دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

بررسی خاصیت آرمنداریز روی رادیکال‌های اول

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

دانشجو

بی‌بی عزیزه شافقی

۱۳۹۳

تقدیم به همسرم:

که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده

و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

تقدیم به مادرم:

سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت،

تقدیم به دلبندم:

امید بخش جانم که آسایش او آرامش من است.

تشکر و قدردانی

سپاس بی پایان پروردگار بی همتا را که فرصت علم و دانش را ارزانیم داشت و در تمام مراحل زندگیم یاری نمود بر استی که پیمودن راه دشوار زندگی جزء با اتکا به قدرت لایزال او ممکن نیست و تنها با داری و التفات اوست که انسان می تواند بر مشکلات فائق آید. در پایان این مرحله از تحصیل بر خود لازم می دانم از بزرگوارانی که در طی مراحل زندگی و تحصیل یاریم نمودند، تشکر و قدردانی نمایم.

نخست از پدر و مادر گرامی ام تشکر قدردانی نمایم، آنان که دعای خیرشان در تمام مراحل زندگی حامی و پشتیبان اینجانب است، بی شک آنچه که بر خاک وجودم روییده، حاصل محبت های بی دریغ عزیزان است. از برداران و خواهران مهربانم که با همدلی فرصت تحصیل را برایم فراهم آوردند و مرا در این وادی یاری نمودند، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم و بر دستان پر مهرشان بوسه می زنم.

این پایان نامه تحت راهنمایی های ارزنده و علمی استاد گرامی ام جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی انجام شد که در طی انجام آن حضوری فعال داشته و علم و دانش خود را بدون هیچ چشمداشتی بر من ارزانی داشتند و در پناه یاری ایشان سخت ترین لحظات این را، شیرین ترین خاطراتم شد. بی شک بدون مساعدت و یاری ایشان انجام این تحقیق محال بوده است، لذا از محبت های بی دریغ ایشان صمیمانه سپاسگزارم و تلاش و یاری ایشان را می ستایم.

بی بی عزیزه شافعی
۱۳۹۳

تعهد نامه

اینجانب **بی‌بی عزیزه شافقی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی خاصیت آرمنداریز روی رادیکال‌های اول**، تحت راهنمایی **دکتر ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

بی‌بی عزیزه شافقی
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

مجموعه عناصر پوچ توان در یک حلقه آرمنداریز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اگر حلقه‌ای آرمنداریز باشد آنگاه رادیکال پوچ بالایی آن با رادیکال اول آن برابر است. بنابراین می‌توان نشان داد که اگر حلقه‌ای آرمنداریز باشد آنگاه حلقه خارج قسمتی آن بر رادیکال اولش نیز آرمنداریز است. در این پایان‌نامه حلقه‌هایی که چنین خاصیتی دارند را بررسی می‌کنیم و حلقه‌ای که چنین خاصیتی داشته باشد به APR نامگذاری می‌کنیم. نشان می‌دهیم خانواده حلقه‌های APR بین خانواده حلقه‌های آرمنداریز و خانواده حلقه‌های پوچ آرمنداریز قرار دارد. نشان می‌دهیم حلقه R، خاصیت APR دارد اگر و تنها اگر حلقه $R[x]$ خاصیت APR داشته باشد در چنین شرایطی نشان می‌دهیم که $N(R[x]) = N(R)[x]$. ($N(R)$ نمایانگر عناصر پوچ توان حلقه‌ی R است.) همچنین مثال‌هایی از حلقه‌های APR را معرفی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: حلقه‌های آرمنداریز، حلقه‌های پوچ آرمنداریز، رادیکال پوچ بالایی، رادیکال اول، حلقه‌های APR.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات لازم

۱.۱ مفاهیم اولیه

در این پایان نامه R نمایانگر یک حلقه‌ی شرکت پذیر و یکدار است و از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$a \longmapsto b$:a به b تصویر می‌شود،

$< X >$: ایده‌آل تولید شده به وسیله‌ی X،

$R[x]$:حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی حلقه‌ی R،

$P(R)$: رادیکال اول حلقه‌ی R،

Z_n : حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه n ،

$R[[x]]$: حلقه‌ی سری‌های توانی روی R ،

$R[x; x^{-1}]$: حلقه‌ی چند جمله‌ای های لوران ،

$Mat_n(R)$: حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ روی R ،

$U_n(R)$: حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی روی R.

تعریف ۱.۱.۱. ایده‌آل سره P از حلقه‌ی R را اول می‌نامیم هرگاه برای هر دو ایده‌آل A و B ایده‌آل‌هایی از R اگر $AB \subseteq P$، آنگاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

گزاره ۲.۱.۱. فرض کنیم P ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. P اول است،

۲. هر گاه $a, b \in R$ و $< a >< b > \subseteq P$، آنگاه، $a \in P$ یا $b \in P$،

۳. هر گاه $a, b \in R$ و $aRb \subseteq P$، آنگاه، $a \in P$ یا $b \in P$،

۴. هر گاه A و B دو ایده‌آل چپ از حلقه‌ی R باشند و $AB \subseteq P$، آنگاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$،

۵. هر گاه A و B دو ایده‌آل راست از حلقه‌ی R باشند و $AB \subseteq P$، آنگاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

برهان. (۱) ← (۲) ← (۳) و (۴) ← (۱) بدیهی است.
(۳) ← (۴). فرض کنیم A و B دو ایده‌آل چپ از حلقه‌ی R باشند و $AB \subseteq P$، اما $A \not\subseteq P$. عنصر $a \in A$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $a \notin P$. چون برای هر $b \in B$، $aRb \subseteq AB \subseteq P$، از این رو بنابر قسمت (۳)، $b \in P$ و در نتیجه $B \subseteq P$. □

تعریف ۳.۱.۱. ایده‌آل Q از حلقه‌ی R را نیم اول[1] می‌نامیم هر گاه، A ایده‌آلی از R باشد و $A^2 \subseteq Q$، آنگاه $A \subseteq Q$

نتیجه ۴.۱.۱. هر ایده‌آل اول، نیمه اول است.

تعریف ۵.۱.۱. حلقه‌ی R را اول (نیم اول) می‌نامیم هر گاه، ایده‌آل $\{0\}$ اول (نیم اول) باشد.

گزاره ۶.۱.۱. [۱] فرض کنیم Q ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. Q نیم اول است،

۲. هر گاه $a \in R$ و $<a>^2 \subseteq Q$، آنگاه $<a> \subseteq Q$،

۳. هر گاه $a \in R$ و $aRa \subseteq Q$، آنگاه $a \in Q$،

۴. هرگاه A ایده‌آلی چپ از حلقه‌ی R باشد و $A^2 \subseteq Q$، آنگاه $A \subseteq Q$،

۵. هر گاه A ایده‌آلی راست از حلقه‌ی R باشد و $A^2 \subseteq Q$، آنگاه $A \subseteq Q$،

گزاره ۷.۱.۱. شرایط زیر برای حلقه‌ی R معادلند:

۱. R نیم اول است،

۲. $P(R) = 0$،

۳. R هیچ ایده‌آل پوچ توان ناصفر ندارد،

۴. R هیچ ایده‌آل چپ پوچ توان ناصفر ندارد.

برهان. (۲) ↔ (۱) و (۴) ← (۳) ← (۱) بدیهی است.
(۱) ← (۴). فرض کنیم A یک ایده‌آل چپ پوچ توان از حلقه‌ی نیم اول R باشد. فرض کنیم n کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که $A^n = 0$. اگر $n > 1$، آنگاه: $(A^{n-1})^2 = A^{2n-2} \subseteq A^n = 0$ و لذا $A^{n-1} = 0$، که یک تناقض است. بنابراین $A = 0$. □

گزاره ۸.۱.۱. حلقه‌ی R اول (نیم اول) است، اگر و تنها اگر، $R[x]$ اول (نیم اول) است.

---
[1] Semiprime Ring

برهان. فرض کنیم $R[x]$ اول باشد و $aRb = 0$. در نتیجه، $aR[x]b = 0$ و لذا $a = 0$ یا $b = 0$. بالعکس، فرض کنیم R اول باشد و $f, g \in R[x]$ و $fR[x]g = 0$. اگر a و b به ترتیب ضریب پیشرو f و g باشند، آنگاه، $aRb = 0$ و چون R اول است، از این رو $a = 0$ یا $b = 0$. در نتیجه $f = 0$ یا $g = 0$. بنابراین $R[x]$ اول است. $\square$

تعریف ۹.۱.۱. حلقه R را تقلیل یافته[۲] می‌نامیم هرگاه هیچ عنصر پوچ توان ناصفر نداشته باشد.

مثال ۱۰.۱.۱.
۱. هر دامنه یک حلقه‌ی اول است.
۲. هر حلقه‌ی تقلیل یافته، نیم اول است.
۳. هر حلقه‌ی ساده، اول است.
۴. هر حاصل‌ضرب مستقیم از حلقه‌های نیم اول، نیم اول است.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد، $X = \{x_i | i \in I\}$ و هر x_i با عناصر R جابجا می‌شود، حلقه سری‌های توانی[۳] را با $R[[X]]$ نشان می‌دهیم و هر عضو آن به فرم $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots$ است که هر f_i چندجمله‌ای همگن از درجه i بر اساس متغیرهای x_i روی R است.

تعریف ۱۲.۱.۱. اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را رادیکال پوچ پایینی[۴] R می‌نامیم و با نمایش $N_*(R)$ می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت $N_*(R[x]) = N_*(R)[x]$.

برهان. قرار می‌دهیم $I = N_*(R)$. چون حلقه‌ی R/I نیم اول است بنابر گزاره‌ی(۸.۱.۱) $\frac{R[x]}{I[x]} \cong (\frac{R}{I})[x]$ نیم اول است. یعنی $I[x]$ ایده‌آلی نیم اول از $R[x]$ است و لذا $N_*(R[x]) \subseteq I[x]$ بنابراین $N_*(R[x]) \subseteq N_*(R)[x]$. حال فرض می‌کنیم P ایده‌آلی اول از $R[x]$ باشد. چون ایده‌آل $P \cap R$ اول است و $I \subseteq P \cap R \subseteq P$ از این رو $I[x] \subseteq P$. در نتیجه $N_*(R)[x] \subseteq N_*(R[x])$ و لذا $N_*(R)[x] = N_*(R[x])$. $\square$

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر $a \in R$ قویاً پوچ توان[۵] است هرگاه، هر دنباله‌ی $a_0 = a, a_1 \in a_0Ra_0, a_2 \in a_1Ra_1, \cdots, a_{n+1} \in a_nRa_n, \cdots$ سرانجام صفر شود.

