دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

امنیت درگراف

دانشجو : هادی رضازاده

اساتید راهنما :

دکتر احمد نزاکتی- دکتر نادر جعفری‌راد

استاد مشاور :

دکتر صادق رحیمی شعرباف

پایان‌نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

دی‌ماه ۱۳۸۸

بسم الله الرّحمن الرّحیم

بنام خداوند بخشاینده مهربان

اللّهُمَ اَخرِجنی مِن ظُلُماتِ الوَهمِ

پروردگارا خارج کن مرا از تاریکی‌های فکر

وَ اَکرِمنی بِنُورِ الفَهمِ

و به نور فهم مرا گرامی بدار

اللّهُمَّ افتَح عَلَینا اَبوابَ رَحمَتِکَ

پروردگارا بر ما درهای رحمتت را بگشای

وَانشُر عَلَینا خَزائِنَ عُلُومِکَ

و گنج‌های دانشَت را بر ما بگستران

بِرَحمَتِکَ یا اَرحَمَ الرّحمین

به امید رحمت تو ای مهربان‌ترین مهربانان

به یاد روح پاک خاله‌ام

تقدیم به

همه وجودم پدر عزیزم

سرمایه زندگی‌ام مادر فداکارم

قدردانی و تشکر

با سپاس فروان به پیشگاه حضرت حق که به ما نعمت اندیشیدن عنایت فرمود. اکنون که بـه حـول و قوه الهی این رساله به رشته تحریر در آمده است بر خود لازم مـی‌دانـم تـا والاتـرین مراتـب سـپاس خویش را به محضر اساتید عزیز جناب آقای دکتر جعفری‌راد و جناب آقای دکتر نزاکتی که بـا دقـت قابل تقدیر و راهنمایی‌های خردمندانه‌شان در این تحقیق مرا یاری نموده‌انـد نثـار کـنم. همچنـین از آقای دکتر رحیمی که مشاور من بودند و از آقایان دکتر فتحعلی و دکتر معدن‌شکاف که قبول زحمت نمودند و داوری این رساله را به عهده داشتند کمال تقدیر و تشکر را دارم. هچنین اسـاتید محترمـی که در این دو سال از محضر وجودشان استفاده نموده‌ام، سپاسگزارم. از اولین آموزگاران زندگی‌ام، پدر و مادر عزیزم که دنیای خوبی‌ها هستند و همواره قوت قلب من بوده‌اند، تشکر و قدرانی می‌نمایم.

چکیده

در دنیای اطراف ما، وضعیت‌های فراونی وجود دارند که می‌توان توسط نظریه گراف به توصیف آنها پرداخت. به‌عنوان مثال، فرض کنید که کشورها نماینده رئوس در گراف و یال‌ها هم روابط ممکن بین کشورها باشند. مجموعه چند کشور تشکیل یک اتحاد می‌دهند هرگاه هر کشور در داخل آن مجموعه حداقل همان اندازه که دوست دارد به‌همان اندازه دشمن در خارج این مجموعه داشته باشد. به‌عبارت دیگر مجموعه‌هایی از رئوس در گراف تشکیل اتحاد می‌دهند هرگاه هر رأس در این مجموعه، حداقل همان اندازه که با رئوس داخلی مجموعه مجاور است به‌همان اندازه مجاور، با رئوس بیرونی این مجموعه باشد چنین اتحادی را اتحاد دفاعی می‌گوییم که اولین بار توسط استیفان هدیتنمی و همکارانش در سال ۲۰۰۱ در مقاله‌ای تحت عنوان اتحاد در گراف مطرح شد. از آن پس این موضوع مورد بحث و بررسی قرار گرفت که در سایه این تلاش‌ها اتحادهای دیگری هم تعریف شد که شامل اتحاد تهاجمی و اتحاد نیرومند است. اخیراً در سال ۲۰۰۷ رابرت سی بریقام و همکارانش تعریف جدیدی به عنوان مجموعه امن ارائه کردند که تعریف‌شان مبتنی بر زیرمجموعه‌های یک مجموعه بود. در فصل اول مفاهیم و مقدمات نظریه گراف که در فصل‌های بعد به آن نیازمندیم را یاد آوری می‌کنیم. در فصل دوم اتحادها را به‌طور کامل بررسی خواهیم کرد. در فصل سوم شرایط لازم و کافی براینکه یک مجموعه امن باشد را معین می‌کنیم و در آخر این فصل کران‌هایی برای کوچکترین مجموعه امن بدست می‌آوریم. همچنین در فصل چهارم ما اتحاد باز که یکی از مسایل باز است را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و بسیاری از خواص این مفهوم را استخراج کرده، سپس روی کران‌های آن بحث می‌کنیم.

کلید واژه : اتحاد دفاعی، اتحاد تهاجمی، اتحاد نیرومند، اتحاد سراسری، مجموعه امن، عدد امنیت، عدد اتحاد.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

[1] H. Rezazadeh, A. Nezakati. “Open Alliance in Graphs.” *40^{Th} Annual Iranian Mathematics Conference*, (2009).

[۲] هادی رضازاده, نادر جعفری راد *." اتحاد دفاعی باز در گراف."* دومین همایش ریاضی پیام نور ساری, (۱۳۸۸).

فهرست مندرجات

فصل اوّل

گذری بر نظریه گراف

۱,۱ مقدمه

در دنیای اطراف ما، وضیعت‌های فراونی وجود دارند کـه مـی‌تـوان توسـط نمـوداری متشـکل از یـک مجموعه نقاط، به علاوه خطوطی که برخی از این نقاط را به یکدیگر متصل می‌کنند، به توصـیف آنهـا پرداخت. به‌عنوان مثال، برای نشان دادن رابطه دوستی بین یک دسته از انسان‌ها می‌توانیم هر شخص را با یک نقطه مشخص کنیم و نقاط متناظر با هر دوست را با یک خط به یکـدیگر وصـل نمـاییم، یـا درجای دیگر ممکن است برای نشان دادن یک شبکه ارتباطی، از نموداری اسـتفاده کنـیم کـه در آن، نقاط نمایانگر مراکز ارتباطی و خطوط، نشان دهنده پیوندهای ارتباطی بین مراکز باشند. توجه داشـته باشید که در این گونه نمودارها، آن چه بیشتر مورد توجه است این است که آیا دو نقطه داده شده بـه وسیله یک خط به یکدیگر متصل هستند یا نه و طریقه اتصال آن‌هـا اهمیتـی نـدارد. ایـن مثـال‌هـا و بسیاری از مثال‌های دیگر بیانگر کاربردهای گراف در مسائل روزانه و طبیعی می‌باشند. در این فصل به تعاریفی از نظریه گراف و معرفی چند رده خاص از گراف‌ها بسنده می‌کنیم که در فصول بعد بـه آنهـا نیازمندیم. برای مطالعه بیشتر خواننده را به مراجع [۳, ۱۸] ارجاع می‌دهیم.

۲,۱ تعاریف

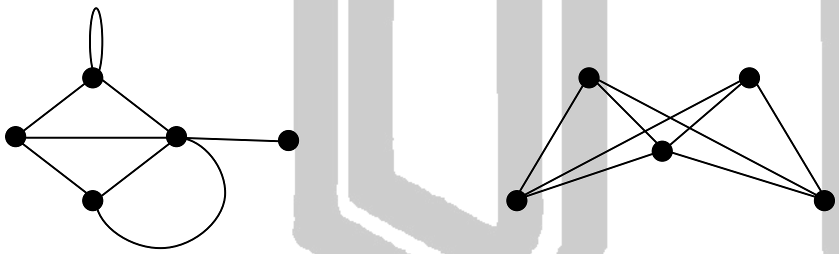
تعریـــف ۱,۲,۱ یـک گـراف سـاده G بـا n رأس و m یـال متشـکل از مجموعـه رأس‌هـای $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E=\{e_1,e_2,\dots e_m\}$ است، که درآن هر یال، یک جفت نامرتب از رأس‌هاست و به جای یال $\{u,v\}$ می‌نویسیم uv. اگر $uv\in E$، آنگاه u و v مجاور هسـتند. رأس‌هـای مشمول در یک یال e نقاط پایانی آن یال هستند.

مرتبه گراف G، که به‌صورت $n(G)$ می‌نویسیم تعداد رأس‌ها در Gاست. یک گراف $n-$رأسی گرافـی از مرتبه n است. $e(G)$ نشانگر تعداد یال‌ها در Gاست.

گراف را روی صفحه با تخصیص یک نقطه به هر رأس و رسم یک خم به ازای هر یال میان نقاط پایانی آن نمایش می‌دهیم. واژه‌های «رأس» و «یال» از رأس‌ها و یال‌ها چند وجهی‌های فضایی مانند مکعب‌ها و چهار وجهی‌ها اقتباس شده است.

یک یال با دو نقطه پایانی یکسان، طوقه نامیده می‌شود. اگر مجموعه رأس‌ها و مجموعهٔ یال‌های یک گراف متناهی باشند، گراف مزبور را متناهی می‌نامند.

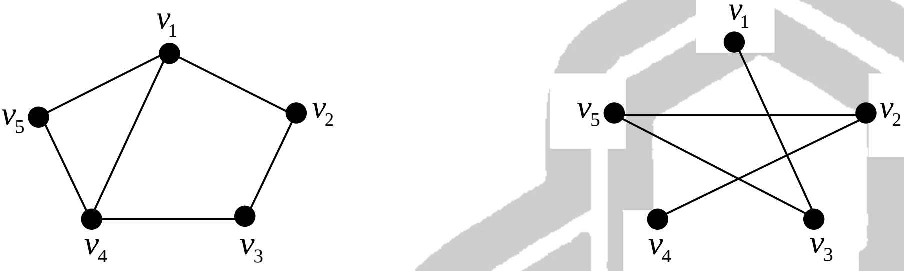
یک گراف ساده است اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال نباشد. به‌عنوان مثال، گراف شکل ۱,۱ (الف) ساده نیست در صورتی که گراف شکل ۱,۱ (ب) ساده است.



(الف) **(ب)**

شکل ۱,۱

یک معمای معروف از این قرار است: آیا هر مجموعه از شش نفر دارای سه ناآشنای دو طرفه و یا سه آشنای دو طرفه است. چون « آشنایی» رابطه‌ای متقارن است، می‌توانیم آن را مدل یک گراف ساده قرار دهیم که یک رأس برای هر شخص و یک یال برای هر جفت آشنا باشد. رابطه « ناآشنایی» در همان مجموعه گراف دیگری می‌سازد. مکمل یک گراف ساده G را با $\bar{G}$ نشان می‌دهیم که گرافی با همان مجموعه رأس‌های G، به‌طوری که u و v در $\bar{G}$ مجاورند هرگاه u و v در G مجاور نباشد. در شکل ۲,۱ گراف و مکملش را رسم کرده‌ایم.



(الف) (ب)

شکل ۲,۱

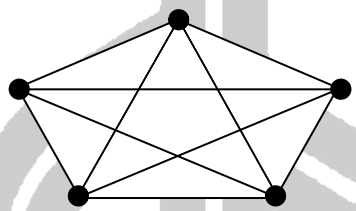
تعریف ۲,۲,۱ یک یکریختی از گراف G به گراف H نگاشت دو سویی به‌صورت $f: V(G) \to V(H)$ است به‌طوریکه $uv \in E(G)$ هرگاه $f(u)f(v) \in E(H)$. در این صورت می‌گوییم « G با H یکریخت است» و می‌نویسیم $G \cong H$.

تعریف ۳,۲,۱ گراف H، زیرگراف G است (نوشته می‌شود $H \subseteq G$) اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$، همچنین می‌گوییم که G شامل H است اگر $H \subseteq G$. در صورتیکه زیرگراف H از G در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را یک زیرگراف فراگیر از G خواهیم نامید.

یک زیرگراف القایی از G زیرگرافی مانند H است به‌طوری که هر یال G با رأس‌های مشمول در $V(H)$ متعلق به $E(H)$ باشد. اگر H یک زیرگراف القایی از G با مجموعهٔ رأس‌های S باشد آنگاه می‌نویسیم $H = G[S]$.

تعریف ۴,۲,۱ گراف ساده‌ای که در آن هر دو رأس متمایز با یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل یا خوشه نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن یکریختی، فقط یک گراف کامل با n

رأس می‌تواند وجود داشته باشد که آن را با K_n نمایش می‌دهیم. ترسیمی از K_5 در گراف شکل ۳٫۱ نشان داده شده است. یک گراف کامل زیرگراف‌های بسیاری دارد که خوشه نیستند، اما هر زیرگراف القایی از یک گراف کامل یک خوشه است.



شکل ۳٫۱

گراف تهی، گرافی است که هیچ یالی نداشته باشد.

تعریف ۵٫۲٫۱ فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده باشد. می‌گوییم زیرمجموعه I از V مستقل است هرگاه هیچ دو رأسی از I در G مجاور نباشد. مجموعه مستقل I را ماکسیمال می‌نامند هرگاه نتوان هیچ رأسی مانند v به I چنان اضافه کرد که $I \cup \{v\}$ نیز مستقل باشد. عدد استقلال G، که با $\beta(G)$ نشان داده می‌شود، برابر با اندازه بزرگترین مجموعه مستقل در G است. مثال‌هایی از مجموعه‌های مستقل در گراف شکل ۴٫۱ نشان داده شده‌اند که مجموعه رئوس سفید تشکیل مجموعه مستقل می‌دهند.

(ب)یک مجموعه ماکسیمال **(الف)**یک مجموعه مستقل

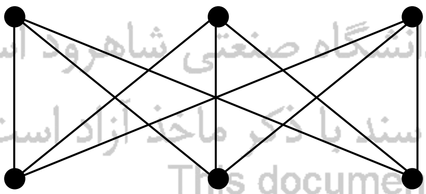
شکل ۴,۱

معمای ۶-نفره این پرسش را مطرح می‌کند که آیا هر گراف ۶-رأسی شامل یک خوشه یا یک مجموعه مستقل با سه رأس می‌باشد. درگراف G شکل ۲,۱(الف)، بزرگترین خوشه و بزرگترین مجموعه مستقل به ترتیب دارای اندازه‌های ۳ و ۲ هستند. این مقادیر در $\overline{G}$ برعکس می‌شوند، زیرا خوشه‌ها تحت رابطه مکمل‌سازی به مجموعه‌های مستقل (و برعکس) تبدیل می‌شوند.

تعریف ۶,۲,۱ گراف دوبخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه رأس‌های آن را به دو زیر-مجموعه X و Y چنان افراز کرد که یک سر تمام یال‌های آن در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد.

گراف دوبخشی کامل، یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y است که در آن هر رأس X، به هر رأس Y وصل شده باشد. اگر $|X|=m$ و $|Y|=n$، گراف دوبخشی کامل را با $K_{n,m}$ نمایش می‌دهیم.

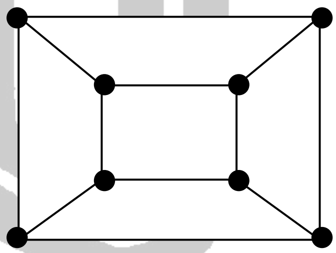
گراف شکل ۵,۱ یک گراف دو بخشی کامل $K_{3,3}$ می‌باشد.



شکل ۵,۱

تعریف ۷,۲,۱ گراف k−بخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه رأس‌های آن را به k زیر مجموعه، طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد. گراف k−بخشی کامل، یک گراف k−بخشی است که در آن، هر رأس هر بخش به تمام رأس‌هایی که در بخش‌های دیگر قرار دارند، وصل شده باشد.

تعریف ۸,۲,۱ گراف k−مکعب، گرافی است که رأس‌های آن k−تایی‌های مرتبی با مؤلفه‌های صفر و یک هستند و در آن دو رأس به یکدیگر متصلند، هرگاه دقیقاً در یک مؤلفه با یکدیگر تفاوت داشته باشند. گراف شکل ۶,۱ یک ۳-مکعب است.



شکل ۶,۱

تعریف ۹,۲,۱ فرض کنید G_1 و G_2 زیرگراف‌هایی از G باشند می‌گوئیم G_1 و G_2 مجزا هستند، اگر هیچ رأس مشترکی نداشته باشند و آنها را یال-مجزا می‌نامیم، اگر هیچ یال مشترکی نداشته باشند. $G_1 \cup G_2$ (اجتماع G_1 و G_2) زیرگرافی است با مجموعه رأس‌های $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های $E(G_1) \cup E(G_2)$. اگر $V(G_1) \cap V(G_2) = \phi$ اجتماع آن‌ها را به‌صورت $G_1 + G_2$ نمایش می‌دهیم و آن را اجتماع مجزا G_1 و G_2 می‌نامیم.

درجه رأس v درگراف G را با، $\deg(v)$ نمایش می‌دهیم که برابر با تعداد یال‌های واقع بر v می‌باشد.

کمترین و بیشترین درجه رأس‌های G را به‌ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰،۲،۱ دنباله درجات یک گراف، فهرست درجه رأس‌های آن است. معمولاً این درجه‌ها را به‌ترتیب غیر نزولی به‌صورت $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ می‌نویسند.

می‌گوییم گراف G، $k-$منتظم است اگر درجه تمام رأس‌های آن برابر k باشد.

همسایگی باز v را به‌صورت $N(v)$ می‌نویسیم که عبارت است از $\{u \in V : uv \in E\}$، همچنین همسایگی بسته v را به‌صورت $N[v]$ می‌نویسیم که عبارت است از $N(v) \cup \{v\}$.

تعریف ۱۱،۲،۱ یک گشت به‌طول k یک دنباله $v_0, e_1, \ldots\ldots, e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌هاست به‌طوری که به‌ازای هر i، $e_i = v_{i-1}v_i$. یک گذر گشتی است که هیچ یال تکراری نداشته باشد و یک مسیر گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به‌صورت فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز $v_1, \ldots, v_n$ در نظر می‌گیریم به‌طوری که به‌ازای هر $2 \le i \le n$، $v_{i-1}v_i$ یک یال باشد. یک مسیر به‌طول n را با P_n نمایش می‌دهیم.

به‌طور مشابه، یک دور را به‌صورت فهرست مرتبی از $v_1, \ldots, v_n$ در نظر می‌گیریم به‌طوری که هر $v_{i-1}v_i$ برای $1 \le i \le n$ و v_1v_n یک یال باشند. یک دور به‌طول n را به‌صورت C_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲،۲،۱ یک (v,u)-گشت، گشتی است که نخستین رأس آن u و آخرین رأس آن v باشد این دو، نقاط پایانی آن هستند. اگر $u = v$ باشد گشت را بسته گوییم.

تعریف ۱۳،۲،۱ یک گراف G همبند است اگر به‌ازای هر جفت $u,v \in V$ یک (v,u)-مسیر موجود باشد درغیر این‌صورت G را ناهمبند نامیم.

فاصله بین دو رأس u و v در گراف G که بـا $d_G(u,v)$ نمـایش داده مـی‌شـود عبـارت اسـت از طـول کوتاهترین (v,u)-مسیر در G. قطر G برابر با بیشترین فاصلـه بـین دو رأس از G اسـت و بـا $diam(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۴,۲,۱ گراف بی‌دور گرافی است که هیچ دوری نداشته باشد. همچنین یک گراف همبند فاقد دور را درخت نامیم. در درخت، بین هر دو رأس یک مسیر یکتا موجـود اسـت. گـراف بـی‌دور را جنگل نیز می‌نامند.

یک برگ (یا رأس آویزان) رأسی از درجه یک است. یک رأس تنها رأسی است که دارای درجـه صـفر باشد.

کمر G، طول کوتاهترین دور در G می‌باشد و با $girth(G)$ نشان داده می‌شود.

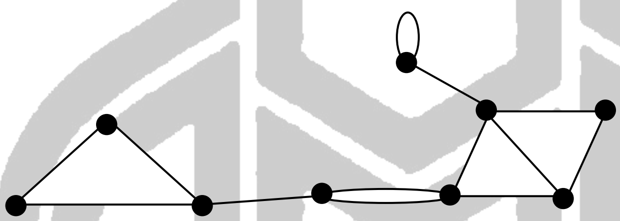
مرز $S \subseteq V$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\partial(S)=\bigcup_{v\in S}N(v)-S. \qquad (1-1)$$

یک شبکه ارتباطی خوب به دشواری دچار اختلال می‌گردد. می‌خواهیم خدمات شبکه را حفظ کنیم با تضمین اینکه انتقالات ممکن، حتی هنگامی که برخی از رأس‌ها و یال‌ها دچـار نقـص شـوند، همبنـد باقی بماند. هنگامی که پیوندهای ارتباطی پرهزینه باشند، می‌خواهیم این اهداف را با یال‌هـای انـدک محقق سازیم. حذف رأس‌ها از گراف‌ها را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۵,۲,۱ یـک مجموعـه ناهمبندسـاز یـا بـرش رأسـی از یـک گـراف G عبـارت اسـت از مجموعه $S \subseteq V(G)$ به‌طوری که $G-S$ دارای بیش از یک مؤلفه باشد. یک گراف G، $k-$همبند اسـت

اگر هر برش رأسی دارای حداقل k رأس باشد. همبنـدی G، کـه بـه‌صـورت $\kappa(G)$ نوشـته مـی‌شـود، مینیمم اندازه یک برش رأسی است. $\kappa(G)$ گراف شکل ۷,۱ برابر یک است.

