ وارون پذیر با عمل ضرب ماتریس‌ها، یک گروه لی $n^۲$-بعدی است.

- گروه خطی خاص.

$$\mathrm{SL(n)} = \{A \in \mathrm{GL(n)} : \det A = ۱\},$$

شامل همه ماتریس‌های وارون پذیر با دترمینان یک، یک گروه لی $(n^۲ - ۱)$-بعدی است.

- گروه تبدیلات متعامد.

$$\mathrm{O(n)} = \{A \in \mathrm{GL(n)} : AA^T = I_n\},$$

یک گروه لی $\frac{n(n-۱)}{۲}$-بعدی است.

- گروه تبدیلات متعامد ویژه (دوران‌ها)

$$\mathrm{SO(n)} = \{A \in \mathrm{O(n)} : \det A = ۱\},$$

یک گروه لی $\frac{n(n-۱)}{۲}$-بعدی است.

- گروه تبدیلات آفین.

$$A(n-۱) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} : A \in \mathrm{GL(n-۱)} : a \in \mathbb{R}^{n-۱} \right\},$$

یک گروه لی $n(n-۱)$-بعدی است.

**تعریف ۳.۲.۱.** یک عمل گروه تبدیلات روی منیفلد هموار $M$ توسط گروه لی $G$ و نگاشت هموار $\phi : G \times M \longrightarrow M$ با ضابطه $\Phi(g,x) = g.x$ مشخص می‌شود که در شرایط زیر صدق کند:

۱.
$$e.x = x,$$

۲.
$$g.(h.x) = (g.h).x \quad x \in M, g \in G.$$

**تعریف ۴.۲.۱.** فرض می کنیم $M$یک منیفلد هموار باشد. یک گروه موضعی از تبدیلات که روی $M$ عمل می‌کند به‌وسیله‌ی یک گروه لی $G$ و نگاشت هموار $\Psi : U \longrightarrow M$ داده می‌شود که زیر مجموعه باز $U$ حوزه تعریف عمل گروه است و$\{e\} \times M \subset U \subset G \times M$ همچنین دارای خواص زیر است:

- اگر$(h, x) \in U, (g, \Psi(h, x)) \in U$ و همچنین $(g.h, x) \in U$ سپس $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(g.h, x)$.
- برای هر $x \in M$، $\Psi(e, x) = x$ .
- اگر$(g, x) \in U$ سپس $(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in U$ و$\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x$

**تعریف ۵.۲.۱.** مجموعه $\{f_1, \cdots, f_k\}$ از توابع هموار حقیقی مقدار روی منیفلد $M$ وابسته تابعی نامیده می‌شوند اگر برای هر نقطه $x_0 \in M$ همسایگی $U$ و تابع هموار $H(x_1, \cdots, x_k)$ وجود داشته باشد به‌طوریکه برای همه $x \in U$اشته باشیم :
$$H(f_1(x), \cdots, f_k(x)) = 0,$$
این توابع مستقل تابعی نامیده می‌شوند اگر این شرط برقرار نباشد.

**گزاره ۶.۲.۱.** *اگر $f_1, \cdots, f_k$ در شرط $\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \neq 0$ صدق کنند آن‌گاه مستقل تابعی هستند در غیر اینصورت وابسته تابعی می‌باشند.*

***برهان.*** [۱۵]. □

**تعریف ۷.۲.۱.** فرض کنید $G$ گروهی موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد $M$ عمل می‌کند. زیر مجموعه $\mathfrak{L} \subset M$، $G$ - ناوردا می‌نامیم هرگاه، اگر $x \in \mathfrak{L}$ و$g \in G$ به‌طوریکه $g.x$ تعریف شده باشد داشته باشیم .$g.x \in \mathfrak{L}$

**تعریف ۸.۲.۱.** گروه $G$ یک گروه تقارن از دستگاه معادلات $\{F_1(x) = \cdots F_k(x) = 0\}$ است اگر
$$S_F = \{x | F_1(x) = \cdots F_k(x) = 0\}$$
یک زیر مجموعه $G$- ناوردا باشد.

**مثال ۹.۲.۱.** اگر $G_c$ یک گروه ۱-پارامتری از انتقالات
$$(x, y) \to (x + c\epsilon, y + \epsilon), \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$
برای ثابت $c$ باشد، خط های $x = cy + d$، $G_c$-ناوردا و$G_c$ یک گروه تقارن برای چنین خط هایی می‌باشد.

**تعریف ۱۰.۲.۱.** فرض می‌کنیم $G$ یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد $M$ اثر می‌کند. تابع $F : M \to N$ که $N$ نیز منیفلد می‌باشد را $G$ -ناوردا گوییم هرگاه برای $x \in M$ و هر $g \in G$ به شرطی که $g.x$ تعریف شده باشد داشته باشیم $F(g.x) = F(x)$ .

**تعریف ۱۱.۲.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه از تبدیلات باشد که روی منیفلد $M$ عمل می‌کند. یک ناوردا از $G$ تابع حقیقی مقدار $I : M \to \mathbb{R}$ است که برای تمام $g \in G$ داشته باشیم $I(g.x) = I(x)$ .

## ۳.۱ جبر لی

**تعریف ۱.۳.۱.** فرض کنید $G$ گروهی باشد که روی منیفلد $M$ عمل می‌کند. میدان برداری $\mathbf{v}$ روی $M$ یک $G$-ناوردا نامیده می‌شود. اگر تحت عمل ثابت باشد یعنی $g_*(\mathbf{v}|_x) = \mathbf{v}|_{gx}$ که $g \in G$ و $x \in M$ و $g.x$ تعریف شده است.

**تعریف ۲.۳.۱.** فرض کنید $L_g : h \longrightarrow g.h$ و $R_g : h \longrightarrow h.g$ نگاشت‌های ضربی چپ و راست باشند میدان برداری $\mathbf{v}$ روی $G$ ناوردای چپ نامیده می‌شود اگر $L_{*g}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ و ناوردای راست نامیده می‌شود اگر $R_{*g}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ که $g \in G$.

**تعریف ۳.۳.۱.** جبر لی راست $\mathcal{G}$ از گروه لی $G$ یک فضای برداری از همه میدان‌های برداری ناوردای راست روی $G$ می‌باشد. و جبر لی چپ $\mathcal{G}$ از گروه لی $G$ یک فضای برداری از همه میدان‌های برداری ناوردای چپ روی $G$ می‌باشد. به‌طور عمومی‌تر، جبر لی، فضای برداری $\mathcal{G}$ با عملگر دوخطی

$$[\,,\,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

است که کروشه لی نامیده می‌شود و در خواص کروشه لی صدق می‌کند.

**لم ۴.۳.۱.** *اگر $G$ یک گروه لی باشد آن‌گاه $i_* : \mathcal{G}_l \longrightarrow \mathcal{G}_R$ ایزومورفیسم است.*

***برهان.*** فرض کنیم که $R_g$ و $L_g$ به ترتیب ضابطه عمل راست و چپ گروه $G$ روی خودش و

$$i : G \longrightarrow G,$$

نگاشت وارون ساز $G$ باشد، ثابت می‌کنیم که

$$\mathrm{d}i : \mathcal{G}_R \longrightarrow \mathcal{G}_L,$$

ایزومورفیسم است. ( $\mathcal{G}_R$ و $\mathcal{G}_L$ نمایش دهنده جبرهای لی راست و چپ $G$ هستند.) هرگاه $h \in G$ باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned}
(R_g \circ i)h &= R_g(i(h)) \\
&= R_g(h^{-1}) \\
&= h^{-1}g \\
&= (g^{-1}h)^{-1} \\
&= (i \circ L_{g^{-1}})h.
\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\mathbf{v} \in \mathcal{G}_l$ و $f \in C^{\infty}(G)$ باشد در این‌صورت

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}R_g(\mathrm{d}i\mathbf{v}_h)f &= (\mathrm{d}R_g \circ \mathrm{d}i)\,(\mathbf{v}_h)f \\
&= \mathrm{d}\,(R_g \circ i)\,(\mathbf{v}_h)f \\
&= \mathrm{d}\left(i \circ L_{g^{-۱}}\right)(\mathbf{v}_h)f \\
&= \left(\mathrm{d}i \circ \mathrm{d}L_{g^{-۱}}\right)(\mathbf{v}_h)f \\
&= \mathrm{d}i\left(\mathrm{d}L_{g^{-۱}}\mathbf{v}_h\right)f \\
&= \mathrm{d}i(\mathbf{v}_{hg^{-۱}})f \\
&= \mathbf{v}f\left(i(g^{-۱}h)\right) \\
&= \mathbf{v}f\left(h^{-۱}g\right) \\
&= \mathbf{v}_{h^{-۱}g}f.
\end{aligned}$$

□

**تعریف ۵.۳.۱.** منحنی انتگرال از یک میدان برداری $\mathbf{v}$ منحنی پارامتری هموار $\phi(\epsilon)$ است به‌طوریکه بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار $\mathbf{v}$ در آن نقطه برابر باشد یعنی:

$$\dot{\phi}(\epsilon) = \mathbf{v}|_{\phi(\epsilon)}, \qquad \forall \epsilon \in \mathbb{R}.$$

در مختصات موضعی بایستی $x = \phi(\epsilon) = (\phi^{۱}(\epsilon), \cdots, \phi^{m}(\epsilon))$ جوابی از دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\epsilon} = \xi^i(x), \quad i = ۱, \cdots, m, \tag{۵.۱}$$

باشد که $\xi^i(x)$ ها ضرایب $\mathbf{v}$ در $x$ هستند.

**تعریف ۶.۳.۱.** خم انتگرال ماکسیمال روی منیفلد هموار خم انتگرالی است که قابل تعمیم به خم انتگرال دیگری با دامنه بزرگتر نباشد.

## ۴.۱ شار

**تعریف ۱.۴.۱.** اگر $\mathbf{v}$ میدانی برداری باشد، منحنی انتگرال ماکسیمال پارامتری که از نقطه $x$ در $M$ می‌گذرد را با $\Psi(\epsilon, x)$ نشان می‌دهیم و $\Psi$ را شار تولید شده به وسیله $\mathbf{v}$ می‌نامیم. بنابراین برای هر $x \in M$ و هر $\epsilon$ در بازه $I_x$ شامل $o$ و $\Psi(\epsilon, x)$ نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرنده از $x$ در $M$ خواهد بود. شار میدان برداری برای هر $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}$ دارای خاصیت‌های زیر است:

- $$\Psi(\delta, \Psi(\epsilon, x)) = \Psi(\delta + \epsilon, x), \quad x \in M,$$

- $$\Psi(\circ, x) = x,$$

•

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\Psi(\epsilon,x)=\mathbf{v}|_{\Psi(\epsilon,x)}.$$

**مثال ۲.۴.۱.** ۱. فرض کنید $M=\mathbb{R}$ با مختصات $x$ و $\mathbf{v}=\dfrac{\partial}{\partial x}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}$ باشد. اگر $\Psi=\Psi(\epsilon)$ یک خم انتگرال $\mathbf{v}$ باشد آن‌گاه داریم:

$$\mathbf{v}_{x(\epsilon)}=x'(\epsilon)$$

بنابراین

$$x'(\epsilon)=1\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\epsilon}=1\Longrightarrow x=\epsilon+k,$$

برای بدست آوردن شار، شرایط اولیه $\Psi(0)=x$ را در نظر می‌گیریم بنابراین شار عبوری گذرنده از $\mathbb{R}$ به شکل $\Psi(\epsilon)=\epsilon+x$ بیان می‌شود.

۲. اگر $\mathbf{v}=x^2\dfrac{\partial}{\partial x}+xy\dfrac{\partial}{\partial y}$ میدان برداری در $\mathbb{R}^2$ باشد. خم متناظر با آن به شکل

$$\Psi(\epsilon)=(x(\epsilon),y(\epsilon))$$

می‌باشد. پس داریم

$$\mathbf{v}_{\Psi(\epsilon)}=\Psi'(\epsilon)$$

$$\Psi'(\epsilon)=x'(\epsilon)\frac{\partial}{\partial x}+y'(\epsilon)\frac{\partial}{\partial y},$$

بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\epsilon}=x^2\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\epsilon\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int\mathrm{d}\epsilon\Rightarrow-\frac{1}{x}\Longrightarrow x=-\frac{1}{\epsilon+c},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\epsilon}=xy\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\epsilon}=-\frac{1}{\epsilon+c}y\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\epsilon+c}\Rightarrow-\ln y=-\ln(\epsilon+c)+\ln k\Rightarrow y=\frac{k}{\epsilon+c},$$

با استفاده از شرط اولیه داریم:

$$x=\frac{1}{c}\Rightarrow c=-\frac{1}{x},$$

$$\epsilon=0\Rightarrow y=\frac{k}{c}\Rightarrow k=yc\Rightarrow k=-\frac{y}{x}.$$

بنابراین شار عبوری در راستای این میدان برداری به شکل $\left(\dfrac{x}{1-x},\dfrac{-y}{y-tx}\right)$ است.

## ۵.۱ عمل گروه بی‌نهایت کوچک

**تعریف ۱.۵.۱.** یک زیر گروه یک-پارامتری، یک هومومورفیسم گروه لی مانند $\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow G$ است که $\mathbb{R}$ به عنوان یک گروه لی در نظر گرفته می‌شود. طبق این تعریف یک زیر گروه یک-پارامتری، یک زیرگروه لی $G$ نیست بلکه هومومورفیسمی به $G$ است.

**تعریف ۲.۵.۱.** گروه لی $G$ با جبرلی $\mathcal{G}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت نگاشت $\exp : \mathcal{G} \longrightarrow G$ با ضابطه $\exp(X) = F(۱)$ را نگاشت نمایی گوییم که $F$ یک زیر گروه یک-پارامتری نظیر میدان برداری $X$ است. اگر $U$ یک همسایگی $۰ \in \mathcal{G}$ ، $V$ یک همسایگی $e \in G$ باشند، آن‌گاه $\exp$ یک دیفئومورفیسم بین $U$ ، $V$ برقرار می‌کند.

**قضیه ۳.۵.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه لی همبند با جبرلی $\mathcal{G}$ باشد. در این‌صورت برای هر $\mathbf{v}_۱, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{G}$ هر عضو $G$ مانند $g$ قابل بیان به‌صورت ترکیب نگاشت‌های نمایی می‌باشد، بدین معنا که:*

$$g = \exp(\mathbf{v}_k) \circ \cdots \circ \exp(\mathbf{v}_۱).$$

تعبیر قضیه فوق آن است که با داشتن اعضای یک جبرلی می‌توان با محاسبه نگاشت‌های نمایی متناظر با هر عضو و ترکیب آن‌ها در هم ضابطه تبدیل گروه را به‌دست آورد.

***برهان.*** [۱۵]. □

**تعریف ۴.۵.۱.** یک گروه یک پارامتری از تبدیلات توسط شار میدان‌های برداری تولید می‌شود، بنابراین گروه لی از تبدیلات $G$ که روی منیفلد $M$ عمل می‌کند مجموعه‌ای از میدان‌های برداری روی $M$ را مشخص می‌کند که به عنوان مولدهای بی‌نهایت کوچک عمل گروه معرفی می‌شوند. تناظری یک به یک بین گروه‌های موضعی از تبدیلات و مولدهای بی‌نهایت کوچکشان وجود دارد. به ویژه اگر $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ گروه یک پارامتری از تبدیلات $\{\exp(\epsilon\mathbf{v}) : \epsilon \in \mathbb{R}\}$ را تولید کند، $\mathbf{v}$ با مولد بی‌نهایت کوچک $\tilde{\mathbf{v}}$ از گروه یک پارامتری از تبدیلات با شار $x \longrightarrow \exp(\epsilon\mathbf{v})x$ مشخص می‌شود بنابراین مولد بی‌نهایت کوچک در عمل گروه با دیفرانسیل زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{v}}|_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big|_{\epsilon=۰} \exp(\epsilon\mathbf{v})x \quad x \in M,\ \mathbf{v} \in \mathcal{G}.$$

در نتیجه

$$\tilde{\mathbf{v}} = \Phi_*(\mathbf{v}|_x),$$

که $\Phi_x : G \longrightarrow M$ به صورت $\Phi_x(g) = g.x$ تعریف می‌شود چون $\Phi_x \circ \phi_h = \Phi_{h.x}$. اگر $\mathbf{v} \in \mathcal{G} = \mathcal{G}_R$ میدان برداری ناوردای راست روی $G$ باشد بنابراین $\Phi_{*x}(\mathbf{v}_g) = \tilde{\mathbf{v}}|_{g.x}$ که $\Phi_{*x}$ حافظ کروشه لی بین میدان‌های برداری است.

**قضیه ۵.۵.۱.** *فرض کنید $\mathcal{G}$ جبر لی با بعد متناهی از میدان‌های برداری روی منیفلد $M$ باشد و $G$ گروه لی با جبر لی $\mathcal{G}$ است. بنابراین عمل موضعی از $G$ روی $M$ وجود دارد که مولدهای بی‌نهایت کوچک آن با جبر لی گروه مذکور یکی می‌باشد.*

***برهان.*** [۳]. □

**تعریف ۶.۵.۱.** فرض می‌کنیم $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ میدان برداری روی $M$ و $\exp$ شار$\mathbf{v}$ باشد مشتق لی $\mathbf{w}$ نسبت به $\mathbf{v}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=۰} \exp_*\left(-\epsilon\mathbf{w}_{\exp(t\mathbf{v})p}\right) = \lim_{\epsilon \longrightarrow ۰} \frac{\exp_*\left(-\epsilon\mathbf{w}_{\exp(\epsilon\mathbf{v})p}\right) - \mathbf{w}_p}{\epsilon} \qquad (۶.۱)$$

**گزاره ۷.۵.۱.** *فرض کنید $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ میدان‌های برداری هموار روی $M$ باشند. مشتق لی $\mathbf{w}$ نسبت به $\mathbf{v}$ همان کروشه لی $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ است:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} = [\mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

***برهان.*** [۱۲]. □

**مثال ۸.۵.۱.** عمل گروه دوران $\mathrm{SO}(۲)$ بر صفحه را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم،

$$\Psi(\epsilon, (x, y)) = (x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, x\sin\epsilon + y\cos\epsilon),$$

اگر مولد بی‌نهایت کوچک به‌صورت میدان برداری $\mathbf{v} = \xi(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ باشد آن‌گاه

$$\xi(x, y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\epsilon}|_{\epsilon=۰}(x\cos\epsilon - y\sin\epsilon) = -y,$$

$$\eta(x, y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\epsilon}|_{\epsilon=۰}(x\sin\epsilon + y\cos\epsilon) = x,$$

بنابراین مولد بی‌نهایت کوچک آن عبارت است از

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial_x} + x\frac{\partial}{\partial_y},$$

بنابراین می‌توان دید که گروه تبدیلات مثال بالا با جواب‌های سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\epsilon} = -y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\epsilon} = x.$$

مطابقت دارد.