گزاره ۱۵.۱.۱. $N_*(R)$ مجموعه همه عناصر قویاً پوچ توان R است.

---
[۲] Redued Ring
[۳] Power Series Ring
[۴] Lower Nilradical
[۵] Strangly Nilpotent Element

برهان. فرض کنیم $a \notin N_{\star}(R) = \cap P$. در نتیجه ایده‌آل اولی مانند P وجود دارد که $a_{\circ} = a \notin P$ لذا $a_{\circ}Ra_{\circ} \nsubseteq P$ پس $a_{1} \in a_{\circ}Ra_{\circ}$ وجود دارد که $\circ \neq a_{1} \notin P$. با ادامه‌ی این روند $\circ \neq a_{n+1} \in a_{n}Ra_{n}$ وجود دارد به طوری که $\circ \neq a_{n+1} \notin P$ لذا برای هر عدد طبیعی مانند n، $a_n \notin P$ و $a_n \neq \circ$ و لذا a قویاً پوچ توان نیست.

بالعکس: فرض کنیم a قویاً پوچ توان نباشد، در این صورت دنباله‌ی نامتناهی ناصفر $S = \{a_{\circ}, a_{1}, \cdots\}$ وجود دارد به طوری که $a_{n+1} \in a_{n}Ra_{n}$. مجموعه‌ی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \{q \trianglelefteq R; q \cap S = \varnothing\}$$

صفر ایده‌آلی از حلقه‌ی R است و $\circ_R \cap S = \varnothing$. در نتیجه $\circ_R \in X$ و $X \neq \varnothing$. فرض کنیم زنجیری از ایده‌آل‌های حلقه‌ی R در X به صورت

$$I_{1} \subseteq I_{2} \subseteq I_{3} \subseteq \cdots$$

باشد. قرار می‌دهیم $J = \cup I_i$. نشان می‌دهیم J یک کران بالا برای زنجیر انتخاب شده است. اگر $J \cap S \neq \varnothing$ آنگاه $a \in J \cap S$ وجود دارد پس $a \in J = \cup I_i$ و $a \in S$ لذا I_i وجود دارد که $a \in I_i$ در نتیجه $I_i \cap S \neq \varnothing$ که یک تناقض است.

پس $J \cap S = \varnothing$ و $J \in X$ لذا J یک کران بالا برای زنجیر انتخاب شده است بنا به لم زورن X حداقل دارای یک عضو ماکسیمال مانند P است.

حال نشان می‌دهیم P ایده‌آل اول است. فرض کنید A و B ایده‌آل‌هایی از R باشند به طوری که $A \nsubseteq P$ و $B \nsubseteq P$. با توجه به ماکسیمال بودن P در X، $(A+P) \cap S \neq \varnothing$ و $(B+P) \cap S \neq \varnothing$.

بنابراین i و j وجود دارد به طوری که $a_i \in (A+P) \cap S$ و $a_j \in (B+P) \cap S$ در نتیجه $a_i \in A+P$، $a_i \in S$ و $a_j \in B+P$، $a_j \in S$ اگر $k = \max\{i, j\}$ را در نظر بگیریم، آنگاه

$$a_{k+1} \in a_kRa_k \subset (A+P)(B+P) \subset AB + P$$

اما $a_{k+1} \notin P$ بنابراین $AB \nsubseteq P$ پس P ایده‌آلی اول است. عنصر $r_k \in R$ وجود دارد به طوری که $a_{k+1} = a_k r_k a_k \notin P$ لذا $(a_{\circ}r_{\circ}a_{\circ})(r_{1}a_{1}r_{2}a_{2} \cdots r_{k-1}a_{k-1}a_k) \notin P$ پس عنصر $a = a_{\circ} \notin P$، در نتیجه $a \notin \cap P = N_{\star}(R)$ بنابراین $a \notin N_{\star}(R)$. □

تعریف ۱۶.۱.۱. مجموع تمام ایده‌آل‌های پوچ حلقه‌یR را رادیکال پوچ بالایی[۶] می‌نامیم و آن را با $N^{\star}(R)$ نشان می‌دهیم واضح است که $N^{\star}(R)$ بزرگترین ایده‌آل پوچ حلقه‌ی R است.

گزاره ۱۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد گزاره‌های زیر معادلند:

۱. R، نیم اول است،

۲. $R[x]$، نیم اول است،

۳. $R[[X]]$، نیم اول است.

[۶] Upper Nilradical

برهان. ۲ $\Longleftarrow$ ۱) بنا به گزاره (۸.۱.۰) برقرار است.
۳ $\Longrightarrow$ ۱) فرض کنیم $X=\{x_\alpha|\alpha\in A\}$ و A مجموعه‌ی خوش ترتیب است. فرض کنیم $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد، برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی غیرتهی
$I=\{(\alpha_۱,m_۱),(\alpha_۲,m_۲),\cdots,(\alpha_r,m_r)\}$ از $A\times\mathbb{N}$، چندجمله‌ای تکین X^I را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X^I=x_{\alpha_۱}^{m_۱}x_{\alpha_۲}^{m_۲}\cdots x_{\alpha_r}^{m_r}\ \ (\alpha_۱<\alpha_۲<\cdots<\alpha_r), X^{\varnothing}=۱_R,$$

قرار می‌دهیم: $deg(X)=m_۱+m_۲+\cdots+m_r$ درجه X^I است و $|I|=r$ تعداد عناصر I است.
دو مجموعه غیرتهی متناهی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I=\{(\alpha_۱,m_۱),(\alpha_۲,m_۲),\cdots,(\alpha_r,m_r)\},$$
$$J=\{(\beta_۱,n_۱),(\beta_۲,n_۲),\cdots,(\beta_s,n_s)\}.$$

گوییم $I<J$ اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱.
$$deg(I)<deg(J),$$

۲.
$$deg(I)=deg(J),\ \ |I|<|J|,$$

۳.
$$deg(I)=deg(J),\ \ |I|=|J|,\exists k>۰:\forall i\leq k\,;\,\alpha_i=\beta_i,\ \ m_i=n_i,\ \ \alpha_{k+۱}<\beta_{k+۱},$$

۴.
$$deg(I)=deg(J),|I|=|J|,\exists k>۰:\forall i\leq k;\alpha_i=\beta_i,m_i=n_i,\alpha_{k+۱}=\beta_{k+۱},m_{k+۱}>n_{k+۱}.$$

برای زیرمجموعه‌های متناهی I و J از $A\times\mathbb{N}$، مجموعه‌ی $I+J$ زیرمجموعه متناهی از $X^{I+J}=X^IX^J$ است. بنابراین واضح است که برای زیرمجموعه‌های غیرتهی متناهی I، J و K از $A\times\mathbb{N}$:

۱. اگر $I<J$, $J<K$ آنگاه $I<K$،

۲. اگر $I<J$ آنگاه $I+K<J+K$ (به ویژه $۲I=I+I<I+J$).

توجه داشته باشید که هر عضو از $R[[X]]$ به فرم $f=a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}a_{I_n}X^{I_n}$ که برای هر $n\geq۱$، $I_n<I_{n+۱}$ و $I_n\subseteq A\times\mathbb{N}$ و $a_۰,a_{I_n}\in R$. ادعا می‌کنیم $fRf\neq۰$.
اگر $a_۰\neq۰$ ادعا درست است چون R نیم اول است. فرض کنیم $a_۰=۰$. بدون کاستن از کلیت مساله می‌توان فرض کرد $a_{I_۱}\neq۰$.
توجه کنید که برای هر عدد صحیح مثبت q,p، $p+q>۲$. $۲I_۱=I_۱+I_۱<I_p+I_q;$ بنابراین

$fRf \neq 0$ و ادعا اثبات می‌شود.
فرض می‌کنیم $f \in R[[X]]$ و $fR[[X]]f = 0$ بنابراین واضح است $fRf = 0$ با توجه به ادعا خواهیم داشت $f = 0$ بنابراین $R[[X]]$ نیم اول است.
$1 \Longrightarrow 3$) فرض کنیم $a \in R$، $aRa = 0$. واضح است که $aR[[X]]a = 0$ اما $R[[X]]$ نیم اول است لذا $a = 0$ بنابراین R نیم اول است. $\square$

نتیجه ۱.۱.۱۸. برای حلقه R داریم $N_\star(R[[X]]) \subseteq N_\star(R)[[X]]$.

برهان. بنا به گزاره قبل $\left(\frac{R}{N_\star(R)}\right)[[X]]$ نیم اول است. از طرفی $\frac{R[[X]]}{N_\star(R)[[X]]} \cong \frac{R}{N_\star(R)}[[X]]$، بنابراین $\frac{R[[X]]}{N_\star(R)[[X]]}$ نیز نیم اول است یعنی $N_\star(R)[[X]]$ ایده‌آلی اول است. از طرفی رادیکال اول کوچکترین ایده‌آل اول است لذا $N_\star(R[[X]]) \subseteq N_\star(R)[[X]]$. $\square$

در اینجا $N_\circ(R)$ نشانگر مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های پوچ توان حلقه R است. $N(R)$ نیز مجموعه تمام عناصر پوچ توان حلقه R است و داریم:

$$N_\circ(R) \subseteq N_\star(R) \subseteq N^\star(R) \subseteq N(R)$$

تعریف ۱.۱.۱۹. زیرمجموعه‌ی ناتهی X از حلقه‌ی R ضربی بسته[۷] می‌نامیم هرگاه

۱. $1 \in X$،

۲. اگر $x, y \in X$، آنگاه $xy \in X$.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای ضربی بسته از حلقه‌ی R باشد. گوییم X در شرط اور راست[۸] صدق می‌کند هرگاه برای هر $r \in R$ و هر $x \in X$، آنگاه $y \in X$ و $s \in R$ وجود دارند به طوری که $ry = xs$. یعنی $rX \cap xR \neq \emptyset$.
مجموعه‌ی ضربی بسته X که در شرط اور راست صدق کند را اور راست می‌نامیم به طور متناظر مجموعه اور چپ تعریف می‌شود. اگر X هم اور راست و هم اور چپ باشد، آن را اور می‌نامیم.

لم ۱.۱.۲۱. فرض کنیم X یک زیرمجموعه‌ی اور راست از حلقه‌ی R باشد. هرگاه $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$، آنگاه، عناصر $s_1, s_2, \cdots, s_n \in R$ وجود دارند که $x_1 s_1 = \cdots = x_n s_n$ و $x_1 s_1 \in X$. یعنی $x_1 R \cap \cdots \cap x_n R \cap X \neq \emptyset$.