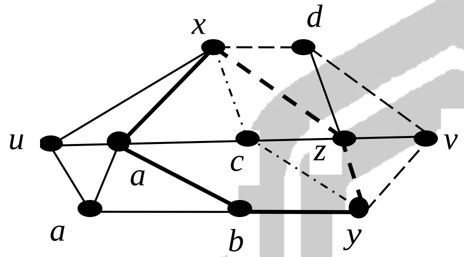


شکل۷,۱

دو مسیر از x به y مجزا درونی هستند اگر آن دو مسیر شامل هیچ رأس داخلی مشترک نباشند.

تعریف ۱۶,۲,۱ با در نظر گرفتن $x, y \in V$، یک مجموعه $S \subseteq V - \{x, y\}$ یک $(x, y)-$برش است اگـر $G - S$ هـیچ $(x, y)-$مسـیری نداشـته باشـد. $\kappa(x, y)$ مینـیمم انـدازه یـک $(x, y)-$بـرش و $\lambda(x, y)$ ماکسیمم تعداد $(x, y)-$مسیرهای دوبه دو مجزای درونی است.

در گراف زیر، مجموعه $S = \{b, c, z, d\}$ یک $(x, y)-$برش از اندازه چهار اسـت، بنـابراین $\kappa(x, y) \le 4$. همان‌طور که در گراف شکل ۸,۱ نشان داده شده است گراف G شامل چهار تا $(x, y)-$مسیر دوبـه دو مجزا است, بنابراین $\lambda(x, y) \ge 4$.



شکل ۸،۱

قضیه ۱۷،۲،۱ (منگر[1] [۱۸]) اگر x و y رأس‌هایی از گراف G باشند و $xy \notin E$ آنگاه مینمم اندازه یک (x,y)–برش برابر با ماکسیمم تعداد (x,y)–مسیرهای دوبه دو مجزای درونی است.

یک کاربرد از قضیه منگر که در اثبات قضیه‌ای از فصل سوم بکار می‌رود را در قضیه زیر می‌آوریم.

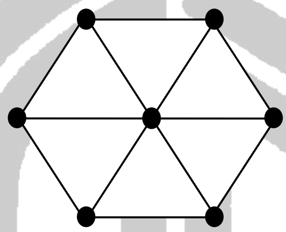
قضیه ۱۸،۲،۱ ([۱۸]) فرض کنید X و Y دو مجموعه مجزا از رئوس گراف k–همبند G باشند. فرض کنید $u(x)$ برای $x \in X$ و $w(y)$ برای $y \in Y$ اعداد نامنفی صحیح باشند به‌طوریکه $\sum_{x\in X} u(x) = \sum_{y\in Y} w(y) = k$، آنگاه G شامل k، (x,y)–مسیر دوبه دو مجزای درونی است به‌طوریکه $u(x)$ مورد از آنها از $x \in X$ شروع می‌شود و $w(y)$ مورد از آنها به $y \in Y$ ختم می‌شوند.

تعریف ۱۹،۲،۱ یک مجموعه ناهمبند ساز یالی، یک مجموعه $F \subseteq E$ است به‌طوری که $G-F$ دارای بیش از یک مؤلفه باشد. همبندی یالی G، که با $\kappa'(G)$ نشان داده می‌شود، مینیمم اندازه یک مجموعه ناهمبند ساز یالی است.

قضیه ۲۰،۲،۱ ([۳]) برای هر گراف همبند G داریم، $\kappa'(G) \le \delta(G)$.

[1] Menger

تعریف ۲۱,۲,۱ چرخ W_n گرافی است که شامل یک دور به‌طول n و یک رأس مرکزی است به-طوریکه این رأس مرکزی مجاور با تمام رئوس واقع بر دور باشد. در شکل ۹,۱ گراف W_6 نمایش داده - شده است.



شکل ۹,۱

تعریف ۲۲,۲,۱ اگر $G=(V,E)$ گرافی ساده باشد، زیرمجموعه K از V را یک پوشش رأسی برای G می‌نامند هرگاه به‌ازای هر یال ab از G، حداقل یکی از دو رأس a یا b در K باشد. مجموعه K را یک پوشش مینیمال می‌نامند هرگاه به ازای هر $x \in K$، $K-\{x\}$ پوششی برای G نباشد.

اندازه کوچکترین مجموعه پوشش رأسی در G را با $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم و آن را عدد پوششی رأسی G می‌نامیم. مثال‌هایی از مجموعه پوشش رأسی در گراف شکل ۱۰,۱ نشان داده شده‌اند که مجموعه رئوس سفید تشکیل مجموعه پوششی می‌دهند.

(الف)یک پوشش   **(ب)**یک پوشش مینیمم

شکل ۱۰٫۱

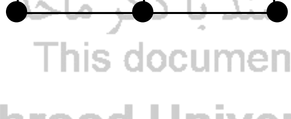
تعریف ۲۳٫۲٫۱ گراف‌های H و G را در نظر بگیرید. حاصلضرب دکارتی آنها را که به‌صورت $G \square H$ می‌نویسیم گرافی با مجموعه رأس‌های $V(G)\times V(H)$ که در آن (u,v) مجاور با (u',v') است اگر وتنها اگر یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم،

(i) $u=u'$ و $vv'\in E(H)$،

یا

(ii) $v=v'$ و $uu'\in E(G)$.

مثال ۲۴٫۲٫۱ گراف توری G از مرتبه $m\times n$ که به‌صورت $G_{m,n}$ نمایش می‌دهیم حاصلضرب دکارتی دو مسیر است و آن را با $P_m \square P_n$ نمایش می‌دهیم. در گراف زیر حاصلضرب دکارتی دو مسیر از مرتبه ۲ و۳ را داریم.



شکل ۱۱٫۱

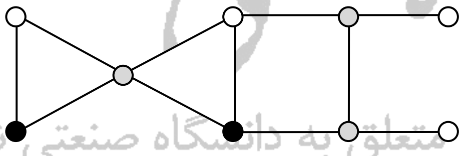
قرارداد: $\lfloor x \rfloor$ و $\lceil x \rceil$ را به‌ترتیب برای نمایش کف و سقف x بکار می‌بریم، $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x است و $\lceil x \rceil$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با x است.

یک شرکت می‌خواهد برج‌های مخابراتی در مناطق دور افتاده تأسیس کند. برج‌ها در ساختمان‌های بلند مستقر می‌شوند و هر ساختمان باید قابل دسترس باشد. اگر یک فرستنده در x بتواند به y امواج ارسال کند آنگاه y هم می‌تواند به x امواج ارسال کند. مسأله‌ای که مطرح می‌شود این است چه مقدار فرستنده نیاز است تا تمام ساختمان‌ها را پوشش دهد.

تعریف ۲۵,۲,۱ هر رأس در گراف G بر خود و همسایگانش غالب است . مجموعه رئوس S در گراف G یک مجموعه غالب است اگر $N[S]=V$. همچنین S یک مجموعه غالب باز است هرگاه داشته باشیم $N(S)=V$.

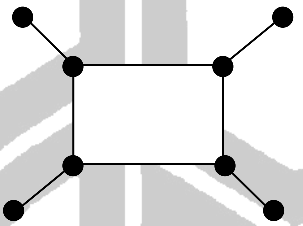
عدد غلبه‌ای را که با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم برابر با مینیمم اندازه یک مجموعه غالب در G است. همچنین عدد غلبه‌ای باز G را که با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم، مینیمم اندازه یک مجموعه غالب باز در G است [۴].

گراف شکل ۱۲,۱ مجموعه غالب مینیمالی از اندازه چهار(سفید) و مجموعه غالب مینیممی (خاکستری) از اندازه سه دارد $(\gamma(G)=3)$.



شکل ۱۲,۱

۲۶,۲,۱ تعریف۲۸,۲,۱ هاله G را که با $cor(G)$ نمایش می‌دهیم گرافی است که از اضافه کردن یک یال آویزان به هر رأس آن بدست می‌آید[۱۰]. گراف شکل ۱۳,۱ یک $cor(C_4)$ است.



شکل ۱۳,۱

تعریف ۲۷,۲,۱ یک $k-$رنگ‌آمیزی از G یک نشاندار کردن $f:V(G)\to\{1,\dots,k\}$ است. این رنگ‌آمیزی یک $k-$رنگ آمیزی سره است اگر $xy\in E$ ایجاب کند $f(x)\neq f(y)$.

فصل دوّم

اتحاد در گراف

۱,۲ مقدمه

معنی واژه «اتحاد» ارتباط یا پیوند بین اشخاص، خانواده‌ها، ایالت، اشیاء و یا احـزاب اسـت. در دنیـای واقعی ما، اتحادها در انواع مختلفی یافت می‌شوند که هر کدام شامل خصوصیات مختلف هستند.

به‌طور مثال:

- اتحاد ملت‌ها برای حمایت متقابل در جنگ (حمله به دشمن مشترک یا دفاع در مقابل آن)
- اتحاد احزاب سیاسی مختلف
- اتحاد افرادی که به‌وسیله دوستی یا خویشاوندی وصلت دارند
- اتحاد شرکت‌ها با سود اقتصادی مشترک

اتحاد درگراف اولین بار توسط استیفان هدیتنمی[۱]، ساندرا هـدیتنمی[۲] و پیتـر کریستیانسـن[۳] [۱۱]در مقاله‌ای تحت عنوان «اتحاد در گراف[۴]» در سال ۲۰۰۱ ارائه شد، که از اتحاد بـین ملـت‌هـا در جنـگ الهام گرفته بودند. فرض کنید که ملت‌ها نماینده رئوس در گراف‌ها و یال‌ها هم روابط ممکن (دوسـتی یا دشمنی) بین ملت‌ها باشد. آنها اتحاد را به‌عنوان مجموعه‌هایی از رئوس در گراف تعریف کردند بـه-طوریکه هر رأس در این مجموعه، حداقل همان اندازه که با رئوس داخلی مجموعه مجـاور اسـت بـه-همان اندازه مجاور با رئوس بیرونی مجموعه باشد. به‌عبارت دیگر هر کشور در یک اتحاد، حداقل همان اندازه که دوست در داخل اتحاد دارد به‌همان اندازه دشمن در خارج اتحاد داشته باشد. چنین اتحادی را اتحاد دفاعی می‌گوییم. به‌طور مشابه در امنیت ملی، انواع دیگر اتحاد در مطالعات اخیر تعریف شده است به‌طوریکه شامل اتحاد تهاجمی و اتحاد نیرومند است(تعاریف و دیگر خصوصیات هریـک از ایـن اتحادها در بخش‌های بعدی این فصل ارائه خواهد شد). این نکته را متذکر می‌شویم کـه اخیـراً اتحـاد دیگری بنام اتحاد امن در گراف مطرح شده است که منظور همان امنیت در گـراف اسـت [۲]، کـه در فصل سوم به‌طور کامل توضیح داده خواهد شد.

۱ Stephen Hedetniem
۲ Sandra Hedetniemi
۳ Pitter Kristiansen
۴ Alliance in graphs

در زمینه‌های واقع گرایانه، میزان حمایت و خصومت توسط اعداد تعیین نمی‌شود. اما توسط قدرت اقتصادی کشور، کارایی نیروی نظامی، شرایط جغرافیایی و غیره تعیین می‌شود. این عوامل می‌توانند توسط گراف‌های وزن‌دار مدل شوند. در این حالت، وزن یال بین دو رأس متناظر با میزان دوستی یا دشمنی بین دو کشور می‌باشد. اتحاد دفاعی در یک گراف وزن‌دار یالی، مجموعه‌ای از رئوس است به‌طوریکه برای هر رأس در اتحاد، مجموع وزن‌های یالی‌اش در داخل اتحاد بزرگتر یا مساوی مجموع وزن‌های یالی‌اش در خارج اتحاد باشد [۱۲].

۲٫۲ اتحاد

در این بخش انواع مختلف اتحاد را معرفی خواهیم کرد. ابتدا کار خود را با تعریف اتحاد دفاعی شروع می‌کنیم.

تعریف ۱٫۲٫۲ درجه رأس v در مجموعه $S \subseteq V$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\deg_S(v) = |N(v) \cap S|, \qquad (1-2)$$

همچنین درجه رأس v در مجموعه $V-S$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\deg_{V-S}(v) = |N(v) \cap (V-S)| = \deg(v) - \deg_S(v). \qquad (2-2)$$

تعریف ۲٫۲٫۲ گراف ساده $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید. زیرمجموعه غیرتهی S از رئوس V، یک اتحاد دفاعی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $v \in S$ داشته باشیم،

$$|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V-S)| \qquad (3-2)$$

به‌عبارت دیگر با توجه به $(2-3)$ داریم،

$$\deg_S(v) \geq \deg_{V-S}(v) - 1. \qquad (4-2)$$

در این حالت می‌گوئیم که هر رأس در S از حملات رئوس واقع در $V-S$ قابل دفاع است.

یک اتحاد دفاعی، قوی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $v \in S$ داشته باشیم،

$$|N[v] \cap S| > |N(v) \cap (V-S)| \qquad (5-2)$$

به‌عبارت دیگر با توجه به $(2-4)$ داریم،

$$\deg_S(v) \geq \deg_{V-S}(v). \qquad (6-2)$$

در این حالت می‌گوئیم که هر رأس S قویاً قابل دفاع است.

تعریف ۳,۲,۲ زیرمجموعه غیر تهی S از رئوس V، یک اتحاد تهاجمی است هرگاه برای هر $v \in \partial S$ داشته باشیم،

$$|N(v) \cap S| \geq |N[v] \cap (V-S)| \qquad (7-2)$$

در این حالت می‌گوئیم که هر رأس، ∂S از حملات رئوس S آسیب‌پذیر است. همچنین اتحاد تهاجمی را یک اتحاد تهاجمی قوی گویند هرگاه برای هر $v \in \partial S$ داشته باشیم،

$$|N(v) \cap S| > |N[v] \cap (V-S)|. \qquad (8-2)$$

در [۱۳]، مفهوم اتحاد دفاعی (تهاجمی)، به $k-$اتحاد دفاعی (تهاجمی) تعمیم داده شده است. که این اتحاد به مقدار پارامتر k بستگی دارد. رأس v در زیرمجموعه $S \subseteq V$، نسبت به S، $k-$راضی است هرگاه برای هر $v \in S$ داشته باشیم،

$$\deg_S(v) \geq \deg_{V-S}(v) + k. \qquad (9-2)$$

مجموعه S یک $k-$اتحاد دفاعی است اگر هر رأس در S، نسبت به S، $k-$راضی باشد که در آن $-\Delta(G) < k < \Delta(G)$. توجه کنید که همان‌طور که در [۱۱] بیان شد (۱-)-اتحاد دفاعی، «اتحاد دفاعی» است و همچنین ۰-اتحاد دفاعی، «اتحاد دفاعی قوی» یا «مجموعه چسبنده» است.

به‌طور مشابه، مجموعه $S \subseteq V$ یک $k-$اتحاد تهاجمی است هرگاه برای هر $v \in \partial S$ داشته باشیم،

$$\deg_S(v) \geq \deg_{V-S}(v) + k \qquad (10-2)$$

یا به‌طور معادل،

$$\deg(v) \geq 2\deg_{V-S}(v) + k. \qquad (11-2)$$

که در آن $-\Delta(G) < k < \Delta(G)$. همان‌طور که در [۶،۱۱] تعریف شده است یک ۱-اتحاد تهاجمی یک «اتحاد تهاجمی» و یک ۲-اتحاد تهاجمی یک «اتحاد تهاجمی قوی» است. در این جا بحث در مورد $k-$اتحاد در گراف را خاتمه می‌دهیم. برای مطالعه جزییات بیشتر به [۱۷،۱۳،۷] ارجاع شود.

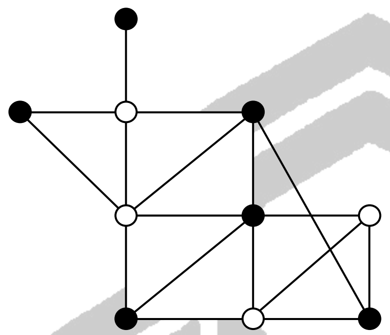
اتحاد را اتحاد نیرومند نامند اگر هم اتحاد دفاعی و هم اتحاد تهاجمی باشد [۱]. این مفهوم را می توانیم به‌صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۴٫۲٫۲ مجموعه $S \subseteq V$، را یک اتحاد نیرومند گویند هرگاه برای هر $v \in N[S]$ داشته باشیم،

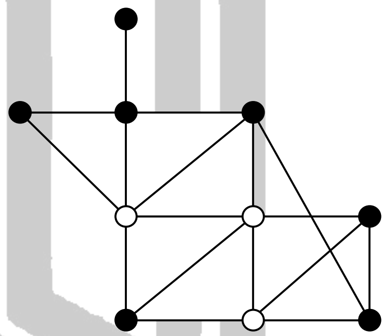
$$|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|. \qquad (12-2)$$

چون اتحاد نیرومند S، یک اتحاد دفاعی نیز می‌باشد، پس هر رأس در S از حملات شدنی توسط رئوس ∂S، قابل دفاع است، از طرفی چون S یک اتحاد تهاجمی نیز می‌باشد لذا می‌تواند هر رأس در ∂S را مورد هجوم قرار دهد.

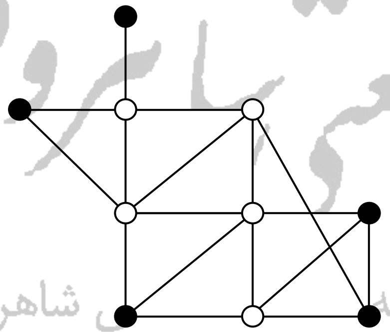
در گراف‌های ۱٫۲ رئوس سفید تشکیل اتحاد می‌دهند. (الف) اتحاد دفاعی (ب) اتحاد تهاجمی (ج) اتحاد نیرومند



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱,۲

تعریف ۵,۲,۲ اتحاد S (از هر نوع) را سراسری نامیم، اگر هر رأس در $V-S$ مجاور با حداقل یک رأس از اتحاد S باشد. به‌عبارت دیگر اتحاد S سراسری است اگر یک مجموعه غالب هم باشد.

توجه کنید همه اتحادهایی که در قبل گفته شده است را می‌توان به گراف وزن‌دار یالی (رأسی) تعمیم داد.

تعریف ۶,۲,۲ اتحاد $S\subseteq V$، اتحاد دفاعی وزن‌دار است اگر برای هر $v\in V$، وزنی مانند $wt(v)$ وابسته باشد به‌طوریکه برای هر رأس $v\in S$ داشته باشیم،

$$\sum_{u\in(N[v]\cap S)} wt(u) \geq \sum_{w\in(N(v)\cap(V-S))} wt(w). \qquad (13-2)$$

به‌صورت مشابه، اتحادهای دیگر را هم می‌توان به گراف وزن‌دار تعمیم داد.

۳,۲ عدد اتحاد

در این بخش، ما بعضی از پارامترهای وابسته به انواع مختلف اتحاد را معرفی خواهیم کرد. اتحاد S (از هر نوع) بحرانی یا مینیمال نامیده می‌شود اگر هیچ زیرمجموعه سره از S یک اتحاد نباشد. در ادامه بحث ما از عبارت داخل پرانتز که تأکید می‌کند اتحاد از یک نوع هستند صرف نظر می‌کنیم و فرض خواهیم کرد که این حالت برقرار است مگر اینکه خلاف آن بیان شده باشد.

توجه کنید خاصیت وجودی اتحاد، لزوماً ارثی نیست. یعنی مجموعه مشمول در یک اتحاد لزوماً یک اتحاد نیست. اتحاد S را بحرانی موضعی یا مینیمال موضعی تعریف می‌کنیم اگر برای هر $r\in S$، $S-\{r\}$ یک اتحاد نباشد. به‌طور کلی ما اتحاد S را $r-$بحرانی یا $r-$مینیمال تعریف می‌کنیم اگر برای هر $T\subset S$ با شرط $|T|=r$، $S-T$ یک اتحاد نباشد. برای مثال، اتحاد دفاعی $S=\{1,2,3,4\}$ در گراف شکل ۲,۲ (الف)، ۱-بحرانی است. همچنین برای هر رأس تنهای $v\in S$، مجموعه $S-\{v\}$ اتحاد دفاعی

نیست. در صورتیکه مجموعه $S-\{2,3,4\}$ یک اتحاد دفاعی است. در گراف شکل ۲,۲ (ب) مجموعه $T=\{1,2,3,4\}$ یک اتحاد تهاجمی ۱-بحرانی است، اما یک اتحاد تهاجمی بحرانی نیست. زیرا زیر مجموعه سره $T'=\{1,2\}\subset T$ یک اتحاد تهاجمی است.

نکته‌ای که در اینجا مطرح است این است که یک اتحاد تهاجمی لزوماً اتحاد دفاعی نیست. فرض کنید گراف دوبخشی کامل $K_{2,2}$ توسط دو مجموعه مستقل V_1 و V_2 تعریف شده باشد(چون هر رأس در V_1 و همچنین در V_2 همسایه‌هایش در مجموعه‌ای است که خودش در آن مجموعه نیست). بنابراین، V_1 و V_2 اتحاد تهاجمی هستند ولی اتحاد دفاعی نیستند.

(ب) (الف)

شکل ۲,۲

یک اتحاد، مینیمم است اگر یک اتحاد مینیمال از کوچکترین اندازه باشد.

اندازه اتحاد مینیمم گراف G را عدد اتحاد G می‌نامیم(توجه کنید اولین بار عبارت عدد اتحاد دفاعی و عدد اتحاد تهاجمی در [۱۱] استفاده شده است).