**مثال ۹.۵.۱.** عمل گروه $\mathrm{SL}(۲)$ روی $\mathbb{R}$ را به شکل

$$x \longrightarrow \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

تعریف می‌کنیم.

جبر لی گروه $\mathrm{SL}(۲)$ ، ماتربس‌های با اثر صفر است. بنابراین این جبر با ماتریس‌های زیر تولید می‌شود.

$$A_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad A_۲ = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} \end{pmatrix}, \quad A_۳ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

با محاسبه مشتق نگاشت مداری فوق می‌توان دید که

$$\mathbf{v}_۱ = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_۲ = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_۳ = -x^۲\frac{\partial}{\partial x}.$$

مولدهای بی‌نهایت کوچک این عمل هستند.

**قضیه ۱۰.۵.۱.** *فرض کنید گروه همبند $G$ روی منیفلد $M$ عمل کند. تابع $I : M \longrightarrow \mathbb{R}$ تحت $G$ ناورداست اگر و فقط اگربه ازای هر مولد بی نهایت کوچک عمل $G$ روی $M$ مانند $\mathbf{v}$ داریم $\mathbf{v}[I] = ۰$.*

**برهان.** $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ را ثابت در نظربگیرید. از شرط ناوردایی $I[\exp(\epsilon\mathbf{v})] = I(x)$ نسبت به $\epsilon$ دیفرانسیل می‌گیریم و $\epsilon = ۰$ قرار می‌دهیم و به نتیجه مورد نظر می‌رسیم. بر عکس اگر $\mathbf{v}[I] = ۰$ برقرار باشد داریم $\mathrm{d}((I|\exp(\epsilon\mathbf{v})x])/\mathrm{d}\epsilon = ۰$ و بنابراین $I[\exp(\epsilon\mathbf{v})x]$ تحت زیر گروه یک پارامتری تولید شده توسط $\mathbf{v}$ ثابت است. پس $I$ ناورداست. □

بنابراین طبق قضیه ناوردای اگر $u = I(x)$ یک تابع $G$-ناوردا از گروه یک پارامتری تبدیلات با مولدهای بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v} = \sum_i \xi^i(x)\partial_{x^i}$ باشد باید در دستگاه معادلات خطی مرتبه اول همگن زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{i=۱}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i} = ۰,$$

جواب‌های این دستگاه توسط روش جایگزینی بدست می‌آید. معادله دیفرانسیل جزیی رابطه بالا با سیستم مشخصه از معادلات دیفرانسیل زیر جابجا می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}x^۱}{\xi^۱(x)} = \frac{\mathrm{d}x^۲}{\xi^۲(x)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x^m}{\xi^m(x)}, \qquad (۷.۱)$$

جواب‌ها به صورت موضعی به فرم $I_۱(x) = C_۱, \cdots, I_{m-۱}(x) = C_{m-۱}$ نوشته می‌شوند که $C_i$ها ثابت‌های انتگرال هستند. اثبات این‌که توابع $I_۱, \cdots, I_{m-۱}$ مجموعه کاملی از ناوردهای مستقل از گروه یک پارامتری تولید شده توسط $\mathbf{v}$ می‌باشد.

**مثال ۱۱.۵.۱.** تابع $G$- ناوردا تحت گروه یک پارامتری تولید شده توسط میدان برداری

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (۱ + z^۲)\frac{\partial}{\partial z},$$

را شرح می‌دهیم. گروه یک-پارامتری تبدیل (شار) عبارت است از

$$(x, y, z) \longrightarrow \left(x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t, \frac{\sin t + z\cos t}{\cos t - z\sin t}\right) \qquad (۸.۱)$$

بنابراین معادله (۸.۱) پارامتری شده خم انتگرال گذرنده از آن نقطه است سیستم مشخصه سازی (۷.۱) برای این میدان برداری به صورت زیر است:

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{۱ + z^۲},$$

معادله اول $\frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}x}{-y}$ یک معادله دیفرانسیل جدا پذیر است که جواب عمومی آن $x^۲ + y^۲ = c_۱$ است که $c_۱$ ثابت انتگرال است. بنابراین $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ ناورداست. برای حل معادله دوم به جای $x$ قرار می‌دهیم $\sqrt{r^۲ - y^۲}$. جواب به صورت $\tan^{-۱} z - \sin^{-۱}(\frac{y}{r}) = \tan^{-۱} z - \tan^{-۱}(\frac{y}{x}) = c_۲$ است بنابراین $\tan^{-۱} z - \tan^{-۱}(\frac{y}{x})$ ناوردای دوم است در نتیجه برای $yz + x \neq ۰$ تابع $w = (xz - y)/(yz + x)$، $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ مجموعه کاملی از ناوردای مستقل تابعی را نشان می‌دهد.

# فصل ۲

## معادلات دیفرانسیل و تقارن‌های نقطه‌ای

## ۱.۲ فضای جت

در این فصل مفهوم امتداد، ناورداهای دیفرانسیلی و روش محاسبه آن‌ها را ارایه می‌دهیم و همچنین از روش‌های بی‌نهایت کوچک که برای محاسبه گروه تقارن و مشخص کردن گروه تقارن معادلات دیفرانسیل ارایه شده است، استفاده می‌شود.

یک تابع حقیقی هموار مانند $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ که با ضابطه $f(x) = f(x^1, \ldots, x^p)$ تعریف می‌شود، دارای تعداد

$$p_k = \binom{p+k-1}{k},$$

مشتق جزئی متمایزازمرتبه $k$ نسبت به متغیرهایش می‌باشد. هرگاه $J = (j_1, \ldots, j_k)$ یک اندیس چندگانه ازمتغیرهای تابع $f$ باشد، آن‌گاه مشتق جزئی تابع $f$ نسبت به $J$ بصورت زیرنمایش داده می‌شود:

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \ldots \partial x^{j_k}},$$

توجه نمایید که مرتبه اندیس چندگانه $J$ که با نماد $\sharp J = k$ مشخص می‌شود، براین که چند بار از تابع مزبور مشتق گرفته‌ایم، دلالت می‌نماید. اکنون بحث راکمی گسترده‌تر می‌نماییم. فرض کنید که $f : X \longrightarrow U$ یک تابع $p$-متغیره $q$- مقداری باضابطه‌ی $u = f(x) = (f^1(x), \ldots, f^q(x))$ باشد. دراین صورت، فضای تمام مشتقات جزئی این تابع تا مرتبه $n$-ام را با

$$U^{(n)} := U \times U_1 \times \cdots \times U_n, \qquad (۱.۲)$$

نمایش می‌دهیم، به طوریکه $U_i$ ها به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ نماینده فضای مشتقات جزئی از مرتبه‌ی $i$-ام می‌باشند. می‌توان مشاهده نمود که بعد فضای (۱.۲) برابر است با

$$q + qp_1 + qp_2 + \cdots + qp_k = q\binom{p+n}{n} := qp^{(n)},$$

توجه نمایید که از این به بعد هر نقطه در $U^{(n)}$ را بصورت $u^{(n)}$ نمایش می‌دهیم. درنتیجه، $u^{(n)}$ دارای $qp^{(n)}$ متغیر متمایز به شکل $u^\alpha_J, \alpha = 1, \ldots, q$ می‌باشد و $J = (j_1, \ldots, j_k)$ یک اندیس چندگانه با شرایط $0 \leq k \leq p, 1 \leq j_k \leq p$ است.

**تعریف ۱.۱.۲.** با اضافه نمودن فضای متغیرهای مستقل به $U^{(n)}$، فضای

$$J^{(n)} = X \times U^{(n)}, \qquad (۲.۲)$$

تعریف می‌شود که به آن فضای جت مرتبه $n$-ام تابع $u = f(x)$ گفته و آن را با نماد $J^{(n)}f$ نشان می‌دهیم. واضح است که بعد فضای (۲.۲) برابر با $p + qp^{(n)}$ می‌باشد. درحقیقت، این فضا دقیقا فضای لازم برای نشان دادن بسط تیلور تابع $f$ به همراه متغیرهایش می‌باشد.

**قضیه ۲.۱.۲.** *$J^{(n)}$ یک منیفلد هموار $p + qp^{(n)}$ بعدی است.*

***برهان.*** [۱۵]. □

**مثال ۳.۱.۲.** تابع $u = f(x, y, z)$ را که شامل سه متغیرمستقل و یک متغیر وابسته می‌باشد را در نظر بگیرید. به منظور یافتن $J^{(2)}$ کافیست که مشتقات جزئی تابع فوق را تا مرتبه دوم بنویسیم، دراین‌صورت داریم:

$$J^{(2)} = \{(x, y, z; u; u_x, u_y, u_z; u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{yz}, u_{xz})\} \simeq \mathbb{R}^8$$

**تعریف ۴.۱.۲.** به فضای جت مرتبه $n$-ام یک تابع به غیر از متغیرهای مستقل آن، امتداد مرتبه $n$-ام آن تابع گفته می‌شود و آن را با نماد $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ معرفی می‌نماییم. بنابراین، با توجه به تعریف فوق امتداد مرتبه دوم تابع $u = f(x, y, z)$ عبارت است از:

$$f^{(2)}(x, y, z) = (f; f_x, f_y, f_z; f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xz}, f_{xy}, f_{yz}),$$

**تعریف ۵.۱.۲.** یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با $p$ - متغیر مستقل $x = (x^1, \cdots, x^p)$ و $q$ - متغیر وابسته $u = (u^1, \cdots, u^q)$ بیان می‌شود. فضای کامل $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ شامل تمام متغیرهای مستقل و وابسته است. یک میدان برداری روی فضای کامل $E$ به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi^\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad (۳.۲)$$

که روی فضای متغیرهای مستقل و وابسته تعریف می‌شود.
میدان برداری افقی است اگر ضرایب عمودی صفر باشند یعنی $\varphi^\alpha = 0$ و میدان برداری عمودی است اگر ضرایب افقی صفر باشند یعنی $\xi^i = 0$.

**مثال ۶.۱.۲.** عمل گروه $\mathrm{SO}(2)$ روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$g_t(x, u) = (x\cos t - u\sin t, x\sin t + u\cos t),$$

تعریف می‌کنیم که روی فضای متغیرهای مستقل و وابسته $E \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ عمل می‌کند. این تبدیل تابع $u = f(x)$ را به گرافش می‌نگارد بنابراین گراف $g_t \cdot \Gamma_f$ گراف تابعی خوش تعریف باقی خواهد ماند. معادله تابع تبدیلات $\tilde{f} = g.f$ در فرم ضمنی به‌صورت زیر است

$$\tilde{x} = x\cos t - f(x)\sin t, \qquad \tilde{u} = x\sin t + f(x)\cos t,$$

که$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ برای مثال اگر $u = ax + b$ یک تابع (تبدیل) آفین باشد، تابع تبدیل نیز آفین است و در فرم ضمنی به‌صورت

$$\tilde{u} = \frac{\sin t + a\cos t}{\cos t - a\sin t}\tilde{x} + \frac{b}{\cos t - a\sin t}, \qquad (۴.۲)$$

است که وقتی $a \neq \cot t$ است تعریف می‌شود.

## ۲.۲ معادلات دیفرانسیل

**تعریف ۱.۲.۲.** یک دستگاه $m$- معادله دیفرانسیل مرتبه $n$-ام با $p$- متغییر مستقل و $q$ -متغیر وابسته با دستگاه معادلاتی $\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = \circ, \nu = \text{۱},...,p$ شامل $x = (x^\text{۱},...,x^p)$ و $u = (u^\text{۱},...,u^q)$ و مشتقات $u$ نسبت به $x$ تا مرتبه $n$ نوشته می‌شود. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌صورت

$$\Delta : X \times U^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

است که $\Delta(x,u^{(n)}) = (\Delta_\text{۱}(x,u^{(n)}),...,\Delta_t(x,u^{(n)}))$در اندیس‌هایشان هموار می‌باشند

مجموعه جواب دستگاه را با

$$S_\Delta = \{(x,u^{(n)}) | \Delta_\nu(x,u^{(n)}) = \circ, \nu = \text{۱},...,m\}, \qquad (\text{۵.۲})$$

نشان می‌دهیم که زیرمجموعه‌ای از فضای جت مرتبه‌ی $n$ -ام و شامل تمام نقاط $(x,u^{(n)}) \in J^{(n)}$ است که در دستگاه صدق می‌کند.

**تعریف ۲.۲.۲.** فرض می‌کنیم $\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = \circ, \nu = \text{۱},...,m$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد. آن را دارای رتبه ماکسیمال گوییم اگر ماتریس ژاکوبین $p \times (p + qp^{(n)})$ -بعدی آن

$$J_\Delta(x,u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_j^\alpha}\right),$$

نسبت به همه‌ی متغیرهای $(x,u^{(n)})$ از رتبه $m$ باشد هرگاه داشته باشیم:

$$\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = \circ.$$

## ۳.۲ امتداددهی عمل گروه

**تعریف ۱.۳.۲.** فرض کنید که $G$ یک گروه ازتبدیلات باشد که روی یک زیرمجموعه باز از فضای کامل $E$ مانند $\mathcal{O}$ عمل می‌کند. این عمل را می‌توان به فضای جت مرتبه $n$-ام $\mathcal{O}$ یعنی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ ترفیع داد، که به آن امتداد مرتبه $n$-ام عمل گروه $G$ روی $\mathcal{O}$ گفته و آن را با $G^{(n)}$ نمایش می‌دهیم. به عبارتی دیگر منظور از امتداد عمل یک گروه، تعمیم عمل آن به روی مشتقات جزئی تا مرتبه $n$-ام تابع $u = f(x)$ می‌باشد. قابل ذکر است که این فرآیند بدین گونه است که هرگاه $g$ یک تبدیل از گروه $G$ باشد، آن‌گاه با در نظرگرفتن $g$ به عنوان یک تابع به‌صورت $g : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ امتداد آن روی $\mathcal{O}$ به‌صورت:

$$g^{(n)} : J^{(n)}(\mathcal{O}) \longrightarrow J^{(n)}(\mathcal{O}),$$

با ضابطه‌ی $g^{(n)} \cdot (x_\circ, u_\circ^{(n)}) = (\tilde{x_\circ}, \tilde{u_\circ}^{(n)})$ به ازای نقطه دلخواه $(x_\circ, u_\circ^{(n)}) \in J^{(n)}(\mathcal{O})$ تعریف می‌شود.

همانطورکه درتعریف فوق اشاره شد، عمل یک گروه قابل امتداد به روی فضای جت می‌باشد. دراین بخش، نشان می‌دهیم که میدان‌های برداری رانیز می‌توان امتداد داد که ازآن‌ها به عنوان مولدهای بی‌نهایت کوچک یاد می‌گردد. قابل ذکر است که این فرآیند نخستین گام در راستای یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل محسوب می‌شود.

**تعریف ۲.۳.۲.** تابع هموار حقیقی مقدار $F : J^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}$ که روی زیرمجموعه باز از فضای جت مرتبه‌ی $n$-ام تعریف می‌شود، تابع دیفرانسیلی از مرتبه $n$ نامیده می‌شود.
برای مثال معادله $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ یا تابع دیفرانسیلی مرتبه دوم $F(x, u^{(۲)}) = u_{xx} + u_{yy}$ روی فضای جت $J^{(۲)}(E)$ که $E = \mathbb{R}^۲ \times \mathbb{R}$ است که دارای مختصات $(x, y, u)$ است، تعریف می‌شود.