برهان. کافی است برای $n = 2$ ثابت کنیم. چون X اور راست است پس $y \in X$ و $s \in R$ وجود دارد که $x_1 y = x_2 s$ و لذا $x_1 y \in X$. $\square$

تعریف ۱.۱.۲۲. عنصر $a \in R$ منظم گوییم هر گاه پوچ‌سازهای راست و چپ آن صفر باشد.

[۷] Multiplicatively Closed Set
[۸] Right Ore

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای ضربی بسته از عناصر منظم حلقه R باشد گوییم Q حلقه‌ی کسرهای راست[۹] R نسبت به مجموعه‌ی X است هرگاه:

۱. $R \subseteq Q$،

۲. هر عنصر از X در Q وارون‌پذیر باشد،

۳. هر عنصر از Q را بتوان به فرم ax^{-1} نوشت که $a \in R$ و $x \in X$.

لم ۲۴.۱.۱. فرض کنید X زیرمجموعه‌ای ضربی بسته از عناصر منظم حلقه‌ی R باشد و S حلقه‌ی کسرهای راست R نسبت به X وجود داشته باشد، در این‌صورت :

۱. X اور راست است.

۲. برای هر $s_1, s_2, \cdots, s_n \in S$ و عناصر $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R$، $x \in X$ به قسمی وجود دارند که برای هر i، $s_i = a_i x^{-1}$.

۳. اگر $a, b \in R$، $x, y \in X$، آنگاه $ax^{-1} = by^{-1}$، اگر و تنها اگر، عناصر $c, d \in R$ وجود داشته باشند که $ac = bd$ و $xc = yd \in X$.

برهان. (۱) فرض کنیم $r \in R$ و $x \in X$. چون $x^{-1}r \in S$، پس $y \in X$ و $s \in R$ به قسمی وجود دارند که $x^{-1}r = sy^{-1}$. در نتیجه $ry = xs$. یعنی، $rX \cap xR \neq \emptyset$.
(۲) برای هر $1 \leq i \leq n$، عناصر $b_i \in R, x_i \in X$ وجود دارند که $s_i = b_i x_i^{-1}$. بنابر لم (۲۱.۱.۱)، عناصر $x \in X, c_1, c_2, \cdots, \in R$ به قسمی وجود دارند که برا ی هر i، $x = x_i c_i$. چون x و x_i در S وارون‌پذیرند از این رو c_i نیز در S وارون‌پذیر است و لذا $x^{-1} = c_i^{-1} x_i^{-1}$. بنابراین برای هر i، $s_i = b_i c_i x^{-1}$.
(۳) فرض کنیم $c, d \in R$ وجود داشته باشند که $ac = bd$ و $xc = yd \in X$. در نتیجه $ax^{-1} = ac(xc)^{-1} = bd(yd)^{-1} = by^{-1}$. بالعکس، فرض کنیم $ax^{-1} = by^{-1}$. بنابر لم (۲۱.۱.۱)، عناصر $c, d \in R$ وجود دارند که $xc = yd \in X$. پس

$$ac(xc)^{-1} = ax^{-1} = by^{-1} = bd(yd)^{-1} = bd(xc)^{-1},$$

و لذا $ac = bd$.

□

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم K یک حلقه‌ی جابجایی یکدار باشد. K-جبر (یا جبر روی K) A حلقه‌ای است که

۱. $(A, +)$ یک K- مدول یکانی است،

۲. به ازای هر $k \in K$ و $a, b \in A$، $k(ab) = (ka)b = a(kb)$.

[۹] Right Quotient Ring

مثال ۲۶.۱.۱. فرض کنیم K یک حلقه باشد و $\{x_i|i \in I\}$ مجموعه‌ای از متغیرهای آزاد تعویض‌ناپذیر روی K باشد (اگر $i \neq j$، آنگاه $x_ix_j \neq x_jx_i$، و برای هر $k \in K$، $kx_1 = x_1k$). K -حلقه‌ی آزاد تولید شده بوسیله $\{x_i|i \in I\}$ را با علامت $R = K < x_i; i \in I >$ نشان می‌دهیم. عناصر این حلقه چندجمله‌ای‌هایی بر اساس متغیرهای تعویض‌ناپذیر $\{x_i|i \in I\}$ با ضرایبی از K هستند. این حلقه با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $K[x_i; i \in I]$ تفاوت دارد (در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها متغیرها باهم جابجا می‌شوند). برای مثال، در K -حلقه‌ی آزاد $R = K < x, y >$، زیر حلقه تولید شده بوسیله‌ی متغیرهای $z_i = xy^i$ ($0 \leq i \leq n$) روی K یک K -حلقه‌ی آزاد است که با $n + 1$ متغیر تولید می‌شود. در نتیجه اگر $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ یک مجموعه از متغیرهای آزاد تعویض‌ناپذیر روی K باشد آنگاه $K < x, y >$ شامل نسخه‌ای از $K < x_0, x_1, \cdots, x_n >$ است، اما این نتیجه در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها درست نیست.

تعریف ۲۷.۱.۱. گوییم حلقه‌ی R یک زیر حاصل‌ضرب مستقیم خانواده‌ی $\{R_i|i \in I\}$ از حلقه‌ها است اگر R زیرحلقه‌ای از حاصل‌ضرب مستقیم $\prod_{i\in I} R_i$ باشد به طوری که به ازای هر $k \in I$، $\pi_k(R) = R_k$، که در آن $\pi_k : \prod_{i\in I} R_i \longrightarrow R_k$ بروریختی کانونی است.

۲.۱ حلقه‌های آرمنداریز و تقلیل یافته

برخی از ویژگی‌های حلقه‌ی R به حلقه‌ی $R[x]$ انتقال پیدا نمی‌کنند برای مثال، حلقه‌ی پوچ R وجود دارد که $R[x]$ پوچ نیست. اما اگر حلقه‌ی R آرمنداریز باشد، آنگاه، بسیاری از ویژگی‌های R به $R[x]$ انتقال پیدا می‌کنند. در این بخش حلقه‌های آرمنداریز[۱۰] را معرفی می‌کنیم، سپس رابطه‌ی حلقه‌های آرمنداریز را با حلقه‌های تقلیل یافته بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. حلقه‌ی R را آرمنداریز می‌نامیم هرگاه $f(x) = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_mx^m$ و $g(x) = b_۰ + b_۱x + \cdots + b_nx^n$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = ۰$، آنگاه برای هر i, j داریم $a_ib_j = ۰$.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $n \geq ۲$. در این صورت حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی روی R آرمنداریز نیست.

حل چون هر زیرحلقه از حلقه‌ی آرمنداریز، آرمنداریز است، لذا کافی است نشان دهیم حلقه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ بالا مثلثی روی R آرمنداریز نیست. فرض کنیم $S = U_۲(R)$. دو عنصر

$$f(x) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} x$$

و

$$g(x) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} x$$

از $S[x]$ را در نظر می‌گیریم. حال $f(x)g(x) = ۰$ و

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \neq ۰,$$

پس S آرمنداریز نیست. بنابراین $U_n(R)$ آرمنداریز نیست.

لم ۳.۲.۱. فرض کنیم حلقه‌ی R آرمنداریز باشد و $a, b, c \in R$.

۱. هرگاه n عددی صحیح و مثبت باشد و $ac^nb = ۰$، آنگاه $acb = ۰$.

۲. هرگاه $ab = ۰$ و برای عدد صحیح و مثبت n، c^n مرکزی باشد، آنگاه $acb = ۰$.

برهان. (۱). چندجمله‌ای‌های $f(x) = a(۱ - cx)$ و $g(x) = (۱ + cx + \cdots + c^{n-۱}x^{n-۱})b$ را در نظر می‌گیریم. چون R آرمنداریز است و $f(x)g(x) = ۰$، پس $acb = ۰$.

(۲). چون $ac^nb = ۰$، لذا با استفاده از (۱) نتیجه حاصل است. □

تعریف ۴.۲.۱. حلقه‌ی R را آبلی می‌نامیم هر گاه هر خود توان آن مرکزی باشد.

گزاره ۵.۲.۱. هر حلقه‌ی آرمنداریز، آبلی است.

[۱۰] Armendariz Ring

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R آرمنداریز باشد و $e = e^{۲} \in R$ و $r \in R$. قرار می‌دهیم:

$$a = e, \quad b = (۱ - e), \quad c = er(۱ - e).$$

در نتیجه، $ab = ۰, c^{۲} = ۰$ و لذا بنابر لم قبل $acb = ۰$. به همین نحوه اگر $a_{۱} = ۱ - e$، $b_{۱} = e$ و $c_{۱} = (۱ - e)re$ باشد آنگاه داریم $a_{۱}c_{۱}b_{۱} = ۰$. بنابراین e مرکزی است. □

لم ۶.۲.۱. فرض کنیم حلقه‌ی R آبلی باشد، در این صورت برای هر ایده‌آل غیر صفر پوچ N از R، $\frac{R}{N}$ آبلی است.

برهان. به گزاره (۳.۷.۲) در [۲۴] رجوع کنید. □

لم ۷.۲.۱. گزاره‌های زیر در حلقه‌ی آبلی R معادلند:

۱. R آرمنداریز است،

۲. برای هر خود توان $e \in R$،حلقه‌های eR و $(۱ - e)R$ آرمنداریز هستند،

۳. خود توان $e \in R$ وجود دارد به طوری که حلقه‌های eR و $(۱ - e)R$ آرمنداریز هستند.

برهان. (۱) $\longrightarrow$ (۲) $\longrightarrow$ (۳) بدیهی است.