با توجه به مطالب بالا برای هر نوع اتحاد دو عدد ثابت داریم که در زیر نشان داده شده است.

$a(G)=$ عدد اتحاد دفاعی گراف G

$\hat{a}(G)=$ عدد اتحاد دفاعی قوی گراف G

$a_o(G)=$ عدد اتحاد تهاجمی گراف G

$\hat{a}_o(G) = G$ عدد اتحاد تهاجمی قوی گراف

$\gamma_a(G) = G$ عدد اتحاد دفاعی سراسری گراف

$\gamma_{\hat{a}}(G) = G$ عدد اتحاد دفاعی قوی سراسری گراف

$\gamma_o(G) = G$ عدد اتحاد تهاجمی سراسری گراف

$\gamma_{\hat{o}}(G) = G$ عدد اتحاد تهاجمی قوی سراسری گراف

$a_p(G) = G$ عدد اتحاد نیرومند گراف

$\hat{a}_p(G) = G$ عدد اتحاد نیرومند قوی گراف

$\gamma_{ap}(G) = G$ عدد اتحاد نیرومند سراسری گراف

$\gamma_{\hat{a}p}(G) = G$ عدد اتحاد نیرومند قوی سراسری گراف

با توجه به‌تعاریف، به آسانی دیده می شود که روابط زیر برای پارامترهای فوق برابر است.

i. $a(G) \le \hat{a}(G)$,

ii. $a(G) \le a_P(G)$,

iii. $a(G) \le \gamma_a(G)$,

iv. $\hat{a}(G) \le \hat{a}_P(G)$,

v. $\hat{a}(G) \le \gamma_{\hat{a}}(G)$,

vi. $a_o(G) \le \hat{a}_o(G)$,

vii. $a_o(G) \le a_P(G)$,

viii. $\hat{a}_o(G) \le \hat{a}_P(G)$,

ix. $a_o(G) \le \gamma_o(G)$,

$x.\quad \hat{a}_o(G) \le \gamma_{\hat{o}}(G).$

قرارداد: اگر S یک اتحاد دفاعی بحرانی از گراف G باشد و $|S| = a(G)$ آنگاه می‌گوییم که S یک $a(G)-$مجموعه از G است. بعلاوه اگر S یک اتحاد دفاعی قوی بحرانی باشد و $|S| = \hat{a}(G)$ آنگاه S یک $\hat{a}(G)-$مجموعه است. تعاریف فوق را می‌توان برای اتحادهای دیگر هم بیان کرد.

۴,۲ خصوصیات اساسی و کران‌ها روی عدد اتحاد

در این بخش خواصی از انواع اتحادها به‌همراه کران‌هایی برای آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱,۴,۲ عدد اتحاد دفاعی

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که هر اتحاد دفاعی (قوی) بحرانی در گراف G یک زیرگراف همبند از G القاء می‌کند.

گزاره ۱,۴,۲ ([۱۱]) برای هر اتحاد دفاعی(قوی) بحرانی S در گراف G، $G[S]$ همبند است.

گراف‌هایی با عدد اتحاد و اتحاد قوی $4,3,2,1$ در گزاره بعد دسته‌بندی شده است.

گزاره ۲,۴,۲ ([۱۱]) **الف)** $a(G)=1$ اگر وتنها اگر رأسی مانند $v \in V$ موجود باشد به‌طوریکه $\deg(v) \le 1$.

ب) $\hat{a}(G)=1$ اگر وتنها اگر G یک رأس تنها داشته باشد.

ج) $a(G)=2$ اگر وتنها اگر $\delta(G) \ge 2$ و G دو رأس مجاور از درجه حداکثر سه داشته باشد.

د) $\hat{a}(G)=2$ اگر وتنها اگر $\delta(G) \ge 1$ و G دو رأس مجاور از درجه حداکثر دو داشته باشد.

ه) $a(G)=3$ اگر وتنها اگر $a(G)\neq 1$ و $a(G)\neq 2$ و G با یکـی از دو زیرگـراف القـایی زیـر یکریخـت باشد،

۱- P_3، با رئوسی به‌ترتیب، w,v,u به‌طوریکه $\deg(u)$ و $\deg(w)$ از درجه حداکثر سه و $\deg(v)$ از درجه حداکثر پنج باشد.

۲- K_3، هر رأس آن از درجه حداکثر پنج باشد.

و) $\hat{a}(G)=3$ اگر وتنها اگر $\hat{a}(G)\neq 1$ و $\hat{a}(G)\neq 2$ و G با یکی از دو زیرگـراف القـایی زیـر یکریخـت باشد،

۱- P_3، با رئوسی به‌ترتیب، w,v,u به‌طوریکه $\deg(u)$ و $\deg(w)$ از درجه حداکثر دو و $\deg(v)$ از درجه حداکثر چهار باشد.

۲- K_3، هر رأس آن از درجه حداکثر چهار باشد.

نتیجه ۳,۴,۲ ([۱۱]) برای هر درخت T و مسیر P_n داریم، $a(T)=a(P_n)=1$.

نتیجه ۴,۴,۲ ([۱۱]) برای هر دور C_n و چرخ W_n داریم،

$$a(C_n)=\hat{a}(C_n)=\hat{a}(P_n)=a(W_n)=2.$$

به‌طورکلی مشخص سازی گراف‌ها با $a(G)=k$ و $\hat{a}(G)=k$، امکان‌پذیر است زیرا برای هـر مقـدار k، تعداد متناهی گراف همبند از مرتبه k موجود است. از طرفی رئوس در هـر کـدام از ایـن گـراف‌هـای همبند دارای محدویت درجه می‌باشند. متأسفانه تعداد گراف‌های همبند از مرتبه k به‌طور نمـایی بـر حسب k رشد می‌کند.

عدد اتحاد دفاعی برای بعضی از گراف‌های خاص به‌صورت زیر می‌باشند.

قضیه ۵,۴,۲ ([۱۱]) برای هر گراف توری $G_{m,n}$،

۱- $a(G_{m,n})=1$ اگر وتنها اگر $\min\{m,n\}=1$,

۲- $a(G_{m,n})=2$ اگر وتنها اگر $\min\{m,n\}\geq 2$,

۳- $\hat{a}(G_{m,n})=2$ اگر وتنها اگر $\min\{m,n\}<3$,

۴- $\hat{a}(G_{m,n})=3$ اگر وتنها اگر $\min\{m,n\}=3$,

۵- $\hat{a}(G_{m,n})=4$ اگر وتنها اگر $\min\{m,n\}\geq 4$.

قضیه ۶,۴,۲ ([۱۱]) برای هر گراف $G=(V,E)$،

۱- اگر G، ۱-منتظم باشد آنگاه $a(G)=1$ و $\hat{a}(G)=2$,

۲- اگر G، ۲-منتظم باشد آنگاه $a(G)=2$ و $\hat{a}(G)=2$,

۳- اگر G، ۳-منتظم باشد آنگاه $a(G)=2$ و $\hat{a}(G)=girth(G)$,

۴- اگر G، ۴-منتظم باشد آنگاه $a(G)=\hat{a}(G)=girth(G)$,

۵- اگر G، ۵-منتظم باشد آنگاه $a(G)=girth(G)$.

برای تمام گراف‌های بیان شده در بالا مقادیر عدد اتحاد دفاعی (قوی) ثابت بودنـد ولـی ایـن مقـادیر برای چرخ‌ها (همان‌طورکه در نتیجه ۴,۴,۲ داریم، عدد اتحاد چرخ برابر دو است در این‌جا منظور عـدد اتحاد دفاعی قوی است) و گراف‌های کامل و دو بخشی کامل بستگی به تعداد رأس‌های گراف دارند.

گزاره ۷,۴,۲ ([۱۱]) برای هر چرخ W_n، $\hat{a}(W_n)=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1$.

اثبـــات: رأس مرکــزی بــه‌همــراه $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ از همســایه‌هــایش تشــکیل اتحــاد دفــاعی مــی‌دهــد در نتیجـه $\hat{a}(W_n) \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$. از طـرف دیگـر اگـر S یـک $\hat{a}(G)-$مجموعـه از چـرخ باشـد آنگـاه هـیچ رأس $G[S]$، از درجه یک نمی‌باشد، زیرا هر رأس در W_n از درجه حداقل سه است. بنابراین کوچکترین درجه در $G[S]$ حداقل دو است. تنها زیرگراف القایی از W_n که شامل رئوسـی از درجـه دو اسـت، دور C_n یا زیرگرافی شامل رأس مرکزی می‌باشد. لذا باید یک $\hat{a}(G)-$مجموعه از W_n شامل رأس مرکـزی و حداقل نیمی از همسایه‌های واقع بر C_n باشد لذا داریم $\hat{a}(W_n) \ge \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$. ■

گزاره ۸,۴,۲ ([۱۱]) برای هر گراف کامل K_n،

الف) برای $n \ge 1$، $a(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$,

ب) برای $n \ge 1$، $\hat{a}(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

گزاره ۹,۴,۲ ([۱۱]) برای هر گراف دوبخشی کامل $K_{r,s}$،

الف) برای $1 \le r \le s$، $a(K_{r,s}) = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$,

ب) برای $1 \le r \le s$، $\hat{a}(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$.

همان‌طور که دیدیم $a(G)$ و $\hat{a}(G)$ روی بعضی از گراف‌ها می‌توانـد مسـاوی باشـد. همچنـین مجموعـه رئوس V تشکیل اتحاد دفاعی و اتحاد دفاعی قوی می‌دهد. بنابراین،

گزاره ۱۰,۴,۲ ([۱۱]) برای هر گراف G از مرتبه n داریم، $1 \le a(G) \le \hat{a}(G) \le n$.

هر چند کران پایین برای گراف‌هایی با رأس تنها و یال آویزان دقیق هستند، اما کران بالا را می‌توان اندکی بهبود بخشید. فریک[6] و همکاران او [۸] نشان دادند که گراف‌های کامل، کران بالا برای عدد اتحاد دفاعی $a(G)$ را به ما می‌دهند که به‌عنوان حدس در [۱۱] مطرح شده بود.

قضیه ۱۱,۴,۲ ([۱۱]) برای هر گراف G از مرتبه n، $a(G) \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

داتن[7] و همکاران او در [۱۴] نشان دادند که حتی گراف‌های کامل کران بالا برای عدد اتحاد دفاعی قوی را به ما می‌دهند یعنی مینیمم اتحاد دفاعی قوی از گراف G حداکثر رأس $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ دارد. این کران هم به عنوان حدس در [۱۱] مطرح شده بود.

قضیه ۱۲,۴,۲ ([۱۴]) برای هر گراف G از مرتبه n ، $\hat{a}(G) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

اثبات: فرض کنید S یک $\hat{a}(G)$–مجموعه از گراف G و $B = V - S$. به برهان فرض خلف می‌کنیم که $\hat{a}(G) > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. اگر زیرمجموعه‌ای از B مانند T موجود باشد، به‌طوریکه T یا $T \cup \{v\}$ به ازای رأس $v \in S$ یک اتحاد دفاعی قوی باشد آنگاه $|S| < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \le |T| + 1$ که یک تناقض است. بنابراین یک افرازی مانند $\langle V_1, V_2 \rangle$ موجود است به‌طوریکه هیچ زیرمجموعه از V_1 یک اتحاد دفاعی قوی نمی باشد. به‌طور مشابه هیچ زیرمجموعه از V_2 یک اتحاد دفاعی قوی نمی‌باشد. فرض کنید A افرازی با این خصوصیات باشد که اندازه یال–برشی، بین V_1 و V_2 در میان تمام چنین افرازهایی کوچکتر است. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید $|V_1| \ge \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. چون V_1 یک اتحاد دفاعی قوی نیست دارد پس

Frick [5]
Dutton [6]

$v \in V_1$ وجود دارد به‌طوریکـه $\deg_{V_1}(v) < \deg_{V_2}(v)$. افـراز $\langle V_1 - \{v\}, V_2 \cup \{v\} \rangle$ را در نظـر بگیریـد. فــرض کنیــد A' یــک یــال-برشــی بــرای جداســازی $\{v\} - V_1$ و $\{v\} \cup V_2$ باشــد بــه-طوریکـه $|A'| = |A| - \deg_{V_2}(v) + \deg_{V_1}(v) < |A|$. بنـابراین حـداقل یکـی از مجموعـه‌هـای $V_1 - \{v\}$ و $V_2 \cup \{v\}$ باید اتحاد دفاعی قوی و یا شامل زیرمجموعه‌ای از اتحاد دفاعی قوی باشـد. چـون $V_1 - \{v\}$ اتحــاد دفــاعی قــوی نیســت. پــس $V_2 \cup \{v\}$ بایــد یــک اتحــاد دفــاعی قــوی باشــد ولــی $|V_2 \cup \{v\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 < |S|$ که یک تناقض است.■

گزاره ۱۳,۴,۲ ([۱۱]) برای هر گراف $G_1 \square G_2$، داریم،

۱- $a(G_1 \square G_2) \leq \min\{a(G_1)\hat{a}(G_2), \hat{a}(G_1)a(G_2)\}$,

۲- $\hat{a}(G_1 \square G_2) \leq \hat{a}(G_1)\hat{a}(G_2)$.

۲,۴,۲ عدد اتحاد دفاعی سراسری

بنا به تعریف برای هر گراف G، مجموعه همه رئوس تشکیل اتحاد دفاعی سراسری (قوی) می‌دهنـد. بنابراین برای هر گراف G، عدد اتحاد دفاعی سراسری(قوی) تعریف شده است. توجه کنید کـه اتحـاد دفاعی سراسری از مینیمم اندازه، لزوماً یک اتحاد دفاعی بحرانی نیست و یـک اتحـاد دفـاعی بحرانـی لزوماً یک مجموعه غالب نیست. همان‌طور که در گزاره ۱,۴,۲ مشاهده کردیم، هر اتحاد دفـاعی(قوی) بحرانی S درگراف G باید زیرگراف همبند از G تولید کند. اما این مطلب برای اتحاد دفـاعی سراسـری لزوماً درست نیست. برای مثال، دو رأس انتهایی از مسیر P_4 تشکیل اتحاد دفاعی سراسری می‌دهند در حالی‌که زیرگراف همبند تولید نمی‌کند. اکنون بعضی از خصوصیات عدد اتحاد دفاعی سراسری (قوی) $\gamma_a(G)$ ($\gamma_{\hat{a}}(G)$) را ارائه می‌کنیم. ابتدا عدد اتحاد دفاعی سراسری (قوی) را برای گراف‌هـای کامـل و دوبخشی کامل به‌صورت گزاره‌های زیر داریم.

گزاره ۱۴٫۴٫۲ ([۹]) در گراف کامل K_n،

الف) برای $n\ge 1$، $\gamma_a(K_n)=\left\lfloor \frac{n+1}{2}\right\rfloor$,

ب) برای $n\ge 1$، $\gamma_{\hat{a}}(K_n)=\left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil$.

گزاره ۱۵٫۴٫۲ ([۹]) در گراف دو بخشی کامل $K_{r,s}$،

الف) برای $r\ge 1$، $\gamma_a(K_{1,r})=\left\lfloor \frac{r}{2}\right\rfloor+1$,

ب) برای $2\le r\le s$، $\gamma_a(K_{r,s})=\left\lfloor \frac{r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{s}{2}\right\rfloor$,

ج) برای $1\le r\le s$، $\gamma_{\hat{a}}(K_{r,s})=\left\lceil \frac{r}{2}\right\rceil+\left\lceil \frac{s}{2}\right\rceil$.

اثبات: هنگامی‌که $r=1$، نتیجه فوراً حاصل می‌شود. فرض کنید $r\ge 2$ و S یک $\gamma_a(K_{1,r})-$مجموعه باشد. چون S یک مجموعه غالب و رأس مرکزی را که با v نمایش می‌دهیم متعلق به S است، بنابراین S شامل حداقل $\left\lfloor \frac{\deg(v)}{2}\right\rfloor=\left\lfloor \frac{r}{2}\right\rfloor$ همسایه از v است. از این رو $\gamma_a(K_{1,r})\ge\left\lfloor \frac{r}{2}\right\rfloor+1$. مجموعه شامل v و $\left\lfloor \frac{r}{2}\right\rfloor$ از همسایه‌هایش تشکیل اتحاد دفاعی سراسری می‌دهند. در نتیجه $\gamma_a(K_{1,r})\le\left\lfloor \frac{r}{2}\right\rfloor+1$. همان‌طور که در گزاره ۹٫۴٫۲ نشان داده شد $a(K_{r,s})=\left\lfloor \frac{r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{s}{2}\right\rfloor$ و $\hat{a}(K_{r,s})=\left\lceil \frac{r}{2}\right\rceil+\left\lceil \frac{s}{2}\right\rceil$. بنابراین با توجه به اینکه $a(G)\le\gamma_a(G)$ و $\hat{a}(G)\le\gamma_{\hat{a}}(G)$ داریم $\gamma_a(K_{r,s})\ge\left\lfloor \frac{r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{s}{2}\right\rfloor$ و $\gamma_{\hat{a}}(K_{r,s})\ge\left\lceil \frac{r}{2}\right\rceil+\left\lceil \frac{s}{2}\right\rceil$.

حال مجموعه شامل $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ رأس در یک بخش و $\left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ رأس در بخش دیگر تشکیل اتحاد دفاعی سراسری می‌دهد. لذا (ب) ثابت می‌شود. مجموعه شامل $\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$ رأس در یک بخش و $\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$ رأس در بخش دیگر تشکیل اتحاد سراسری قوی می‌دهد. بنابراین قسمت (ج) ثابت می‌شود.■

بنا به تعریف هر اتحاد دفاعی سراسری، یک مجموعه غالب است، بنابراین $\gamma_a(G) \geq \gamma(G)$.

گزاره ۱۶,۴,۲ ([۹]) برای هر گراف G با $\delta(G) \geq 2$، $\gamma_t(G) \leq \gamma_a(G)$. بعلاوه اگر $\Delta(G) \leq 3$ آنگاه داریم، $\gamma_t(G) = \gamma_a(G)$.

در گزاره بعد نشان می‌دهیم که برای هر گراف بدون رأس تنها عدد غلبه‌ای باز یک کران بالا برای عدد اتحاد دفاعی سراسری قوی است.

گزاره ۱۷,۴,۲ ([۹]) برای هر گراف G، که فاقد رأس تنها باشد داریم $\gamma_t(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G)$.

اثبات: $\gamma_{\hat{a}}(G)$−مجموعه S و رأس $v \in S$ را در نظر بگیرید. S شامل حداقل $\left\lceil \frac{\deg(v)}{2} \right\rceil \geq 1$ همسایه از v است. در نتیجه S یک مجموعه غالب باز است بنابراین $\gamma_t(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G)$.■

گزاره ۱۸,۴,۲ ([۹]) برای $n \geq 3$، $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \gamma_t(P_n)$.

گزاره ۱۹,۴,۲ ([۹]) برای $n \geq 2$، $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n)$ مگراینکه $n \equiv 2 (\bmod 4)$، در این‌صورت داریم، $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n) - 1$.

قضیه ۲۰,۴,۲ ([۹]) اگر G یک گراف از مرتبه n باشد آنگاه داریم،

$$\gamma_a(G) \geq \frac{\left(\sqrt{4n+1}-1\right)}{2} \qquad (1)$$

$$\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \sqrt{n}. \qquad (2)$$

کران‌های فوق برای بعضی از گراف‌ها دقیق هستند.

قضیه ۲۱,۴,۲ ([۹]) اگر G یک گراف از مرتبه n باشد آنگاه داریم،

$$\gamma_a(G) \geq \frac{n}{\left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil + 1}.$$

قضیه ۲۲,۴,۲ ([۹]) اگر G یک گراف مکعبی یا ۴-منتظم از مرتبه n باشد آنگاه داریم،

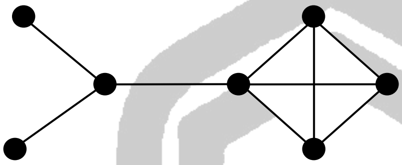
$$\gamma_a(G) \geq \frac{n}{3}.$$

۳,۴,۲ عدد اتحاد تهاجمی

همان‌طور که در بخش ۳,۲ نشان داده شد عدد اتحاد تهاجمی (قوی) گراف G به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$a_o(G)$ برابر با مینیمم اندازه یک اتحاد تهاجمی غیر تهی و $\hat{a}_o(G)$ برابر با مینیمم اندازه یک اتحاد تهاجمی قوی غیر تهی است.

برای مثال فرض کنید G گراف حاصل از K_4 و $K_{1,3}$ با یکی گرفتن یک رأس از K_4 با یک رأس آویزان $K_{1,3}$ باشد. مجموعه دو رأس آویزان تشکیل یک اتحاد تهاجمی می‌دهند در نتیجه $a_o(G) \leq 2$. برای این گراف داریم $a_o(G) = 2$ و $\hat{a}_o(G) = 3$ (کوچکترین اتحاد تهاجمی قوی تنها رئوسی از خوشه با درجه سه هستند).



شکل ۳,۲

برای عدد اتحاد تهاجمی توجه کنید که هر پوشش رأسی یک اتحاد تهاجمی است لذا گزاره زیر را داریم.

گزاره ۲۳,۴,۲ ([۶]) برای هر گراف G، $a_o(G) \le \alpha(G)$. اگر $\delta(G) \ge 2$، آنگاه داریم،

$$\hat{a}_o(G) \le \alpha(G).$$

گزاره ۲۳,۴,۲ ([۶]) فرض کنید G یک گراف همبند باشد. اگر $\Delta(G) \le 2$، آنگاه $a_o(G) = \alpha(G)$.