## ۴.۲ مشتقات کامل

**تعریف ۱.۴.۲.** $F\big(x, u^{(n)}\big)$ را یک تابع دیفرانسیلی از مرتبه $n$ را در نظر بگیرید. مشتق کامل $F$ نسبت به $x^i$ تابع دیفرانسیلی مرتبه‌ی $(n+۱)$-ام $D_iF$ است که برای هر تابع هموار $u = f(x)$ در شرط زیر صدق می‌کند.

$$D_iF(x, f^{(n+۱)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i}F(x, f^{(n)}(x)).$$

**مثال ۲.۴.۲.** به عنوان مثال اگر $E \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ با مختصات $(x, u)$ باشد، آن‌گاه:

$$D_xF = \frac{\partial F}{\partial x} + u_x\frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xxx}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + ...,$$

**مثال ۳.۴.۲.** به عنوان مثال دیگر اگر $E \simeq \mathbb{R}^۲ \times \mathbb{R}$ با مختصات $(x, t, u)$ باشد، آن‌گاه:

$$D_xF = \frac{\partial F}{\partial x} + u_x\frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial F}{\partial u_t} + u_{xxt}\frac{\partial F}{\partial u_{xt}} + u_{xtt}\frac{\partial F}{\partial u_{tt}} + u_{xxx}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + ...,$$

$$D_tF = \frac{\partial F}{\partial t} + u_t\frac{\partial F}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial F}{\partial u_t} + u_{xt}\frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{txx}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + u_{xtt}\frac{\partial F}{\partial u_{tx}} + u_{ttt}\frac{\partial F}{\partial u_{tt}} + ...,$$

## ۵.۲ امتداد میدان‌های برداری وتقارن‌ها

میدان برداری $\mathbf{v}$ که گروه یک پارامتری از تبدیلات $\exp(\epsilon\mathbf{v})$ را تولید می‌کند در نظر بگیرید. امتداد مرتبه $n$-ام میدان برداری $\mathbf{v}$ را با $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ نشان می‌دهیم، یک میدان برداری روی فضای جت $J^{(n)}$ بوده که به آن مولد بی‌نهایت کوچکی از امتداد مرتبه $n$-ام گروه یک پارامتری $\mathrm{pr}^{(n)}\exp(\epsilon\mathbf{v})$ گویند. بنابراین برای هر نقطه $\big(x, u^{(n)}\big) \in J^{(n)}$ داریم:

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}\big|_{\left(x,u^{(n)}\right)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\mathrm{pr}^{(n)}\exp(\epsilon\mathbf{v}).\big(x, u^{(n)}\big)\big|_{\epsilon=۰}.$$

**قضیه ۱.۵.۲.** *فرض کنیم $\Delta = ۰$ یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل از رتبه‌ی ماکسیمال تعریف شده در یک زیر مجموعه باز از $E$ مانند $\mathcal{O}$ باشد اگر $G$ گروه موضعی ازتبدیلات باشد که روی $\mathcal{O}$ عمل کرده و$\mathbf{v}$ یک مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد، آن‌گاه دستگاه $G$ را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد. اگر:*

$$\mathrm{pr}^{(n)}(\Delta) = ۰, \qquad \Delta = ۰. \tag{۶.۲}$$

***برهان.*** [۱۶]. □

**قضیه ۲.۵.۲.** *فرض می‌کنیم*

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad (۷.۲)$$

*میدانی برداری روی زیرمجموعه باز $M\subset X\times U$ باشد. امتداد مرتبه $n$-ام $\mathbf{v}$ میدان برداری*

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}=\mathbf{v}+\sum_{n=1}^{q}\sum_{J}\phi_\alpha^j\big(x,u^{(n)}\big)\frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} \qquad (۸.۲)$$

*روی فضای جت متناظر $M^{(n)}\subset\big(X\times U^{(n)}\big)$ می‌باشد که در آن $J=(j_1,\cdots,j_k)$ و $1\le j_k\le p$ و $0\le k\le n$ می‌باشد. همچنین داریم:*

$$\phi_\alpha^j(x,u^{(n)})=D_J(\phi_\alpha-\sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha)+\sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{j,i}^\alpha, \qquad (۹.۲)$$

*که در آن*

$$u_i^\alpha=\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i},\ u_{j,i}^\alpha=\frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x^i},$$

$$D_J=D_{j_1}.D_{j_2}.\cdots.D_{j_k},$$

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J}u_{j,i}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}.$$

***برهان.*** در ابتدا قضیه را برای مشتق مرتبه اول اثبات می‌کنیم، بنابراین $n=1$. فرض کنید $g_\epsilon=\exp(\epsilon\mathbf{v})$ گروه یک -پارامتری متناظر با تبدیل داده شده باشد، بنابراین داریم:

$$(\tilde{x},\tilde{u})=g_\epsilon.(x,u)=(\Xi_\epsilon(x,u),\Phi_\epsilon(x,u)),$$

توجه کنید:

$$\xi^i(x,u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\Xi_\epsilon^i(x,u),\quad i=1,\dots,p, \qquad (۱۰.۲)$$

$$\varphi_\alpha(x,u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\Phi_\epsilon^\alpha(x,u),\quad \alpha=1,\dots,q, \qquad (۱۱.۲)$$

که $\Xi_\epsilon^i$ و $\Phi_\alpha$ و مولفه‌های $\Xi_\epsilon$ و $\phi_\epsilon$ هستند. $(x,u^{(1)})\in M^{(1)}$ داده شده است، فرض کنید $u=f(x)$ یک تابع باشد بنابراین $u^{(1)}=pr^{(1)}f(x)$ یا به‌صورت ضمنی داشته باشیم

$$(u^\alpha)=f^\alpha(x),\qquad u_i^\alpha=\partial f^\alpha(x)/\partial x^i.$$

برای $\epsilon$های به اندازه کافی کوچک، تبدیل $f$ به‌وسیله عنصر گروهی $g_\epsilon$ خوش تعریف است و داریم:

$$\tilde{u}=\tilde{f}_\epsilon(\tilde{x})=(g_\epsilon.f)(\tilde{x})=[\phi_\epsilon\circ(1\times f)]\circ\Xi_\epsilon\circ(1\times f)]^{-1}(\tilde{x}), \qquad (۱۲.۲)$$

داده می‌شود. با استفاده قاعده زنجیره‌ای، ماتریس ژاکوبین $J\tilde{f}_\epsilon(\tilde{x})=(\partial\tilde{f}_\epsilon^\alpha/\partial\tilde{x}^i)$ داریم:

$$J\tilde{f}_\epsilon(\tilde{x})=J[\phi_\epsilon\circ(I\times f)](x).\{J\Xi_\epsilon\circ(1\times f)](x)\}^{-1}, \qquad (۱۳.۲)$$

(در صورت تعریف معکوس آن) چون

$$x=[\Xi_\epsilon\circ(1\times f)]^{-1}(\tilde{x}),$$

برای یافتن مولدهای بی‌نهایت کوچک $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}$ با در نظر گرفتن $\epsilon = 0$ مشتق بگیریم ابتدا به یاد آورید که اگر $M(\epsilon)$ ماتریس مربعی وارون‌پذیر از توابع $\epsilon$ باشد داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}[M(\epsilon)^{-1}] = -M(\epsilon)^{-1}\frac{\mathrm{d}M(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}M(\epsilon)^{-1},$$

همچنین توجه کنید که چون $\epsilon = 0$ متناظر با تبدیلات همانی است.

$$\Xi_0(x, f(x)) = x, \quad \phi_0 = (x, f(x)) = f(x), \tag{۱۴.۲}$$

بنابراین اگر $I$ یک ماتریس همانی $p \times p$ باشد پس:

$$J[\Xi_0 \circ (1 \times f)](x) = I, \quad J(\phi_0 \circ (1 \times f)(x)) = Jf(x),$$

اکنون از (۱۲.۲) دیفرانسیل گرفته و $\epsilon = 0$ قرار داده و با استفاده از قاعده لایپنیتز داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon} J\tilde{f}_\epsilon(\tilde{x}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} J[\phi_\epsilon o(I \times f)](x) - Jf(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} J[E_\epsilon o(I \times f)](x)]^{-1},\\ &= J[\phi_\epsilon o(I \times f)](x) - Jf(x).J[\xi \circ (I \times f)](x).\end{aligned}$$

که در تساوی دوم $\epsilon = (\epsilon^1, \cdots, \epsilon^p)^T$ و $\Phi = (\Phi_1, \cdots, \Phi_q)^T$ بردارهای ستونی هستند که در(۱۰.۲) و (۱۱.۲) آمده است. ورودی‌های ماتریس فرمول آخر ضرایب توابع $\Phi_\alpha^k$ از $\partial/\partial u_k^\alpha$ در $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}$ را می‌دهد. یعنی ورودی $(\alpha, k)$ -ام به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\phi_\alpha^k(x, pr^{(1)}f(x)) &= \frac{\partial}{\partial x^k}[\phi_\alpha(x, f(x))] - \sum_{i=1}^{P}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x}.\frac{\partial}{\partial x^k}[\xi^i(x, f(x))]\\ &= D_k\Big[\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{P}\xi^i u_i^\alpha\Big] + \sum_{i=1}^{P}\xi^i u_{ki}^\alpha,\end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

که $u_{ki}^\alpha = \partial^2 u^\alpha/\partial x^k \partial x^i$ و این حالت (۸.۲) را در $(n+1)$ اثبات می‌کند. برای این که قضیه را در حالت کلی اثبات کنیم از استقرا استفاده می‌کنیم. موضوع مورد توجه آن است که فضای جت $(n+1)$ -ام ، $M^{(n+1)}$ می‌تواند به عنوان زیر فضای جت مرتبه اول $(M^{(n)})^{(1)}$ از فضای جت $n$-ام مشاهده شود. به این دلیل که مشتقات مرتبه‌ی $(n+1)$ -ام $u_j^\alpha$ می‌تواند به عنوان مشتقات مرتبه‌ی اول از مشتقات مرتبه $n$-ام نوشته شود. مثالی را در این مورد بررسی می‌کنیم. مثلا در حالت $p = 2$ و $q = 1$ فضای جت اول $M^{(1)}$ مختصات $(x, y, u, u_x, u_y)$ را دارد.

$(u_x, u_y)$ را به عنوان متغرهای وابسته‌ی جدید در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\mathbf{v} = u_x$ و $w = u_y$ ، بنابراین $M^{(1)}$ تنها زیر مجموعه‌ی بازی از $X \times \tilde{U}^{(1)}$ می‌باشد که $X$ دو بعدی است اما $\tilde{U}$ سه متغییر وابسته‌ی $u, \mathbf{v}, w$ را دارد. بنابراین فضای جت اول $M^{(1)}$ یعنی $(M^{(1)})^{(1)}$ زیرمجموعه بازی از $X \times \tilde{U}^{(1)}$ با مختصات $(x, y; u; \mathbf{v}, \mathbf{w}; u_x, u_y, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y)$ خواهد بود اما قرار داده بودیم $\mathbf{w} = u_y, \mathbf{v} = u_x$ پس $M^{(2)} \in (M^{(1)})^{(1)}$ زیر فضای تعریف شده با روابط زیر در $x \times \tilde{u}$ است.

$$\mathbf{v} = u_x \quad , \mathbf{w} = u_y, \quad , \mathbf{v}_y = \mathbf{w}_x.$$

مراحل استقرا برای تعیین $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ از $\mathrm{pr}^{(n-)}\mathbf{v}$ به شرح زیر می‌باشد:
$\mathrm{pr}^{(n-1)}\mathbf{v}$ را به عنوان میدان برداری روی $M^{(n-1)}$ بنابراین بوسیله‌ی فرمول امتداد مرتبه چهار را می‌توانیم آن را به $(M^{(n-1)})^{(1)}$ امتداد می‌دهیم . سپس میدان‌های برداری را به زیر فضای $M^{(n)}$ محدود می‌کنیم و در نتیجه امتداد $n$- ام $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ مشخص خواهد شد. حال مختصات مرتبه‌ی $n$-ام جدید $(M^{(n-1)})^{(1)}$ با $u^\alpha_{j,k} = \partial u^\alpha_j/\partial x^k$ به‌دست می‌آید که $1 \leq k \leq p$ و $J = (j_1, ..., j_{n-1})$ ، $1 \leq \alpha \leq q$ طبق (۱۵.۲) ضرایب $\partial/\partial u^\alpha_{j,k}$ در امتداد مرتبه‌ی اول از $\mathrm{pr}^{(n-1)}\mathbf{v}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\phi^{J,k}_\alpha = D_k\phi^J_\alpha - \sum_{i=1}^{P} D_k\xi^i.u^\alpha_{J,i}, \qquad (۱۶.۲)$$

حال کافی است بررسی کنیم که فرمول (۱۸.۲) رابطه بازگشتی (۱۵.۲) را حل می‌کند.
به‌وسیله استقرا داریم:

$$\begin{aligned}
\phi^{J,k}_\alpha &= D_k\{D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_i) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_{J,i}\} - \sum_{i=1}^{p} D_k\xi^i.u^\alpha_{J,i} \\
&= D_kD_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_i) + \sum_{i=1}^{p}(D_k\xi^i - u^\alpha_{J,i} + \xi^i u^\alpha_{J,ik} - \sum_{i=1}^{p} D_k\xi^i.u^\alpha_{J,i} \\
&= D_kD_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_i) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_{J,ik},
\end{aligned}$$

که $u^\alpha_{j,ik} = \partial^2 u^\alpha_j/\partial x^i\partial x^k$ بنابراین $\phi^\alpha_{j,k}$ به فرم (۱۸.۲) است و اثبات کامل می‌شود.

**مثال ۳.۵.۲.** گروه دوران $\mathrm{SO}(2)$ را که روی $X \times U \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ با مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v} = -u\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial x}$، عمل می‌کند را در نظر می‌گیریم. در اینجا $\phi = x$ و $\xi = -u$ و امتداد مرتبه اول $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\dfrac{\partial}{\partial u_x}$، به‌وسیله

$$\phi^x = D_x(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xx} = D_x(x + uu_x) - uu_{xx} = 1 + u_x^2,$$

داده می‌شود. همچنین ضریب تابعی $\phi^{xx}$ از $\dfrac{\partial}{\partial u_{xx}}$ در $\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v}$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\phi^{xx} = D_x^2(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xxx} = D_x^2(x + uu_x) - uu_{xxx} = 3u_xu_{xx}.$$

بنابراین مولد بی‌نهایت کوچک امتداد دوم $\mathrm{pr}^{(2)}\mathrm{SO}(2)$ که روی $X \times U^{(2)}$ عمل می‌کند به‌صورت زیر داده می‌شود.

$$\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x} + 3u_xu_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

روش زیر نیز برای محاسبه‌ی امتدا میدان‌های برداری وجود دارد. میدان برداری $\mathbf{v}$ را مشابه (۱.۲) در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$Q_\alpha(x, u^{(1)}) = \phi_\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^{P}\xi^i(x, u)u^\alpha_i, \qquad \alpha = 1, ..., q; \qquad (۱۷.۲)$$

$q$-تایی $(\phi_1, ..., \phi_q) = \phi_x(x, u^{(1)})$ را به عنوان مشخصه‌ی میدان برداری $\mathbf{v}$ در نظر می‌گیریم. با این تعریف (۳.۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$\phi_\alpha^J = D_J\phi_\alpha + \sum_{i=1}^{P}\xi^i u_{J,i}^\alpha \tag{۱۸.۲}$$

با جایگزین کردن آن در (۳.۲) و مرتب کردن آن داریم:

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + \sum_{i=1}^{p}\xi^i\{\frac{\partial x}{\partial x} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_j u_{J,i}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}\},$$

عبارت داخل کروشه، مشتق کامل می‌باشد، از این رو

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^{p}\xi^i D_i, \tag{۱۹.۲}$$

که

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} Q^\alpha(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad , \quad \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J D_J Q^\alpha(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \quad , \quad 0 \le J \le n \tag{۲۰.۲}$$

**تعریف ۴.۵.۲.** فرض کنیم $G$ یک گروه از تبدیلات نقطه‌ای یا برخوردی باشد. یک ناوردای دیفرانسیلی تابعی دیفرانسیلی مانند $I : J^{(n)}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ است به‌طوریکه:

$$I(g^{(n)} \cdot (x, u^{(n)})) = I(x, u^{(n)}).$$

**مثال ۵.۵.۲.** گروه دوران‌های $G = SO(2)$ که روی $X$ با مولد $\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial_x} + x\frac{\partial}{\partial_u}$ عمل می‌کنند را در نظر می‌گیریم:

ناوردای دیفرانسیلی مرتبه اول در واقع ناوردای معمولی از امتداد اول $\mathrm{pr}^{(n)}\mathrm{SO}(2)$ با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x},$$

می‌باشد. اگر متغیرهای $(x, u, u_x)$ را با $(x, y, z)$ نشان دهیم، داریم:

$$\mathbf{w} = \mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2)\frac{\partial}{\partial z},$$

توجه کنید که میدان برداری $\mathbf{w}$ روی $\mathbb{R}^3$ هرگز صفر نمی‌شود بنابراین در همسایگی‌ای از هر نقطه در $\mathbb{R}^3$ دو ناوردای مستق تابعی از گزوه یک-پارامتری تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{w}$ وجود دارد. سیستم مشخصه در این مورد به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2},$$

با انتگرال گرفتن از تساوی اول ناوردا $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ می‌باشد. برای پیدا کردن ناوردای دیگر $x$ را با $\sqrt{r^2 - y^2}$ جایگزین می‌کنیم، داریم:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2},$$

جواب آن $\arcsin \frac{y}{r} = \arctan z + k$ برای ثابت دلخواه $k$ می‌باشد. بنابراین

$$\arctan z - \arcsin \frac{y}{r} = \arctan z - \arctan \frac{y}{x},$$

ناوردای دیفرانسیلی دوم برای $\mathbf{w}$ می‌باشد. بیان ساده تری از این ناورداها با گرفتن تانژانت به‌دست می‌آید. $\frac{xz-y}{yz+x}$ ، بنابراین با توجه به تغییر متغیر اولیه

$$\frac{xu_x - u}{x + uu_x}, \qquad \sqrt{x^{۲} + u^{۲}}.$$

مجموعه کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه اول برای $\mathrm{SO}(۲)$ تشکیل می‌دهند.

**تعریف ۶.۵.۲.** تابع $u = f(x)$ تحت گروه تبدیلات $G$، ناورداست اگر $\Gamma_f$ (موضعا) $G$-ناوردا باشد.

**قضیه ۷.۵.۲.** *فرض کنید $G$ گروه تبدیلاتی باشد که به صورت منظم و متعدی روی $E \simeq X \times U$ با مدارات $r$- بعدی عمل می‌کند. در اینصورت مجموعه کاملی از ناورداهای مستقل تابعی مانند $I_۱(x,u), \cdots, I_{p-s}(x,u), J_۱(x,u), \cdots, J_q(x,u)$ از این عمل وجود دارد. بنابراین هر تابع $G$ - ناوردا $u = f(x)$ موضعا در فرم موضعی به‌صورت زیر است:*

$$w = h(y), \qquad y = I(x,u), \qquad w = J(x,u),$$

***برهان.*** [۱۶]. □

**تعریف ۸.۵.۲.** مشخصه میدان برداری (۳.۲) یک $q$- تا یی از توابع$Q(x,u^{(۱)})$ است که به $x$ و $u$ و مشتقات مرتبه اول $u$ وابسته است و به‌صورت زیرتعریف می‌شود:

$$Q^\alpha(x,u^{(۱)}) = \varphi^\alpha(x,u) - \sum_{i=۱}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \qquad \alpha = ۱, \cdots, q \tag{۲۱.۲}$$

**قضیه ۹.۵.۲.** *تابع $u = f(x)$ تحت گروه همبند تبدیلات نقطه ای ناورداست اگر و فقط اگر جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول زیر باشد:*

$$Q^\alpha(x,u^{(۱)}) = ۰, \qquad \alpha = ۱, \cdots, q \tag{۲۲.۲}$$

***برهان.*** [۱۶]. □

**مثال ۱۰.۵.۲.** مشخصه میدان برداری دوران $\mathbf{v} = -u\partial_x + x\partial_u$ به‌صورت $Q = x + uu_x$ است .هر تابع ناوردا باید در معادله $x + uu_x = ۰$ صدق کند. از این معادله به راحتی به $x^۲ + u^۲ = c$ می‌رسیم و بنابراین گراف یک دایره است.