(۳) $\longrightarrow$ (۱). فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{n} b_j x^j$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = ۰$. فرض کنیم $e^{۲} = e \in R$. اگر $f_{۱}(x) = ef(x)$، $f_{۲}(x) = (۱ - e)f(x)$، $g_{۱}(x) = eg(x)$، $g_{۲}(x) = (۱ - e)g(x)$، آنگاه :

$$f(x)g(x) = f_{۱}(x)g_{۱}(x) + f_{۲}(x)g_{۲}(x)$$

و لذا $f_{۱}(x)g_{۱}(x) = ef(x)g(x) = ۰$ و $f_{۲}(x)g_{۲}(x) = (۱ - e)f(x)g(x) = ۰$. در نتیجه برای هر i, j، $a_i b_j = ۰$ و $a_i b_j (۱ - e) = ۰$ و لذا $a_i b_j = ۰$. بنابراین R آرمنداریز است. □

لم ۸.۲.۱. فرض کنید حلقه‌ی R آرمنداریز باشد و $f_{۱}, \cdots, f_n \in R[x]$. اگر $f_{۱}f_{۲}\cdots f_n = ۰$ آنگاه، $a_{۱}\cdots a_n = ۰$، برای هر i، $a_i \in C_{f_i}$. (C_{f_i} نمایانگر مجموعه‌ی ضرایب چند جمله‌ای f_i است)

برهان. فرض کنیم $a_{۱} \in C_{f_{۱}}$. چون $f_{۱}(f_{۲}\cdots f_n) = ۰$ پس برای هر $b \in C_{f_{۲}\cdots f_n}$، $a_{۱}b = ۰$. بنابرین $a_{۱}f_{۲}\cdots f_n = ۰$ و لذا $(a_{۱}f_{۲})(f_{۳}\cdots f_n) = ۰$. چون $a_{۱}a_{۲} \in C_{a_{۱}f_{۲}}$، پس برای هر $c \in C_{f_{۳}\cdots f_n}$، $(a_{۱}a_{۲})c = ۰$. بنابراین $a_{۱}a_{۲}f_{۳}\cdots f_n = ۰$. با ادامه این روند نتیجه می‌گیریم $a_{۱}a_{۲}\cdots a_n = ۰$. □

قضیه ۹.۲.۱. حلقه‌ی R آرمنداریز است اگر و تنها اگر، $R[x]$ آرمنداریز باشد.

برهان. اگر $R[x]$ آرمنداریز باشد، آنگاه R زیرحلقه‌ای $R[x]$ از و لذا آرمنداریز از آن است. حال فرض می‌کنیم R آرمنداریز باشد و $f(t), g(t) \in R[x][t]$ و $f(t)g(t) = ۰$. قرار می‌دهیم:

$$f(t) = f_{۰} + f_{۱}t + \cdots + f_n t^n,$$

$$g(t) = g_{۰} + g_{۱}t + \cdots + g_m t^m.$$

که $f_i, g_i \in R[x]$. نشان می‌دهیم برای هر i, j، $f_i g_j = 0$. قرار می‌دهیم،

$$k = degf_0 + degf_1 + \cdots + degf_n + degg_0 + \cdots + degg_m$$

که deg نمایانگر درجه‌ی یک چندجمله‌ای است و درجه‌ی تمام چندجمله‌ای‌های ثابت را صفر در نظر می‌گیریم. چندجمله‌ای‌های

$$f(x^k) = f_0 + f_1 x^k + \cdots + f_n x^{kn}, \quad g(x^k) = g_0 + g_1 x^k + \cdots + g_m x^{km}$$

در $R[x]$ قرار دارند و مجموعه‌ی ضرایب تمام f_iها و مجموعه‌ی ضرایب تمام g_jها به ترتیب با مجموعه‌ی ضرایب $f(x^k)$ و $g(x^k)$ برابر هستند.
چون $f(t)g(t) = 0$ و x با تمام عناصر R جابجا می‌شود، لذا $f(x^k)g(x^k) = 0$. از این که R آرمنداریز است، نتیجه می‌گیریم حاصل‌ضرب هر کدام از ضرایب f در هر کدام از ضرایب g صفر است. بنابراین $f_i g_j = 0$ و لذا $R[x]$ آرمنداریز است. □

نتیجه ۱۰.۲.۱. فرض کنیم $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل تعویض‌پذیر روی حلقه‌ی آرمنداریز R باشد. در این صورت هر زیر حلقه از $R[x_\alpha|\alpha \in \Lambda]$ آرمنداریز است.

برهان. فرض کنیم $f, g \in R[x_\alpha|\alpha \in \Lambda][t]$ و $fg = 0$. زیرمجموعه‌ی متناهی $\{x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_n}\} \subseteq \{x_\alpha\}$ وجود دارد که $f, g \in R[x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_n}][t]$ بنا به قضیه قبل $R[x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_n}]$ آرمنداریز است. پس برای هر $a_i \in C_f$ و $b_j \in C_g$، $a_i b_j = 0$. بنابراین $R[x_\alpha|\alpha \in \Lambda]$ آرمنداریز است و در نتیجه هر زیرحلقه‌ی آن نیز آرمنداریز است.

□

قضیه ۱۱.۲.۱. فرض کنیم $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل تعویض‌پذیر روی حلقه‌ی R باشد و $f_1, \cdots, f_n \in R[x_\alpha|\alpha \in \Lambda]$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. R آرمنداریز است،

۲. اگر $f_1 f_2 \cdots f_n = 0$، آنگاه $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$، که برای هر i، $a_i \in C_{f_i}$.

برهان. (۲) $\longleftarrow$ (۱) بدیهی است.
(۱) $\longleftarrow$ (۲). می‌توان فرض نمود $f_1, \cdots, f_n \in R[x_1, \cdots, x_m]$، که $m \geq 1$. فرض کنیم $a_i \in C_{f_i}$. اگر هر f_i را بصورت یک چندجمله‌ای براساس متغیر x_m بنویسیم، آنگاه $f_i = \sum f_{ij} x_m^j \in R[x_1 \cdots, x_{m-1}][x_m]$. چون $R[x_1, \cdots, x_{m-1}]$ آرمنداریز است، بنا بر گزاره (۸.۲.۱)، برای هر $j_1, \cdots, j_n$، $f_{1j_1} \cdots f_{nj_n} = 0$. از این که $a_i \in C_{f_{ij}}$ ، و با استفاده از استقرا روی m نتیجه می‌گیریم $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$. □

لم ۱۲.۲.۱. هر حلقه‌ی تقلیل یافته، آرمنداریز است.

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R تقلیل یافته باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ دو عضو از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. با استفاده از استقرا روی $m+n$ لم را ثابت می‌کنیم. اگر $m+n=1$ باشد آنگاه نتیجه حاصل است. فرض می‌کنیم $m+n>1$ و $a_m\neq 0\neq b_n$. چون $f(x)g(x)=0$ و R تقلیل یافته است، پس $b_na_m=a_mb_n=0$. در نتیجه $b_nf(x)g(x)=\big(\sum_{i=0}^{m-1}b_na_ix^i\big)\big(\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\big)=0$ و با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر $0\leq i\leq m-1$ و $0\leq j\leq n$، $b_na_ib_j=0$ و چون R تقلیل یافته است، از این رو برای هر $0\leq i\leq m-1$، $b_na_i=0=a_ib_n$. پس $\big(\sum_{i=0}^{m}a_ix^i\big)\big(\sum_{j=0}^{n-1}b_jx^j\big)=0$ و با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n-1$، $a_ib_j=0$. □

مثال ۱۳.۲.۱. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حلقه‌ی اعداد صحیح باشد و

$$R=\left\{\begin{bmatrix}a & c\\ 0 & b\end{bmatrix}\Big|a,b,c\in\mathbb{Z}\&a-b\equiv c\equiv 0(mod2)\right\}.$$

در این صورت حلقه‌های $\frac{R}{P(R)}$ و $P(R)$ آرمنداریز هستند، اما R آرمنداریز نیست($P(R)$ نمایانگر رادیکال اول حلقه R است.).

حل: به وضوح

$$P(R)=\left\{\begin{bmatrix}0 & c\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Big|c\in\mathbb{Z}\&c\equiv 0(mod2)\right\}.$$

آرمنداریز است. چون $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ تنها خود توان‌های R هستند، لذا R آبلی است. چون

$$\frac{R}{P(R)}=\left\{\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}\Big|a,b\in\mathbb{Z}\&a-b\equiv 0(mod2)\right\}\cong\{(a,b)|a-b\equiv o(mod2)\}.$$

و اگر $(a,b)^2=(a^2,b^2)=(0,0)$، آنگاه، $a=0=b$، پس $\frac{R}{P(R)}$ تقلیل یافته است. بنابراین $\frac{R}{P(R)}$ آرمنداریز است.

حال نشان می‌دهیم R آرمنداریز نیست. چندجمله‌ای‌های

$$f(x)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}x,$$

و

$$g(x)=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}x,$$

از حلقه‌ی $R[x]$ را در نظر می‌گیریم. حال $f(x)g(x)=0$ و $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\neq 0$، پس R آرمنداریز نیست.

اگر برای هر ایده‌آل ناصفر I حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ آرمنداریز باشد، آیا R آرمنداریز است؟ مثال بعد به این سوال پاسخ منفی می‌دهد.

مثال ۱۴.۲.۱. فرض کنیم F یک میدان باشد و $R=\begin{bmatrix} F & F \\ \circ & F \end{bmatrix}$. هر گاه I ایده‌آلی ناصفر از R باشد آنگاه، $\frac{R}{I}$ آرمنداریز است، اما R آرمنداریز نیست.

حل: بنابر مثال (۲.۲.۱)، R آرمنداریز نیست. نشان می‌دهیم اگر I ایده‌آلی سره و ناصفر از R باشد آنگاه: $\frac{R}{I}$ آرمنداریز است. توجه داریم که $\begin{bmatrix} F & F \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} \circ & F \\ \circ & F \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \circ & F \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$ تنها ایده‌آل‌های سره ناصفر R هستند. اگر $I=\begin{bmatrix} F & F \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$، آنگاه: $\frac{R}{I}\cong F$ و لذا $\frac{R}{I}$ آرمنداریز است. حال نشان می‌دهیم I نیز آرمنداریز است. فرض کنیم

$$f(x)=\alpha_\circ+\alpha_۱ x+\cdots+\alpha_n x^n,$$
$$g(x)=\beta_\circ+\beta_۱ x+\cdots+\beta_m x^m.$$

دو عضو از $I[x]$ باشند و $f(x)g(x)=\circ$. برای هر i,j، فرض می‌کنیم :

$$\alpha_i=\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \qquad \beta_j=\begin{bmatrix} c_j & d_j \\ \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

فرض کنیم $\alpha_\circ\neq\circ$ و $\beta_\circ\neq\circ$. در نتیجه $a_\circ d_\circ=\circ=a_\circ c_\circ$. اگر $a_\circ\neq\circ$، آنگاه $c_\circ=d_\circ=\circ$، که یک تناقض است. بنابراین $a_\circ=\circ$ و لذا $b_\circ\neq\circ$. پس برای هر j، $\alpha_\circ\beta_j=\circ$. در نتیجه $\alpha_۱\beta_\circ$ ضریب x در $f(x)g(x)$ است و لذا $a_۱ d_\circ=\circ=a_۱ c_\circ$. اگر $a_۱\neq\circ$ آنگاه: $c_\circ=\circ=d_\circ$، که یک تناقض است. در نتیجه برای هر j، $\alpha_۱\beta_j=\circ$. با ادامه‌ی این روند می‌توان نشان داد برای هر i,j، $\alpha_i\beta_j=\circ$. بنابراین I آرمنداریز است.