گزاره ۲۴,۴,۲ ([۶]) برای هر گراف G، $a_o(G) \ge \frac{\delta(G)+1}{2}$ و $\hat{a}_o(G) > \frac{\delta(G)+1}{2}$.

در بسیاری از گراف‌ها نظیر گراف‌های کامل و دوبخشی کامل نامساوی فوق به تساوی تبدیل می‌شوند (هر چند که برای عدد اتحاد تهاجمی گراف ستاره یک استثناء است).

نتیجه ۲۵,۴,۲ ([۶]) **الف)** برای $n \ge 1$ داریم، $a_o(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ و $\hat{a}_o(K_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$,

ب) برای $1 \le r \le s$، $a_o(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil$,

ج) برای $2 \le r \le s$، $\hat{a}_o(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{r}{2}+1 \right\rceil$ اما $\hat{a}_o(K_{1,r}) = \left\lceil \frac{r}{2}+1 \right\rceil$.

قضیه ۲۶,۴,۲ ([۶]) برای هر گراف G از مرتبه $n \ge 2$ داریم،

$$a_o(G) \le \frac{2n}{3}.$$

قضیه ۲۷,۴,۲ ([۶]) برای هر گراف G از مرتبه $n \ge 3$، $\hat{a}_o(G) \le \frac{5n}{6}$. بعلاوه اگر G با مینیمم درجه حداقل دو باشد آنگاه $\hat{a}_o(G) \le \frac{3n}{4}$.

گزاره ۲۸,۴,۲ ([۶]) اگر G گرافی با n رأس و با عدد غلبه‌ای $\gamma(G)$ باشد آنگاه داریم،

$$a_o(G) \le \frac{n+\gamma(G)}{2}.$$

۴,۴,۲ عدد اتحاد تهاجمی سراسری

عدد اتحاد تهاجمی سراسری G را که با نشان می‌دهیم برابر با مینیمم اندازه یک اتحاد تهاجمی سراسری در گراف G است. همچنین عدد اتحاد تهاجمی سراسری قوی G را که با $\gamma_{\hat{o}}(G)$ نشان می‌دهیم، برابر با مینیمم اندازه یک اتحاد تهاجمی قوی سراسری در گراف G است.

قضیه زیر کران‌های بالا برای عدد اتحاد تهاجمی سراسری را نشان می‌دهد. تأکید می‌کنیم که کران‌های (ب) و (ج) در قضیه زیر در زیربخش قبل بیان شده است.

قضیه ۲٫۴٫۲۹ ([۱۶]) برای هر گراف همبند G از مرتبه $n \geq 2$ داریم،

الف) $\gamma_o(G) \leq \left\{n-\beta(G), \left\lfloor \frac{n+\beta(G)}{2} \right\rfloor\right\}$، که در آن $\beta(G)$ عدد استقلال گراف G است,

ب) $\gamma_o(G) \leq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$,

ج) $\gamma_o(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\gamma(G)}{2} \right\rfloor$.

گزاره ۲٫۴٫۳۰ ([۱۶]) برای هر گراف همبند G از مرتبه n و با ماکزیمم درجه $\Delta(G)$ داریم،

$$\gamma_o(G) \leq \left\lfloor \frac{2n-\Delta(G)}{2} \right\rfloor.$$

قضیه ۲٫۴٫۳۱ ([۱۶]) برای هر گراف همبند G از مرتبه n با $\delta(G) \geq 2$ داریم،

الف) $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq n-\beta(G)$,

ب) $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq \left\lfloor \frac{5n}{6} \right\rfloor$,

ج) اگر G یک گراف مکعب باشد آنگاه $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$.

۲٫۴٫۵ عدد اتحاد نیرومند

همان‌طور که در بخش ۲٫۳ نشان دادیم عدد اتحاد نیرومند (سراسری) را به‌صورت $a_p(G)$ ($\gamma_{ap}(G)$) نشان می‌دهیم. چون همه مجموعه رئوس گراف G تشکیل اتحاد نیرومند سراسری می‌دهند لذا بـرای هر گراف G، $\gamma_{ap}(G)$ موجود است. توجه کنید که یک اتحاد نیرومند سراسری بـا کـوچکترین انـدازه لزوماً یک اتحاد نیرومند بحرانی نیست و هچنین اتحـاد نیرومنـد بحرانـی لزومـاً یـک اتحـاد نیرومنـد

سراسری نیست. چون هر اتحاد نیرمند سراسری گراف G، هم مجموعه غالب و هم اتحاد نیرومند است لذا $\max\{\gamma(G),a_p(G)\}\le\gamma_{ap}(G)$. درگزاره زیر برای بعضی از گراف‌های خاص مقادیر عدد اتحاد نیرمند (سراسری) مشخص شده است.

گزاره ۳۲,۴,۲ ([۱]) **الف-** برای هر گراف کامل K_n، $a_p(K_n)=\gamma_{ap}(K_n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$,

ب) برای, $1\le r\le s$، $a_p(K_{r,s})=\gamma_{ap}(K_{r,s})=\min\left\{r+\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{r+1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{s+1}{2}\right\rceil\right\}$,

ج) برای هر مسیر P_n، $a_p(P_n)=\gamma_{ap}(P_n)=\left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor$,

د) برای هر دور C_n، $a_p(C_n)=\gamma_{ap}(C_n)=\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil$.

گزاره ۳۳,۴,۲ ([۱]) برای هر گراف G با هیچ رأس تنها، $\gamma_{ap}(G)\le n-\left\lfloor\frac{\delta(G)}{2}\right\rfloor$. کران فوق برای گراف‌های کامل از مرتبه فرد دقیق است.

گزاره ۳۴,۴,۲ ([۱]) برای هر گراف G، $\gamma(G)+\left\lfloor\frac{\delta(G)}{2}\right\rfloor\le\gamma_{ap}(G)$.

فصل سوّم

امنیت در گراف

۱,۳ مقدمه

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده باشد. همان‌طور که در فصل دوم گفتیم، زیرمجموعه S از V یک اتحاد دفاعی است اگر برای هر رأس $v\in S$، $|N[v]\cap S|\geq|N[v]-S|$. بنابراین هر رأس از S، با حمایت همسایگانش در S، از هجوم همسایگانش واقع در $V-S$ مقابله می‌کند. این نکته را خاطر نشان می‌کنیم که ما می‌توانیم رئوس $N[v]-S$ را به عنوان مهاجمان v و رئوس $N[v]\cap S$ را به‌عنوان مدافعان v در نظر بگیریم. تعریفی که می‌توان برای اتحاد دفاعی با استفاده از مدافع و مهاجم داشته باشیم این است که برای هر v در اتحاد دفاعی، حداقل تعداد مدافعان v به همان اندازه مهاجمان v باشد. در این تعریف اتحاد دفاعی، روی یک رأس از یک مجموعه تعریف می‌شود. اما رابرت سی بریقام[۸] و همکاران او در سال ۲۰۰۷ تعریف جدیدی به‌عنوان مجموعه امن ارائه کردند که تعریف آنها مبتنی بر زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها می‌باشد [۲]. آنها گفتند که مجموعه S، امن است اگر هر زیرمجموعه $X\subseteq S$ تحت یک تعریف خاص دفاعی، که در بخش بعد خواهیم گفت از هجوم رئوس $V-S$ در امان باشد. در ادامه این فصل شرایط لازم و کافی برای‌اینکه یک مجموعه امن باشد را معین می‌کنیم و در آخر کران‌هایی برای کوچکترین مجموعه امن بدست می‌آوریم.

۲,۳ ویژگی‌های مجموعه امن

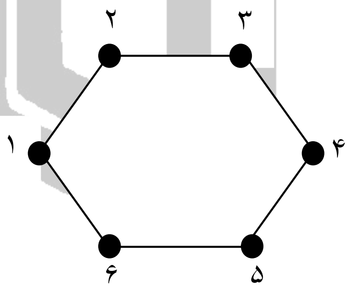
مجموعه $S\subseteq V$ را امن گوییم اگر برای هر زیرمجموعه $X\subseteq S$، هر حمله روی تمام رئوس X دفع شود. مهاجم w (عضوی از $N[X]-S$) می‌تواند دقیقاً به یک رأس از X حمله کند، حتی اگر w با چند رأس از X همسایه باشد. توجه کنید که مدافع v باید در S باشد. با توجه به آنچه گفته شد تعاریف بعد را داریم.

[۸] Robert C.Brigham

تعریف ۱,۲,۳ فرض کنید $S=\{s_1,\ldots,s_k\}\subseteq V$. هر مجموعه k تایی دوبه دو مجزای $A=\{A_1,\ldots,A_k\}$ یک حمله روی S است، اگر برای هر $1\le i\le k$، داشته باشیم $A_i\subseteq N[s_i]-S$. هر مجموعه k تایی دو به دو مجزای $D=\{D_1,\ldots,D_k\}$ یک دفاع روی S است، اگر برای هر $1\le i\le k$، داشته باشیم $D_i\subseteq N[s_i]\bigcap S$. حمله A قابل دفاع است هرگاه مدافعی مانند D موجود باشد به‌طوریکه برای هر $1\le i\le k$، داشته باشیم $|D_i|\ge|A_i|$.

تعریف ۲,۲,۳ مجموعه S را امن می‌گوییم، هرگاه هر حمله روی S قابل دفاع باشد.

تعریف ۳,۲,۳ زیرمجموعه $X\subseteq S$، $S-$امن است، هرگاه هر حمله روی S به‌طوریکه $A_i=\phi$، قابل دفاع باشد ($A_i=\phi$ هرگاه $s_i\notin X$).



شکل ۱,۳

برای گراف شکل ۱,۳ مجموعه $S=\{1,2,4\}$ را در نظر بگیرید، فرض کنید $A=\{\{6\},\{3\},\{5\}\}$ یک حمله روی S و $D=\{\{2\},\{1\},\{4\}\}$ یک دفاع روی S در مقابل حمله A باشد. با این چیدمان حمله A قابل دفاع است. اما S مجموعه امن نیست، زیرا در چیدمان فوق اگر $A_2=\phi$ و $A_3=\{3,5\}$ باشد دیگر حمله A قابل دفاع نخواهد بود.

توجه کنید که اگر S یک مجموعه امن نباشد ممکن است دارای یک زیرمجموعه، $S-$امن باشد. همان‌طور که در گراف قبل توجه نمودید S مجموعه امن نیست ولی زیرمجموعه $X=\{1,2\}\subset S$ ، $S-$امن است. از آنجایکه تمام رئوس در گراف G تشکیل مجموعه امن می‌دهند، لذا حداقل یک مجموعه امن با مینیمم اندازه باید موجود است. مینیمم اندازه مجموعه امن در گراف G را عدد امنیت G می‌نامند و با $s(G)$ نمایش می‌دهیم. یک مجموعه امن با اندازه $s(G)$ را یک $s(G)-$مجموعه می‌گویند.

۱,۲,۳ ویژگی‌های مقدماتی مجموعه امن

گزاره زیر خلاصه‌ای از چند ویژگی مجموعه امن است که به آسانی از تعاریف فوق نتیجه می‌شود.

گزاره ۴,۲,۳ ([۲]) فرض کنید $G=(V,E)$ و $X\subseteq S\subseteq V$.

الف) اگر حمله‌ای روی X، توسط زیرمجموعه سره از $N[X]-S$ موجود باشد که قابل دفاع نباشد آنگاه حمله‌ای دیگر روی X، که این حمله از تمام مهاجمان واقع در $N[X]-S$ استفاده می‌کند موجود است به‌طوریکه قابل دفاع نیست.(حمله کوچکتر قابل دفاع نیست چه‌طور انتظار این را داریم که حمله بزرگتر قابل دفاع باشد)

ب) اگر یک حمله روی زیرمجموعه سره از X قابل دفاع باشد آنگاه روی X قابل دفاع است،

ج) اگر X ، $S-$امن باشد آنگاه $|N[X]\cap S|\geq|N[X]-S|$،

د) S امن است اگر وتنها اگر برای هر $X\subseteq S$ ، X ، $S-$امن باشد،

و) کوچکترین مجموعه امن همبند است.

در قضیه زیر نشان داده خواهد شد که اجتماع مجموعه‌های امن مجزا، امن است.

قضیه ۵,۲,۳ ([۲]) اگر S_1 و S_2 دو مجموعه امن مجزا در گراف G باشند آنگاه $S_1\cup S_2$ یک مجموعه امن در G است.

اثبات: هر حمله روی $S_1 \cup S_2$، را می‌توان به‌عنوان یک حمله روی S_1 با استفاده از رئـوس $\partial S_1 - S_2$ و به عنوان یک حمله روی S_2 با استفاده از رئوس $\partial S_2 - S_1$ در نظر گرفت. توجه کنید بنا به تعریـف هـر رأس در $\partial S_1 \cap \partial S_2$ تنها می‌تواند، یکی از دو مجموعه S_1 و S_2 را مـورد هجـوم قـرار دهـد. بنـابراین نیروی تهاجمی روی S_i در $S_1 \cup S_2$ برای $i=1,2$، زیرمجموعه‌ای از نیروی تهاجمی S_i اسـت.(نیـروی تهاجمی S_i احتمالاً بزرگتر از نیروی تهاجمی S_i در $S_1 \cup S_2$ است) چون خود S_i یـک مجموعـه امـن است لذا $S_1 \cup S_2$ امن خواهد بود.■

در گزاره زیر عدد امنیت دسته‌ای از گراف‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۶,۲,۳ ([۲]) فرض کنید G یک گراف باشد،

الف) ۱- $s(G)=1$ اگر وتنها اگر، $\delta(G)\le 1$.

۲- $s(G)=2$ اگر وتنها اگر، $\delta(G)\ge 2$ و G شامل مجموعه‌ای مانند $S=\{u,v\}$ باشد، به‌طوریکه u و v مجاور هم باشند و $|\partial S|\le 2$.

۳- $s(G)=3$ اگر وتنها اگـر، $s(G)\notin\{1,2\}$ و G شـامل مجموعـه‌ای ماننـد $S=\{u,v,w\}$ باشـد بـه طوریکــه $|\partial S|\le 3$ و $G[S]$ بــه‌صــورت K_3 یــا $P_3=G[u,v,w]$ باشــد. البتــه بــرای مســیر P_3 شرط $|N(u)\cap\partial S|\le 2$ و $|N(w)\cap\partial S|\le 2$ باید برقرار باشد.

ب) $s(K_n)=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

ج) $s(C_n)=2$.

د) ۱- $s(P_m \Box P_n)=\min\{m,n,3\}$،

۲- $s(C_m \Box P_n)\le \min\{m,2n,6\}$،

۳- $s\left(C_3 \square C_3\right)=4, s\left(C_m \square C_n\right)=\min\{2m,2n,12\}$.

و) فرض کنید G گرافی با ماکزیمم درجه سه باشد. اگر G جنگل نباشد. فرض کنیـد g کمـر G باشـد. حال فرض کنید k برابر با g است، اگر G شامل حداکثر یک رأس از درجه دو باشد درغیر این‌صورت k برابر با تعداد رئوس در کوتاهترین مسیر بین دو رأس از درجه دو باشد. در این‌صورت داریم،

$$s(G)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } \delta(G)\le 1\text{،} \\ 2 & \text{اگر } k=2 \text{ یا } G \text{ شامل یکی از ایـن دو باشـد } K_4-e \text{ یا } K_3 \text{ با یک رأس از درجه دو،} \\ \max\{3,\min\{k,g-1\}\} & \text{اگر } G \text{ شامل یک } K_{2,3} \text{ القاء شده یا } C_g \text{ بـا یـک رأس درجه دو باشد،} \\ \min\{k,g\} & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

اثبات: الف) چون شرایط کافی تمام قسمت‌ها واضح است لذا کافی است شـرط لازم را اثبـات کنـیم. اگر $s(G)=i$ باشد آنگاه فوراً نتیجه می‌شود $|\partial S|\le i$. بنابراین (۱) و (۲) ثابت شد. اکنون فـرض کنیـد $S=\{u,v,w\}$ یک $s(G)-$مجموعه باشد. چون $G[S]$ همبند است، لذا $G[S]$، یا K_3 است به‌طوریکـه در مقابل سه مهاجم می‌تواند دفاع شود و یا $P_3=G[u,v,w]$، که در مقابل سه مهاجم می‌تواند دفاع شود با این شرط که یکی از این دو رأس انتها، تنها می‌تواند حداکثر دو مهاجم را دفاع کند.

ب) فرض کنید S یک $s(G)-$مجموعه باشد. چون S یک مجموعه امـن اسـت بنـابراین $|\partial S|\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ لـذا $s(K_n)\ge\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$. همچنین به آسانی دیـده مـی‌شـود مجموعـه‌ای شـامل $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ رأس از V تشـکیل یـک مجموعه امن می‌دهد. بنابراین اثبات کامل شد.

ج) از (الف۱) نتیجه می‌شود.

د) **۱**- اگر $\min\{m,n\} \le 2$ باشد آنگاه از (الف۱) یا (الف۲) نتیجه می‌شود. در غیر این‌صورت مطابق (الف۳) رأس گوشه‌ای و دو همسایه آن کوچکترین مجموعه امن را تشکیل می‌دهند.

۲- برای $C_m \square P_n$ هر یک از مجموعه رئوس زیر تشکیل مجموعه امن می‌دهند.

۱) رأس‌های واقع در انتهای مسیرها، به‌طوریکه تشکیل یک نسخه از C_m دهند،

۲) رأس‌های واقع در دو نسخه متوالی از P_n،

۳) رئوس واقع در انتهای چهار مسیر متوالی به اضافه رأس مجاور با رئوس میانی آن چهار تا رأس.

۲- اگر $m = n = 3$ باشد، آنگاه هر بلوک 2×2 از رئوس $C_3 \square C_3$ تشکیل یک مجموعه امن می‌دهند. در حالی‌که اگر $1 \le |S| \le 3$ باشد آنگاه داریم $|\partial S| > |S|$، که S یک مجموعه امن نخواهد بود. سرانجام برای $C_m \square C_n$ هر یک از مجموعه رئوس زیر تشکیل یک مجموعه امن می‌دهند.

۱) رأس های واقع بر دو نسخه متوالی از C_m،

۲) رأس های واقع بر دو نسخه متوالی از C_n،

۳) هر بلوک 4×4 از $C_m \square C_n$، با حذف رئوس گوشه‌ای آن.

و) برای اثبات $s(G) = 1$ و $s(G) = 2$ به‌ترتیب از (الف۱) و (الف۲) نتیجه می‌شود. بعلاوه هر یک زیر گراف‌های زیر تشکیل یک مجموعه امن می‌دهند،

۱) مسیری که رأس‌های انتهایی آن در G از درجه دو باشد،

۲) مسیری شامل $g-1$ رأس، مشمول در C_g به‌طوریکه یک رأس آن در G از درجه دو باشد، و بقیه رئوس آن در G از درجه سه باشد،

۳) هر دور در G.

بنابراین اندازه این زیرگراف‌ها یک کران بالا برای عدد امنیت گراف G هستند. اکنون فرض کنید S کوچکترین مجموعه امن باشد، به‌طوریکه $|S| \ge 3$، $diam(G[S]) \le g-3$ ($G[S]$، حداکثر $g-2$ رأس دارد) و $|S| < k$. آنگاه $G[S]$ یک درخت است و هیچ دو رأس در S، نمی‌تواند یک همسایه مشترک

در ∂S داشته باشد. لذا اگر v یک برگ از $G[S]$ به‌طوریکه شامل دو همسایه در G باشد، آنگاه $S-\{v\}$، کوچکترین مجموعه امن است پس تناقض است. بنابراین تمام برگ‌های $G[S]$ در G از درجه دو هستند، و این ایجاب می‌کند $|S|\leq k$، که تناقض دیگری است. پس تنها حالتی که باقی می‌ماند این است که $G[S]$ یک مسیری با $g-1$ رأس و $k\geq g$ باشد. چون S امن است، لذا $G[S]$ یا مسیری شامل $g-1$ رأس، مشمول در C_g به‌طوریکه دقیقاً یک رأس آن در G از درجه دو و بقیه رئوس آن در G از درجه سه باشد، یا اینکه دو برگ از $G[S]$ باید دو همسایه مشترک u و w در ∂S داشته باشد. و این $g=4$ و $|S|=3$ را ایجاب می‌کند. لذا $S\bigcup\{u,w\}$ یک $K_{2,3}$ تولید می‌کند.■

از قسمت پنجم گزاره قبل نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۷,۲,۳ ([۲]) اگر G، 3−منتظم با کمر g باشد آنگاه،

$$s(G)=\begin{cases}2 & \text{اگر } G \text{ شامل } K_4-e \text{ باشد ،}\\ 3 & \text{اگر } G \text{ شامل } K_{2,3} \text{ باشد،}\\ g & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$$

۲,۲,۳ ویژگی‌های اساسی مجموعه امن

در این بخش سه ویژگی از مجموعه‌های امن را معرفی می‌کنیم. ابتدا کار خود را با $\kappa(G[S])$، که عدد همبندی زیرگراف تولید شده توسط مجموعه امن $S\subseteq V$ است شروع می‌کنیم. در اثبات قضیه زیر این نکته را بکار خواهیم برد که برای هر $X\subseteq S$، $S-N[X]\neq\phi$ اگر وتنها اگر، $\partial(X)\bigcap S$ یک مجموعه ناهمبندساز $G[S]$ باشد.