**مثال ۱۱.۵.۲.** معادله برگر [۱]

$$u_t = u_{xx} + u_x^۲, \tag{۲۳.۲}$$

[۱] Burger

معادله ایست غیر خطی که روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^۲ \times \mathbb{R}$ تعریف شده و به معادله پتانسیل برگر معروف است. چون معادله مرتبه دو است. بنابراین لازم است که امتداد مرتبه دوم میدان برداری

$$\mathbf{v} = \xi^۱(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^۲(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

را که روی $E$ تعریف می‌شود تا مرحله دو امتداد می‌دهیم بنابراین امتداد مرتبه دوم $\mathbf{v}$ برابر است با:

$$\mathrm{pr}^{(۲)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

و با استفاده از فرمول (۱۶.۲) و این که مشخصه میدان برداری $\mathbf{v}$ ، $Q = \phi - \xi^۱ u_x - \xi^۲ u_t$ است، ضرایب $\mathrm{pr}^{(۲)}\mathbf{v}$ یعنی $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}, \phi^{xt}, \phi^{tt}$ را در زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
\phi^x &= D_xQ + \xi^۱ u_{xx} = \phi_x + (\phi_u - \xi^۱_x)u_x - \xi^۲_x u_t - \xi^۱_u u_x^۲ - \xi^۲_u u - xu_t,\\
\phi^t &= D_tQ + \xi^۱ u_{xt} + \xi^۲ u_{tt} = \phi_t - \xi^۱_t u_x + (\phi_u - \xi^۲_t)u_t - \xi^۱_u u_x u_t - \xi^۲_u u_t^۲,\\
\phi^{xx} &= D_x^۲Q + \xi^۱ u_{xxx} + \xi^۲ u_{xxt} = \phi_{xx} + (۲\phi_{xu}\xi^۱_{xx})u_x - \xi^۲_{xx}u_t + (\phi_{uu} - ۲\xi^۱_{xu})u_x^۲\\
&-۲\xi^۲_{xu}u_xu_t - \xi^۱_{uu}u_x^۳ - \xi^۲_{uu}u_x^۲u_t + (\phi_u - ۲\xi^۱_x)u_{xx} - ۲\xi^۲_x u_{xt} - ۳\xi^۱_u u_x u_{xx} - ۲\xi^۲_u u_x u_{xt},\\
\phi^{xt} &= D_xD_tQ + \xi^۱ u_{xxt} + \xi^۲ u_{xtt} = \phi_{xt} + (\phi_{ut} - \xi^۱_{xt})u_x + (\phi_{xu} - \xi^۲_{xt})u_t\\
&-\xi^۱_{ut}u_x^۲ - \xi^۲_{xu}u_t^۲ + (\phi_{uu} - \xi^۱_{xu} - \xi^۱_{ut})u_xu_t - \xi^۱_{uu}u_x^۲u_t - \xi^۲_{uu}u_xu_t^۲ - \xi^۱_t u_{xx}\\
&+(\phi_u - \xi^۱_x - \xi^۲_t)u_{xt} - \xi^۱_u u_{xx}u_t - ۲\xi^۱_u u_x u_{xt} - ۲\xi^۲_u u_t u_{xt} - \xi^۲_x u_{tt} - \xi^۲_u u_x u_{tt},\\
\phi^{tt} &= D_t^۲Q + \xi^۱ u_{ttt} + \xi^۲ u_{xtt} = \phi_{tt} + (۲\phi_{ut} - \xi^۱_{tt})u_t - \xi^۱_{tt}u_x\\
&+(\phi_{uu} - ۲\xi^۲_{ut}) - ۲\xi^۱_{ut}u_xu_t - \xi^۲_{uu}u_t^۳ - \xi^۱_{uu}u_xu_t^۲ + (\phi_u - ۲\xi^۲_t)u_{tt}\\
&-۲\xi^۱_t u_{xt} - ۳\xi^۲_u u_t u_{tt} - \xi^۱_u u_x u_{tt} - ۲\xi^۱_u u_t u_x.
\end{aligned}$$

حال پس از اثر دادن $\mathrm{pr}^{(۲)}\mathbf{v}$ بر معادله برگر داریم:

$$\phi^t = \phi^{xx} + ۲u_x\phi^x, \tag{۲۴.۲}$$

با جایگذاری ضرایب امتداد در (۲۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\phi_t - \xi^۱_t u_x + (\phi_u - \xi^۲_t)u_t - \xi^۱_u u_x u_t - \xi^۲_u u_t^۲ &= \phi_{xx} + (۲\phi_{xu} - \xi^۱_{xx})u_x - \xi^۲_{xx}u_t\\
&+(\phi_{uu} - ۲\xi^۱_{xu})u_x^۲ - ۲\xi^۲_{xu}u_xu_t\\
&-\xi^۱_{uu}u_x^۳ - \xi^۲_{uu}u_x^۲u_t + (\phi_u - ۲_x)u_{xx}\\
&-۲\xi^۲_x u_{xt} - ۳\xi^۱_u u_x u_{xx} - \xi^۲_u u_t u_{xx}\\
&-۲\xi^۲_u u_x u_{xt} + ۲\phi_x u_x + ۲(\phi_u - \xi^۱_x)u_x^۲\\
&-۲\xi^۲_x u_t u_x - ۲\xi^۱_u u_x^۳ - ۲\xi^۲_u u_x^۲ u_t,
\end{aligned}$$

با جایگذاری $u_t = u_x^۲ + u_{xx}$ در بالا می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
\phi_t - \xi^1_t u_x + (\phi_u - \xi^2_t)u_t - \xi^1_u u_x u_t - \xi^2_u u_t^2 \;&= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi^1_{xx})u_x - \xi^2_{xx} u_t \\
&+(\phi_{uu} - 2\xi^1_{xu})u_t - (\phi_{uu} - 2\xi^1_{xu})u_{xx} \\
&-2\xi^2_{xu} u_x u_t - \xi^1_{uu} u_x^3 - \xi^2_{uu} u_t^2 + \xi^2_{uu} u_t u_{xx} \\
&+(\phi_u - 2\xi^1_x)u_{xx} - 2\xi^2_x u_{xt} - 3\xi^1_u u_x u_{xx} \\
&-\xi^2_u u_t u_{xx} - 2\xi^2_u u_x u_{xt} + 2\phi_x u_x \\
&+2(\phi_u - \xi^1_x)u_t - 2(\phi_u - \xi^1_x)u_{xx} \\
&-2\xi^2_x u_t u_x - 2\xi^1_u u_x^3 - 2\xi^2_u u_t^2 + 2\xi^2_u u_t u_{xx},
\end{aligned}
$$

حال با مساوی قرار دادن ضرایب مشتقات تابع $u$ در دو طرف تساوی بالا به جدول زیر می‌رسیم:

| | ضرایب | تک جمله‌ایها |
|---|---|---|
| (۱) | $\phi_t = \phi_{xx},$ | ۱ |
| (۲) | $-\xi^1_t = 2\phi_{xu} - \xi^1_{xx} + 2\phi_x,$ | $u_x$ |
| (۳) | $\phi_u - \xi^2_t = \xi^2_{xx} + \phi_{uu} - 2\xi^1_{xu} + 2\phi_u - 2\xi_x,$ | $u_t$ |
| (۴) | $\xi^1_u = -2\xi^2_{xu} - 2\xi^2_x,$ | $u_x u_t$ |
| (۵) | $\xi^2_u = -\xi^2_{uu} - 2\xi^2_u,$ | $u_t^2$ |
| (۶) | $0 = 2\xi^1_{xu} - \phi_{uu} + \phi_u - 2\xi^1_x - 2\phi_u + 2\xi^1_x,$ | $u_{xx}$ |
| (۷) | $0 = \xi^1_{uu} - 2\xi^1_u,$ | $u_x^3$ |
| (۸) | $0 = \xi^2_{uu} - \xi^2_u - 2\xi^2_u,$ | $u_t u_{xx}$ |
| (۹) | $0 = -2\xi^2_x,$ | $u_{xt}$ |
| (۱۰) | $0 = -3\xi^1_u,$ | $u_x u_{xx}$ |
| (۱۱) | $0 = -2\xi^2_u,$ | $u_x u_{xt}$ |

از معادله‌ی (۹) و (۱۱) مشخص می‌شود که $\xi^2$ نسبت به $x$ و $u$ مستقل است. همچنین از معادله‌ی (۱۰) مشخص می‌شود که $\xi^1$ نسبت به $u$ مستقل است. از معادله‌ی (۶) نتیجه می‌شود $\phi_u = -\phi_{uu}$ بنابراین $\phi = \alpha(x,t)e^{-u} + \beta(x,t)$. پس از معادله‌ی (۳) نتیجه می‌شود که $\xi^2_t = 2\xi^1_x$ پس $\xi^1$ نسبت به $x$ از درجه اول است یعنی $\xi^1_{xx} = 0$ پس با توجه به معادله‌ی (۲) نتیجه می‌شود $\xi^1_t = -2\phi_{xu} - 2\phi_x$ و در این‌صورت:

$$\xi^1_t = -2\phi_{xu} - 2\phi_x = -2\beta_x \Rightarrow \beta = -\tfrac{1}{8}\xi^2_{tt}x^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t).$$

و $\phi_t = \phi_{xx}$ که نتیجه می‌دهد:

$$
\begin{aligned}
&\xi^1 = c_1 + c_4 x + 2c_5 + 4c_6 xt, \\
&\xi^2 = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2, \\
&\phi = \alpha(x,t)e^{-u} + c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2.
\end{aligned}
$$

که $c_1, \dots, c_6$ ثابتهایی دلخواه هستند و $\alpha(x,t)$ جواب دلخواهی از معادله برگر است: $\alpha_t = \alpha_{xx}$ بنابراین

فضای جبرلی تقارن‌ها توسط بردارهای زیر تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_۱ &= \partial_x,\\
\mathbf{v}_۲ &= \partial_t,\\
\mathbf{v}_۳ &= \partial_u,\\
\mathbf{v}_۴ &= x\partial_x + ۲t\partial_t,\\
\mathbf{v}_۵ &= ۲t\partial_x - x\partial_u,\\
\mathbf{v}_۶ &= ۴tx\partial_x + ۴t^۲\partial_t - (x^۲ + ۲t)\partial_u,\\
\mathbf{v}_\alpha &= \alpha(x,t)e^{-u}\partial_u.
\end{aligned}$$

در نهایت با محاسبه تابع exp نظیر این میدان‌های برداری داریم:

$$\begin{aligned}
g_۱ &:= \exp(\epsilon\mathbf{v}_۱)(x,t,u) = (x+\epsilon, t, u),\\
g_۲ &:= \exp(\epsilon\mathbf{v}_۲)(x,t,u) = (x, t+\epsilon, u),\\
g_۳ &:= \exp(\epsilon\mathbf{v}_۳)(x,t,u) = (x, t, u+\epsilon),\\
g_۴ &:= \exp(\epsilon\mathbf{v}_۴)(x,t,u) = (e^\epsilon x, e^{۲\epsilon}t, u),\\
g_۵ &:= \exp(\epsilon\mathbf{v}_۵)(x,t,u) = (x+۲\epsilon t, t, -y\epsilon^۲ - x\epsilon + u),\\
g_۶ &:= \exp(\epsilon\mathbf{v}_۶)(x,t,u) = \left(\frac{x}{۱+۴\epsilon t}, \frac{t}{۱+۴\epsilon t}, u\sqrt{۱+۴\epsilon t}\exp\left\{\frac{-\epsilon x^۲}{۱+۴\epsilon t}\right\}\right),\\
g_\alpha &:= \exp(\epsilon\mathbf{v}_\alpha)(x,t,u) = (x, t, u+\epsilon\alpha(x,t)).
\end{aligned}$$

اگر $u = f(x,t)$ یک جواب برای معادله‌ی مذکور باشد و تقارن‌ها را روی آن اثر دهیم، در این صورت یک جواب جدید برای معادله به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
u^۱ &= f(x-\epsilon, t),\\
u^۲ &= f(x, t-\epsilon),\\
u^۳ &= f(x, t-\epsilon),\\
u^۴ &= f(e^{-\epsilon}x, e^{-۲\epsilon}t),\\
u^۵ &= f(x-۲\epsilon t, t) + \epsilon x - \epsilon^۲ t,\\
u^۶ &= \frac{۱}{\sqrt{۱+۴\epsilon t}}\exp\left\{\frac{-\epsilon x^۲}{۱+۴\epsilon t}\right\} f\left(\frac{x}{۱+۴\epsilon t}, \frac{t}{۱+۴\epsilon t}\right),\\
u^\alpha &= f(x,t) + +\epsilon\alpha(x,t).
\end{aligned}$$

به عنوان مثال بدیهی است که $u = c$ یک جواب از معادله (۲۳.۲) است. لذا با توجه به $u^۶$ یک جواب جدید به شکل $u = \dfrac{c}{\sqrt{۱+۴\epsilon t}}\exp\left\{\dfrac{-\epsilon x^۲}{۱+۴\epsilon t}\right\}$ به‌دست می‌آید.

**مثال ۱۲.۵.۲.** گروه تقارن معادلات گرما را در یک منیفلد یک-بعدی تحلیل می‌کنیم. معادله گرما

$$u_t - u_{xx} = ۰,$$

را در نظر می‌گیریم. در این معادله ۲ متغیر مستقل $x$ و $t$ و یک متغیر وابسته $u$ داریم ، بنابراین $p = ۲$ و $q = ۱$ و $E = X \times U^{(۲)}$ با صفر قرار دادن معادله داریم: $u_t - u_{xx} = ۰$ بنابراین میدان برداری به‌صورت زیر

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}, \tag{۲۵.۲}$$

است. امتداد دوم آن به‌صورت

$$\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

می‌باشد. طبق محک بی‌نهایت کوچک ناوردایی باید

$$0 = \mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v}(u_t - u_{xx})|_{u_t - u_{xx}=0} = (\varphi^t - \varphi^{xx})|_{u_t - u_{xx}=0}, \qquad (۲۶.۲)$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned}
\varphi^t &= D_t\varphi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau \\
&= \varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \\
\varphi^x &= D_x\varphi - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau \\
&= \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t, \\
\varphi^{xx} &= D_x\varphi^x - u_{xx} D_x\xi - u_{xt} D_x\tau \\
&= \varphi_{xx} + 2(\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\varphi_{uu} - 2\xi_{\tau u})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t \\
&\quad -\xi_{uu}u_x^3 - \xi_{uu}u_x^2 u_t + (\varphi_u - 2\tau_x)u_{xx} - 2\xi_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} \\
&\quad -\tau_u u_t u_{xx} - 2\xi_u u_x u_{xt}.
\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۲۶.۲) و رابطه محاسبه شده برای $\varphi^t$ و $\varphi^{xx}$ بایستی

$$\begin{aligned}
0 =&\varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)u_t - \xi_x u_x u_t - \tau_u u_t^2 - \varphi_{xx} - (2\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x \\
&+\tau_{xx}u_t - (\varphi_{uu} + 2\xi_{xu})u_x^2 + 2\tau_{xu}u_x u_t + \xi_{uu}u_x^3 + \tau_{uu}u_x^2 u_t \\
&-(\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} + 2\tau_x u_{xt} + 3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_t u_{xx} + 2\tau_u u_x u_{xt}.
\end{aligned}$$

با قرار دادن $u_t = u_{xx}$ داریم:

$$\begin{aligned}
0 =&\varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 - \varphi_{xx} - (2\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x \\
&+\tau_{xx}u_{xx} - (\varphi_{uu} + 2\xi_{xu})u_x^2 + 2\tau_{xu}u_x u_{xx} + \xi_{uu}u_x^3 + \tau_{uu}u_x^2 u_{xx} \\
&-(\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} + 2\tau_x u_{xt} + 3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_t u_{xx} + 2\tau_u u_x u_{xt}.
\end{aligned}$$

ضرایب یک جمله‌ای‌های متشابه را با هم برابر قرار می‌دهیم.

| تک جمله‌ای | ضرایب | |
|---|---|---|
| $u_x u_{xt}$ | $0 = -2\tau_u,$ | $(a)$ |
| $u_{xt}$ | $0 = -2\tau_x,$ | $(b)$ |
| $u_{xx}^2$ | $-\tau_u = -\tau_u,$ | $(c)$ |
| $u_x^2 u_{xx}$ | $0 = -\tau_{uu},$ | $(d)$ |
| $u_x u_{xx}$ | $-\xi_u = -2\tau_{xu} - 3\xi_u,$ | $(e)$ |
| $u_{xx}$ | $\phi_u - \tau_t = -\tau_{xx} + \phi_u - 2\xi_x,$ | $(f)$ |
| $u_x^3$ | $0 = -\xi_{uy},$ | $(g)$ |
| $u_x^2$ | $0 = \phi_{uu} - 2\xi_{xy},$ | $(h)$ |
| $u_x$ | $-\xi_t = 2\phi_{xu} - \xi_{xx},$ | $(j)$ |
| $1$ | $\phi_t = \phi_{xx},$ | $(k)$ |

در ابتدا از معادلات $(a)$ و $(b)$ در می‌یابیم که $\tau$ تابعی است فقط از $t$ . سپس $(e)$ نشان می‌دهد که $\xi$ به $u$ بستگی ندارد. از $(f)$ نتیجه می‌گیریم که $\tau = 2\xi_x$ ، بنابراین $\xi(x,t) = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t)$ که $\sigma$ تابعی است فقط از $t$. از $(h)$ نتیجه می‌شود $\varphi$ در $u$ خطی است. بنابراین:

$$\varphi(x,t,u) = \beta(x,t)u + \alpha(x,t)$$

که $\alpha$ و $\beta$ تابع هستند. با $(j)$ داریم $\xi_t = -2\beta_x$ و $\beta$ به‌صورت زیر است:

$$\beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t)$$

سرانجام معادله آخر یعنی $(k)$ نتیجه می‌دهد که $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های معادله حرارت هستند.

$$\alpha_t = \alpha_{xx}, \qquad \beta_t = \beta_{xx}.$$

با استفاده از فرم قبلی $\beta$ داریم:

$$\tau_{ttt} = 0, \qquad \sigma_{tt} = 0, \qquad \rho_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt}.$$