اگر $J=\left(\begin{smallmatrix} \circ & F \\ \circ & F \end{smallmatrix}\right)$، آنگاه: $\frac{R}{J}\cong F$ و لذا $\frac{R}{J}$ آرمنداریز است. با استدلالی مشابه پاراگراف قبل می‌توان نشان داد J نیز آرمنداریز است.

اگر $K=\left(\begin{smallmatrix} \circ & F \\ \circ & \circ \end{smallmatrix}\right)$ آنگاه $\frac{R}{K}\cong F\oplus F$ و لذا $\frac{R}{K}$ نیز آرمنداریز است. چون $K^۲=\circ$، پس K نیز آرمنداریز است.

قضیه ۱۵.۲.۱. فرض کنیم I ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. اگر حلقه‌ی I تقلیل یافته و $\frac{R}{I}$ آرمنداریز باشد، آنگاه R آرمنداریز است.

برهان. فرض کنیم $a,b\in R$ و $ab=\circ$. چون I تقلیل یافته است و $bIa\subseteq I$ و $(bIa)^۲=\circ$، پس $bIa=\circ$. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=\circ}^{m}a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=\circ}^{n}b_j x^j$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=\circ$. چون $\frac{R}{I}$ آرمنداریز است، پس برای هر i,j، $a_i b_j\in I$. از استقرا روی m استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم برای هر i,j، $a_i b_j=\circ$. برای $m=\circ$ نتیجه به وضوح حاصل است. فرض کنیم $m>\circ$ باشد. ادعا می‌کنیم برای هر $j\in\{\circ,۱,\cdots,n\}$، $a_\circ b_j=\circ$. فرض کنیم $۱\leq k<m$ و برای هر $j\in\{\circ,۱,\cdots,k-۱\}$، $a_\circ b_j=\circ$. در نتیجه $b_j I a_\circ=\circ$ و از این رو :

$$(a_{k-j}b_j)(a_\circ b_k)^۲=a_{k-j}b_j(a_\circ b_k)a_\circ b_k\in a_{k-j}b_j I a_\circ b_k=a_{k-j}(b_j I a_\circ)b_k=\circ$$

عنصر $\circ = a_\circ b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_\circ = a_\circ b_k + \sum_{j=\circ}^{k-1} a_{k-j} b_j$ ضریب x^k در چندجمله‌ای $f(x)g(x) = \circ$ است. اگر $(a_\circ b_k)^2$ را از راست در ضریب x^k ضرب کنیم،آنگاه داریم:

$$\circ = (a_\circ b_k + \sum_{j=\circ}^{k-1} a_{k-j} b_j)(a_\circ b_k)^2 = (a_\circ b_k)^2.$$

چون I تقلیل یافته است و $a_\circ b_k \in I$، از این رو $a_\circ b_k = \circ$. در نتیجه برای هر $j \in \{\circ, 1, \cdots, n\}$، $a_\circ b_j = \circ$ و لذا $f_1(x)g(x) = \circ$، که $f_1(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_m x^{m-1}$. چون $deg(f_1(x)) < m$، با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر $1 \leq i \leq m$ و $\circ \leq j \leq n$، $a_i b_j = \circ$. بنابراین برای هر i, j، $a_i b_j = \circ$. □

تعریف ۱۶.۲.۱. حلقه‌ی کسرهای راست حلقه‌ی R (در صورت وجود) نسبت به مجموعه تمام عناصر منظم R را حلقه‌ی کسرهای راست کلاسیک[11] R می‌نامیم. حلقه‌ی کسرهای چپ کلاسیک متناظراً تعریف می‌شود.

تعریف ۱۷.۲.۱. می‌گوییم مدول A بعد متناهی دارد هر گاه زیر مدول‌های غیر قابل تجزیه‌ی E_i از $E(A)$ وجود داشته باشد به طوری که $E(A) = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.

تعریف ۱۸.۲.۱. حلقه‌ی R را گلدی راست می‌نامیم هر گاه، R_R بعد متناهی داشته باشد و در شرط $A.C.C$ روی پوچ سازهای راست صدق کند. حلقه‌ی گلدی چپ متناظراً تعریف می‌شود. اگر حلقه‌ای هم گلدی راست و هم گلدی چپ باشد آن را گلدی[12] می‌نامیم.

قضیه ۱۹.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و حلقه‌ی کسرهای راست کلاسیک آن، $Q(R)$، وجود داشته باشد. در این صورت R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر $Q(R)$ تقلیل یافته باشد.

برهان. کافی است نشان دهیم اگر R تقلیل یافته باشد، آنگاه $Q(R)$ تقلیل یافته است. فرض کنیم q یک عنصر ناصفر از $Q(R)$ باشد و $q^2 = \circ$. عناصر $a, b \in R$ وجود دارند به طوری که b منظم است و $q = ab^{-1}$. چون $b^{-1}a \in Q(R)$، پس عناصر $c, d \in R$ وجود دارند به طوری که d منظم است و $b^{-1}a = cd^{-1}$.

در نتیجه: $\circ = ab^{-1}ab^{-1} = acd^{-1}b^{-1} = ac(bd)^{-1}$ و لذا $ac = \circ$. پس $(ca)^2 = \circ$ و چون R تقلیل یافته است، از این رو $ca = \circ$. از این که $b^{-1}a = cd^{-1}$، نتیجه می‌گیریم $ad = bc$. بنابراین $ada = bca = \circ$ و چون R تقلیل یافته است، از این رو $ad = \circ$ و در نتیجه، $a = \circ$ که یک تناقض است. بنابراین $Q(R)$ تقلیل یافته است.

□

قضیه ۲۰.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و حلقه‌ی کسرهای راست کلاسیک آن $Q = Q(R)$، وجود داشته باشد. در این صورت R آرمنداریز است اگر و تنها اگر، Q آرمنداریز باشد.

[11] Right Classical Quotient Ring

[12] Goldie Ring

برهان. کافی است نشان دهیم اگر R آرمنداریز باشد، آنگاه، Q آرمنداریز است. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j$ دو عضو از $Q[x]$ باشند و $f(x)g(x) = 0$. بنابر لم (۲۴.۱.۱) عناصر $a_i, b_j, u, v \in R$ وجود دارند به طوری که u, v منظم هستند و برای هر i, j، $\alpha_i = a_i u^{-1}$ و $\beta_j = b_j v^{-1}$. همچنین عناصر $c_j, w \in R$ وجود دارند به طوری که w منظم است و برای هر j، $u^{-1}b_j = c_j w^{-1}$. دو چندجمله‌ای $f_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g_1(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$ از حلقه‌ی $R[x]$ را در نظر می‌گیریم. از این که

$$\begin{aligned} 0 = f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \alpha_i \beta_j x^{i+j} &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i (u^{-1} b_j) v^{-1} x^{i+j} \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i c_j (vw)^{-1} x^{i+j} = f_1(x) g_1(x) (vw)^{-1}. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$f_1(x) g_1(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i c_j x^{i+j} = 0.$$

چون R آرمنداریز است، برای هر i, j داریم:

$$\alpha_i \beta_j = a_i u^{-1} b_j v^{-1} = a_i c_j w^{-1} v^{-1} = 0.$$

بنابراین Q آرمنداریز است.

□

نتیجه ۲۱.۲.۱. فرض کنیم حلقه‌ی R نیم اول و گلدی راست و $Q = Q(R)$ حلقه‌ی کسرهای راست گلدی آن باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. R آرمنداریز است،

۲. R تقلیل یافته است،

۳. Q آرمنداریز است،

۴. Q تقلیل یافته است،

۵. Q با حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی از حلقه‌های تقسیم برابر است.

برهان. (۱) $\leftrightarrow$ (۳). از قضیه‌ی (۲۰.۲.۱) نتیجه می‌شود.
(۲) $\longleftarrow$ (۱) و (۴) $\longleftarrow$ (۳) از لم (۱۲.۲.۱) نتیجه می‌شود.
(۵) $\longleftarrow$ (۴) و (۵) $\longleftarrow$ (۲) بدیهی است.
(۳) $\longleftarrow$ (۵). بنا به نتیجه‌ی (۵.۲.۱) هر حلقه‌ی آرمنداریز، آبلی است، پس Q آبلی است و چون نیم ساده‌ی آرتینی است، از این رو Q با حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی از حلقه‌های تقسیم برابر است.
(۲) $\leftrightarrow$ (۴). از قضیه‌ی (۱۹.۲.۱) بدست می‌آید.

□

قضیه ۲۲.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $n \geq ۲$. در این صورت R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر، $R[x]/<x^n>$ آرمنداریز باشد. ($<X^n>$ ایده‌آل تولید شده توسط X^n است)

برهان. فرض کنیم $R[x]/<x^n>$ آرمنداریز باشد، $r \in R$ و $r^n = ۰$. چون r و $\bar{x}$ جابجا می‌شوند، پس:

$$۰ = r^n - \bar{x}^n t^n = (r - \bar{x}t)(r^{n-۱} + r^{n-۲}\bar{x}t + \cdots + \bar{x}^{n-۱}t^{n-۱})$$

از این که $R[x]/<x^n>$ آرمنداریز است، نتیجه می‌گیریم $r\bar{x}^{n-۱} = ۰$ و لذا $r = ۰$. بنابراین R تقلیل یافته است. حال فرض می‌کنیم R تقلیل یافته باشد. اگر $\bar{x}$ را در حلقه‌ی $R[x]/<x^n>$ با علامت u نشان دهیم، آنگاه $R[x]/<x^n> = R[u] = R + Ru + \cdots + Ru^{n-۱}$. فرض کنیم $f, g \in R[u][t]$ و $fg = ۰$. قرار می‌دهیم:

$$f = f_۰ + f_۱u + \cdots + f_{n-۱}u^{n-۱},$$
$$g = g_۰ + g_۱u + \cdots + g_{n-۱}u^{n-۱}.$$