قضیه ۸,۲,۳ ([۲]) فرض کنید $G=(V,E)$، مجموعه $S\subseteq V$، امن است اگر وتنها اگر $|S|\geq|N[S]-S|$ و برای هر $X\subseteq S$، به‌طوریکه $|X|\leq|N[X]-S|-1-\kappa(G[S])$، S–امن باشد.

اثبات: اگر S امن باشد آنگاه S، S–امن است، لذا گزاره ۴,۲,۳ قسمت (ج) تضمین می‌کند که $|S|\geq|N[S]-S|$. بنا به گزاره ۴,۲,۳ قسمت (د) نتیجه می‌شود که هر $X\subseteq S$ ، S–امن است به‌ویژه X هایی که در نامساوی $|X|\leq|N[X]-S|-1-\kappa(G[S])$ صدق می‌کنند.

اکنون فرض کنید $|S|\geq|N[S]-S|$، و هر $X\subseteq S$ ،که در نامساوی $|X|\leq|N[X]-S|-1-\kappa(G[S])$ صدق می‌کند S-امن باشد. از طریق برهان خلف عمل می‌کنیم. فرض کنید $X=\{x_1,\cdots,x_k\}\subseteq S$ کوچکترین مجموعه‌ای باشد که S-امن نباشد. بنابراین $k=|X|\geq|N[X]-S|-\kappa(G[S])$. فرض کنید $A=\{A_1,\cdots,A_k\}$ یک حمله دلخواه روی X باشد، یعنی برای هر $1\leq i\leq k$، $A_i\subseteq N[x_i]-S$. همچنین فرض کنید X در مقابل A قابل دفاع نباشد. بنابر گزاره ۴,۲,۳ قسمت (الف) می‌توانیم فرض کنیم که A یک افرازی از $N[X]-S$ است. بعلاوه هیچ زیرمجموعه‌ای از A تهی نیست، زیرا در غیر این‌صورت یک زیرمجموعه سره از X توسط A حمله می‌شود. چون این مجموعه از X کوچکتر است لذا بنا به فرض خلف این مجموعه قابل دفاع است.(بنا به فرض خلف X کوچکترین مجموعه‌ای است که S–امن نیست) بنابراین بنا به گزاره ۴,۲,۳ قسمت (ب)، X باید در مقابل حمله A قابل دفاع باشد. برای $1\leq i\leq|X|$ فرض کنید $a_i=|A_i|-1$ و همچنین فرض کنید برای هر $i<|X|$، $a_i\geq a_{i+1}$. فرض کنید r بزرگترین عدد صحیح باشد به‌طوریکه $a_r>0$ و $t=a_1+a_2+\cdots+a_r$. بنابراین $r\leq t$. همچنین داریم $|N[X]-S|=t+|X|$، که نتیجه می‌دهد $r\leq t\leq\kappa(G[S])$.

حال فرض کنید $t>|\partial(X)\cap S|$، بنابراین $\partial(X)\cap S$ یک مجموعه ناهمبندساز برای $G[S]$ نیست. پس بنا به نکته قبل از قضیه داریم $(\partial(X)\cap S)\cup X=S$ و این ایجاب می‌کندکه $|\partial(X)\cap S|=|S|-|X|$

با توضیحات فوق داریم،

$$t=|N[X]-S|-|X|\leq|N[S]-S|-|X|\leq|S|-|X|=|\partial(X)\cap S|<t$$

که یک تناقض است. بنابراین $\partial(X)\cap S$ شامل حداقل t رأس است. اکنون فرض کنید Z مجموعه‌ای از t رأس در $\partial(X)\cap S$ باشد. حال قضیه منگر که در قضیه فصل اول مطرح شده است را بکار می‌بریم. این قضیه نشان می‌دهد که t مسیر مجزا درونی وجود دارد که از t رأس متمایز در Z شروع می‌شود و برای $1\le i\le r$، a_i تا از این مسیرها به x_i در X ختم می‌شوند. حال دفاع D را به‌صورت زیر می‌سازیم.

در ابتدا فرض کنید برای $1\le i\le k$، $D_i=\{x_i\}$. پس برای هر $1\le i\le r$، هر x_i دارای a_i مسیر مجزای درونی است که از x_i شروع می‌شود و به a_i رأس متمایز از Z ختم می‌شود. برای هر یک از این مسیرها:

(۱) w را مسیر همسایه x_i بگذارید و w را به D_i اضافه کنید،

(۲) در صورتیکه $w\in X$ باشد: اگر $w=x_j$، $j>r$، آنگاه هم D_j و هم w را رأس بعدی مسیر بگذارید.

ساختار $D=\{D_1,\cdots,D_k\}$ دفاعی است که از حمله A در امان است. از اینرو هر حمله روی X می‌تواند دفاع شود و X، $S-$امن است و این با فرض اینکه X قابل دفاع نیست در تناقض است بنابراین S امن است.■

نتیجه ۹،۲،۳ ([۲]) برای هر مجموعه S، اگر $|S|\ge|N[S]-S|$ و برای هر $X\subseteq S$، $\kappa(G[S])\ge|N[X]-S|-|X|$، آنگاه S امن است.

در ادامه یک دسته‌بندی برای یک مجموعه ارائه می‌دهیم تا امن باشد. ابتدا یک ویژگی برای S، تا $S'-$امن باشد را بدست می‌آوریم و سپس با جایگزینی S به جای S' نتیجه حاصل می‌شود. فرض کنید $S\subseteq S'\subseteq V$. برای یک حمله دلخواه A روی S توسط رئوس $V-S$، فرض کنید a_x، برابر با تعداد رئوسی از $V-S'$، که به رأس $x\in S$ حمله می‌کنند. برای $x\in S'-S$ فرض می‌کنیم a_x برابر صفر باشد. به‌طور مشابه، برای دفاع دلخواه D فرض کنید b_x، برابر با تعداد رئوسی از S' در حالیکه

رأس $x \in S'$ را حمایت می‌کنند باشد. «بهترین دفاع » از حمله A دفاعی است به‌طوریکه $\sum(a_x - b_x)$ در میان تمام مدافعان A کمترین باشد. البته این شرط را هم اضافه می‌کنیم که در مجموع فوق آن xهایی محاسبه می‌شوند که $a_x > b_x$ باشد. حمله A قابل دفاع است اگر وتنها اگر، دفاعی موجود باشد که مجموع فوق صفر شود. توجه کنید که بهترین دفاع $a_x \geq b_x$ را برای تمام رئوس واقع در S ایجاب نمی‌کند. برای بهترین دفاع D، بهترین دفاع دیگری مانند D'، با توجه به یکی از دو تبدیل زیر می‌توان نتیجه گرفت. در این تبدیل منظور از رأس i رأسی است که $b_i > a_i$ و $j \in S'$ رأسی است که با رأس i همسایه است.

۱) اگر j مدافع i باشد،آنگاه فرض کنید j مدافع خودش باشد.

۲) اگر i مدافع خودش باشد و j رأسی غیر از i را حمایت کند آنگاه فرض کنید i مدافع j باشد. مشاهده می‌کنیم که در D'، $b'_i = b_i - 1,\ b'_j = b_j + 1$ و برای هر $x \in S' - \{i, j\}$، $b'_x = b_x$. v را به‌عنوان مجموعه‌ای مرکب از بهترین دفاع D و دفاع‌هایی که از D با توجه به دو تبدیل فوق بدست می‌آید تعریف می‌کنیم(البته v شامل نتایج D با توجه به دو تبدیل فوق می‌باشد).

توجه کنید اگر $b_x \geq a_x$ در دفاعی واقع در v برقرار باشد، آنگاه $b_x \geq a_x$ در تمام دفاع‌های واقع در v برقرار است. فرض کنید $V^+ \subseteq S'$، که برابر است با مجموعه رئوسی مانند x به‌طوریکه شرط $b_x > a_x$ حداقل در یک دفاع واقع در v برقرار باشد. سرانجام فرض کنید $X = S' - V^+$.

گزاره ۱۰,۲,۳ ([۲]) برای هر $x \in X$، مجموعه رئوسی که x را حمایت می‌کنند و رأسی که توسط x دفاع می‌شود در هر دفاع واقع در v یکسان هستند.

اثبات: اگر x در یکی از دو تبدیل فوق قرار گیرد آنگاه x باید متناظر با رأس j باشد چون $i \in V^+$ است. بنابراین بعد از تبدیل داریم $b'_x > b_x$. اگر $b_x - a_x = 0$ باشد آنگاه با توجه به تبدیل باید $x \in V^+$. اگر $b_x - a_x < 0$، آنگاه باید بهترین دفاع بهتر تولید کند ولی این دفاع از اولی بهتر نیست. بنابراین هر دو انتخاب منجر به تناقض می‌شود.■

گزار ۱۰,۲,۳ در اثبات گزاره بعد نقش اساسی دارد.

گزاره ۱۱,۲,۳ ([۲]) هر رأس $x \in N[X] \cap S'$، از یک رأس X در هر دفاع واقع در v حمایت می‌کند.

اثبات: ابتدا $x \in X$ را در نظر می‌گیریم. و فرض می‌کنیم x از رأس $y \in V^+$ در دفاع ابتدایی D حمایت کند. از گزاره قبل داریم x از y در هر دفاع واقع در v حمایت می‌کند. همچنین چون $y \in V^+$، یک دفاع در v موجود است به‌طوریکه $b_y > a_y$. بنابراین با بکارگیری تبدیل(۱) با شرط $j = x$ و $i = y$، b_x افزایش می‌یابد. و این با گزاره قبل در تناقض است. بنابراین x یک رأس در X را در هر دفاع واقع در v حمایت می‌کند.

حال فرض کنید $x \in (N[X] \cap S') - X \subseteq V^+$ به‌طوریکه از رأس $y \in V^+$ حمایت کند. در نتیجه x شامل یک همسایه مانند $x' \in X$ است به‌طوریکه بنا به پاراگراف قبلی از x حمایت نمی‌کند. ما می‌توانیم فرض کنیم $b_y > a_y$. چون اگر $b_y = a_y$، آنگاه دنباله‌ای از یک یا بیشتر از دو تبدیل فوق موجود است (به‌طوریکه از دفاع ابتدایی شروع می‌شود) که منجر به $b_y > a_y$ می‌شود، با این شرط که x هنوز از y حمایت می‌کند. اکنون با استفاده از تبدیل(۱) با شرط $j = x$ و $i = y$، نتیجه می‌شود که x از خودش حمایت می‌کند. چون قبل از تبدیل $b_x \geq a_x$، لذا بعد از تبدیل داریم $b_x > a_x$. حال با بکارگیری تبدیل (۲) با شرط $j = x'$ و $i = x$، $b_{x'}$ افزایش می‌یابد،که این با گزاره قبل در تناقض است. پس باید x از یک رأس در X در هر دفاع واقع در v حمایت کند.■

از گزاره ۱۱,۲,۳ داریم اگر X از یک حمله $N[S] - S'$ قابل دفاع نباشد، آنگاه هر رأس واقع در $N[X] \cap S'$، از یک رأس در X حمایت می‌کند. از پاراگراف قبل گزاره ۱۰,۲,۳ داریم $X = S' - V^+$ که می‌تواند شامل رئوسی در $S' - S$ باشد. فرض می‌کنیم x چنین رأسی باشد. روی رأس x حمله‌ای

صورت نمی‌گیرد یعنی $a_x=0$ و چون $x\notin V^+$ لذا باید برای x داشته باشیم $b_x=0$. در نتیجه هر یک از این رأس‌ها از یک رأس در $X\cap S$ دفاع می‌کند. بنابراین X را فقط به آن رأس‌هایی از X که در S نیز هستند محدود می‌کنیم. چون هیچ رأسی خارج از مجموعه $N[X]\cap S'$ نمی‌تواند رأسی از X را دفاع کند، لذا برای هر $x\in X$ داریم،

$$\sum b_x=|N[X]\cap S'|<\sum a_x\leq|N[X]-S'|.$$

بنابراین $X\subseteq S$ وجود دارد به‌طوریکه $|N[X]\cap S'|<|N[X]-S'|$. این مطلب را در قضیه زیر مورد استفاده قرار می‌دهیم.

قضیه ۱۲,۲,۳ ([۲]) مجموعه $S\subseteq S'\subseteq V$، S'-امن است اگر وتنها اگر برای هر $X\subseteq S$، داشته باشیم

$$|N[X]\cap S'|\geq|N[X]-S'|.$$

اثبات: شرط لازم فوراً از گزاره ۴,۲,۳، قسمت‌های (ج) و (د) نتیجه می‌شود. هرگاه S، S'-امن نباشد آنگاه یک حمله‌ای موجود است به‌طوریکه قابل دفاع نیست. گزاره ۱۱,۲,۳ و بحث بالا نشان می‌دهند که $X\subseteq S$ موجود است به‌طوریکه $|N[X]\cap S'|<|N[X]-S'|$.■

با تعویض S با S' در قضیه ۱۲,۲,۳، قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۱۳,۲,۳ ([۲]) مجموعه $S\subseteq V$، امن است اگر وتنها اگر برای هر $X\subseteq S$ داشته باشیم،

$$|N[X]\cap S|\geq|N[X]-S|.$$

قضیه ۱۴,۲,۳ ([۲]) مجموعه $S\subseteq V$، امن است اگر وتنها اگر $|S|\geq|N[S]-S|$ و برای هر $s_i\in S$، $S-\{s_i\}$، S-امن باشد.

اثبـــات: شــرط لازم فــوراً از گــزاره ۴،۲،۳، قســمت‌هــای (ج) و (د) نتیجــه مــی‌شــود. فــرض کنید، $|S|\geq|N[S]-S|$ و برای هر $s_i \in S$، $S-\{s_i\}$، $S-$امن باشد. فرض کنید A یک حمله دلخواه روی S باشد. اگر بـرای هـر $s_i \in S$، $A_i \neq \phi$ باشـد، آنگـاه $|S|=|N[S]-S|$ و هـر A_i دقیقـاً یـک رأس دارد و دفاع D با فرض $D_i=\{s_i\}$ برای $1\leq i\leq k$ می‌تواند ساخته شود. بنـابراین مـی‌تـوانیم فـرض کنـیم کـه یک $s_i \in S$ موجود است بـه‌طوریکـه $A_i=\phi$. پـس $A-\{A_i\}$ یـک حملـه روی $S-\{s_i\}$ اسـت. چـون $S-\{s_i\}$، $S-$امن است، آنگاه دفاعی مانند D' موجود است به‌طوریکه برای هر $j\neq i$، $|D'_j|\geq|A_j|$. پس $D=D'\cup D_i$ با شرط $D_i=\phi$ یک دفاع روی S برای حمله A است. لذا هر حمله روی S می‌تواند قابل دفاع باشد.■

۳،۳ کران‌هایی برای عدد امنیت

۱،۳،۳ کران پایین برای عدد امنیت

همان‌طور که در فصل اول گفتیم دنباله درجات از G با n رأس بـه‌صـورت $\delta(G)=d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_n$ است. برای راحتی کار رأسی با درجه d_i را با v_i نمایش خواهیم داد. با استفاده از این مطلب می‌توانیم بعضی از کران‌های پایین $s(G)$ را بدست بیاوریم.

قضیه ۱،۳،۳ ([۵]) فرض کنید $G=(V,E)$، گرافی با دنباله درجـات $\delta(G)=d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_n$ باشد، آنگاه

$$s(G)\geq\left\lceil\frac{d_{s(G)}+1}{2}\right\rceil.$$

اثبات: فرض می‌کنیم $S \subseteq V$، مینیمم مجموعه امن در G باشد. همچنین v_i رأسی با بزرگترین اندیس در S باشد. بنابراین $i \geq s(G)$. چون S امن است، پس v_i باید حداقل $\frac{d_i - 1}{2}$ همسایه در S داشته باشد. بنابراین $i \geq s(G) \geq \frac{d_i + 1}{2} \geq \frac{d_{S(G)} + 1}{2}$.■

فرض کنید $i = \left\lceil \frac{d_1 + 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\delta(G) + 1}{2} \right\rceil$. پس هر مجموعه امن باید شامل حداقل i رأس باشد. بنابراین رأس v_i در S یا رأسی مانند v_j در S موجود است به‌طوریکه $j > i$. در هر دو حالت داریم $s(G) \geq \left\lceil \frac{d_i + 1}{2} \right\rceil$. اگر $i < \left\lceil \frac{d_i + 1}{2} \right\rceil$ این فرآیند را تکرار می‌کنیم. این استنتاج در نتیجه زیر خلاصه می‌شود.

نتیجه ۲,۳,۳ ([۵]) فرض کنید G، یک گراف با دنباله درجات $\delta(G) = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ باشد، آنگاه داریم، $s(G) \geq \min\left\{ i :\ i \geq \left\lceil \frac{d_i + 1}{2} \right\rceil \right\}$.

اثبات: فرض کنید $k = \min\left\{ i :\ i \geq \left\lceil \frac{d_i + 1}{2} \right\rceil \right\}$ و همچنین $s(G) < k$. بنابراین از تعریف k داریم $s(G) < \left\lceil \frac{d_{S(G)} + 1}{2} \right\rceil$ و این با قضیه ۱,۳,۳ در تناقض است.■

نتیجه ۳,۳,۳ ([۵]) فرض کنید G گرافی با مینیمم درجه $\delta(G)$ باشد.آنگاه داریم،

$$s(G) \geq \left\lceil \frac{\delta(G) + 1}{2} \right\rceil.$$

با توجه به کران پایین نتیجه قبل، می‌توان بعضی از گراف‌ها را مشخص کرد.

گزاره ۴،۳،۳ ([۵]) فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی با مینیمم درجه $\delta(G)$ باشد. در این‌صورت $s(G)=\left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil$ اگر وتنها اگر زیرمجموعه‌ای مانند $S \subseteq V$ موجود باشد به‌طوریکه

(۱) S یک $K_{\left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil}$ تولید کند،

(۲) $|N[S]-S| \le \left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil$.

اثبات: فرض کنید $S \subseteq V$ در دو حالت فوق صدق کند. برای هر $X \subseteq S$، داریم

$$|N[X]\cap S| = |S| = \left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil \ge |N[S]-S| \ge |N[X]-S|$$

و لذا S امن است. اکنون فرض کنید $s(G)=\left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil$ و همچنین S، $s(G)$–مجموعه و $v \in S$ باشد. بنابراین $|N[v]\cap S| = 1+\deg_{G[S]}(v)$ و $|N[v]-S| = |N[v]\cap \bar{S}| = N(v)-\deg_{G[S]}(v) \ge \delta(G)-\deg_{G[S]}(v)$. چون $v \in S$ لذا داریم $1+\deg_{G[S]}(v) \ge \delta(G)-\deg_{G[S]}(v)$. نامساوی آخری، $\deg_{G[S]}(v) \ge \left\lceil \frac{\delta(G)-1}{2} \right\rceil$ را ایجاب می‌کند. بنابراین داریم $|N[v]\cap S| = \left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil$ و این تساوی بدین معنی است که S یک گراف کامل تولید می‌کند. بعلاوه چون S امن است، داریم $|N[S]-S| \le \left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil = |S| = |N[S]\cap S|$.■

گزاره ۵،۳،۳ ([۵]) فرض کنید $G=(V,E)$، یک گراف از مرتبه n باشد. آنگاه $s(G) \ge \max\left\lceil \frac{|N[S]|}{2} \right\rceil$، به‌طوریکه ماکزیمم روی تمام $s(G)$–مجموعه‌ها گرفته می‌شود.

اثبات: فرض کنید S مینیمم مجموعه امن باشد. توجه کنید S، $|N[S]|$ رأس را غلبه می‌کند. چون S امن است لذا $\left\lceil \frac{|N[S]|}{2} \right\rceil \le |S|$، بنابراین نتیجه حاصل می‌شود.■

نتیجه ۶,۳,۳ ([۵]) فرض کنید G یک گراف از مرتبه n باشد. اگر G شامل کوچکترین مجموعه امن غالب باشد آنگاه

$$s(G) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

۲,۳,۳ کران بالا برای عدد امنیت

نخستین قضیه این زیربخش مربوط به مجموعه‌های غالب مینیمال، که مجموعه امن هستند می‌باشد.

قضیه ۷,۳,۳ ([۵]) فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی از مرتبه $n \geq 2$ باشد. اگر G شامل مجموعه امن باشد به‌طوریکه مجموعه غالب مینیمال هم باشد، آنگاه داریم $s(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

اثبات: فرض کنید S یک مجموعه امن از G باشد به‌طوریکه مجموعه غالب مینیمال نیز باشد. بنابراین هر رأس $x \in S$ یک همسایه خصوصی مانند $y_x \in N[x]$ دارد به‌طوریکه $N[y_x] \cap S = \{x\}$. اگر رأسی مانند x، $y_x = x$ باشد، آنگاه x هیچ همسایه‌ای در S ندارد و چون S امن است حداکثر یک همسایه در $V-S$ دارد. این ایجاب می‌کند که x از درجه حداکثر یک در S باشد. بنابراین $s(G)=1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. اگر چنین x ی موجود نباشد آنگاه هر رأس در S شامل یک همسایه متمایز در $V-S$ است، بنابراین $|S| \leq |V-S| = n-|S|$. از اینرو داریم $s(G) \leq |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.■

ترکیب نتیجه ۶,۳,۳ و قضیه ۷,۳,۳ نشان می‌دهد که اگر S، هم مینیمم مجموعه امن و هم مینیمم مجموعه غالب از G باشد آنگاه n باید زوج باشد و $s(G)=\frac{n}{2}$. و این برای گراف‌های همبند تنها

اگر $G\cong K_2$ یا $G\cong C_4$ باشد اتفاق می‌افتد. این از حقیقتی که عدد غلبه‌ای $\gamma(G)=\frac{n}{2}$ است اگر وتنها اگر $G\cong C_4$ یا G یک هاله باشد نتیجه می‌شود.