بنابراین $\tau$ نمایی است از $t$ و $\sigma$ در $t$ خطی است و می‌توان $\xi$ و $\varphi$ را مستقیما از $\rho$ و $\sigma$ و $\tau$ به‌دست آورد .
بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\xi &= C_1 + C_4 x + 2C_5 t + 4C_6 xt,\\
\tau &= C_2 + 2C_4 t + 4C_6 xt^2,\\
\varphi &= (C_3 - C_5 x - 2C_6 t - C_6 x^2)u + \alpha(x,t),
\end{aligned}$$

که $\alpha_t = \alpha_{xx}$ جبر لی تقارن‌های بی‌نهایت کوچک به‌وسیله میدان‌های برداری زیر تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{۱} &= \partial_x,\\
\mathbf{v}_{۲} &= \partial_t,\\
\mathbf{v}_{۳} &= u\partial_u,\\
\mathbf{v}_{۴} &= x\partial_x + ۲t\partial_t,\\
\mathbf{v}_{۵} &= ۲t\partial_x - xu\partial_u,\\
\mathbf{v}_{۶} &= ۴tx\partial_x + ۴t^{۲}\partial_t - (x^{۲} + ۲t)\partial_u,
\end{aligned}$$

و جبر لی با بعد متناهی

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x,t)\partial_u,$$

رابطه بین این میدان‌های برداری در جدول زیر آمده است، که درایه‌ی در ردیف $i$ و ستون $j$ را با $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ نمایش می‌دهیم.

| $[,]$ | $\mathbf{v}_{۱}$ | $\mathbf{v}_{۲}$ | $\mathbf{v}_{۳}$ | $\mathbf{v}_{۴}$ | $\mathbf{v}_{۵}$ | $\mathbf{v}_{۶}$ | $\mathbf{v}_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{v}_{۱}$ | ۰ | ۰ | ۰ | $\mathbf{v}_{۱}$ | $-\mathbf{v}_{۳}$ | $۲\mathbf{v}_{۵}$ | $\mathbf{v}_{\alpha x}$ |
| $\mathbf{v}_{۲}$ | ۰ | ۰ | ۰ | $۲\mathbf{v}_{۲}$ | $۲\mathbf{v}_{۱}$ | $۴\mathbf{v}_{۴} - ۲\mathbf{v}_{۱}$ | $\mathbf{v}_{\alpha t}$ |
| $\mathbf{v}_{۳}$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | $-\mathbf{v}_\alpha$ |
| $\mathbf{v}_{۴}$ | $-\mathbf{v}_{۱}$ | $-۲\mathbf{v}_{۲}$ | ۰ | ۰ | $\mathbf{v}_{۵}$ | $۲\mathbf{v}_{۶}$ | $\mathbf{v}_{\alpha'}$ |
| $\mathbf{v}_{۵}$ | $-\mathbf{v}_{۳}$ | $-۲\mathbf{v}_{۱}$ | ۰ | $-\mathbf{v}_{۵}$ | ۰ | ۰ | $\mathbf{v}_{\alpha''}$ |
| $\mathbf{v}_{۶}$ | $-۲\mathbf{v}_{۵}$ | $۲\mathbf{v}_{۳} - ۴\mathbf{v}_{۴}$ | ۰ | $-۲\mathbf{v}_{۶}$ | ۰ | ۰ | $\mathbf{v}_{\alpha''}$ |
| $\mathbf{v}_\alpha$ | $-\mathbf{v}_\alpha$ | $-\mathbf{v}$ | $\mathbf{v}_\alpha$ | $-\mathbf{v}_{\alpha'}$ | $-\mathbf{v}_{\alpha''}$ | $-\mathbf{v}_{\alpha''}$ | ۰ |

$$\alpha' = x\alpha_x + ۲t\alpha_t, \qquad \alpha'' = ۲t\alpha_x + x\alpha,$$

$$\alpha''' = ۴tx\alpha_x + ۴t^{۲}\alpha_t + (x^{۲} + ۲t)\alpha.$$

پس اگر $\alpha(x,t)$ جوابی از معادله حرارت باشد $\alpha_x$ و $\alpha_t$ این گونه نیز هستند و$\alpha'$ و $\alpha''$ و $\alpha'''$. ${}_i\mathrm{G}$ که به وسیله $\mathbf{v}_i$ تولید می‌شوند در زیر آمده‌اند که از تبدیل نقطه‌ای $\exp(x,t,u) = (\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u})$ بدست می‌آیند:

هر مولد بی‌نهایت کوچک گروه ۱-پارامتری از تبدیلات به شرح زیر است:

$$g_۱ : (x+\epsilon, t, u),$$
$$g_۲ : (x, t+\epsilon, u),$$
$$g_۳ : (x, t, e^{\epsilon}u),$$
$$g_۴ : (e^{\epsilon}x, e^{۲\epsilon}t, u),$$
$$g_۵ : (x+۲\epsilon t, t, u.exp(-\epsilon x-\epsilon^۲ t)),$$
$$g_۶ : \left(\frac{x}{۱-۴\epsilon t}, \frac{t}{۱-۴\epsilon t}, u\sqrt{۱-۴\epsilon t}\exp\left[\frac{-\epsilon x^۲}{۱-۴\epsilon t}\right]\right),$$
$$g_\alpha : (x, t, u+\epsilon\alpha(x,t)),$$

برای مثال چند نمونه را حل می‌کنیم مثلا برای $\mathbf{v}_۱$ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\epsilon} = ۱ \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}\epsilon \Rightarrow \int \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\epsilon \Rightarrow x = \epsilon + k$$

$$\alpha(\epsilon) = (\epsilon+k, t, u)$$

با شرط اولیه داربم:

$$\alpha(\circ) = (k, t, u) = (x, t, u) \Rightarrow x = k$$

پس

$$G_۱ =: (x+\epsilon, t, u)$$

یا برای $\mathbf{v}_۳$ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\epsilon} = u \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{u} = \mathrm{d}\epsilon \Rightarrow \ln|u| = \epsilon + k \Rightarrow u = \mathrm{e}^{\epsilon+k}$$

با شرط اولیه داربم:

$$\alpha(\circ) = (x, t, u) \Rightarrow \alpha(\epsilon) = (x, t, \mathrm{e}^{\epsilon+k})|_{\epsilon=\circ} = (x, t, \mathrm{e}^{k})$$

$$\mathrm{e}^{k} = u = \ln|u| \Rightarrow \mathrm{e}^{\epsilon}.\mathrm{e}^{\ln|u|} = u\mathrm{e}^{\epsilon}$$

پس

$$G_۳ =: (x, t, u\mathrm{e}^{\epsilon})$$

که هر $G_i$ یک گروه تقارن است، بنابراین اگر $u=f(x,t)$ جوابی از معادله حرارت باشد:

$$u^{(1)}=f(x-\epsilon,t)$$
$$u^{(2)}=f(x,t-\epsilon)$$
$$u^{(3)}=\mathrm{e}^{\epsilon}f(x,t)$$
$$u^{(4)}=f(\mathrm{e}^{-\epsilon}x,\mathrm{e}^{-2\epsilon}t)$$
$$u^{(5)}=\mathrm{e}^{-\epsilon x+\epsilon^2 t}f(x-2\epsilon t,t)$$
$$u^{(6)}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}\exp\left\{\frac{-\epsilon x^2}{1+4\epsilon t}\right\}f\left(\frac{x}{1+4\epsilon t},\frac{t}{1+4\epsilon t}\right)$$
$$u^{(\alpha)}=f(x,t)+\epsilon\alpha(x,t)$$

به عنوان مثال $u^{(1)}$ بدین صورت به‌دست می‌آید:

$$\tilde{x}=x+\epsilon\Rightarrow x=\tilde{x}-\epsilon\Rightarrow u^{(1)}=f(x-\epsilon,t)$$

که $\epsilon$ یک عدد حقیقی و $\alpha(x,t)$ جوابی از معادله حرارت است.
یا برای $G_4$ داریم:

$$(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u})=(\mathrm{e}^{\epsilon}x,\mathrm{e}^{2\epsilon}t,u)$$
$$\tilde{x}=\mathrm{e}^{\epsilon}x\Rightarrow x=\mathrm{e}^{-\epsilon}\tilde{x}\qquad,\quad \tilde{t}=\mathrm{e}^{2\epsilon}t\Rightarrow t=\mathrm{e}^{-2\epsilon}\tilde{t}\qquad,\quad \tilde{u}=u$$
$$u=f(x,t)\Rightarrow u=f(\mathrm{e}^{-\epsilon}\tilde{x},\mathrm{e}^{-2\epsilon}\tilde{t})=f(\mathrm{e}^{-\epsilon}x,\mathrm{e}^{-2\epsilon}t)$$

گروه تقارن $G_3$ و $G_\alpha$ خطی بودن معادله حرارت را نشان می‌دهند. می‌توان جواب‌های دیگری با ضرب کردن این جواب‌ها در ثابت‌های دلخواه بدست آورد. گروه‌های $G_1$ و $G_2$ تغییر ناپذیری فضا-زمان معادله حرارت را نشان می‌دهد. $G_4$ نوعی از تقارن و تجانس را نشان می‌دهد. $G_5$ نوعی حرکت گالیله‌ای را نشان می‌دهد و در آخر $G_6$ گروه موضعی از تبدیلات است.
اگر فرض کنیم $u=c$ یک جواب ثابت باشد، نتیجه می‌گیریم که تابع نیز یک جواب است و اگر $c$ را برابر $\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}$ قرار می‌دهیم به جواب اصلی معادله حرارت در نقطه $(x_o,t_o)=(0,\frac{-1}{4\epsilon})$ خواهیم رسید. برای بدست آوردن جواب اصلی

$$u=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\{\frac{-x^2}{4t}\}$$

نیاز به تبدیل این جواب در $t$ با استفاده از $G_2$ است. گروه یک پارامتری عمومی از تقارن‌ها با ترکیب خطی $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_6\mathbf{v}_6+\mathbf{v}_\alpha$ از میدان‌های برداری بدست می‌آید. فرمول ضمنی گروه تبدیلات بسیار پیچیده است. بنابراین جواب عمومی بدست آمده از جواب داده شده $u=f(x,t)$ به شکل زیر است:

$$u=\frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon_6 t}}\exp\left\{\epsilon_3-\frac{\epsilon_5 x+\epsilon_6 x^2-\epsilon_5^2 t}{1+4\epsilon_6 t}\right\}\times$$
$$f\left(\frac{\mathrm{e}^{-\epsilon_4}(x-2\epsilon_5 t)}{1+4\epsilon_6 t}-\epsilon_1,\frac{\mathrm{e}^{-2\epsilon_4}t}{1+4\epsilon_6 t}-\epsilon_2\right)+\alpha(x,t).$$

**مثال ۱۳.۵.۲** (معادلات اویلر)**.** مانند مثال‌های قبلی به تشریح روش پایه‌ای برای محاسبه گروه‌های تقارن می‌پردازیم. دستگاه معادلات اویلر برای حرکت مایعات ایده‌آل تراکم ناپذیر را در نظر می‌گیریم که چهار متغیر مستقل دارد که $\mathbf{x}=(x,y,z)$ مختصات فضایی و $t$ زمان است ، همچنین چهار متغیر وابسته دارد که $\mathbf{u}=(u,v,w)$ مختصات سرعت و $p$ فشار است. دستگاه معادلات اویلر به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}&=-\nabla p,\\ \nabla\cdot\mathbf{u}&=\circ, \end{aligned} \tag{۲۷.۲}$$

$\nabla$ به عنوان یک عملگر دیفرانسیلی در بردارها به‌کار می‌رود هرگاه $\nabla$ را بر یک تابع یک بعدی اعمال کنیم، بیانگر مشتق استاندارد آن تابع مطابق آن‌چه در حساب دیفرانسیل و انتگرال تعریف شده‌است خواهد بود. اگر این عملگر بر یک میدان (تابعی که دارای چندین بُعد است) اعمال شود، $\nabla$ ممکن است بیانگر شیب (شدیدترین شیب محلی) یک میدان اسکالر (یا گاهی میدان برداری مثلاً در معادلات ناویه-استوکس)، دیورژانس یک میدان برداری، یا تاب یک میدان برداری باشد. اینکه دل بیانگر کدامیک از این اعمال است بستگی به نوع اعمالش دارد که در این مثال به شکل $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ نمایش می‌دهیم. ضرب داخلی $\nabla$ با $\mathbf{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(u,v,w)=u_x+v_y+w_z,$$

و اثر $\nabla$ روی $p$ به صورت $\nabla p=(p_x,p_y,p_z)$ تعریف می‌شود. همچنین اثر $\nabla$ روی $\mathbf{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla\mathbf{u}=\nabla(u,v,w)=\left((u_x,u_y,u_z),(v_x,v_y,v_z),(w_x,w_y,w_z)\right),$$

با باز کردن دستگاه (۲۷.۲) به همین روند به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} p_x=u_t+uu_x+vu_y+wu_z,\\ p_y=v_t+uv_x+vv_y+wv_z,\\ p_z=w_t+uw_x+vw_y+ww_z,\\ u_x+v_y+w_z=\circ \end{cases} \tag{۲۸.۲}$$

حال میدان برداری متناظر با دستگاه به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{v}=\xi\partial_x+\eta\partial_{y\varsigma}\partial_z+\tau\partial_t+\phi\partial_u+\psi\partial_v+\chi\partial_w+\pi\partial_p,$$

که $\xi,\eta,\dots,\pi$ توابعی از $\mathbf{x},t,\mathbf{u},p$ هستند. حال امتداد مرتبه اول میدان برداری نظیر دستگاه (۲۷.۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}\ &=\mathbf{v}+\phi^x\partial u_x+\phi^y\partial u_y+\phi^z\partial u_z+\phi^t\partial u_t\\ &+\psi^x\partial v_x+\psi^y\partial v_y+\psi^z\partial v_z+\psi^t\partial v_t\\ &+\chi^x\partial w_x+\chi^y\partial w_y+\chi^z\partial w_z+\chi^t\partial w_t\\ &+\pi^x\partial p_x+\pi^y\partial p_y+\pi^z\partial p_z+\pi^t\partial p_t, \end{aligned}$$

با اثر دادن $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}$ روی دستگاه (۲۸.۲) به دستگاه تقارن زیر می‌رسیم:

$$\phi^t + u\phi^x + v\phi^y + w\phi^z + u_x\phi + u_y\psi + u_z\chi = -\pi^x, \tag{۲۹.۲}$$

$$\psi^t + u\psi^x + v\psi^z + w\psi^z + v_x\phi + v_y\psi + v_z\chi = -\pi^y, \tag{۳۰.۲}$$

$$\chi^t + u\chi^x + v\chi^y + w\chi^z + w_x\phi + w_y\psi + w_z\chi = -\pi^z, \tag{۳۱.۲}$$

$$\phi^x + \psi^y + \chi^z = \circ, \tag{۳۲.۲}$$

در اینجا $\phi^t, \psi^x, \ldots$ ضرایب مشتقات مرتبه اول $\frac{\partial}{\partial u_t}, \frac{\partial}{\partial v_x}, \ldots$ که در امتداد مرتبه اول میدان برداری $\mathbf{v}$ ظاهر می‌شود. طبق معادله (۱۶.۲) داریم:

$$\begin{gathered}\phi^t = D_t\phi - u_xD_t\xi - u_yD_t\eta - u_zD_t\zeta - u_tD_t\tau,\\ \psi^x + D_x\psi - v_xD_x\xi - v_yD_x\eta - v_zD_x\zeta - v_tD_x\tau,\end{gathered}$$

و به همین نحو $\phi^x, \chi^x, \ldots$ را بدست می‌آوریم. به عنوان نمونه معادله (۳۲.۲) را حل می‌کنیم و بقیه معادلات نیز به همین نحو حل می‌شود. ابتدا مشتقات کامل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + v_x\frac{\partial}{\partial v} + w_x\frac{\partial}{\partial w} + p_x\frac{\partial}{\partial p}\\ &+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy}\frac{\partial}{\partial u_y} + u_{xz}\frac{\partial}{\partial u_z} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t}\\ &+v_{xx}\frac{\partial}{\partial v_x} + v_{xy}\frac{\partial}{\partial v_y} + v_{xz}\frac{\partial}{\partial v_z} + v_{xt}\frac{\partial}{\partial v_t}\\ &+w_{xx}\frac{\partial}{\partial w_x} + w_{xy}\frac{\partial}{\partial w_y} + w_{xz}\frac{\partial}{\partial w_z} + w_{xt}\frac{\partial}{\partial w_t}\\ &+p_{xx}\frac{\partial}{\partial p_x} + p_{xy}\frac{\partial}{\partial p_y} + p_{xz}\frac{\partial}{\partial p_z} + p_{xt}\frac{\partial}{\partial p_t} + \ldots,\end{aligned}$$

به همین نحو $D_y, D_z, D_t$ را به‌دست می‌آوریم. حال $\phi^x$ را طبق (۱۶.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\phi^x &= D_x\phi - u_xD_x\xi - u_yD_x\eta - u_zD_x\zeta - u_tD_x\tau\\ &= \phi_x + u_x\phi_u + v_x\phi_v + w_x\phi_w + p_x\phi_p\\ &-u_x[\xi_x + u_x\xi_u + v_x\xi_v + w_x\xi_w + p_x\xi_p]\\ &-u_y[\eta_x + u_x\eta_u + v_x\eta_v + w_x\eta_w + p_x\eta_p]\\ &-u_z[\zeta_x + u_x\zeta_u + v_x\zeta_v + w_x\zeta_w + p_x\zeta_p]\\ &-u_t[\tau_x + u_x\tau_u + v_x\tau_v + w_x\tau_w + p_x\tau_p],\end{aligned}$$

به همین نحو $\psi^y, \chi^z$ نیز بدست می‌اید. با قرار دادن $\phi^x, \psi^y, \chi^z$ در معادله (۳۲.۲) و ساده کردن، ضرایب چندجمله‌ای‌های متشابه را با هم برابر قرارمی‌دهیم. به همین صورت سه معادله دیگر دستگاه را نیز حل

می‌کنیم. و سرانجام با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی داریم:

$$
\begin{aligned}
&\xi = \delta_1 x + c_1 y - c_2 z + \alpha,\\
&\eta = -c_1 x + \delta_t y + c_3 z + \beta,\\
&\zeta = c_2 x - c_3 y + \delta_t z + \gamma,\\
&\tau = 2\delta + c_4 t + c_5,\\
&\phi = -(\delta_t + c_4)u + c_1 v - c_2 w + \alpha_t,\\
&\psi = -c_1 u - (\delta_t + c_4)v + c_3 w + \beta_t,\\
&\chi = c_2 u - c_3 v - (\delta_t + c_4)w + \gamma_t,\\
&\pi = -2(\delta_t + c_4)p - \tfrac{1}{2}\delta_u(x^2 + y^2 + z^2) - \alpha_{tt}x - \beta_{tt}y - \gamma_{tt}z + \theta,
\end{aligned}
$$

که $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ توابعی از $t$ هستند و $c_1, c_2, c_3.c_4, c_5$ ثابت هستند. ما نشان می‌دهیم که گروه تقارن معادلات اویلر توسط میدان‌های برداری زیر تولید می‌شود.