که $f_i, g_j \in R[t]$. برای هر $i + j \geq n$، چون $u^{i+j} = ۰$ پس حاصل‌ضرب هر مضرب از u^i در هر مضرب از u^j صفر است. حال نشان می‌دهیم اگر $i + j < n$، آنگاه $f_ig_j = ۰$ و چون R تقلیل یافته است، از این رو حاصل‌ضرب هر ضریب از f_i در هر ضریب از g_j صفر است. بنابراین حاصل‌ضرب هر ضریب از f در هر ضریب از g صفر است. از

$$\begin{aligned}
۰ = fg &= (f_۰ + f_۱u + \cdots + f_{n-۱}u^{n-۱})(g_۰ + g_۱u + \cdots + g_{n-۱}u^{n-۱}) \\
&= f_۰g_۰ + (f_۰g_۱ + f_۱g_۰)u + (f_۰g_۲ + f_۱g_۱ + f_۲g_۰)u^۲ + \cdots + (f_۰g_{n-۱} + f_۱g_{n-۲} + \cdots + f_{n-۱}g_۰)u^{n-۱}.
\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم

$$۰ = f_۰g_۰ = f_۰g_۱ + f_۱g_۰ = f_۰g_۲ + f_۱g_۱ + f_۲g_۰ = \cdots = f_۰g_{n-۱} + f_۱g_{n-۲} + \cdots + f_{n-۱}g_۰$$

و چون $R[t]$ تقلیل یافته است، از این رو برای هر i, j، $i + j < n$، $f_ig_j = ۰$. $\square$

لم ۲۳.۲.۱. فرض کنیم R حلقه اول و نوتری[۱۳] راست و چپ باشد، بنابراین ، R آرمنداریز است اگر و تنها اگر، R تقلیل یافته باشد.

برهان. از نتیجه‌ی (۲۱.۲.۱) بدست می‌آید. $\square$

۳.۱ حلقه‌های پوچ- آرمنداریز

تعریف ۱.۳.۱. حلقه‌ی R را پوچ–آرمنداریز[۱۴] نامیم هرگاه $f(x), g(x) \in R[x]$ و $f(x)g(x) \in N(R)[x]$ و $a \in C_f$ و $b \in C_g$ آنگاه ab پوچ توان باشد.

[۱۳] Noetherian Ring

[۱۴] Nil-Armendariz

لم ۲.۳.۱. فرض کنیم I ایده‌آلی پوچ از حلقه‌ی R باشد. در این صورت R پوچ-آرمنداریز است اگر و تنها اگر، $\frac{R}{I}$ پوچ-آرمنداریز باشد.

برهان. قرار می‌دهیم $\bar{R}=\frac{R}{I}$. چون I پوچ است، پس $N(\bar{R})=\overline{N(R)}$. در نتیجه $f(x)g(x)\in N(R)[x]$ اگر و تنها اگر، $\bar{f}(x)\bar{g}(x)\in N(\bar{R})[x]$. همچنین اگر $a\in C_f$ و $b\in C_g$، آنگاه $ab\in N(R)$ اگر و تنها اگر، $\bar{a}\bar{b}\in N(\bar{R})$. بنابراین R پوچ-آرمنداریز است اگر و تنها اگر، $\bar{R}$ پوچ-آرمنداریز باشد. $\square$

لم ۳.۳.۱. اگر R آرمنداریز باشد آنگاه $N(R)[x]\subseteq N(R[x])$.

برهان. فرض کنیم $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in N(R)[x]$. عدد صحیح مثبت k وجود دارد به طوری که برای هر $i=0,1,\cdots,n$، $a_i^k=0$. نشان می‌دهیم $(f(x))^{(n+1)k}=0$. هرضریب از $(f(x))^{(n+1)k}$ مجموعی از تک‌جمله‌ای‌هایی بر اساس $(n+1)k$ تا از a_iهاست. فرض کنیم $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{(n+1)k}}$ یکی از این تک‌جمله‌ای‌ها باشد که $0\leq i_j\leq n$. عدد $j_0\in\{0,1,\cdots,n\}$ وجود دارد به طوری که a_{j_0} حداقل k بار در این تک‌جمله‌ای ظاهر شده است. فرض کنیم $a_{i_{r_1}}=a_{i_{r_2}}=\cdots=a_{i_{r_k}}=a_{j_0}$، که $1\leq r_1<r_2<\cdots<r_k\leq(n+1)k$. تک‌جمله‌ای فوق را می‌توان به شکل

$$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{r_1-1}}a_{j_0}a_{i_{r_1+1}}\cdots a_{i_{r_2-1}}a_{j_0}\cdots a_{i_{r_k-1}}a_{j_0}a_{i_{r_k+1}}\cdots a_{i_{(n+1)k}}$$

نوشت. برای هر $i_s\neq i_{r_t}$ قرار می‌دهیم

$$f'_{i_s}(x)=1-a_{i_s}x,$$
$$f''_{i_s}(x)=1+a_{i_s}x+\cdots+a_{i_s}^{k-1}x^{k-1}.$$

به وضوح a_{i_s} یکی از ضرایب $f'_{i_s}(x)f''_{i_s}(x)$ و $f'_{i_s}(x)f''_{i_s}(x)=1$. چون $a_{j_0}^k=0$ و $f'_{i_s}(x)f''_{i_s}(x)=1$ پس اگر در تک‌جمله‌ای فوق به جای a_{i_s} از $f'_{i_s}(x)f''_{i_s}(x)$ استفاده کنیم آنگاه:

$$f'_{i_1}(x)f''_{i_1}(x)\cdots f'_{i_{r_1-1}}(x)f''_{i_{r_1-1}}(x)a_{j_0}f'_{i_{r_1+1}}(x)\cdots f'_{i_{r_k-1}}(x)f''_{i_{r_k-1}}(x)a_{j_0}f'_{i_{r_k+1}}(x)\cdots f''_{i_{(n+1)k}}(x)=0$$

از این که R آرمنداریز است، با استفاده از قضیه (۱۱.۲.۱) نتیجه می‌گیریم حاصل‌ضرب ضرایب چندجمله‌ای‌های ظاهر شده در عبارت فوق صفر هستند. در نتیجه $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{(n+1)k}}=0$ و لذا تمام ضرایب $(f(x))^{(n+1)k}$ صفر هستند. بنابراین $f(x)\in N(R[x])$. $\square$

لم ۴.۳.۱. هر حلقه‌ی آرمنداریز، پوچ-آرمنداریز است.

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R آرمنداریز باشد و $f(x),g(x)\in R[x]$ و $f(x)g(x)\in N(R)[x]$. چون R آرمنداریز است، بنا به لم (۳.۳.۱) عدد صحیح مثبت k وجود دارد به طوری که $(f(x)g(x))^k=0$ و لذا برای هر $a\in C_f$ و $b\in C_g$، $abab\cdots ab=0$. بنابراین R پوچ-آرمنداریز است. $\square$

لم ۵.۳.۱. فرض کنیم حلقه‌ی R پوچ- آرمنداریز باشد و $n \geq ۲$. اگر

$$f_۱(x), f_۲(x), \cdots, f_n(x) \in R[x],$$
$$f_۱(x)f_۲(x)\cdots f_n(x) \in N(R)[x].$$

آنگاه برای هر $k = ۱, ۲, \cdots, n$،

$$a_۱a_۲\cdots a_n \in N(R)$$

که $a_i \in C_{f_i}$.

برهان. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. برای $n = ۲$ از تعریف حلقه‌ی پوچ- آرمنداریز نتیجه می‌شود. فرض کنیم $n > ۲$. قرار می‌دهیم:

$$h(x) = f_۱(x)\cdots f_{n-۱}(x)$$

چون R پوچ- آرمنداریز است و $h(x)f_n(x) \in N(R)[x]$، پس برای هر $a_n \in C_{f_n}$ و $a_h \in C_h$، a_ha_n پوچ توان است. بنابراین برای هر $a_n \in C_{f_n}$ داریم:

$$f_۱(x)f_۲(x)\cdots f_{n-۲}(x)(f_{n-۱}(x)a_n) = h(x)a_n \in N(R)[x]$$

چون ضرایب $f_{n-۱}(x)a_n$ به فرم $a_{n-۱}a_n$ هستند که $a_{n-۱} \in C_{f_{n-۱}}$، پس بنابر فرض استقرا، برای هر $k = ۱, \cdots, n$ و $a_k \in C_{f_k}$، $a_۱a_۲\cdots a_{n-۱}a_n$ پوچ توان است. $\square$

لم ۶.۳.۱. فرض کنیم حلقه R پوچ- آرمنداریز باشد و $a, b, c \in R$. در این صورت

۱. اگر a, b پوچ توان باشند، آنگاه، ab پوچ توان است.

۲. اگر a, b, c پوچ توان باشند، آنگاه، $(a+b)c$ و $c(a+b)$ پوچ توان هستند.

۳. اگر a, b, c پوچ توان باشند، آنگاه، $a + bc$ پوچ توان است.

۴. اگر a, b پوچ توان باشند، آنگاه، $a - b$ پوچ توان است.

برهان. (۱). فرض کنیم a, b پوچ توان باشند و $b^m = ۰$. در نتیجه :

$$(a - abx)(۱ + bx + b^۲x + \cdots + b^{m-۱}x^{m-۱}) = a \in N(R)[x].$$

و چون R پوچ- آرمنداریز است، از این رو ab پوچ توان است.

(۲). فرض کنیم a، b و c پوچ توان باشند و $a^n = b^m = ۰$. در نتیجه:

$$(۱ + ax + \cdots a^{n-۱}x^{n-۱})(۱ - ax)(۱ - bx)(۱ + bx + \cdots b^{m-۱}x^{m-۱})c = c \in N(R)[x]$$

و لذا

$$(۱ + \cdots + a^{n-۱}x^{n-۱})(۱ - (a+b)x + abx^۲)(۱ + \cdots + b^{m-۱}x^{m-۱})c = c \in N(R)[x]$$

چون R پوچ- آرمنداریز است، بنابر لم (۵.۳.۱)، با انتخاب ضرایب مناسبی از چندجمله‌ای‌های فوق نتیجه می‌گیریم $(a+b)c$ پوچ توان است. به همین نحو می‌توان نشان داد که $c(a+b)$ پوچ توان است.