در قضیه بعد با بکارگیری دنباله درجه، یک کران بالا برای $s(G)$ حاصل می‌شود.

قضیه ۸,۳,۳ ([۵]) فرض کنید $G=(V,E)$، گرافی با دنباله درجه $\delta(G)=d_1\le d_2\le\cdots\le d_n$ باشد، آنگاه $s(G)\le n-\left\lceil\frac{d_{k+1}}{2}\right\rceil$، به‌طوریکه $k=\max\left\{i:\ i\le\left\lceil\frac{d_{i+1}}{2}\right\rceil\right\}$.

اثبات: اگر $d_1=0$، آنگاه برای هر اندیس i داریم $s(G)=1\le n-\left\lceil\frac{d_i}{2}\right\rceil$. حال فرض می‌کنیم $d_1>0$، مقدار k خوش تعریف است چون $1\le\left\lceil\frac{d_2}{2}\right\rceil$ و برای هر $i\ge\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$، $i>\left\lceil\frac{d_{i+1}}{2}\right\rceil$. لذا داریم، $1\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. از تعریف k داریم، $\left\lceil\frac{d_{k+2}}{2}\right\rceil\le k\le\left\lceil\frac{d_{k+1}}{2}\right\rceil\le\left\lceil\frac{d_{k+2}}{2}\right\rceil$. بنابراین برای $k+2\le j\le n$ داریم، $k=\left\lceil\frac{d_{k+2}}{2}\right\rceil\le\left\lceil\frac{d_j}{2}\right\rceil$ و بعلاوه k بزرگترین اندیسی است که دارای این ویژگی است. فرض کنید $S=\{v_{k+1},v_{k+2},\cdots,v_n\}$. برای هر زیرمجموعه $X\subseteq S$ داریم، $|N[X]-S|\le|V-S|=k$ و $|N[X]\cap S|\ge 1+d_{k+1}-k=1+d_{k+1}-\left\lceil\frac{d_{k+1}}{2}\right\rceil=1+\left\lfloor\frac{d_{k+1}}{2}\right\rfloor\ge\left\lceil\frac{d_{k+1}}{2}\right\rceil=k$، لذا S امن است و $s(G)\le|S|=n-k$. ■

از قضیه فوق یک کران بالا بدست می‌آید که مشابه کران پایین قضیه ۱,۳,۳ است.

نتیجه ۹,۳,۳ ([۵]) فرض کنید $G=(V,E)$، گرافی با دنباله درجه $\delta(G)=d_1\le d_2\le\cdots\le d_n$ باشد، آنگاه $s(G)\le n-\left\lceil\frac{d_{n-S(G)+2}}{2}\right\rceil$.

اثبـــات: فــرض کنیــد $k=\max\left\{i:\ i\le\left\lceil\frac{d_{i+1}}{2}\right\rceil\right\}$. بنــا بــه قضــیه قبــل داریــم، $s(G)\le n-k$.

چون $n-s(G)+1>k$ لذا بنا به تعریف k داریم $n-s(G)+1>\left\lceil\frac{d_{n-S(G)+2}}{2}\right\rceil$، بنابراین نتیجه حاصل می‌شود.■

گزاره ۱۰،۳،۳ ([۵]) فرض کنید G، یک گراف از مرتبه n، با مینیمم درجه $\delta(G)$ باشد. آنگاه هر مجموعه امن بحرانی حداکثر از اندازه $n-\left\lceil\frac{\delta(G)}{2}\right\rceil$ است.

اثبـــات: فــرض کنیــد S مجموعــه‌ای از $n-\left\lceil\frac{\delta(G)}{2}\right\rceil$ رأس در G باشــد. فــرض کنیــد $X\subseteq S$.

بنابراین $|N[X]-S|\le\left\lceil\frac{\delta(G)}{2}\right\rceil\le\left\lfloor\frac{\delta(G)}{2}\right\rfloor+1\le|N[X]\cap S|$ و لذا S امن است.■

کران فوق در حالت خاص می‌تواند بهبود یابد لذا قضیه بعد را داریم.

قضیه ۱۱،۳،۳ ([۵]) فرض کنید G، یک گراف دو بخشی از مرتبــه n، بـا مینــیمم درجــه $\delta(G)$ باشد. آنگاه داریم $s(G)\le n-\delta(G)$.

اثبات: بنا بر تعریف مجموعه امــن، اگــر $s(G)>n-\delta(G)$ آنگـاه بـرای هـر مجموعـه W از $\delta(G)$ رأس، مجموعه‌ای مانند $X\subseteq Z=V-W$ وجود دارد به‌طوریکـه $|N[X]\cap Z|<|N[X]-Z|$. فـرض کنیـد V_1 و V_2 دو بخش از G باشند، همچنین فـرض کنیـد $W=W_1\cup W_2$ مجموعـه‌ای از $\delta(G)$ رأس باشـد بـه‌طوریکــه بــرای هــر $i=1,2$، $W_i\subseteq V_i$ و $|W_i|\ge\left\lfloor\frac{\delta(G)}{2}\right\rfloor$. فــرض کنیــد $X\subseteq Z$ مجموعــه‌ای باشــد بــه‌طوریکه $|N[X]\cap Z|<|N[X]-Z|$. اگر برای هر i، $X\subseteq V_i$ آنگاه

$$|W_{3-i}|\ge|N[X]-Z|>|N[X]\cap Z|\ge|X|+\delta(G)-|W_{3-i}|.$$

بنابراین $|W_{3-i}|\geq 1+\left\lceil\frac{\delta(G)}{2}\right\rceil$، که این تناقض است چون $|W_i|\leq\left\lceil\frac{\delta(G)}{2}\right\rceil$. بنابراین X باید شامل رئوسی از هر دو بخش باشد. در این حالت داریم

$$\delta(G)=|W|\geq|N[X]-Z|>|N[X]\cap Z|\geq\delta(G)-|W_1|+\delta(G)-|W_2|=\delta(G)$$

که باز هم تناقض است.■

۴,۳ عدد امنیت بالا

همان‌طور که در مطالب قبلی گفتیم $s(G)$ برابر با کوچکترین مجموعه امن بحرانی در G است. اکنون $S(G)$ به عنوان عدد امنیت بالای G تعریف می‌شود، که برابر با اندازه بزرگترین مجموعه امن بحرانی در G است. همچنین $S(n)$، ماکزیمم مقدار $S(G)$ روی تمام گراف‌های G از مرتبه n گرفته می‌باشد. بنا به گزاره ۱۰,۳,۳ داریم $S(n)\leq n-\left\lceil\frac{\delta(G)}{2}\right\rceil$. نشان می‌دهیم اگر $\delta(G)\geq 4$، آنگاه این مقدار دست یافتنی است.

گزاره ۱,۴,۳ ([۵]) گراف G، از مرتبه n با مینیمم درجه $\delta(G)\geq 4$ موجود است به‌طوریکه $S(G)=n-\left\lceil\frac{\delta(G)}{2}\right\rceil$.

اثبات: گراف G را به‌صورت زیر می‌سازیم. با یک گراف همبند منتظم H از درجه $\left\lfloor\frac{\delta(G)}{2}\right\rfloor$ شروع می‌کنیم. تعریف می‌کنیم $G=H+\left\lceil\frac{\delta(G)}{2}\right\rceil K_1$. فرض کنید S مجموعه رئوس H باشد. توجه کنید $|S|=n-\left\lceil\frac{\delta(G)}{2}\right\rceil$. بنابراین S امن است. باید نشان دهیم که بحرانی هم می‌باشد. فرض کنید X یک زیرمجموعه سره از S باشد. پس X حداقل یک رأس مانند x دارد که با رأسی از $S-X$ مجاور است. بنابراین داریم $|N[x]\cap X|\leq 1+\left(\left\lfloor\frac{\delta(G)}{2}\right\rfloor-1\right)<1+\left\lceil\frac{\delta(G)}{2}\right\rceil\leq|N[x]-X|$. پس X امن نیست و لذا S باید بحرانی باشد.■

به‌عنوان مثال وقتی $\delta(G)=4$ و $\delta(G)=5$، آنگـاه بنـا بـه اثبـات گـزاره ۱,۴,۳، بـه‌ترتیـب $C_{n-2}+2K_1$ و $C_{n-3}+3K_1$ بدست می‌آید.

فصل چهارم

اتحاد باز در گراف

۱,۴ مقدمه

همان‌طور که در فصل دوم گفتیم اتحاد در گراف اولین بار توسط استیفان هدیتنمی[۹] و همکاران او در مقاله‌ای تحت عنوان اتحاد در گراف ارائه شد[۱۱]. در بخش آخر آن مقاله چهار مسأله باز بیان شد که به ترتیب عبارتند از اتحاد تهاجمی، اتحاد سراسری، اتحاد وزن‌دار و اتحاد باز. روی سه مورد اول تاکنون کار شده است که در فصل دوم کارهای انجام شده را بیان کردیم. در این فصل ما اتحاد باز را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و بسیاری از خواص این مفهوم را استخراج کرده، سپس روی کران‌های آن بحث می‌کنیم.

۲,۴ اتحاد دفاعی باز

تعریف ۱,۲,۴ یک اتحاد دفاعی را باز می‌گوئیم اگر به‌طورکامل برحسب همسایگی‌های باز تعریف شود. یعنی زیرمجموعه $S \subseteq V$، اتحاد دفاعی باز است هرگاه برای هر $v \in S$ داشته باشیم،

$$|N(v) \cap S| \geq |N(v) \cap (V-S)| \qquad (1-4)$$

همچنین یک اتحاد دفاعی باز را قوی نامیم هرگاه برای هر $v \in S$ داشته باشیم،

$$|N(v) \cap S| > |N(v) \cap (V-S)|. \qquad (2-4)$$

به‌عبارت دیگر زیر مجموعه $S \subseteq V$ یک اتحاد دفاعی باز قوی است اگر برای هر $v \in S$،

$$\deg_S(v) \geq \deg_{V-S}(v) + 1 \qquad (3-4)$$

و یا به‌طور معادل داشته باشیم،

$$2\deg_S(v) \geq \deg(v) + 1. \qquad (4-4)$$

اتحاد دفاعی باز S بحرانی نامیده می‌شود اگر هیچ زیرمجموعه سره از S یک اتحاد دفاعی باز نباشد.

[۹] Stephen Hedetniemi

برای هرگراف G، کلاس‌هایی از اتحاد دفاعی باز بحرانی به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$\mathrm{A}_t(G)=\{S:$ باشد G یک اتحاد دفاعی باز بحرانی در $S\}$

$\hat{\mathrm{A}}_t(G)=\{S:$ باشد G یک اتحاد دفاعی باز قوی بحرانی در $S\}$

با توجه به کلاس‌های فوق مقادیر زیر را داریم،

$a_t(G)=\min\{|S| : S\in \mathrm{A}_t(G)\}$ (عدد اتحاد دفاعی باز G)

$\hat{a}_t(G)=\min\{|S| : S\in \hat{\mathrm{A}}_t(G)\}$ (عدد اتحاد دفاعی باز قوی G)

نامساوی زیر به آسانی از تعاریف فوق نتیجه می‌شود.

$$a_t(G)\le \hat{a}_t(G). \qquad (5-4)$$

تعریف ۲,۲,۴ اگر S یک اتحاد دفاعی باز قوی بحرانی از گراف G باشد و $|S|=\hat{a}_t(G)$ آنگاه S یک $\hat{a}_t(G)$–مجموعه از G است.

در گراف شکل۱,۴ رئوس سفید نشان دهنده اتحاد دفاعی باز و اتحاد دفاعی باز قوی می‌باشند.

$\hat{a}_t(W_4)=5$ (ب) $\qquad$ $a_t(W_4)=3$ (الف)

شکل۱,۴

۳,۴ ویژگی‌های اتحاد دفاعی باز

با توجه به تعاریف بخش قبل و بخش ۲,۲ اتحاد دفاعی باز و اتحاد دفاعی قوی با هم برابرند. بنابراین گزاره بعد نتیجه می‌شود.

گزاره ۱،۳،۴ ([۱۹]) برای هرگراف G، داریم $a_t(G)=\hat{a}(G)$.

گزاره ۲،۳،۴ ([۱۵]) برای هر اتحاد دفاعی باز قوی بحرانی S در گراف G، $G[S]$ همبند است.

هم‌چنین بنا به تعریف اتحاد دفاعی باز قوی داریم،

گزاره ۳،۳،۴ ([۱۵]) فرض کنید S یک $\hat{a}_t(G)$−مجموعه از گراف G و $v\in S$ باشد. اگر $\deg_S(v)=1$ آنگاه $\deg(v)=1$.

توجه کنید برای هر گراف G روی n رأس داریم $2\le \hat{a}_t(G)\le n$. در قضیه زیر تمام گراف‌هایی از مرتبه n که شامل عدد اتحاد دفاعی باز قوی n هستند را مشخص می‌کنیم. برای هر عدد صحیح n فرض می‌کنیم ψ خانواده‌ای از گراف‌های همبند از مرتبه n باشد به‌طوریکه $G\in\psi$ اگر وتنها اگر یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد

۱- G مسیری به طول n باشد،

۲- G دوری به طول n باشد،

۳- G شامل دو دور از مرتبه m و $n-m$، ($3\le m\le n-3$) است به‌طوریکه این دو دور تنها در یک رأس مشترک هستند.

قضیه ۴،۳،۴ ([۱۵]) فرض کنید G یک گراف همبند با n رأس باشد. $\hat{a}_t(G)=n$، اگر وتنها اگر $G\in\psi$.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم $\hat{a}_t(C_n)=\hat{a}_t(P_n)=n$. فرض می‌کنیم $\hat{a}_t(P_n)<n$ و S یک $\hat{a}_t(P_n)$−مجموعه باشد. چون $G[S]$ همبند است لذا $G[S]$ مسیر است. فرض می‌کنیم v رأسی از S باشد، به‌طوریکه

$\deg_{G[S]}(v)=1$. بنابر گزاره ۳،۳،۴، $\deg(v)=1$. لذا $G[S]=P_n$ و این یک تناقض است، پس $\hat{a}_t(P_n)=n$. به‌طور مشابه $\hat{a}_t(C_n)=n$. اکنون فرض می‌کنیم $G\in\psi-\{P_n,C_n\}$. فرض کنید S یک $a_t(G)$-مجموعه باشد. زیرگراف القایی $G[S]$ را در نظر بگیرید. این گراف القایی، رأسی از درجه یک ندارد. بنابراین $G[S]$ دارای کوچکترین درجه حداقل دو می‌باشد. لذا باید شامل حداقل یک دور باشد. تنها زیرگراف‌های القایی از G که درجه حداقل دو دارند C_m و C_{n-m} و یا خود G است. حال نشان می‌دهیم C_m و C_{n-m} تشکیل یک اتحاد دفاعی باز قوی نمی‌دهند. فرض می‌کنیم $G[S]=C_m$ باشد. از طرفی C_m دارای رأسی مانند $v\in S$ است به‌طوریکه $\deg_G(v)=4$، و لذا این رأس دارای دو همسایگی در داخل S و دو همسایگی در $V-S$ می‌باشد. بنابراین رأس v در نامساوی زیر صدق نمی‌کند.

$$|N(v)\cap S|>|N(v)\cap(V-S)|$$

لذا C_m نمی‌تواند یک اتحاد دفاعی باز قوی باشد. برای C_{n-m} هم می‌توان چنین استدلالی کرد. بنابراین $G[S]=G$.

برعکس، فرض کنید G یک گراف با n رأس باشد و $\hat{a}_t(G)=n$. اگر $\Delta(G)\le 2$ باشد آنگاه G یک مسیر یا یک دور به طول n است. اکنون فرض کنید $\Delta(G)\ge 3$. فرض کنید v رأسی با ماکزیمم درجه باشد. چون $V-\{v\}$ اتحاد دفاعی باز قوی در G نیست بنابراین $v_1\in N(v)$ وجود دارد به‌طوریکه $\deg(v_1)\le 2$. اگر $\deg(v_1)=1$ آنگاه $V-\{v_1\}$ اتحاد دفاعی باز قوی است که تناقض است. لذا $\deg(v_1)=2$. بنابراین رأسی مانند $v_2\in N(v_1)$ موجود است به‌طوریکه $\deg(v_2)\le 2$. اگر $\deg(v_2)=1$ آنگاه $V-\{v_2\}$ یک اتحاد باز قوی است که یک تناقض است. لذا $\deg(v_2)=2$. چون $V-\{v_1,v_2\}$ یک اتحاد دفاعی باز قوی نیست پس $v_3\in N(v_2)$ وجود دارد به‌طوریکه $\deg(v_3)\le 2$. با ادامه روند فوق مسیر $v_1,\dots,v_k$ برای یک k بدست می‌آید به‌طوریکه برای $1\le i\le k-1$، $\deg(v_i)=2$ و برای v_k، $\deg(v_k)=1$ یا $v_k=v$. اگر $\deg(v_k)=1$ آنگاه $V-\{v_k\}$ یک اتحاد دفاعی باز قوی در G است که باز هم تناقض است. بنابراین $v_k=v$. اگر $\deg(v)\ge 5$ آنگاه $V-\{v_1,\dots,v_{k-1}\}$ یک اتحاد دفاعی باز قوی است که تناقض است.

در نتیجه $\deg(v)=\Delta(G)=4$. چون $V-\{v_1,\dots,v_k\}$ یک اتحاد دفاعی باز قوی نیست پس رأسی مانند $w_1\in N(v)-\{v_1,v_{k-1}\}$ وجود دارد به‌طوریکه $\deg(w_1)\le 2$. اگر $\deg(w_1)=1$ آنگاه $V-\{w_1\}$ یک اتحاد دفاعی باز قوی است که مغایر با $\hat{a}_t(G)=n$ است. بنابراین $\deg(w_1)=2$. چون $V-\{v_1,\dots,v_k,w_1\}$ یک اتحاد دفاعی باز قوی نیست پس رأسی مانند $w_2\in N(w_1)$ وجود دارد به‌طوریکه $\deg(w_2)=2$. همانند قبل با ادامه این روند نتیجه می‌گیریم مسیری مانند $w_1,\dots,w_l$ برای یک $l=n-k$ بدست می‌آید به‌طوریکه برای $1\le i\le l-1$، $\deg(w_i)=2$ و $w_l=v$. چون $\Delta(G)=4$ لذا نتیجه می‌گیریم رأسی از C_k با رأسی از C_l یکی است. از این‌رو نتیجه حاصل می‌شود.■

گزاره ۵,۳,۴ ([۱۵]) برای هرگراف همبند G، $\hat{a}_t(G)=2$ اگر وتنها اگر G دو رأس مجاور از درجه یک باشد.

اثبات: اگر G دو رأس مجاور از درجه یک مانند v و w باشد آنگاه بنا به تعریف به آسانی دیده می‌شود که v و w مینیمم اتحاد دفاعی باز قوی در G است. فرض کنید $S=\{v,w\}$، $\hat{a}_t(G)$-مجموعه باشد. بنا به گزاره ۲,۳,۴، v و w مجاورند، حال نشان می‌دهیم این دو رأس از درجه یک هستند. برای رأس v داریم، $2\deg_S(v)\ge\deg(v)+1$. چون $\deg_S(v)=1$ لذا $\deg(v)=1$ است. برای w با همین استدلال داریم، $\deg(w)=1$.■

گزاره ۶,۳,۴ ([۱۵]) برای هرگراف G داریم $\hat{a}_t(G)=3$ اگروتنها اگر $\hat{a}_t(G)\neq 2$ و G با یکی از دو زیرگراف القایی زیر یکریخت باشد،

الف) P_3، با رئوسی به ترتیب، w,v,u به‌طوریکه $\deg(u)=\deg(w)=1$ و $\deg(v)$، از درجه حداکثر سه باشد.

ب) K_3، به‌طوریکه هر رأس آن از درجه حداکثر سه باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم $\hat{a}_t(G) \neq 2$ باشد. اگر G دارای زیرگراف القایی یکریخت با (الف) یا (ب) داشته باشد آنگاه به آسانی دیده می‌شود که هر دو مینیمم اتحاد دفاعی باز قوی در G هستند. فرض کنید $S = \{v_1, v_2, v_3\}$، $\hat{a}_t(G)$ – مجموعه باشد. بنا به گزاره ۲،۳،۴، $G[S]$ همبند است. لذا دو حالت وجود دارد، یا $\deg_S(v_1) = \deg_S(v_3) = 1$ و $\deg_S(v_2) = 2$ یا اینکه $\deg_S(v_i) = 2$ برای $i = 1,2,3$. اگر $\deg_S(v_1) = \deg_S(v_3) = 1$ و $\deg_S(v_2) = 2$ باشد آنگاه چون S یک اتحاد دفاعی باز قوی است لذا

$$2 = 2\deg_S(v_i) \geq \deg(v_i) + 1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_i) \leq 1$$

برای $i = 1,3$،

$$4 = 2\deg_S(v_2) \geq \deg(v_2) + 1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_2) \leq 3$$

اگر $\deg_S(v_i) = 2$ برای $i = 1,2,3$ آنگاه، چون S یک اتحاد دفاعی باز قوی است لذا

$$4 = 2\deg_S(v_i) \geq \deg(v_i) + 1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_i) \leq 3$$

برای $i = 1,2,3$. ■

فرض کنید G_1 گرافی است که از K_4 با حذف دقیقاً دو یال از آن با رئوس $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ که در آن رأس v_1 از درجه یک است حاصل شده باشد. فرض کنید G_2 گرافی است که از K_4 با حذف دقیقاً یک یال از آن با رئوس $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ که در آن رأس‌های v_1 و v_2 از درجه دو است حاصل شده باشد.