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathbf{v}_\alpha = \alpha\partial_x + \alpha_t\partial_u - \alpha_{tt}x\partial_p,\\
&\mathbf{v}_\beta = \beta\partial_y + \beta_t\partial_v - \beta_{tt}y\partial_P,\\
&\mathbf{v}_\gamma = \gamma\partial_z + \gamma_t\partial_w - \gamma_{tt}z\partial_p,
\end{aligned}\right\}
$$
مختصات‌های حرکت

$$\mathbf{v}_0 = \partial_t,$$
تبدیلات زمان

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathbf{d}_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + t\partial_t,\\
&\mathbf{d}_2 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 2p\partial_p,
\end{aligned}\right\}
$$
تجانس (۳۳.۲)

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{xy} = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,\\
&\mathbf{r}_{zx} = x\partial_z - z\partial_x + u\partial_w - w\partial_u,\\
&\mathbf{r}_{yz} = z\partial_y - y\partial_z + w\partial_v - v\partial_w,
\end{aligned}\right\}
$$
دوران‌ها

$$\mathbf{v}_\theta = \theta\partial_p,$$
تغییرات فشار

گروه یک-پارامتری از تبدیلات معادلات اویلر به شکل زیر است:

(a) گروه تبدبلات مختصات‌های حرکت:

$$G_{\mathbf{a}} : (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{a}(t), t, \mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{a}_t, p - \varepsilon\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}_{tt} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_{tt}),$$

که $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ است.

(b) تبدیلات زمان :

$$G_0 : (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x}, t + \varepsilon, \mathbf{u}, p).$$

(c) تبدیلات تجانس:

$$
\begin{aligned}
&G_1 : (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\lambda\mathbf{x}, \lambda t, \mathbf{u}, p),\\
&G_2 : (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x}, \lambda t, \lambda^{-1}\mathbf{u}, \lambda^{-2}p),
\end{aligned}
$$

که $\lambda = \exp^\varepsilon$ مضرب گروه پارامتری است.

(d) گروه دوران‌ها:

$$\mathrm{SO}(۳) : (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (R\mathbf{x}, t, R\mathbf{u}, p),$$

در اینجا $R$ ماتریس متعامد ۳ $\times$ ۳ است.

(e) تغییرات فشار:

$$G_p : (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p + \varepsilon\theta(t)).$$

متناظرا اگر $\mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t)$ و $p = g(\mathbf{x}, t)$ جواب‌های معادلات اویلر باشد آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
G_{\mathbf{a}} :&\quad \mathbf{u} = f(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{a}(t), t) + \varepsilon\mathbf{a}_t, && p = g(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{a}(t), t) - \varepsilon\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}_{tt} + \tfrac{۱}{۲}\varepsilon^۲\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_{tt},\\
G_۰ :&\quad \mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t - \varepsilon), && p = g(\mathbf{x}, t - \varepsilon),\\
G_۱ :&\quad \mathbf{u} = f(\lambda\mathbf{x}, \lambda t), && p = g(\lambda\mathbf{x}, ),\\
G_۲ :&\quad \mathbf{u} = \lambda f(\mathbf{x}, \lambda t), && p = \lambda^۲ g(\mathbf{x}, \lambda t),\\
\mathrm{SO}(۳) :&\quad \mathbf{u} = Rf(R^{-۱}\mathbf{x}, t), && p = g(R^{-۱}\mathbf{x}, t),\\
G_p :&\quad \mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t), && p = g(\mathbf{x}, t) + \varepsilon\theta(t).
\end{aligned}$$

جواب‌های دیگر این معادلات می‌باشد. این لیست کاملی از تقارن‌های معادلات اویلر است.

# فصل ۳

# دستگاه‌های همیلتونی

## ۱.۳ کروشه پواسون

**تعریف ۱.۱.۳.** فرض $M$ یک منیفلد هموار باشد به ازای هر جفت تابع حقیقی مقدار هموار مانند $F$ و $H$ روی $M$ یک تابع حقیقی مقدار هموار مانند $\{F,H\}$ روی $M$ بنام کروشه پواسون $F$ و $H$ تعریف می‌کنیم که در شرایط زیر صدق می‌کند.

(a) دوخطی:

$$\begin{aligned}&\{cF+c'P,H\}=c\{F,H\}+c'\{P,H\}, \qquad c,c'\in\mathbb{R}\\ &\{F,cH+c'P\}=c\{F,H\}+c'\{F,H\},\end{aligned}$$

(b) پادمتقارن:

$$\{F,H\}=-\{H,F\},$$

(c) اتحاد ژاکوبی:

$$\{\{F,H\},P\}+\{\{P,F\},H\}+\{\{H,P\},F\}=\circ,$$

(d) قاعده لایبنیتز:

$$\{F,H.P\}=\{F,H\}.P+H.\{F,P\}.$$

در تمام این معادلات $F$ و $H$ و $P$ توابع حقیقی مقدار هموار دلخواه روی $M$ هستند.
یک منیفلد $M$ مجهز به کروشه پواسون، یک منیفلد پواسون نامیده می‌شود. مفهوم منیفلد پواسون کمی عمومی‌تر از منیفلد سیمپلتیک یا منیفلد با ساختار همیلتونی است. به ویژه ضرورتی ندارد که منیفلد $M$ با بعد زوج باشد.

**مثال ۲.۱.۳.** فرض کنیم $M$ یک منیفلد اقلیدسی با بعد زوج مثل $\mathbb{R}^{۲n}$ با مختصات $(p,q)=(p^۱,\cdots p^n,q^۱,\cdots,q^n)$ باشد اگر $F(p,q)$و $H(p,q)$ توابع هموار باشند، کروشه پواسون آن را با این تابع تعریف می‌کنیم:

$$\{F,H\}=\sum_{i=۱}^{n}\Big\{\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p^i}-\frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\Big\}. \qquad (۱.۳)$$

این کروشه به وضوح دو خطی و پادمتقارن است و در اتحاد ژاکوبی و قاعده لایبنیتز صدق می‌کند در حالت خاص کروشه همانی است.

$$\{p^i,p^j\}=\circ, \qquad \{q^i,q^j\}=\circ, \qquad \{q^i,p^j\}=\delta^i_j, \qquad (۲.۳)$$

به‌طوریکه $i,j$ از ۱ تا $n$ تغییر می‌کند.
به‌طور کلی یک کروشه پواسون را می‌توان روی هر فضای اقلیدسی $M=\mathbb{R}^m$ تعریف نمود فرض کنیم که مختصات آن به شکل $(p,q,z)=(p^۱,\cdots,p^n,q^۱,\cdots,q^n,z^۱,\cdots,z^l)$ باشد، بنابراین $۲n+l=m$ و کروشه پواسون بین دو تابع $F(p,q,z),H(p,q,z)$ با همان فرمول (۱.۳) تعریف می‌شود. به‌ویژه اگر تابع $F(z)$ فقط به $z$ ها وابسته باشد، آن‌گاه به ازای هر تابع $H$ ، $\{F,H\}=\circ$

چنین توابعی به‌ویژه، $z^k$ها همان توابع متمایز هستند با این خاصیت که کروشه پواسون آنها که با هر تابع دیگری صفر می‌شود، مشخص می‌شوند می‌بایست مختصات کروشه پایه رابطه (۲.۳) را با روابط

$$\{p^i, z^k\} = \{q^i, z^k\} = \{z^j, z^k\} = \circ \qquad \begin{array}{l} i = ۱, \cdots, n \\ j, k = ۱, \cdots, l \end{array} \tag{۳.۳}$$

تکمیل کنیم بنابراین، (۱.۳) را کروشه پواسون متعارف می‌نامیم.

**تعریف ۳.۱.۳.** فرض $M$ یک منیفلد پواسون باشد هر تابع حقیقی مقدار هموار $C : M \to \mathbb{R}$ را یک تابع متمایز می‌نامیم اگر کروشه پواسون $C$ با هر تابع حقیقی مقدار دیگر صفر شود، یعنی برای هر $H : M \to \mathbb{R}$، $\{C, H\} = \circ$ .

در حالتی از کروشه پواسون متعارف (۱.۳) روی $\mathbb{R}^{۲n}$، تنها توابع متمایز، ثابت‌ها هستند که همیشه در تعریف صدق می‌کنند، اگر کروشه پواسون کاملا بدیهی باشد یعنی برای هر $F, H$ داریم $\{F, H\} = \circ$، در این‌صورت هر تابع متمایز است.

## ۲.۳ میدان‌های برداری همیلتونی

فرض کنیم $M$ یک منیفلد پواسون باشد از این رو کروشه پواسون در التزام های تعریف (۱.۳) صادق است. توجه که یک تابع هموار $H$ روی $M$ با نگاشت $F \to \{F, H\}$ یک مشتق روی فضای توابع هموار $F$ روی $M$ را تعریف می‌کند.

**تعریف ۱.۲.۳.** فرض کنیم $M$ یک منیفلد پواسون و $H : M \to \mathbb{R}$ یک تابع هموار باشد میدان برداری همیلتونی متناظر با $H$ یک میدان برداری هموار یکتا $\hat{\mathbf{v}}_H$ روی $M$ است که در ویژگی زیر صدق می‌کند.

$$\hat{\mathbf{v}}_H(F) = \{F, H\} = -\{H, F\}. \tag{۴.۳}$$

برای هر تابع هموار $F : M \to \mathbb{R}$ شار تولید شده توسط $\hat{\mathbf{v}}_H$ به عنوان معادلات همیلتونی $H$ محسوب می‌شود.

**مثال ۲.۲.۳.** در حالت کروشه پواسون متعارف (۱.۳) روی $\mathbb{R}^m$ که، $m = ۲n+l$ می‌باشد میدان برداری همیلتونی متناظر با $H(p, q, z)$ به‌صورت زیر است

$$\hat{\mathbf{v}}_H = \sum_{i=۱}^{n} \Big( \frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i} \Big). \tag{۵.۳}$$

و شار متناظر، با انتگرال‌گیری از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \qquad \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{dt}} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = ۱, \cdots, n. \tag{۶.۳}$$

$$\frac{\mathrm{d}z^j}{\mathrm{dt}} = \circ \qquad j = ۱, \cdots, l. \tag{۷.۳}$$

به‌دست می‌آید که معادلات همیلتونی هستند.
در حالت ناتباهیده $m = 2n$ است که فقط معادلات (۶.۳) را داریم که فرم متعارف از معادلات همیلتونی در مکانیک کلاسیک می‌باشد. معادلات (۸.۳) به علت ثابت بودن توابع متمایز $z^j$ تحت شار به دستگاه معادلات همیلتونی اضافه می‌شوند، به‌ویژه هرگاه $H$ فقط به مختصات متمایز $z$ وابسته باشد شار همیلتونی آن کاملا بدیهی است. این نکته در حالت کلی برقرار است که تابع $C$ روی منیفلد پواسون متمایز است اگر و تنها اگر میدان برداری همیلتونی همه جا $\hat{\mathbf{v}}_C = 0$. یک ارتباط بین کروشه پواسون و کروشه لی میدان‌های برداری همیلتونی متناظرشان وجود دارد به قسمی که اساس نظریه دستگاه‌های همیلتونی را تشکیل می‌دهد.

**گزاره ۳.۲.۳.** *فرض کنید $M$ یک منیفلد پواسون و $F, H : M \to \mathbb{R}$ توابعی هموار با میدان‌های برداری همیلتونی متناظر $\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_H$ باشد. میدان برداری همیلتونی وابسته به کروشه پواسون از $F$ و $H$ با صرف نظر از علامت کروشه لی آن‌ها همان کروشه لی میدان‌های برداری همیلتونی می‌باشد یعنی:*

$$\hat{\mathbf{v}}_{\{F,H\}} = -[\hat{\mathbf{v}}_F, \hat{\mathbf{v}}_H] = [\hat{\mathbf{v}}_H, \hat{\mathbf{v}}_F] \tag{۸.۳}$$

***برهان.*** فرض کنید $P : M \to \mathbb{R}$ هر تابع هموار دیگری باشد با استفاده از تعریف جابه جا گر از کروشه لی داریم:

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathbf{v}}_H, \hat{\mathbf{v}}_F]P =& \hat{\mathbf{v}}_H.\hat{\mathbf{v}}_F(P) - \hat{\mathbf{v}}_F.\hat{\mathbf{v}}_H(P)\\
=& \hat{\mathbf{v}}_H\{P, F\} - \hat{\mathbf{v}}_F\{P, H\}\\
=& \{\{P, F\}, H\} - \{\{P, H\}, F\}\\
=& \{P, \{F, H\}\}\\
=& \hat{\mathbf{v}}_{\{F,H\}}(P),
\end{aligned}$$

که آن را با استفاده از اتحاد ژاکوبی، پاد تقارنی، از کروشه پواسون و تعریف (۴.۳) از مبدان‌های برداری همیلتونی ثابت شده است. □

**مثال ۴.۲.۳.** فرض کنیم $M = \mathbb{R}^2$ با مختصات $(p, q)$ و کروشه پواسون متعارف $\{F, H\} = F_q H_p - F_p H_q$ باشد برای تابع $H(p, q)$ میدان‌برداری همیلتونی متناظر آن

$$\mathbf{v}_H = H_p \partial_q - H_q \partial_p$$

می‌باشد بنابراین برای $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ و $F = pq$ داریم:

$$\hat{\mathbf{v}}_H = p\partial_q - q\partial_p \qquad \hat{\mathbf{v}}_F = q\partial_q - p\partial_p$$

کروشه پواسون دو تابع $F, H$ به‌صورت $\{F, H\} = p^2 - q^2$، است که دارای میدان برداری همیلتونی $\hat{\mathbf{v}}_{\{F,H\}} = 2p\partial_q + 2q\partial_p$ می‌باشد که با خاصیت جابه جاگر $[\hat{\mathbf{v}}_H, \hat{\mathbf{v}}_F]$ سازگار است.

## ۳.۳ توابع ساختاری

با تعیین تصویر مختصات موضعی کلی برای یک منیفلد پواسون ابتدا میدان‌های برداری همیلتونی را در نظر می‌گیریم، فرض کنید $x = (x^1, \cdots, x^m)$ مختصات موضعی روی $M$ باشد و $H(x)$ یک تابع حقیقی

مقدار باشد، میدان برداری همیلتونی نظیر آن به فرم کلی $\hat{\mathbf{v}}_H = \sum_{i=1}^m \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$، می‌باشد به قسمی که ضرایب $\xi^i(x)$ توسط$H$ مشخص می‌شوند فرض کنید $F(x)$ تابع هموار دوم باشد با استفاده از (۴.۳)

$$\{F,H\} = \hat{\mathbf{v}}_H(F) = \sum_{i=1}^m \xi^i(x)\frac{\partial F}{\partial x^i}.$$

اما دوباره با استفاده از (۴.۳) داریم:

$$\xi^i(x) = \hat{\mathbf{v}}_H(x^i) = \{x^i, H\},$$

$$\{F,H\} = \sum_{i=1}^m \{x^i, H\}\frac{\partial F}{\partial x^i}. \tag{۹.۳}$$

از سوی دیگر با استفاده از خاصیت پادتقارنی از کروشه پواسون می‌توان روند اثبات را بازگرداند و مجموعه اخیر از کروشه پواسون را بر حسب میدان‌های برداری همیلتونی خاص $\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{v}}_{x^i}$ متناظر با توابع مختصاتی موضعی $x^i$ محاسبه کنیم

$$\{x^i, H\} = -\{H, x^i\} = -\hat{\mathbf{v}}_i(H) = \sum_{j=1}^m \{x^j, x^i\}\frac{\partial H}{\partial x^j},$$

آخرین تساوی از طرف دوم معادله (۹.۳) با جایگزین $H$ در $F$ و$x^I$ با $H$ محاسبه می‌شود بنابراین فرمول اساسی زیر برای کروشه پواسون به‌دست می‌آید:

$$\{F,H\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \{x^i, x^j\}\frac{\partial F}{\partial x^i},\frac{\partial H}{\partial x^j}. \tag{۱۰.۳}$$

به عبارت دیگر برای محاسبه کروشه پواسون از هر جفت از توابع، مجموعه مفروض از مختصات موضعی کافی است تا کروشه های پواسون بین مختصات آنهارا بدانیم این کروشه‌های اساسی که به‌صورت

$$J^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}, \qquad i,j = 1,\cdots,m, \tag{۱۱.۳}$$

نوشته می‌شوند وابسته به مختصات موضعی مفروض هستند که به‌طور منحصر بفرد ساختار پواسون را تعیین می‌کند. به راحتی ما توابع ساختاری را در ماتریس پاد متقارن $m \times m$ ، $J(x)$ جمع آوری می‌کنیم که ماتریس ساختاری $M$ نامیده می‌شود. با استفاده از $\nabla H$ (بردار گرادیان برای $H$) می‌توان نشان داد که مختصات موضعی از (۱۰.۳) برای کروشه پواسون را به صورت زیر نوشت

$$\{F,H\} = \nabla F.J\nabla H. \tag{۱۲.۳}$$

برای مثال، در این حالت از کروشه متعارف (۱.۳) روی $\mathbb{R}^m$، $(m = 2n+l)$ ماتریس ساختاری دارای فرم ساده است که وابسته به مختصات$p,q,z$ روی $\mathbb{R}^m$ به صورت:

$$J(u) = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

می‌باشد، که $I$ ماتریس همانی $n \times n$ است.