(۳). فرض کنیم a، b و c پوچ توان باشند. بنابر (۱) و (۲)، bc و $b(a+bc)$ پوچ توان هستند. در نتیجه:

$$(1-bx)(c+(a+bc)x) = c+ax-b(a+bc)x^2 \in N(R)[x]$$

و چون R پوچ- آرمنداریز است، از این رو $1\cdot(a+bc) = a+bc$ پوچ توان است.
(۴). فرض کنیم a,b پوچ توان باشند. چون a^2، a و b-پوچ توان هستند، اگر از (۳) چند بار استفاده کنیم، نتیجه می‌گیریم a^2-ab و $a^2-ab-ba$ پوچ توان هستند و لذا $a^2-ab-ba+a^2$ پوچ توان است. بنابراین $(a-b)^2$ پوچ توان است و در نتیجه $a-b$ پوچ توان است. □

قضیه ۷.۳.۱. اگر حلقه‌ی R پوچ- آرمنداریز باشد، آنگاه $N(R)$ زیرحلقه‌ای از R است.

برهان. از لم (۶.۳.۱) نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۸.۳.۱. اگر حلقه‌ی R آرمنداریز باشد، آنگاه $N(R)$ زیرحلقه‌ای از R است.
اگر حلقه‌ی R پوچ- آرمنداریز باشد، آنگاه $N(R)$ زیرحلقه‌ی R است و لذا هر ایده‌آل چپ (راست) پوچ از حلقه‌ی R در یک ایده‌آل پوچ قرار می‌گیرد. بنابراین تمام ایده‌آل‌های چپ (راست) پوچ R زیرمجموعه‌ی $N^*(R)$ هستند.

لم ۹.۳.۱. فرض کنیم حلقه‌ی R پوچ- آرمنداریز باشد و هیچ ایده‌آل پوچ ناصفر نداشته باشد. در این صورت R آرمنداریز است.

برهان. چون R پوچ- آرمنداریز است، به استناد توضیحات پاراگراف قبل، R هیچ ایده‌آل راست (چپ) پوچ ناصفر ندارد. حال فرض کنیم $f(x),g(x) \in R[x]$ و $f(x)g(x)=0$ و $a \in C_f$ و $b \in C_g$ و $r \in R$. چون $rf(x)g(x)=0$ و $ra \in C_{rf}$ و R پوچ-آرمنداریز است. از این رو rab پوچ توان است. در نتیجه Rab یک ایده‌آل چپ پوچ است. پس $Rab=\{0\}$ و لذا $ab=0$. بنابراین R آرمنداریز است. □

لم ۱۰.۳.۱. هر گاه حلقه‌ی R پوچ- آرمنداریز باشد، آنگاه $N(R[x]) \subseteq N(R)[x]$.

برهان. فرض کنیم $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in N(R[x])$ و $(f(x))^m=0$.
به استناد لم (۵.۳.۱)، $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}$ پوچ توان است، که برای هر $j=1,2,\cdots,m$، $a_{i_j}\in C_f$. به ویژه برای هر $a\in C_f$، a^m پوچ توان است، بنابراین $f(x)\in N(R)[x]$.
□

در لم (۳.۳.۱) نشان دادیم که اگر حلقه‌ی R آرمنداریز باشد، آنگاه $N(R)[x] \subseteq N(R[x])$. بنابراین نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱۱.۳.۱. هر گاه حلقه‌ی R آرمنداریز باشد، آنگاه $N(R)[x]=N(R[x])$.

قضیه ۱۲.۳.۱. فرض کنیم حلقه‌ی R پوچ- آرمنداریز باشد. در این صورت $R[x]$ پوچ-آرمنداریز است اگر و تنها اگر، $N(R)[x]=N(R[x])$.

برهان. اگر $R[x]$ پوچ-آرمنداریز باشد، به استناد قضیه (۷.۳.۱)، $N(R[x])$ زیرحلقه‌ای از $R[x]$ است. چون برای هر $k \geq 0$، $N(R)x^k$ پوچ است، پس $N(R)[x] \subseteq N(R[x])$. از طرفی چون $R[x]$ پوچ-آرمنداریز است، لذا R نیز پوچ-آرمنداریز است و در نتیجه $N(R[x]) \subseteq N(R)[x]$. بنابراین $N(R)[x] = N(R[x])$.

حال فرض کنیم $N(R)[x] = N(R[x])$ و $f(y), g(y) \in (R[x])[y]$ و $f(y)g(y) \in N(R[x])[y]$. قرار می‌دهیم:

$$f(y) = f_0 + f_1 y + \cdots + f_n y^n,$$

و

$$g(y) = g_0 + g_1 y + \cdots + g_m y^m.$$

که برای هر i, j داریم:

$$f_i = \sum_{k=0}^{s_i} f_{i_k} x^k, \qquad g_j = \sum_{l=0}^{t_j} g_{j_l} x^l.$$

عدد صحیح مثبت $m > \max\{s_i, t_j\}_{i,j}$ را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $\bar{f}(x) = f(x^m)$ و $\bar{g}(x) = g(x^m)$. مجموعه‌ی ضرایب $\bar{f}(x)$ همان مجموعه‌ی ضرایب تمام f_{i_k}ها است. مجموعه‌ی ضرایب $\bar{g}(x)$ همان مجموعه ضرایب تمام g_{j_l}ها است.

چون $N(R[x]) = N(R)[x]$، پس $\bar{f}(x)\bar{g}(x) \in N(R)[x]$ و چون R پوچ-آرمنداریز است، از این رو $f_{i_k} g_{j_l} \in N(R)$. از این که $N(R)$ زیر حلقه‌ی R است نتیجه می‌گیریم $f_i g_j \in N(R)[x]$ و چون $N(R[x]) = N(R)[x]$، پس $f_i g_j$ پوچ توان است. □

مثال ۱۳.۳.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای پوچ-آرمنداریز باشد به طوری که $R[x]$ پوچ- آرمنداریز نیست. در این صورت $\bar{R} = \dfrac{R}{P(R)}$ آرمنداریز نیست.

حل: فرض کنیم $\bar{R}$ آرمنداریز باشد و در پی تناقض می‌گردیم. چون $P(R[x]) = P(R)[x]$، پس $\bar{R}[x] \cong \dfrac{R[x]}{P(R[x])}$. از این که $\bar{R}$ آرمنداریز است، نتیجه می‌گیریم، $\bar{R}[x]$ آرمنداریز است و چون $P(R)$ پوچ است، از این رو به استناد گزاره (۲.۳.۱)، $R[x]$ پوچ-آرمنداریز است، که یک تناقض است.

فصل ۲

حلقه‌های APR

۱.۲ مقدمه

در این بخش به معرفی حلقه‌های APR می‌پردازیم و رابطه‌ی بین این حلقه‌ها با حلقه‌های آرمنداریز و پوچ-آرمنداریز را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت این شرایط زیرحلقه‌های، حلقه‌های APR، نیز APR شوند. و نیز ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R مانند I را پیدا می‌کنیم به‌طوری‌که $\frac{R}{I}$، APR شود.

۲.۲ معرفی حلقه‌های APR و بررسی خواص آن‌ها

تعریف ۱.۲.۲. حلقه‌ی R را آرمنداریز روی رادیکال اول یا به اختصار APR می‌نامیم هر گاه $f(x), g(x) \in R[x]$ و $f(x)g(x) \in N_\star(R)[x]$، آنگاه برای هر $a \in C_{f(x)}$ و هر $b \in C_{g(x)}$، $ab \in N_\star(R)$. بنابراین حلقه‌ی R، APR است اگر و تنها اگر $\frac{R}{N_\star(R)}$آرمنداریز باشد.

لم ۲.۲.۲. ۱. اگر حلقه‌ی R آرمنداریز باشد آنگاه، $N_\circ(R) = N_\star(R) = N^\star(R)$.

۲. حلقه‌ی R پوچ-آرمنداریز است اگر و تنها اگر $\frac{R}{N^\star(R)}$ آرمنداریز باشد.

۳. حاصل‌ضرب مستقیم حلقه‌های آرمنداریز، آرمنداریز است همچنین خاصیت آرمنداریز از یک حلقه به زیرحلقه‌های آن نیز منتقل می‌شود.

۴. فرض کنیم R یک حلقه‌ی APR باشد، اگر $f_1, \cdots, f_n \in R[x]$ و $f_1 \cdots f_n \in N_\star(R)[x]$، آنگاه برای هر $a_i \in C_{f_i}$ داریم، $a_1 \cdots a_n \in N_\star(R)$.

۵. اگر R یک حلقه‌ی APR باشد، آنگاه $N_\star(R) = N^\star(R)$.

۶. اگر یک حلقه‌ی پوچ، APR باشد، آنگاه یک حلقه‌ی رادیکال اول است.

برهان. (۱). داریم $N^*(R) \subseteq N_*(R) \subseteq N_\circ(R)$. کافی است ثابت کنیم $N^*(R) \subseteq N_\circ(R)$. فرض کنیم $ab = \circ$ و عدد $n \geq ۱$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ad^n b = \circ$، چون R آرمنداریز است بنا به (۳.۲.۱) $adb = \circ$. در نتیجه برای $S \subseteq N(R)$، $aSb = \circ$. فرض کنیم $d \in N^*(R)$ و $d^m = \circ$.
توان‌هایی از RdR را در نظر می‌گیریم:
اگر $m = ۲$، چون $RdR \subseteq N^*(R)$ بنابراین $(RdR)^{۲.۲-۱} = RdRdRdR = \circ$.
اگر $m = ۳$، چون $RdR \subseteq N^*(R)$ بنابراین

$$(RdR)^{۲.۳-۱} = RdRdRdRdRdR = Rd^۲RdRdR = \circ.$$

در نتیجه به طور استقرایی خواهیم داشت: $(RdR)^{۲m-۱} = \circ$ لذا $d \in N_\circ(R)$ بنابراین $N^*(R) \subseteq N_\circ(R)$.
(۲). اثبات از لم (۹.۳.۱) و گزاره (۲.۳.۱) بدست می‌آید.
(۳). با توجه به $(\prod R_i)[x] \cong \prod(R_i[x])$ و خاصیت حلقه‌های آرمنداریز نتیجه به وضوح بدست می‌آید.
(۴). فرض کنیم برای $f_۱, \cdots, f_n \in R[x]$، $f_۱ \cdots f_n \in N_*(R)[x]$. بنابراین $f_۱(f_۲ \cdots f_n) \in N_*(R)[x]$، چون R حلقه‌ی APR است، برای هر $b \in C_{f_۲\cdots f_n}$ و $a_۱ \in C_{f_۱}$، $a_۱ b \in N_*(R)$. در نتیجه $a_۱(f_۲ \cdots f_n) \in N_*(R)[x]$، لذا $(a_۱ f_۲)(f_۳ \cdots f_n) \in N_*(R)[x]$. چون R، APR است، برای $a_۲ \in C_{f_۲}$ و $a_۱ a_۲ \in C_{a_۱ f_۲}$ خواهیم داشت، $(a_۱ a_۲)c \in N_*(R)$ که $c \in C_{f_۳\cdots f_n}$. در نتیجه $a_۱ a_۲(f_۳ \cdots f_n) \in N_*(R)[x]$، لذا $(a_۱ a_۲ f_۳)(f_۴ \cdots f_n) \in N_*(R)[x]$ با ادامه‌ی این روند به این نتیجه خواهیم رسید که برای هر $a_i \in C_{f_i}$، $a_۱ \cdots a_n \in N_*(R)$.
(۵). فرض کنیم R یک حلقه‌ی APR باشد پس $\bar{R} = \dfrac{R}{N_*(R)}$، آرمنداریز است. بنابراین با توجه به قسمت (۱) داریم، $N^*(\bar{R}) = N_*(\bar{R})$. لذا $\circ = (\dfrac{R}{N_*(R)})N_* = N_*(\bar{R}) = \dfrac{N^*(R)}{N_*(R)}$ و این تساوی ایجاب می‌کند $N^*(R) = N_*(R)$.
(۶). نتیجه مستقیم از قسمت (۵) بدست می‌آید.