گزاره ۷،۳،۴ ([۱۵]) برای هرگراف G داریم، $\hat{a}_t(G) = 4$ اگر وتنها اگر $\hat{a}_t(G) \neq 2$، $\hat{a}_t(G) \neq 3$ و G با یکی از شش زیرگراف القایی زیر یکریخت باشد،

الف) P_4، با رئوسی به‌ترتیب، v_1, v_2, v_3 و v_4 به‌طوریکه $\deg(v_1) = \deg(v_4) = 1$ و $\deg(v_2), \deg(v_3)$ از درجه حداکثر سه باشند،

ب) C_4، به‌طوریکه هر رأس آن از درجه حداکثر سه باشند،

ج) $K_{1,3}$، به‌طوریکه رأس مرکزی از درجه حداکثر پنج باشد و بقیه رئوس از درجه دقیقاً یک باشد،

د) G_1، به‌طوریکه $\deg(v_1)=1$ و بقیه رئوس از درجه حداکثر پنج باشد،

و) G_2، به‌طوریکه $\deg(v_1)$, $\deg(v_2)$ حداکثر سه و $\deg(v_4),\deg(v_3)$ حداکثر پنج باشد،

ه) K_4، به‌طوریکه هر رأس آن از درجه حداکثر پنج باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم $\hat{a}_t(G)\neq 2$ و $\hat{a}_t(G)\neq 3$ باشد. اگر G دارای زیرگراف القایی یکریخت با یکی از حالت‌های فوق داشته باشد آنگاه به آسانی دیده می‌شود که هر کدام از آنها مینیمم اتحاد دفاعی باز قوی در G هستند. فرض کنید $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$، $\hat{a}_t(G)$ –مجموعه باشد. شش حالت وجود دارد،

(الف) اگر $\deg_S(v_1)=\deg_S(v_4)=1$ و $\deg_S(v_3)=\deg_S(v_2)=2$ در این‌صورت داریم،

$$2=2\deg_S(v_i)\geq \deg(v_i)+1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_i)\leq 1$$

برای $i=1,4$،

$$4=2\deg_S(v_i)\geq \deg(v_i)+1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_i)\leq 3$$

برای $i=2,3$.

(ب) اگر $\deg_S(v_i)=2$ برای $i=1,2,3,4$ آنگاه،

$$4=2\deg_S(v_i)\geq \deg(v_i)+1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_i)\leq 3$$

برای $i=1,2,3,4$.

(ج) اگر $\deg_S(v_1)=3$ و $\deg_S(v_i)=1$ برای $i=2,3,4$ آنگاه،

$$2=2\deg_S(v_i)\geq \deg(v_i)+1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_i)\leq 1$$

برای $i=2,3,4$،

$$6=2\deg_S(v_1)\geq \deg(v_1)+1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_1)\leq 5$$

(د) اگر $\deg_S(v_1)=1$، $\deg_S(v_2)=3$ و $\deg_S(v_i)=2$ برای $i=3,4$ آنگاه،

$$2=2\deg_S(v_1)\geq \deg(v_1)+1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_1)\leq 1$$

$$6=2\deg_S(v_2)\geq \deg(v_2)+1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_2)\leq 5$$

$$4=2\deg_S(v_i)\geq \deg(v_i)+1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_i)\leq 3$$

برای $i = 3,4$.

(و) اگر $\deg_S(v_i) = 2$ برای $i = 1,2$ و $\deg_S(v_i) = 3$ برای $i = 3,4$ آنگاه،

$$4 = 2\deg_S(v_i) \geq \deg(v_i) + 1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_i) \leq 3$$

برای $i = 1,2$،

$$6 = 2\deg_S(v_2) \geq \deg(v_2) + 1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_2) \leq 5$$

برای $i = 3,4$.

(ه) اگر $\deg_S(v_i) = 3$ برای $i = 1,2,3,4$ آنگاه،

$$6 = 2\deg_S(v_i) \geq \deg(v_i) + 1 \Leftrightarrow \quad \deg(v_i) \leq 5$$

برای $i = 1,2,3,4$.■

گزاره ۸،۳،۴ ([۱۵]) برای $n \geq 2$ داریم، $\hat{a}_t(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

اثبات: فرض کنید S یک $\hat{a}_t(K_n)-$مجموعه و $v \in S$ باشد. در این‌صورت $|N(v) \cap S| \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ لذا داریم $|S| \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$. از طرف دیگر فرض کنید $S \subseteq V$ از اندازه $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ باشد. برای هر رأس $v \in S$ داریم،

$$\frac{\deg(v) - 1}{2} \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \geq \deg_{V-S}(v)$$

چون $\deg(v) = \deg_S(v) + \deg_{V-S}(v)$ لذا داریم، $\deg_S(v) - 1 \geq \deg_{V-S}(v)$. بنابراین S اتحاد دفاعی باز قوی است و $\hat{a}_t(K_n) \leq |S| \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$. بنابراین $\hat{a}_t(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.■

گزاره ۹،۳،۴ ([۱۵]) **الف)** برای $1 \leq r \leq s$، $\hat{a}_t(K_{r,s}) = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor + 2$،

ب) $\hat{a}_t(w_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1$،

اثبات: الف) فرض کنید V_s و V_r دو بخش از $K_{r,s}$ باشند که در آن $|V_s|=s$ و $|V_r|=r$. فرض کنید S یک $\hat{a}_t(K_{r,s})-$مجموعه به‌طوریکه $S=S_r\bigcup S_s$ که در آن $S_i\subseteq V_i$ برای $i=r,s$ باشد. برای هر رأس $v\in S_i$ به‌طوریکه $i=r,s$ داریم، $|N(v)\bigcap S|\geq\left\lfloor\frac{n-i}{2}\right\rfloor$ لذا $|S|\geq\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor+2$. از طرف دیگر فرض کنید $S\subseteq V$ از اندازه $\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor+2$ به‌طوریکه $\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1$ رأس از V_r و $\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor+1$ رأس از V_s باشد. برای هر رأس $v\in S_i$ به‌طوریکه $i=r,s$ داریم،

$$\frac{\deg(v)-1}{2}\geq\left\lceil\frac{n-i}{2}\right\rceil-1=\deg_{V-S}(v)$$

لذا داریم، $\deg_S(v)-1\geq\deg_{V-S}(v)$. بنابراین S اتحاد دفاعی باز قوی است و $\hat{a}_t(K_{r,s})\leq\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor+2$.

ب) مجموعه شامل رأس مرکزی W_n و حداقل $\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$ از همسایه‌های آن تشکیل اتحاد دفاعی باز قوی می‌دهند لذا $\hat{a}_t(w_n)\leq\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil+1$. از طرف دیگر فرض کنید S یک $\hat{a}_t(W_n)-$مجموعه باشد آنگاه هیچ رأس $G[S]$، از درجه یک نمی‌باشد، زیرا هر رأس در W_n از درجه حداقل سه است. بنابراین کوچکترین درجه در $G[S]$ حداقل دو است. تنها زیرگراف القایی از W_n که شامل رئوسی از درجه دو است، دور C_n یا زیرگرافی شامل رأس مرکزی می‌باشد. لذا S باید شامل رأس مرکزی و حداقل $\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$ از همسایه‌های واقع بر C_n باشد. در نتیجه داریم $\hat{a}_t(w_n)\geq\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil+1$. ■

گزاره ۱۱,۳,۴ ([۱۵]) برای هر گراف توری $G_{m,n}$ داریم،

$$\hat{a}_t(G_{m,n})=\begin{cases}\max\{m,n\} & \text{اگر } \min\{m,n\}=1\\ \min\{m,n\} & \text{درغیر این‌صورت}\end{cases}$$

اثبات: اگر $\min\{m,n\}=1$ آنگاه گراف توری یک مسیر است لذا از قضیه ۴,۳,۴ نتیجه می‌شود.

درغیر این‌صورت هر یک از مجموعه رئوس زیر تشکیل اتحاد دفاعی باز قوی می‌دهند.

۱) رئوس واقع در i نسخه متوالی از P_n که در آن $2 \le i \le m$،

۲) رئوس واقع در j نسخه متوالی از P_m که در آن $2 \le j \le n$. ■

گزاره ۱۱,۳,۴ ([۱۵]) برای هر دو عدد صحیح m,n، با شرط $m \le n$ گراف همبند G از مرتبه n موجود است به‌طوریکه $\hat{a}_t(G) = m$.

اثبات: فرض کنید G گرافی باشد که از دور C_m و مسیر P_{n-m} به‌طوریکه یک رأس C_m با یال آویزان P_{n-m} به‌وسیله یک یال متصل باشند. بنابر گزاره ۲,۳,۴ و قضیه ۴,۳,۴ $\hat{a}_t(G) = m$ و $|V| = n$. ■

۴,۴ کران برای عدد اتحاد دفاعی باز قوی

گزاره ۱,۴,۴ ([۱۵]) برای هر گراف همبند G، از مرتبه n با کوچکترین درجه $\delta(G)$ داریم،

$$\hat{a}_t(G) \le n - \left\lfloor \frac{\delta(G)-1}{2} \right\rfloor.$$

اثبات: فرض کنید $S \subseteq V$ از اندازه $n - \left\lfloor \frac{\delta(G)-1}{2} \right\rfloor$ باشد. برای هر رأس $v \in S$ داریم،

$$\frac{\deg(v)-1}{2} \ge \frac{\delta(G)-1}{2} \ge \left\lfloor \frac{\delta(G)-1}{2} \right\rfloor \ge \deg_{V-S}(v)$$

لذا داریم، $\deg_S(v) - 1 \ge \deg_{V-S}(v)$. بنابراین S اتحاد دفاعی قوی و $\hat{a}_t(G) \le |S| \le n - \left\lfloor \frac{\delta(G)-1}{2} \right\rfloor$. ■

همان‌طور که در قضیه ۲۰,۲,۱ بیان شد برای هر گراف همبند G، $\kappa'(G) \le \delta(G)$. در این خصوص اگر یال‌های واقع بر رأسی از مینیمم درجه را حذف کنیم گراف ناهمبند می‌شود.

گزاره ۲,۴,۴ ([۱۵]) اگر هر رأس G از درجه فرد باشد آنگاه $\hat{a}_t(G) = a_t(G) = \hat{a}(G)$.

اثبات: طبق نامساوی (۴-۵) و گزاره ۱,۳,۴ داریم $a_t(G)=\hat{a}(G)\le \hat{a}_t(G)$.

حال فرض کنید S، یک $a_t(G)-$مجموعه بوده و فرض کنید $v\in S$ باشد. بنا به تعریف اتحاد دفاعی باز داریم $\deg_S(v)\ge \deg_{V-S}(v)$. چون v از درجه فرد است، لذا $\deg_S(v)$ حداقل یک واحد بیشتر از $\deg_{V-S}(v)$ است. بنابراین $\deg_S(v)\ge \deg_{V-S}(v)+1$. بنابراین $\hat{a}_t(G)\le a_t(G)=\hat{a}(G)$. ■

نتیجه ۳,۴,۴ ([۱۵]) اگر هر رأس G از درجه فرد باشد آنگاه $\hat{a}_t(G)\le\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil+1$.

فرض کنید $\Pi=\{V_1,V_2\}$ یک دوبخشی از رئوس گراف همبند G باشد به‌طوریکه تعداد یال‌های بین رئوس V_1 و رئوس V_2، $\kappa'(G)$ باشد. اگر $|V_1|=1$ یا $|V_2|=1$ باشد آنگاه می‌گوییم Π یک $\kappa'-$دوبخشی منفرد است. در حالتی که V_1 و V_2 هر دو حداقل دو رأس داشته باشند می‌گوییم که Π یک $\kappa'-$دو بخشی نامنفرد است. حال با توجه به نکات فوق گزاره زیر را داریم.

گزاره ۴,۴,۴ ([۱۵]) اگر هر رأس G از درجه فرد با $\kappa'(G)<\delta(G)$ باشد داریم، $\hat{a}_t(G)\le\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$.

اثبات: فرض کنید $\Pi=\{V_1,V_2\}$ افرازی از رئوس گراف G باشد به‌طوریکه تعداد یال‌ها V_1 و V_2 برابر $\kappa'(G)$ باشد. همچنین فرض کنید $|V_1|\le|V_2|$. چون $\kappa'(G)<\delta(G)$ پس Π یک $\kappa'-$دوبخشی نامنفرد است. آشکارا داریم $|V_1|\le\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$. ادعا می‌کنیم V_1 اتحاد دفاعی باز قوی است و لذا $\hat{a}_t(G)\le\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$.

اگر V_1 اتحاد دفاعی باز قوی نباشد آنگاه رأسی مانند $u\in V_1$ وجود دارد به‌طوریکه $|N(u)\cap V_1|<|N(u)\cap V_2|$. اکنون فرض کنید $\Pi_1=\{V_1-\{u\},V_2\cup\{u\}\}$ دوبخشی از G باشد. در این‌صورت داریم $|\Pi_1|=|\Pi|-\deg_{V_2}(u)+\deg_{V_1}(u)$ چون $|N(u)\cap V_1|<|N(u)\cap V_2|$ در نتیجه $|\Pi_1|<|\Pi|$. این مغایر با فرض Π که $\kappa'-$دوبخشی است. پس V_1 یک اتحاد دفاعی باز قوی است. ■

نتیجه ۵,۴,۴ ([۱۵]) اگر G که هر رأس آن از درجه فرد است، شامل κ'−بخشی نامنفرد باشد، آنگاه داریم $\hat{a}_t(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

گزاره ۶,۴,۴ ([۱۵]) برای هر گراف G از مرتبه n با کوچکترین درجه $\delta(G)$، داریم $\hat{a}_t(G) \geq \left\lceil \frac{\delta(G)+3}{2} \right\rceil$.

اثبات: فرض کنید $S \subseteq V$ یک $\hat{a}_t(G)$−مجموعه باشد. در این حالت برای هر $v \in S$ داریم،

$$\deg(v) = \deg_S(v) + \deg_{V-S}(v)$$

بنا به تعریف اتحاد دفاعی باز قوی داریم،

$$\deg_S(v) - 1 \geq \deg_{V-S}(v)$$

طرفین نامساوی فوق را با $\deg_{V-S}(v)$ جمع می‌کنیم در این‌صورت داریم،

$$\deg_{V-S}(v) \leq \frac{\deg(v)-1}{2}$$

حال طرفین نامساوی فوق را با $\deg_S(v)$ جمع می‌کنیم،

$$\deg(v) \leq \deg_S(v) + \frac{\deg(v)-1}{2} \Rightarrow \quad \frac{\deg(v)+1}{2} \leq \deg_S(v)$$

از طرفی $\deg_S(v) \leq |S|-1$ و $\delta(G) \leq \deg(v)$، لذا داریم $\frac{\delta(G)+3}{2} \leq |S|$. بنابراین حکم کامل شد.■

گزاره ۷,۴,۴ ([۱۵]) برای هر گراف G داریم $a(G)+1 \leq \hat{a}_t(G)$.

اثبات : فرض می‌کنیم $S \subseteq V$ یک $\hat{a}_t(G)$−مجموعه باشد. می‌دانیم، $|S| \leq \frac{\delta(G)+3}{2}$. آنگاه می‌توانیم رأس $w \in S$ را در نظر بگیریم. پس برای هر $v \in S' = S - \{w\}$ داریم،

$$\deg_{S'}(v) = \deg_S(v) - \deg_w(v)$$

$$\geq \deg_{V-S}(v)+1-\deg_{w}(v)$$
$$= \deg_{V-S'}(v)+1-2\deg_{w}(v)$$
$$\geq \deg_{V-S'}(v)+1-2$$

بنابراین $S-\{w\}$ یک اتحاد دفاعی در G است، پس داریم $a(G)\leq \hat{a}_t(G)-1$. ■

۵,۴ اتحاد تهاجمی باز

تعریف ۱,۵,۴ مجموعه غیر تهی از رئوس $S\subseteq V$ یک اتحاد تهاجمی باز نامیده می‌شود هرگاه برای هر $v\in \partial S$ داشته باشیم،

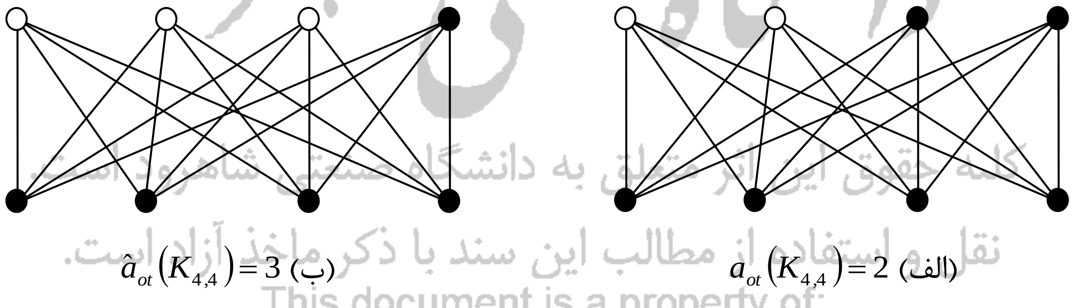
$$\deg_S(v)\geq \deg_{V-S}(v) \qquad (6-4)$$

و یا به‌طور معادل برای هر $v\in \partial S$ داشته باشیم،

$$\deg(v)\geq 2\deg_{V-S}(v). \qquad (7-4)$$

یک اتحاد تهاجمی باز را قوی گویند هرگاه نامساوی‌های فوق به‌طور اکید باشد.

عدد اتحاد تهاجمی باز گراف G برابر با مینیمم اندازه یک اتحاد تهاجمی باز بحرانی از G می باشد و با $a_{ot}(G)$ نشان داده می‌شود. همچنین عدد اتحاد تهاجمی باز قوی گراف G را با $\hat{a}_{ot}(G)$ نشان می دهیم.



(ب) $\hat{a}_{ot}(K_{4,4})=3$ (الف) $a_{ot}(K_{4,4})=2$

شکل ۲,۴

با توجه به تعاریف گزاره زیر را می‌توان نتیجه گرفت.

گزاره ۲,۵,۴ ([۱۵]) برای هر گراف G، $a_o(G)=\hat{a}_{ot}(G)$ و $a_{ot}(G)\leq \hat{a}_{ot}(G)$.

بنابراین در ادامه بحث روی $a_{ot}(G)$ بحث می‌کنیم.

گزاره ۳,۵,۴ ([۱۵]) برای هر گراف G، با مینیمم درجه $\delta(G)$ داریم، $a_{ot}(G)\geq \left\lceil \frac{\delta(G)}{2} \right\rceil$.

اثبات: فرض می‌کنیم S یک $a_{ot}(G)-$مجموعه و $v\in \partial S$ باشد. بنا به نامساوی ۴-۶ داریم $\deg_S(v)\geq \deg_{V-S}(v)$. حال دو طرف نامساوی را با $\deg_S(v)$ جمع می‌کنیم. در نتیجه داریم $\deg_S(v)\geq \frac{\deg(v)}{2}$. از طرفی واضح است که $|S|\geq \deg_S(v)$ و $\deg(v)\geq \delta(G)$. از دو نامساوی آخر داریم $a_{ot}(G)\geq \left\lceil \frac{\delta(G)}{2} \right\rceil$. ■

گزاره ۴,۵,۴ ([۱۵]) **الف)** $a_{ot}(G)\leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$,

ب) $a_{ot}(G)\leq \alpha(G)$.

اثبات: الف) مجموعه رئوس V را با دو رنگ a و b چنان رنگ‌آمیزی می‌کنیم به‌طوریکه تعداد یال‌هایی که دو سر آن یک رنگ یکسان دارند مینیمم اندازه باشد. فرض می‌کنیم $f:V\to\{a,b\}$ چنین رنگ‌آمیزی باشد. قرار می‌دهیم

$$\theta=\{uv:\ f(u)=f(v)\}$$

$$A=\{v_i:\ f(v_i)=a\}$$

$$B=\{v_i:\ f(v_i)=b\}$$

بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $|B|\leq |A|$. حال ادعا می‌کنیم B یک اتحاد تهاجمی باز است یعنی برای هر $v\in A$ داریم، $\deg_B(v)\geq \deg_A(v)$. فرض می‌کنیم چنین نباشد در این‌صورت

وجود دارد $v \in A$ به‌طوریکه $\deg_B(v) < \deg_A(v)$. اکنون رنگ‌آمیزی $f': V \to \{a,b\}$ را در نظر می‌گیریم که در آن v رنگ متفاوتی از رنگ آمیزی $f: V \to \{a,b\}$ دارد. حال قرار می‌دهیم،

$$A' = A - \{v\} = \{v_i : f'(v_i) = a\}$$

$$B' = B \cup \{v\} = \{v_i : f'(v_i) = b\}$$

$$\theta' = \{uv : f'(u) = f'(v)\}$$

در نتیجه $|\theta'| = |\theta| - \deg_A(v) + \deg_B(v)$. چون $\deg_B(v) < \deg_A(v)$ بنابراین $|\theta'| < |\theta|$. این مغایر با مینیمم اندازه $|\theta|$ است. پس B یک اتحاد تهاجمی باز است در نتیجه داریم $a_{ot}(G) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

ب) فرض می‌کنیم S یک $\alpha(G)-$مجموعه باشد. برای هر $v \in \partial S$ داریم

$$\deg_S(v) \ge \deg_{V-S}(v) + 1 \ge \deg_{V-s}(v)$$

در نتیجه بنا به تعریف ۱,۵,۴، S یک اتحاد تهاجمی باز است. لذا هر پوشش رأسی در G یک اتحاد تهاجمی باز است.■

گزاره ۵,۵,۴ ([۱۵]) برای هر گراف G، به‌طوریکه $\Delta(G) \le 2$ داریم، $a_{ot}(G) = 1$.