میدان برداری همیلتونی متناظر با $H(x)$ دارای فرم

$$\hat{\mathbf{v}}_H = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^m J^{ij}(x)\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big). \tag{۱۳.۳}$$

در نمایش ماتریسی $\hat{\mathbf{v}}_H = (J\nabla H).\partial_x$، که $\partial_x$ نماد بردار با درآیه‌های $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ می‌باشد. بنابراین در چارت مختصاتی مفروض، معادلات همیلتونی به فرم

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = J(x)\nabla H(x). \qquad (۱۴.۳)$$

است به‌طور مکرر با استفاده از (۹.۳) می‌توان این کروشه را به فرم

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \{x, H\},$$

نوشت مولفه $i$ ام از سمت راست $\{x^i, H\}$ می‌شود. که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی درجه اول، یک دستگاه همیلتونی گفته می‌شود اگر یک تابع همیلتونی $H(x)$ و یک ماتریس از توابع $J(x)$ وجود داشته باشد که در دستگاه (۱۲.۳) صد ق کند به موجب آن دستگاه شکل (۱۹.۳) را می‌گیرد.

**گزاره ۱.۳.۳.** *فرض کنید $J(x) = (J^{ij}(x))$ یک ماتریس $m \times m$ از توابع $x = (x^۱, \cdots, x^m)$ تعریف شده روی زیر مجموعه باز $M \subseteq \mathbb{R}^m$ باشد آنگاه $J(x)$ ماتریس ساختاری برای کروشه پواسون $\{F, H\} = \nabla F.J\nabla H$ روی $M$ است اگر و فقط اگر ویژگیهای زیر را داشته باشد:*

$(a)$ *پاد تقارنی:*

$$J^{ij}(x) = -J^{ji}(x) \qquad i, j = ۱, \cdots, m,$$

$(b)$ *اتحاد ژاکوبی:*

$$\sum_{i=۱}^{m} \left\{J^{ij}\partial_i J^{jk} + J^{ki}\partial_i J^{ij} + J^{jl}\partial_l J^{kl}\right\} = ۰ \qquad i, j, k = ۱, \cdots, m, \qquad (۱۵.۳)$$

*برای هر* $x \in M$

***برهان.*** (۱۲.۳) در فرم اساسی کروشه پواسون ویژگی دو خطی و قاعده لایبنیتز را دارد واضح است ویژگی پاد تقارنی از ماتریس ساختاری هم ارز با ویژگی پاد تقارنی از کروشه پواسون است پس لازم است هم ارزی اتحاد ژاکوبی با (۱۵.۳) را بررسی نماییم توجه داشت که به‌وسیله (۱۰.۳) و (۱۱.۳) داریم

$$\left\{\{x^i, x^j\}, x^k\right\} = \sum_{i=۱}^{m} J^{ik}(x)\partial_i J^{ij}(x), \qquad (۱۶.۳)$$

به طور کلی اگر $H(x, t)$ به $t$ وابسته باشد منجر به یک میدان برداری همیلتونی وابسته به زمان است. بنابراین (۱۵.۳) معادل با اتحاد ژاکوبی برای توابع مختصاتی $x^i, x^j$ و $x^k$ می‌باشد در حالت کلی تر برای $F, H, P : M \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\{\{F, H\}, P\} &= \sum_{k,i=۱}^{m} J^{lk}\frac{\partial}{\partial x^l}\Big\{\sum_{i,j=۱}^{m} J^{ij}\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j}\Big\}\frac{\partial P}{\partial x^k} \\
&= \sum_{i,j,k,l}\Big\{J^{lk}\frac{\partial J^{ij}}{\partial x^l}\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial P}{\partial x^k} \\
&\quad + J^{ik}J^{ij}\Big(\frac{\partial^۲ F}{\partial x^l \partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial P}{\partial x^k} + \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial^۲ H}{\partial x^l \partial x^j}\frac{\partial P}{\partial x^k}\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

به طور چرخشی روی $F, H, P$ جمع می‌بندیم، ابتدا مجموعه عبارت‌هایی که به موجب (۱۵.۳ ) صفر می‌شوند را می‌یابیم، عبارات باقی مانده خاصیت پاد تقارنی ماتریس ساختاری را نقض می‌کند.

□

باید توجه داشت فقط می‌توانیم التزام های گزاره (۸.۳)روی ماتریس ساختاری همانند کروشه پواسون (۱۲.۳ ) را باید در یک چارت مختصاتی در نظر بگیریم. شرایط (۱۵.۳ ) تضمین می‌کند که اتحاد ژاکوبی، یک دستگاه بزرگ از معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی را تشکیل می‌دهد که توابع ساختاری می‌بایست در آن صدق کنند، پس هر ماتریس پاد تقارنی ثابت $J$ بطور بدیهی در (۱۵.۳ ) صادق است و یک کروشه پواسون تعیین می‌کنند.

## ۴.۳ ساختار لی-پواسون

یکی از مهمترین مثالهای ساختار پواسون وابسته به جبر لی $r$ - پارامتری $\mathcal{G}$ است فرض کنیم $\mathcal{G} = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ با ثابتهای ساختاری $C_{ij}^k, i, j, k = 1, \cdots, r$ باشد فرض کنید$V$، فضای برداری $r$-بعدی دیگری با مختصات $\{x^1, \cdots, x^r\}$ باشد که به‌وسیله یک پایه $\{w_1, \cdots, w_r\}$ مشخص شده باشد. کروشه لی - پواسون بین دو تابع هموار $F, H : V \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\{F, H\} = \sum_{i,j,k=1}^{r} C_{ij}^k x^k \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} \qquad (۱۷.۳)$$

به وضوح فرم (۱۰.۳ ) توابع ساختاری خطی $J^{ij}(x) = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}^k x^k$ را تشکیل می‌دهد.برای ماتریس ساختاری از خاصیتهای پایه‌ای از ثابتهای ساختاری وهمچنین حالت خاص (۱۵.۳ ) استفاده می‌کنیم. ابتدا به یاد داریم که اگر $V$ یک فضای برداری باشد و$F : V \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی مقدار هموار باشد آنگاه گرادیان $\nabla F(x)$ در هر نقطه $x \in V$ بطور طبیعی یک عنصر از فضای برداری دوگان $V^*$ شامل همه توابع خطی روی $V$ به‌وسیله تعریف زیر می‌باشد،

$$\langle \nabla F(x); y \rangle = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{F(x + \epsilon y) - F(x)}{\epsilon}$$

برای هر $y \in V$ ، $\langle ; \rangle$ یک زوج طبیعی بین $V$ و دوگان آن یعنی $V^*$ است. می‌دانیم که فضای برداری $V$ به کار رفته در ساختار کروشه لی- پواسون با فضای دوگان $\mathcal{G}^*$ با جبر لی $\mathcal{G}$ مشخص می‌شود، که $\{w_1. \cdots, w_r\}$ پایه دوگان $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ می‌باشد. اگر$F : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ یک تابع هموار باشد پس گرادیان $\nabla F(x)$ یک عضو از $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}^*)^*$ است. آن‌گاه کروشه لی -پواسون یک مختصات آزاد به فرم زیر دارد

$$\{F, H\}(x) = \langle x; [\nabla F(x), \nabla H(x)] \rangle, \qquad x \in \mathcal{G}^*, \qquad (۱۸.۳)$$

که $[,]$ یک کروشه لی معمولی روی جبرلی $\mathcal{G}$ به خودش است. اگر $H : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، دستگاه معادلات همیلتونی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{dt} = \sum_{j,k=1}^{r} C_{ij}^k x^k \frac{\partial H}{\partial x^j}, \qquad i = 1, \cdots, r.$$

**مثال ۱.۴.۳.** جبر لی سه بعدی $\mathcal{SO}(۳)$ از گروه دوران‌ها را در نظر بگیرید. فرض کنیم $\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳$ مولدهای بی‌نهایت کوچک جبر لی $\mathcal{SO}(۳)$ هستند که حول محور $x, y, z$ در $\mathbb{R}^۳$ دوران می‌کنند که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_۱ &= y\partial_x - z\partial_y,\\ \mathbf{v}_۲ &= z\partial_x - x\partial_z,\\ \mathbf{v}_۳ &= x\partial_y - y\partial_x,\end{aligned}$$

رابطه جابه‌جایی بین $\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲.\mathbf{v}_۳$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}[\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲] &= -\mathbf{v}_۳,\\ [\mathbf{v}_۳, \mathbf{v}_۱] &= -\mathbf{v}_۲,\\ [\mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳] &= -\mathbf{v}_۱.\end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم که $w_۱, w_۲, w_۳$ پایه‌های دوگان $\mathbb{R}^۳ \simeq \mathcal{SO}(۳)^*$ هستند و $u = u^۱ w_۱ + u^۲ w_۲ + u^۳ w_۳$ یک نقطه در آن باشد. اگر $F : \mathcal{SO}(۳) \to \mathbb{R}$ باشد بنابراین گرادیان آن برداری است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial u^۱}\mathbf{v}_۱ + \frac{\partial F}{\partial u^۲}\mathbf{v}_۲ + \frac{\partial F}{\partial u^۳}\mathbf{v}_۳ \in \mathcal{SO}(۳).$$

بنابراین از (۱۷.۳) کروشه لی- پواسون روی $\mathcal{SO}(۳)^*$ را پیدا کردیم

$$\begin{aligned}\{F, H\} =& u^۱\Big(\frac{\partial F}{\partial u^۳}\frac{\partial H}{\partial u^۲} - \frac{\partial F}{\partial u^۲}\frac{\partial H}{\partial u^۳}\Big) + u^۲\Big(\frac{\partial F}{\partial u^۱}\frac{\partial H}{\partial u^۳} - \frac{\partial F}{\partial u^۳}\frac{\partial H}{\partial u^۱}\Big)\\ &+ u^۳\Big(\frac{\partial F}{\partial u^۲}\frac{\partial H}{\partial u^۱} - \frac{\partial F}{\partial u^۱}\frac{\partial H}{\partial u^۲}\Big)\\ =& -u.\nabla F \times \nabla H,\end{aligned}$$

که به صورت ضرب خارجی روی $\mathbb{R}^۳$ تعریف می‌شود بنابراین ماتریس ساختاری به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$J(u) = \begin{pmatrix} \circ & -u^۳ & u^۲ \\ u^۲ & \circ & -u^۱ \\ -u^۲ & u^۱ & \circ \end{pmatrix}.$$

دستگاه همیلتونی متناظر با توابع همیلتونی $H(u)$ به شکل:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u \times \nabla H(u).$$

می‌باشد. برای مثال، اگر

$$H(u)=\frac{(u^۱)^۲}{۲I_۱}+\frac{(u^۲)^۲}{۲I_۲}+\frac{(u^۳)^۲}{۲I_۳},$$

که $I_۱, I_۲, I_۳$ ثابت باشند، آن‌گاه دستگاه فوق به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}u^۱}{\mathrm{d}t}=\frac{I_۲-I_۳}{I_۲I_۳}u^۲u^۳,\qquad \frac{\mathrm{d}u^۲}{\mathrm{d}t}=\frac{I_۳-I_۱}{I_۳I_۱}u^۳u^۱,\qquad \frac{\mathrm{d}u^۳}{\mathrm{d}t}=\frac{I_۱-I_۲}{I_۱I_۲}u^۲, \tag{۱۹.۳}$$

که $(I_۱, I_۲, I_۳)$ گشتاورهای جسم حول محورهای مختصات $u^۱, u^۲, u^۳$ مرتبط با گشتاورهای زاویه‌ای جسم هستند. (سرعت زاویه‌ای) توابع همیلتونی انرژی جسم هستند. و معادلات (۱۹.۳) معادلات حرکت یک جسم صلب می‌باشند.

**مثال ۲.۴.۳.** معادله بورن-اینفلد[۱] که در الکترومغناطیس یک معادله جزئی است به شکل زیر بیان می‌شود:

$$(۱-u_t^۲)u_{xx}+۲u_xu_tu_{xt}-(۱+u_x^۲)u_{tt}=۰, \tag{۲۰.۳}$$

که $u$ تابعی هموار از $(x,t)$ است. در نظر می‌گیریم گروه لی یک-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای $(x,t,u)$ که به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$\begin{cases}\tilde{x}=x+\epsilon\xi_۱(x,t,u)+\mathcal{O}(\epsilon^۲),\\ \tilde{t}=t+\epsilon\xi_۲(x,t,u)+\mathcal{O}(\epsilon^۲),\\ \tilde{u}=u+\epsilon\phi(x,t,u)+\mathcal{O}(\epsilon^۲),\end{cases} \tag{۲۱.۳}$$

که $\epsilon$ پارامتر گروه است. بنابراین تبدیلات (۲۱.۳) روی مجموعه جواب‌های معادله (۲۰.۳) ناوردا است. میدان برداری متناظر با معادله (۲۰.۳) به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{v}=\xi_۱(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\xi_۲(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۲۲.۳}$$

که امتداد مرتبه دوم آن به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{pr}^{(۲)}\mathbf{v}=\mathbf{v}+\phi^x\frac{\partial}{\partial u_x}+\phi^t\frac{\partial}{\partial u_t}+\phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}+\phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \tag{۲۳.۳}$$

که ضرایبش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\phi^x&=D_x(\phi-\xi_۱u_x-\xi_۲u_t)+\xi_۱u_{xx}+\xi_۲u_{xt},\\ \phi^t&=D_t(\phi-\xi_۱u_x-\xi_۲u_t)+\xi_۱u_{tx}+\xi_۲u_{tt},\\ \phi^{xx}&=D_x^۲(\phi-\xi_۱u_x-\xi_۲u_t)+\xi_۱u_{xxx}+\xi_۲u_{xtx},\\ \phi^{xt}&=D_xD_t(\phi-\xi_۱u_x-\xi_۲u_t)+\xi_۱u_{xxt}+\xi_۲u_{xtt},\\ \phi^{tt}&=D_t^۲(\phi-\xi_۱u_x-\xi_۲u_t)+\xi_۱u_{xtt}+\xi_۲u_{ttt},\end{aligned} \tag{۲۴.۳}$$

که $D_x$ و $D_t$ عملگرهای مشتق کامل هستند که به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned}D_x&=\frac{\partial}{\partial x}+u_x\frac{\partial}{\partial u}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}+u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t}+\cdots,\\ D_t&=\frac{\partial}{\partial t}+u_t\frac{\partial}{\partial u}+u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t}+u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_x}+\cdots.\end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

[۱] Born-Infeld

با اثر دادن امتداد دوم میدان برداری $\mathbf{v}$ روی معادله (۲۰.۳) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&\phi^{x}(2u_tu_{xt}-2u_xu_{tt})+\phi^{t}(2u_tu_{xx}+2u_xu_{xt})+\phi^{xx}(1-u_t^2)\\&+\phi^{xt}(2u_xu_t)+\phi^{tt}(-1-u_x^2)=0,\end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

با جایگذاری ضرایب $\phi^x, \phi^t, \cdots$ در معادله (۲۶.۳) و ساده کردن معادله و مساوی قرار دادن ضرایب تک جمله‌ای‌های $u, u_x, u_t, \cdots$ به دستگاه‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&\xi^2_{xx}=0,\quad \xi^2_{xu}=0,\quad \xi^2_{tt}=0,\quad \xi^2_{uu}=0,\quad \xi^1_x=\xi^2_t,\\&\xi^1_t=\xi^2_x,\quad \xi^1_u=-\phi_x,\quad \xi^2_t=\phi_u,\quad \xi^2_u=\phi_t,\quad \xi^2_{tu}=-\phi_{xx}.\end{aligned} \tag{۲۷.۳}$$

با حل دستگاه معادلات (۲۷.۳)، ضرایب میدان برداری $\mathbf{v}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\xi_1&=c_1+c_4t-c_5u+c_7x,\\ \xi_2&=c_2+c_4x+c_6u+c_7t,\\ \phi&=c_3+c_5x+c_6t+c_7t,\end{aligned} \tag{۲۸.۳}$$

که $c_1, c_2, \cdots, c_7$ ثابت‌های دلخواهی هستند. بنابراین جبرلی $\mathcal{G}$ معادله (۲۰.۳) توسط میدان‌های برداری زیر تولید می‌شوند:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1&=\partial_x,\\ \mathbf{v}_2&=\partial_t,\\ \mathbf{v}_3&=\partial_u,\\ \mathbf{v}_4&=t\partial_x+x\partial_t,\\ \mathbf{v}_5&=-u\partial_x+x\partial_u,\\ \mathbf{v}_6&=u\partial_t+t\partial_u,\\ \mathbf{v}_7&=x\partial_x+t\partial_t+u\partial_u,\end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

که $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ که انتقال روی $x$ ، $t$ و $u$ هستند، همچنین میدان برداری $\mathbf{v}_5$ دوران روی $x$ و $u$ است و میدان برداری $\mathbf{v}_7$ تجانس روی $x$ و $t$ است. رابطه بین این میدان‌های برداری در جدول زیر آمده است، که درایه‌ی در ردیف $i$ و ستون $j$ را با $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ نمایش می‌دهیم.

| $[,]$ | $\mathbf{v}_1$ | $\mathbf{v}_2$ | $\mathbf{v}_3$ | $\mathbf{v}_4$ | $\mathbf{v}_5$ | $\mathbf{v}_6$ | $\mathbf{v}_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{v}_1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\mathbf{v}_3$ | $\mathbf{v}_3$ | $0$ | $\mathbf{v}_1$ |
| $\mathbf{v}_2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\mathbf{v}_1$ | $0$ | $\mathbf{v}_3$ | $\mathbf{v}_2$ |
| $\mathbf{v}_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-\mathbf{v}_1$ | $\mathbf{v}_2$ | $\mathbf{v}_3$ |
| $\mathbf{v}_4$ | $-\mathbf{v}_2$ | $-\mathbf{v}_1$ | $0$ | $0$ | $\mathbf{v}_6$ | $\mathbf{v}_5$ | $0$ |
| $\mathbf{v}_5$ | $-\mathbf{v}_3$ | $0$ | $\mathbf{v}_1$ | $-\mathbf{v}_6$ | $0$ | $\mathbf{v}_4$ | $0$ |
| $\mathbf{v}_6$ | $0$ | $-\mathbf{v}_3$ | $-\mathbf{v}_2$ | $-\mathbf{v}_5$ | $-\mathbf{v}_4$ | $0$ | $0$ |
| $\mathbf{v}_7$ | $-\mathbf{v}_1$ | $-\mathbf{v}_2$ | $-\mathbf{v}_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