اثبات: فرض کنید $S = \{v\}$، که در آن $\deg(v) = \Delta(G) \le 2$. چون برای هر $w \in \partial S$، $\deg_S(w) = 1$ و $\deg_{V-S}(w) \le 1$. بنابراین $\deg_S(w) \ge \deg_{V-s}(w)$ لذا بنا به تعریف نتیجه حاصل می‌شود.■

نتیجه ۶,۵,۴ ([۱۵]) برای مسیر P_n و دور C_n با حداقل دو رأس داریم $a_{ot}(C_n) = a_{ot}(P_n) = 1$.

گزاره ۷,۵,۴ **الف)** برای $n \ge 2$، $a_{ot}(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$،

ب) برای $1 \le r \le s$، $a_{ot}(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$.

اثبــات: الــف) چــون در گــراف کامــل $\delta(K_n)=n-1$ اســت. لــذا بنــابر گــزاره ۳,۵,۴ داریــم $a_{ot}(K_n)\geq\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$. از طــرف دیگــر بنــا بــه قســمت اول گــزاره ۴,۵,۴، $a_{ot}(K_n)\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. چون $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$ نتیجه حاصل می‌شود.

ب) چون در گراف دوبخشی فوق داریم $\delta(K_{r,s})=r$. لذا بنابر گزاره ۳,۵,۴ داریـم $a_{ot}(K_{r,s})\geq\left\lceil\frac{r}{2}\right\rceil$. از طرفـی دیگـر فـرض کنیـد V_r و V_s دو بخـش از $K_{r,s}$ باشـند کـه در آن $|V_s|=s$ و $|V_r|=r$. فـرض کنید $S\subseteq V_r$ از اندازه $\left\lceil\frac{r}{2}\right\rceil$ باشد. بنا به تعریف ۱,۵,۴، S تشکیل یک اتحاد تهاجمی باز می‌دهـد. پـس داریم $a_{ot}(K_{r,s})\leq|S|\leq\left\lceil\frac{r}{2}\right\rceil$. ■

گزاره ۸,۵,۴ ([۱۵]) برای هر چرخ W_n، با $n\neq 4$ داریم $a_{ot}(W_n)=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+1$.

اثبات: فرض می‌کنیم $n\neq 4$ و W_n گرافی با مجموعه رأس‌های $V(W_n)=\{v_0,v_1,\ldots v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E(W_n)=\{v_0v_i,v_{i-1}v_i,v_nv_1 : 1\leq i\leq n\}$ باشد. قرار می‌دهیم $A=\left\{v_i : i\overset{3}{\equiv}1\right\}$ و $S=\{v_0\}\cup A$. واضح است کـه S تشـکیل اتحـاد تهـاجمی بـاز مـی‌دهـد. بنـابراین $a_{ot}(W_n)\leq\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+1$. اکنـون نشـان مـی‌دهیم $a_{ot}(W_n)\geq\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+1$. فرض می‌کنیم چنـین نباشـد بنـابراین داریـم $a_{ot}(W_n)\leq\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$. فـرض مـی‌کنیم S یک $a_{ot}(W_n)-$مجموعه باشد. تنها دو حالت زیر ممکن است وجود داشته باشد.

(۱) اگر S شامل رأس مرکزی v_0 نباشد. در این‌صورت برای $v_0\in\partial S$ داریم

$$n=\deg(v_0)\geq 2\deg_{V-S}(v_0)\geq 2\left(n-\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)\geq 2\left(n-\frac{n}{3}\right)=\frac{4n}{3}$$

که تناقض است.

(۲) اگر S شامل رأس مرکزی v_0 باشد. چون $a_{ot}(W_n) \le \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ لذا $S-\{v_0\}$ باید شامل حداکثر $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil -1$ رأس باشد. در نتیجه $v \in \partial S$ وجود دارد به‌طوریکه $\deg_S(v) < \deg_{V-S}(v)$. که این با $a_{ot}(G)$–مجموعه بودن S در تناقض است. لذا فرض خلف باطل است بنابراین $a_{ot}(W_n) \ge \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil +1$. ■

گزاره ۹,۵,۴ ([۱۵]) اگر هر رأس G، از درجه فرد باشد آنگاه $a_{ot}(G) = a_o(G)$.

اثبات: طبق گزاره ۵,۲,۴ داریم $a_{ot}(G) \le a_o(G)$.

حال فرض کنید S، یک $a_{ot}(G)$–مجموعه بوده و فرض کنید $v \in \partial S$ باشد. بنا به تعریف اتحاد تهاجمی باز داریم $\deg_S(v) \ge \deg_{V-S}(v)$. چون v از درجه فرد است، لذا $\deg_S(v)$ حداقل یک واحد بیشتر از $\deg_{V-S}(v)$ است. بنابراین $\deg_S(v) \ge \deg_{V-S}(v)+1$. بنابراین $a_o(G) \le a_{ot}(G)$. ■

در پایان کرانی را برای عدد اتحاد تهاجمی باز یک گراف برحسب عدد پوششی رأسی و عدد غلبه‌ای ارائه می‌دهیم.

گزاره ۱۰,۵,۴ ([۱۵]) برای هر گراف G، با $\delta(G) \ge 3$ داریم،

$$a_{ot}(G) \le \left\lceil \frac{\alpha(G)+\gamma(G)}{2} \right\rceil +1.$$

اثبات: فرض کنید $\chi = \{X, Y\}$ افرازی از رئوس گراف G باشد به‌طوریکه یال-برشی بین X و Y ماکزیمم اندازه باشد. همچنین فرض کنید $|X| \le |Y|$. ادعا می‌کنیم X اتحاد تهاجمی باز است یعنی برای هر $v \in Y$ داریم $\deg_X(v) \ge \deg_Y(v)$. اگر X اتحاد تهاجمی باز نباشد آنگاه رأسی مانند $v \in Y$ وجود دارد که $\deg_X(v) < \deg_Y(v)$. اکنون فرض کنید $\chi' = \{X \cup \{v\}, Y-\{v\}\}$ افرازی از رئوس گراف G باشد به‌طوریکه یال-برشی دیگری بین X و Y باشد. در این‌صورت

داریم $|\chi'| = |\chi| - \deg_X(v) + \deg_Y(v)$ چون $\deg_X(v) < \deg_Y(v)$ در نتیجه $|\chi'| > |\chi|$. و این مغایر با فرض χ، که افرازی از رئوس گراف G است به‌طوریکه یال-برشی بین X و Y ماکزیمم اندازه است.

لذا $a_{\alpha t}(G) \le |X|$. از طرفی چون $\delta(G) \ge 3$ داریم $|X| \le \left\lceil \frac{\alpha(G)+\gamma(G)}{2} \right\rceil + 1$. ■

پیوست A

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

همان‌طور که در مقدمه فصل چهارم گفتیم اتحاد باز یک مسأله باز از مقاله [۱۱] بوده است.که در دو کنفرانس ریاضی ارائه شده است[۱۵،۱۹]. این مقوله در حال حاضر در دست مطالعه قرار دارد:

۱. اتحاد دفاعی سراسری روی گراف‌های هرری.

۲. اتحاد دفاعی سراسری روی گراف‌های پترسن تعمیم یافته.

۳. اتحاد سراسری باز در گراف.

۴. امنیت قوی در گراف.

همچنین به‌دلیل اینکه مبحث اتحاد و امنیت در گراف بحث جدید و نوپا است بعضی از مسـائل هنـوز مورد بررسی قرار نگرفته است که به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

۱) رابطه‌ای بین اعداد اتحاد(دفاعی, تهاجمی, ...) تعیین کنید.

۲) گراف‌هایی(یا خانواده‌ای از گراف‌ها) معرفی کنید به‌طوریکه $\gamma(G)=\gamma_a(G)$.

۳) گراف‌هایی(یا خانواده‌ای از گراف‌ها) معرفی کنید به‌طوریکه $\gamma_t(G)=\gamma_{\hat{a}}(G)$.

۴) گراف‌هایی(یا خانواده‌ای از گراف‌ها) معرفی کنید به‌طوریکه $a_o(G)=\hat{a}_o(G)$.

۵) آیا $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ یک کران بالا برای $s(G)$ برای هر گراف شامل رأس nاست؟

۶) زیرمجموعه $S\subseteq V$ از گراف $G=(V,E)$ را ناامن گوییم هرگاه زیرمجموعه‌ای مانند موجود باشد به‌طوریکه $|N[X]\cap S|<|N[X]-S|$. معین کنید مجموعه ناامن S چگونه شامل زیرمجموعه امن است؟

۷) اندازه کوچکترین مجموعه امن سراسری گراف Gرا به‌صورت $\gamma_{se}(G)$ تعریف می‌کنیم. چه‌هنگامی $s(G)=\gamma_{se}(G)$؟

۸) زیرمجموعه $S\subseteq V$ از گراف $G=(V,E)$، k-امن است اگر هر حمله از اندازه k قابل دفاع باشد. درباره مجموعه k-امن در گراف G چه می‌توان گفت؟

۹) آیا کران زیر برای هر گراف G از مرتبه n درست است؟

$$s(G)+s(\bar{G})\leq n+1.$$

پیوست B

مراجع

کتاب‌نامه

[1] R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi. " Powerful alliances in graphs." *Discrete Applied Mathematics*, 309(8) (2009) , 2140–2147.

[2] R. C. Brigham, R. D. Dutton, S. T. Hedetniemi. " Security in graphs." *Discrete Applied Mathematics*, 155 (2007) , 1708-1714.

[3] J. A . Bondy, U.S .R . Murty. " Graph Theory with Applications." *North Holland New York* , (1980).

[4] E. J. Cockayne, R. Dawes, S. T. Hedetniemi. " Total domination in graphs." *Networks*, 10 (1980) , 211-215.

[5] R. D. Dutton, R. Lee, R. C. Brigham. " Bounds on a graph's security number." *Discrete Applied Mathematics*, 156 (2008) , 695-704.

[6] O. Favaron, G. Fricke, W. Goddard, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, P.Kristiasen, R. C. Laskar and R. D. Skaggs. " Offensive alliances in graphs." *Discuss Mathematics Graph Theory*, 24 (2) (2004) , 275-263.

[7] H. Fernau, J. A. Rodríguez, J. M. Sigarreta. " Offensive r-alliances in graphs." *Discrete Applied Mathematics*, 157 (2009) ,177-182.

[8] G. H. Fricke, L. M. Lawson, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi. " A note on defensive alliances in graphs." *Bull ICA*, 38 (2003) , 37-41.

[9] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning. " Global defensive alliance - es in graphs." *The Electronic Journal of Combinatorics*, 10 (2003) , no R47.

[10] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater. " Fundamentals of Domination in Graphs." *Marcel Dekker New York*, (1998).

[11] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, P. Kristiansen. " Alliances in graphs." *Journal of Combine. Mathematics and Combine. Compute* ,48 (2004) , 157-177.

[12] L. H. Jamieson. "Algorithms and complexity for alliances and weighted alliances of different types " *PhD Thesis, Clemson University*, (2007).

[13] K. H. Shafique , R. D. Dutton. " Maximum alliance-free and minimum alliance-cover sets." *Congressus Numeration*, 163 (2003) , 139-146.

[14] K. H. Shafique and R. D. Dutton. " On satisfactory partitioning of graphs." *Congressus Numeration*, 154 (2002) , 183-194.

[15] H. Rezazadeh, A. Nezakati. " Open Alliance in Graphs." *40^{Th} Annual Iranian Mathematics Conference*, (2009).

[16] J. A. Rodríguez, J. M. Sigarreta. " Global offensive alliances in graphs." *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 25 (2006) , 157-164.

[17] J. A. Rodríguez, I. G. Yero, J. M. Sigarreta. " Defensive r-alliances in graphs." *Applied Mathematics Letters*, 22 (2009) , 96-100.

[18] D. B. West. " Introduction to Graph Theory." *Second ed Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ,* (2001).

[۱۹] هادی رضازاده, نادر جعفری راد. *" اتحاد دفاعی باز در گراف."* دومین همایش ریاضی پیام نور ساری, (۱۳۸۸).

پیوست C

راهنمای نمادها

$G\square H$	حاصلضرب دکارتی G و H
$e(G)$	تعداد یال‌های G
W_n	چرخ از مرتبه n
$\deg(v)$	درجه v در G
$\deg_S(v)$	درجه v در $S\subseteq G$
T	درخت
C_n	دوری از مرتبه n
$G[S]$	زیرگراف تولید شده توسط S در G
$\lceil x\rceil$	سقف x
$a_o(G)$	عدد اتحاد تهاجمی G
$a_{ot}(G)$	عدد اتحاد تهاجمی باز G
$\hat{a}_o(G)$	عدد اتحاد تهاجمی قوی G
$\hat{a}_{ot}(G)$	عدد اتحاد تهاجمی باز قوی G
$\gamma_o(G)$	عدد اتحاد تهاجمی سراسری G
$\gamma_{\hat{o}}(G)$	عدد اتحاد تهاجمی سراسری قوی G
$a(G)$	عدد اتحاد دفاعی G
$a_t(G)$	عدد اتحاد دفاعی باز G
$\hat{a}(G)$	عدد اتحاد دفاعی قوی G
$\hat{a}_t(G)$	عدد اتحاد دفاعی باز قوی G
$\gamma_a(G)$	عدد اتحاد دفاعی سراسری G
$\gamma_{\hat{a}}(G)$	عدد اتحاد دفاعی سراسری قوی G
$a_p(G)$	عدد اتحاد نیرومند G
$\hat{a}_p(G)$	عدد اتحاد نیرومند قوی G
$\gamma_{ap}(G)$	عدد اتحاد نیرومند سراسری G
$\beta(G)$	عدد استقلال G
$s(G)$	عدد امنیت G
$S(G)$	عدد امنیت بالا G
$\alpha(G)$	عدد پوششی G

عدد غلبه‌ای G	$\gamma(G)$
عدد غلبه‌ای باز G	$\gamma_t(G)$
فاصله دو رأس v و u در G	$d_G(v,u)$
قطر G	$diam(G)$
کف x	$\lfloor x \rfloor$
کمر G	$girth(G)$
گراف توری از مرتبه mn	$G_{m,n}$
گراف دوبخشی کامل از مرتبه mn	$K_{m,n}$
گراف کامل از مرتبه n	K_n
ماکزیمم درجه G	$\Delta(G)$
متمم G	$\overline{G}$
مجموعه رئوس در T	$S(T)$
مرتبه گراف G	$n(G)$
مرز S	∂S
مسیر از مرتبه n	P_n
مینیمم درجه G	$\delta(G)$
همبندی G	$\kappa(G)$
همبندی یالی G	$\kappa'(G)$
هاله G	$cor(G)$
همسایگی بسته v	$N[v]$
همسایگی باز v	$N(v)$

پیوست D

واژه‌نامه

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Vulnerable	آسیب‌پذیر
Alliance	اتحاد
Offensive alliance	اتحاد تهاجمی
Offensive alliance $k-$	$k-$اتحاد تهاجمی
Open offensive alliance	اتحاد تهاجمی باز
Open strong offensive alliance	اتحاد تهاجمی باز قوی
Strong offensive alliance	اتحاد تهاجمی قوی
Global offensive alliance	اتحاد تهاجمی سراسری
Global strong offensive alliance	اتحاد تهاجمی سراسری قوی
Defensive alliance	اتحاد دفاعی
Defensive alliance $k-$	$k-$اتحاد دفاعی
Open defensive alliance	اتحاد دفاعی باز
Open strong defensive alliance	اتحاد دفاعی باز قوی
Strong defensive alliance	اتحاد دفاعی قوی
Global defensive alliance	اتحاد دفاعی سراسری
Global strong defensive alliance	اتحاد دفاعی سراسری قوی
Powerful alliance	اتحاد نیرومند
Strong powerful alliance	اتحاد نیرومند قوی
Global powerful alliance	اتحاد نیرومند سراسری
Global strong powerful alliance	اتحاد نیرومند سراسری قوی
Secure	امن
Secure $S-$	$S-$امن
Security	امنیت
Best defense	بهترین دفاع
Cartesian product	حاصلضرب دکارتی
Global	سراسری

Offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی
Open offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی باز
Open strong offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی باز قوی
Strong offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی قوی
Global offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی سراسری
Global strong offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی سراسری قوی
Defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی
Open defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی باز
Open strong defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی باز قوی
Strong defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی قوی
Global defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی سراسری
Global strong defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی سراسری قوی
Powerful alliance number	عدد اتحاد نیرومند
Strong powerful alliance number	عدد اتحاد نیرومند قوی
Global powerful alliance number	عدد اتحاد نیرومند سراسری
Global strong powerful alliance number	عدد اتحاد نیرومند سراسری قوی
Independent number	عدد استقلال
Security number	عدد امنیت
Upper security number	عدد امنیت بالا
Covering number	عدد پوششی
Dominating number	عدد غلبه‌ای
Total dominating number	عدد غلبه‌ای باز
Weighted graph	گراف وزن‌دار
Security set	مجموعه امن
Cohesive set	مجموعه چسبنده
Dominating set	مجموعه غالب
Total dominating set	مجموعه غالب باز
Defender	مدافع
Attacker	مهاجم
Boundary	مرز
Internally disjoint paths	مسیرهای دو به دو مجزای درونی
Corona	هاله

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Alliance	اتحاد
Attacker	مهاجم
Best defense	بهترین دفاع
Boundary	مرز
Cartesian product	حاصلضرب دکارتی
Cohesive set	مجموعه چسبنده
Corona	هاله
Covering number	عدد پوششی
Defender	مدافع
Defensive alliance	اتحاد دفاعی
Defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی
Dominating set	مجموعه غالب
Dominating number	عدد غلبه‌ای
Global	سراسری
Global defensive alliance	اتحاد دفاعی سراسری
Global defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی سراسری
Global offensive alliance	اتحاد تهاجمی سراسری
Global offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی سراسری
Global powerful alliance	اتحاد نیرومند سراسری
Global powerful alliance number	عدد اتحاد نیرومند سراسری
Global strong defensive alliance	اتحاد دفاعی سراسری قوی
Global strong defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی سراسری قوی
Global strong offensive alliance	اتحاد تهاجمی سراسری قوی
Global strong offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی سراسری قوی
Global strong powerful alliance	اتحاد نیرومند سراسری قوی
Global strong powerful alliance number	عدد اتحاد نیرومند سراسری قوی
Independent number	عدد استقلال

Internally disjoint paths	مسیرهای دو به دو مجزای درونی
Defensive alliance $k-$	$k-$اتحاد دفاعی
Offensive alliance $k-$	$k-$اتحاد تهاجمی
Offensive alliance	اتحاد تهاجمی
Offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی
Open defensive alliance	اتحاد دفاعی باز
Open defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی باز
Open offensive alliance	اتحاد تهاجمی باز
Open offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی باز
Open strong defensive alliance	اتحاد دفاعی باز قوی
Open strong defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی باز قوی
Open strong offensive alliance	اتحاد تهاجمی باز قوی
Open strong offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی باز قوی
Powerful alliance	اتحاد نیرومند
Powerful alliance number	عدد اتحاد نیرومند
Secure $S-$	$S-$امن
Secure	امن
Security	امنیت
Security number	عدد امنیت
Security set	مجموعه امن
Strong defensive alliance	اتحاد دفاعی قوی
Strong defensive alliance number	عدد اتحاد دفاعی قوی
Strong offensive alliance	اتحاد تهاجمی قوی
Strong offensive alliance number	عدد اتحاد تهاجمی قوی
Strong powerful alliance	اتحاد نیرومند قوی
Strong powerful alliance number	عدد اتحاد نیرومند قوی
Total dominating number	عدد غلبه‌ای باز
Total dominating set	مجموعه غالب باز
Upper security number	عدد امنیت بالا
Vulnerable	آسیب‌پذیر
Weighted graph	گراف وزن‌دار

Abstract

A non-empty set of vertices $S \subseteq V$ is called a defensive alliance if S has at least as many vertices from its closed neighbor in S as it has in $V-S$. A non-empty set of vertices $S \subseteq V$ is called a offensive alliance if each vertex in ∂S has more neighbors in S than in $V-S$. we consider alliances that are both defensive and offensive, which we call powerful alliances. Set S is secure if and only if every attack on S is defendable. We organize this thesis as follows: In chapter one we present elementary and basic concepts which we need in next chapters. In chapter two we study all kinds of alliances in graphs. In chapter three we study security in graphs. In chapter four we present our new results on open alliance in graphs, that listed as an open question by S.T. Hedetniem et al.

Keywords: defensive alliance, offensive alliance, powerful alliances, secure set

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematic

Security in Graphs

Student:

Hadi Rezazadeh

Supervisors:

Dr. Ahmad Nezakati

Dr. Nader Jafari Rad

Advisor:

Dr. Sadegh Rahimi Sharbaf

January 2010