که $\epsilon$ یک عدد حقیقی است. برای مثال اگر $u=c$ یک جواب ثابت معادله (۲۰.۳) باشد آن‌گاه

جواب‌های نا بدیهی مانند

$$u = \cos\epsilon + (t\sin\epsilon + x\cos\epsilon)\sin\epsilon,$$
$$u = \cosh\epsilon + (t\cosh\epsilon - x\sinh\epsilon)\sinh\epsilon.$$

دارند. در اینجا ما می‌توانیم گروه تقارن عمومی با ترکیب خطی میدان‌های برداری را به صورت $c_1\mathbf{v}_1, \dots, c_7\mathbf{v}_7$ بدست آورد. همچنین در حالت خاص اگر $g$ عضوی از گروه تقارن در همسایگی عضو همانی باشد آن‌گاه آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$g = \exp(\epsilon_7\mathbf{v}_7) \circ \cdots \circ \exp(\epsilon_1\mathbf{v}_1).$$

حال جبرلی هفت-بعدی $\mathcal{G}$، (۲۹.۳) از گروه تقارن معادله بورن اینفلد را در نظر بگیرید. فرض کنید $w_1, \dots, w_7$ پایه‌های فضای دوگان $\mathcal{G}^*$ و $u = u^1w_1 + \cdots + u^7w_7$ نقطه‌ای در آن باشد. اگر $F : \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه گرادیان آن بردار زیر است:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial u^1}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u^7}\mathbf{v}_7. \tag{۳۰.۳}$$

بنابراین کروشه لی-پواسون به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
\{F, H\} &= u^1\Big(\frac{\partial F}{\partial u^1}\frac{\partial H}{\partial u^7} - \frac{\partial F}{\partial u^7}\frac{\partial H}{\partial u^1} + \frac{\partial F}{\partial u^2}\frac{\partial H}{\partial u^4} - \frac{\partial F}{\partial u^4}\frac{\partial H}{\partial u^2}\\
&-\frac{\partial F}{\partial u^3}\frac{\partial H}{\partial u^5} + \frac{\partial F}{\partial u^5}\frac{\partial H}{\partial u^3}\Big)\\
&+u^2\left(\frac{\partial F}{\partial u^2}\frac{\partial H}{\partial u^7} - \frac{\partial F}{\partial u^7}\frac{\partial H}{\partial u^2} + \frac{\partial F}{\partial u^3}\frac{\partial H}{\partial u^6} - \frac{\partial F}{\partial u^6}\frac{\partial H}{\partial u^3}\right)\\
&+u^3\left(\frac{\partial F}{\partial u^1}\frac{\partial H}{\partial u^4} - \frac{\partial F}{\partial u^4}\frac{\partial H}{\partial u^1} + \frac{\partial F}{\partial u^1}\frac{\partial H}{\partial u^5} - \frac{\partial F}{\partial u^5}\frac{\partial H}{\partial u^1}\right.\\
&\left.+\frac{\partial F}{\partial u^2}\frac{\partial H}{\partial u^6} - \frac{\partial F}{\partial u^6}\frac{\partial H}{\partial u^2} + \frac{\partial F}{\partial u^3}\frac{\partial H}{\partial u^7} - \frac{\partial F}{\partial u^7}\frac{\partial H}{\partial u^3}\right)\\
&+u^4\left(\frac{\partial F}{\partial u^5}\frac{\partial H}{\partial u^6} - \frac{\partial F}{\partial u^6}\frac{\partial H}{\partial u^5}\right)\\
&+u^5\left(\frac{\partial F}{\partial u^4}\frac{\partial H}{\partial u^6} - \frac{\partial F}{\partial u^6}\frac{\partial H}{\partial u^4}\right)\\
&+u^6\left(\frac{\partial F}{\partial u^4}\frac{\partial H}{\partial u^5} - \frac{\partial F}{\partial u^5}\frac{\partial H}{\partial u^4}\right).
\end{aligned} \tag{۳۱.۳}$$

حال ماتریس ساختاری $\mathbf{J}(u) = (J^{ij}(u))$ ، که $J^{ij} = \{u^i, u^j\}$، به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{J}(u)=\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & u^{۳} & u^{۳} & \circ & u^{۱} \\ \circ & \circ & \circ & u^{۱} & \circ & u^{۳} & u^{۲} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -u^{۱} & u^{۲} & u^{۳} \\ -u^{۳} & -u^{۱} & \circ & \circ & u^{۶} & u^{۵} & \circ \\ ,-u^{۳} & \circ & u^{۱} & -u^{۶} & \circ & u^{۴} & \circ \\ \circ & -u^{۳} & -u^{۲} & -u^{۵} & -u^{۴} & \circ & \circ \\ -u^{۱} & \circ & -u^{۳} & -u^{۳} & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \qquad (۳۲.۳)$$

که معادله همیلتونی به تابع همیلتونی $H(u)$ نظیر می‌شود. بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}=\mathbf{J}(u)\nabla H(u). \qquad (۳۳.۳)$$

برای مثال، اگر

$$H(u)=\sum_{i=۱}^{۷}\frac{(u^i)^{۲}}{۲I_i}, \qquad (۳۴.۳)$$

که $I_I$ ها ثابت‌های احتمالی هستند، بنابراین معادلات همیلتونی به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u^{۱}}{\mathrm{d}t}&=u^{۳}\left(\frac{u^{۴}}{I_{۴}}+\frac{u^{۵}}{I_{۵}}\right)+u^{۱}\frac{u^{۷}}{I_{۷}},\\
\frac{\mathrm{d}u^{۲}}{\mathrm{d}t}&=u^{۱}\frac{u^{۴}}{I_{۴}}+u^{۳}\frac{u^{۶}}{I_{۶}}+u^{۲}\frac{u^{۷}}{I_{۷}},\\
\frac{\mathrm{d}u^{۳}}{\mathrm{d}t}&=-u^{۱}\frac{u^{۵}}{I_{۵}}+u^{۲}\frac{u^{۶}}{I_{۶}}+u^{۳}\frac{u^{۷}}{I_{۷}},\\
\frac{\mathrm{d}u^{۴}}{\mathrm{d}t}&=-u^{۳}\frac{u^{۱}}{I_{۱}}-u^{۱}\frac{u^{۲}}{I_{۲}}+u^{۶}\frac{u^{۵}}{I_{۵}}+u^{۵}\frac{u^{۶}}{I_{۶}},\\
\frac{\mathrm{d}u^{۵}}{\mathrm{d}t}&=-u^{۳}\frac{u^{۱}}{I_{۱}}+u^{۱}\frac{u^{۳}}{I_{۳}}-u^{۶}\frac{u^{۴}}{I_{۴}}+u^{۴}\frac{u^{۶}}{I_{۶}},\\
\frac{\mathrm{d}u^{۶}}{\mathrm{d}t}&=-u^{۳}\frac{u^{۲}}{I_{۲}}-u^{۲}\frac{u^{۳}}{I_{۳}}-u^{۵}\frac{u^{۴}}{I_{۴}}-u^{۴}\frac{u^{۵}}{I_{۵}},\\
\frac{du^{۷}}{\mathrm{d}t}&=-u^{۱}\frac{u^{۱}}{I_{۱}}-u^{۳}\left(\frac{u^{۳}}{I_{۳}}+\frac{u^{۴}}{I_{۴}}\right),
\end{aligned} \qquad (۳۵.۳)$$

که $(I_{۱},\dots,I_{۷})$ گشتاورهای لختی حول محورهای مختصات $u^{۱},\cdots,u^{۷}$ مرتبط با گشتاورهای زاویه‌ای جسم هستند. $(w^i=\frac{u^i}{I_i}$ سرعت زاویه‌ای است.) که معادلات همیلتونی انرژی جنبشی ماده است. و معادلات (۳۵.۳) معادلات حرکت یک جسم صلب می‌باشند.

# مراجع


[1] Anderson L.M., Kamran N. and Oliver P. J., (1965), *Internal, External and Generalized Symmetries Adv*, in Math.

[2] Ames W.F., (1972), *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering* , Academic Press, New York.

[3] Bluman G.W. and Kumel S., (1989), *Symmetries and Differential Equation, Springer Verlage*, New York.

[4] Bluman G.W. and Cole J. D., (1969), *The Genaral Similarity Solutionof the Heat Equation*, J. Math. Mech, V.18, 1025-1042.

[5] Gardner C.S., (1971),*Korteweg-de Vries equation and Generlizations. IV. The Kortewege-de Vries equation as a Hamiltonian System*, J. Math. Phys. 12, 1548-1551.

[6] Harrison B.k. and Estabrook F.B., (1971), *Geometric Approach to Invariance Groups and Solution of Partial Differential Systems*, J. Math. Phys.

[7] Hejazi S.R., (2014), *Lie Group Analaysis, Hamiltonian Equation and Conservation Laws of Born-Infeld Equation*, Asian-European J. Math, Vol. 7, No. 3 , 1-19.

[8] Jost R., (1964), *Poisson Brackets (an unpedagogical lecture)*, Rer. Mod. Phys. 36, 572-579

[9] Kersten P.H.M and Gragert P.K.H., (1983), *The Lie Algebra of Infinitesimal Symmetries of Nonlinear Diffusion Equation*, J Phys. A: Math. Gen., V. 16, L685-1688.

[10] Kersten P.H.M., (1985), *Infinitesimal Symmetries: A Compulational Approach*, Ph.D, Thesies, Twente University of Technology, Enschede, The Netherlands.

[11] Kersten P.H.M., (1989), *Software to Computer Infinitesimal Symmetrise of Exterior Differntial Systems, with Applications*, Acta Appl. Math, V. 16, 207-229.

[12] Lee J.M., (2002), *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, Washington.

[13] Lee J.M., (1997), *Riemannian Manifolds, in: An Introduction to Curvature*, Graduates texts in Mathematics, vol. 176, Springer-verlag, New York.

[14] Miller W.J., (1972), *Symmetry Groups and Their Applications*, Academic Press, New York.

[15] Oliver P.J., (1995), *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, University of Minnesota.

[16] Oliver P.J., (1993), *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York.

[17] William M.B., (1986), *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, Orlando, second, edition.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| اتحاد ژاکوبی | Jacobi Identity |
| اساسی | Fundamental |
| اطلس | Atlas |
| افقی | Horizontal |
| امتداد دادن | Prolongation |
| انتقال | Translation |
| بدیهی | Trivial |
| بردار مماس | Tangent Vector |
| برابری | Equality |
| برش | Section |
| برش موضعی | Local Section |
| به‌وضوح | Clearly |
| به‌طور متناوب | Altematively |
| بعد | Dimension |
| پاد متقارن | Anti Symmetric |
| پایه | Basis |
| پس کشنده | Pull Back |
| پواسون | Poisson |
| پیش برنده | Push Forward |
| پیوسته | Continuos |
| پلاسما | Plasmas |
| تبدیل | Transformation |
| تجانس | Scale |
| تعویض گر | Commutator |
| جبر لی | lie Algebra |

جمع بندی ............ Somming
چارت مختصاتی ............ Coordinate Chart
حقیقی مقدار ............ Real-Valued
خم ............ Curve
خمیدگی ............ Curvature
درایه ............ Entiies
دو خطی ............ Billinearity
دوگان ............ Dual
دیفرانسیل کامل ............ Total Differential
دیفئومورفیسم ............ Diffeomorphism
موضعی دیفئومورفیسم ............ Locall Diffeomorphism
دلخواه ............ Arbitrary
دستگاه همیلتونی ............ Hamiltonian System
رتبه ............ Rank
صدق کردن ............ Satisfy
ساخت اولیه ............ Initial Construction
شرایط ............ Conditions
شمارای نوع دوم ............ Second Countable
شناسایی ............ Identify
عملگر ............ Operator
عملگر خطی ............ linear Operator
عمودی ............ Vertical
فرم برخوردی ............ Contact Form
فرم دیفرانسیلی ............ Differential Form
فشرده ............ Compact
فضای برداری ............ Vector Space
فضای توپولوژیکی ............ Topological Space
فضای افشانه ............ Jet Space
فضای مماسی ............ Tangent Space
فضای هم مماس ............ Cotangent Space
شار ............ Flow
کاملا ............ Completely

کافی ........ Sufficient
کروشه لی ........ Lie Bracket
کروشه پواسون ........ Poisson Bracket
کلاف ........ Bundle
کلاف مماس ........ Tangent Bundle
گروه تقارن ........ Symmetry Group
گروه لی ........ Lie Group
مستقل ........ Independent
مشتق ........ Dertivative
مشتق کامل ........ Total Dertivative
مشتق لی ........ Lie Dertivative
مشخصه ........ Characteristic
مرتبط ........ Associated
ماتریس ساختاری ........ Structure Matrix
معادله دیفرانسیل ........ Differential Equation
معادل ........ Equivalent
معمولی ........ Ordinary
معکوس ........ Inverse
خم انتگرال ........ Integral Curve
منظم ........ Regular
منیفلد توپولوژیکی ........ Topological Manifold
موضعی ........ Local
موضعا اقلیدسی ........ locally Euclidean
مولد بینهایت کوچک ........ Infinitesimal Generator
ممتاز ........ Distinguished
متعارف ........ Cononical
مکانیک کلاسیک ........ classic Mechanics
میدان برداری ........ Vector Field
ناتباهیده ........ Nondegenerate
نگاشت گذر ........ Transition Map
نگاشت نمایی ........ Expondential Map
وابسته ........ Dependent

همبند ........ Connect

هموار ........ Smooth

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

| | |
|---|---|
| Anti Symmetry | پاد متقارن |
| Altematively | به‌طور متناوب |
| Atlas | اطلس |
| Arbitrary | دلخواه |
| Associated | مرتبط |
| Basis | پایه |
| Billinearity | دو خطی |
| Bundle | کلاف |
| Connect | همبند |
| Commutator | تعویض گر |
| Coordinate Chart | چارت مختصاتی |
| Compact | فشرده |
| Conditions | شرایط |
| Contact Form | فرم برخوردی |
| completely | کاملا |
| Cononical | متعارف |
| Cotangent Space | فضای هم مماس |
| Continuos | پیوسته |
| Characteristic | مشخصه |
| Clearly | پیوسته |
| curve | خم |
| Curvature | خمیدگی |
| Dependent | وابسته |
| Dertivative | مشتق |
| Distinguished | ممتاز |

معادله دیفرانسیل ........ Differential Equation

فرم دیفرانسیلی ........ Differential Form

دیفئومورفیسم ........ Diffeomorphism

بعد ........ Dimension

دوگان ........ Dual

درایه ........ Entiies

برابری ........ Equality

معادل ........ Equivalent

نگاشت نمایی ........ Expondential Map

شار ........ Flow

اساسی ........ Fundamental

افقی ........ Horizontal

دستگاه همیلتونی ........ ystemHamiltonian S

خم انتگرال ........ Integral Curve

شناسایی ........ Identify

ساخت اولیه ........ Initial Construction

مستقل ........ Independent

معکوس ........ Inverse

خم انتگرال ........ Integral Curve

مولد بینهایت کوچک ........ Infinitesimal Generator

اتحاد ژاکوبی ........ Jacobi Identity

فضای افشانه ........ Jet Space

گروه لی ........ Lie Group

کروشه لی ........ Lie Bracket

مشتق لی ........ Lie Dertivative

جبر لی ........ lie Algebra

موضعی ........ Local

موضعا اقلیدسی ........ locally Euclidean

دیفئومورفیسم موضعی ........ Locall Diffeomorphism

برش موضعی ........ Local Section

عملگر خطی ........ linear Operator

مکانیک کلاسیک ........ Classical Mechanics

| | |
|---|---|
| ناتباهیده | Nondegenerate |
| عملگر | Operator |
| معمولی | Ordinary |
| پواسون | Poisson |
| کروشه پواسون | Poisson Bracket |
| امتداد دادن | Prolongation |
| پس کشنده | Pull Back |
| پیش برنده | Push Forward |
| رتبه | Rank |
| منظم | Regular |
| حقیقی مقدار | Real-Valued |
| تجانس | Scale |
| صدق کردن | Satisfy |
| برش | Section |
| شمارای نوع دوم | Second Countable |
| هموار | Smooth |
| ماتریس ساختاری | Structure Matrix |
| جمع بندی | Somming |
| کافی | Sufficient |
| گروه تقارن | Symmetry Group |
| فضای مماسی | Tangent Space |
| کلاف مماس | Tangent Bundle |
| بردار مماس | Tangent Vector |
| فضای توپولوژیکی | Topological Space |
| مشتق کامل | Total Dertivative |
| منیفلد توپولوژیکی | Topological Manifold |
| دیفراتسیل کامل | Total Differential |
| انتقال | Translation |
| تبدیل | Transformation |
| نگاشت گذر | Transition Map |
| بدیهی | Trivialy |
| عمودی | Vertical |

فضای برداری ........................................................ Vector Space

میدان برداری ........................................................ Vector Field

# نمایه

**Aabstract**

The guding concept of a Hamiltonian system of differential equation forms the basis of much of the more advanced work in classical mechanics, including motion of rigid bodies, celestial mechanics, quantization theory and so on. More recently, Hamiltonian methods have become increasingly important in the study of the equations of continuum mechanics, including fluids, plasmas and elastic media.This method is coordinate-free and is applicable for any given system such as PDE and ODE.
Key Words: Partial Differential Equation, Differential Forms, Prolongation, Symmetry Groups, Poisson Bracket, Hamiltonian System

Shahrood University

Faculty Of Mathematical Sciences

# Finite dimensional Hamiltonian systems arises from symmetries of differential equations

Ameneh Jalali

Supervisor

Dr. seyed Reza Hejazi

Advisor

Dr. Ebrahim Hashemi

2015/07/27