□

تعریف ۳.۲.۲. حلقه‌ی R، ۲-اولیه[۱] است هر گاه $N_*(R) = N(R)$.
به عنوان مثال هر حلقه‌ی تقلیل یافته، ۲- اولیه است. به وضوح حلقه‌ی R، ۲- اولیه است اگر و تنها اگر $\dfrac{R}{N_*(R)}$ تقلیل یافته باشد.

تعریف ۴.۲.۲. $W(R)$ را رادیکال ودربرن[۲] حلقه R گوییم که شامل مجموع تمام ایده‌آل‌های پوچ توان

[۱] 2- Primal Ring
[۲] Wederburn Radical

حلقه R است به عبارت دیگر $W(R)=N_{\circ}(R)$ و تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&W_{\circ}(R)=\circ\\
&W_{۱}(R)=W(R)\\
&W_{۲}(R)=\{a\in R|a+W_{۱}(R)\in W(\frac{R}{W_{۱}(R)})\}\\
&\vdots\\
&W_{n}(R)=\{a\in R|a+W_{n-۱}(R)\in W(\frac{R}{W_{۱}(R)})\}
\end{aligned}$$

حلقه‌ی R را W_n-تقلیل یافته گوییم هر گاه $W_n(R)=N(R)$.

گزاره ۵.۲.۲. اگر R حلقه‌ی W_n- تقلیل یافته باشد و $n\geq ۱$ آنگاه R، ۲-اولیه است.

برهان. به [۲۲] رجوع کنید. □

با مقایسه‌ی بخش (۱) و (۵) در لم (۲.۲.۲) می‌توان حدس زد که اگر R یک حلقه‌ی APR باشد، آنگاه $N_{\circ}(R)=N_{\star}(R)=N^{\star}(R)$. با یک مثال نشان می‌دهیم که این حدس درست نیست.

مثال ۶.۲.۲. فرض کنیم k یک میدان و $k<x,y>$ یک جبر آزاد تولید شده توسط متغیرهای غیر تعویض‌پذیر x و y روی k باشد. کلمه‌ی نامتناهی

$$\omega=yxyxxyxxxyxxxxyxxxxx\cdots=\prod_{i=۱}^{\infty}yx^{i},$$

را در نظر می‌گیریم فرض کنیم I ایده‌آلی از $k<x,y>$ تولید شده توسط مجموعه‌ی همه‌ی کلماتی باشد که هیچ یک زیر کلمه‌ای از ω نباشد. قرار می‌دهیم $R=\frac{k<x,y>}{I}$، و برای سادگی به جای $x+I$ و $y+I$ از $\bar{x}$ و $\bar{y}$ استفاده می‌کنیم. چون $(R\bar{y}\bar{r}\bar{y}R)^{۲}=\circ$ برای هر $\bar{r}\in R$ و $(\bar{y}R\bar{y})^{۲}\subseteq(R\bar{y}\bar{r}\bar{y}R)^{۲}=\circ$ بنابراین $\bar{y}R\bar{y}$ مشمول در $W_{۱}(R)$ است، بنابراین $\bar{y}R\bar{y}\subseteq P(R)$، در نتیجه $y\in P(R)$. ایده‌آل $R\bar{y}R$ پوچ است، حال نشان می‌دهیم که اندیس پوچ توان کراندار ندارد، برای این منظور برای هر $n\geq ۲$ عنصر

$$\bar{y}\bar{x}+\bar{y}\bar{x}^{۲}+\cdots+\bar{y}\bar{x}^{n}$$

، از $R\bar{y}R$ را در نظر می‌گیریم، با محاسبات ساده می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned}
&(\bar{y}\bar{x}+\bar{y}\bar{x}^{۲})^{۴}=\circ,\\
&(\bar{y}\bar{x}+\bar{y}\bar{x}^{۲}+\bar{y}\bar{x}^{۳}+\bar{y}\bar{x}^{۴})^{۸}=\circ.
\end{aligned}$$

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم، اما هیچ mای وجود ندارد که $(R\bar{y}R)^{m}=\circ$. بنابراین $W_{۱}(R)\subsetneqq P(R)$. از این که $\frac{R}{R\bar{y}R}\cong k[x]$ ($k[x]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی k است) و $R\bar{y}R$ یک ایده‌آل نیم اول از R است، نتیجه می‌گیریم که $P(R)=R\bar{y}R$. بنابراین $\bar{y}\in P(R)$. اما $(R\bar{y}R)^{۲}\subseteq R\bar{y}R\bar{y}R$، بنابراین

$P(R) = W_{۲}(R)$ (چون $k[x] \cong \frac{R}{P(R)}$ لذا R، ۲-اولیه است یعنی $N(R) = P(R)$ است.).
بنابراین R، $W_{۲}$- تقلیل یافته است، اما $W_{۱}$- تقلیل یافته نیست. لذا حلقه‌ی R، ۲-اولیه است. در نتیجه $\frac{R}{N_{\star}(R)}$ تقلیل یافته است بنابراین $\frac{R}{N_{\star}(R)}$ آرمنداریز است، لذا R، حلقه‌ی APR است. از این رو بنا به بخش (۵) لم (۲.۲.۲) داریم، $N_{\star}(R) = N^{\star}(R)$. چون $N_{\circ}(R) = W(R) = W_{۱}(R) \subsetneqq P(R)$ و $\bar{y} \in P(R)$ و $\bar{y}$ دلخواه بود بنابراین $\bar{y} \notin N_{\circ}(R)$. در نتیجه $N_{\circ}(R) \neq N_{\star}(R) = N^{\star}(R)$.

نتیجه ۷.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه‌ی آرمنداریز باشد. برای هر ایده‌آل پوچ I از حلقه‌ی R، $\frac{R}{I}$ آبلی و پوچ- آرمنداریز است.

برهان. چون R آرمنداریز است، پس R آبلی است لذا بنا به لم (۶.۲.۱) $\frac{R}{I}$ آبلی است. از طرفی بنا به لم (۴.۳.۱) حلقه‌ی R پوچ- آرمنداریز است. قرار می‌دهیم $\bar{R} = \frac{R}{I}$. چون I پوچ است، پس $N(\bar{R}) = \overline{N(R)}$. در نتیجه $f(x)g(x) \in N(R)[x]$ اگر و تنها اگر، $\bar{f}(x)\bar{g}(x) \in N(\bar{R})[x]$. همچنین برای هر $a \in C_{f(x)}, b \in C_{g(x)}$، $ab \in N(R)$ اگر و تنها اگر $\bar{a}\bar{b} \in N(\bar{R})$ بنابراین R پوچ- آرمنداریز است اگر و تنها اگر $\bar{R}$ پوچ- آرمنداریز باشد. □

قضیه ۸.۲.۲. ۱. حلقه‌های APR، پوچ- آرمنداریز هستند.

۲. حلقه‌های آرمنداریز، APR هستند.

۳. اگر R حلقه‌ای باشد که هر حلقه‌ی خارج قسمتی اول آن آرمنداریز باشد آنگاه عبارات زیر معادلند:

a). حلقه‌ی R، APR است.

b). $\frac{R}{N_{\star}(R)}$، زیر حاصل‌ضربی از حلقه‌های اول آرمنداریز است.

c). $\frac{R}{N_{\star}(R)}$، زیر حاصل‌ضربی از حلقه‌های آرمنداریز است.

برهان. (۱). فرض کنیم حلقه‌ی R، APR باشد. بنابراین $\frac{R}{N_{\star}(R)}$ آرمنداریز است. بنا به قسمت (۵) لم (۲.۲.۲) داریم، $N_{\star}(R) = N^{\star}(R)$. در نتیجه $\frac{R}{N^{\star}(R)}$ آرمنداریز است. بنابراین بنا قسمت (۳) لم (۲.۲.۲)، R پوچ- آرمنداریز است.
(۲). فرض کنیم R یک حلقه‌ی آرمنداریز باشد. بنا به قسمت (۱) لم (۲.۲.۲) $N_{\star}(R) = N^{\star}(R)$. از طرفی بنا به لم (۴.۳.۱) R پوچ آرمنداریز است لذا بنا به قسمت (۲) لم (۲.۲.۲) $\frac{R}{N^{\star}(R)}$ آرمنداریز است در نتیجه $\frac{R}{N_{\star}(R)}$ آرمنداریز است بنابراین R، APR است.
(۳). در اثبات از این واقعیت استفاده می‌کنیم که کلاس حلقه‌های آرمنداریز نسبت به ضرب مستقیم و زیر حلقه‌هایش بسته است.
$a \Longrightarrow b$). فرض کنیم R حلقه‌ی APR باشد به‌طوری‌که حلقه‌های خارج‌قسمتی اول آن آرمنداریز باشد.

بنابراین $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ آرمنداریز است. از طرفی $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ نیم اول است. و چون $N_\star(R)$ اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R است لذا $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ زیرحلقه‌ای از حاصل‌ضرب مستقیم حلقه‌های خارج قسمتی اول آرمنداریز است در نتیجه حکم برقرار است.

$(b \Longrightarrow c)$. بدیهی است.

$(c \Longrightarrow a)$. فرض کنیم $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ زیر حاصل‌ضربی از حلقه‌های آرمنداریز باشد بنابراین $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ نیز آرمنداریز است لذا R، APR است.

□

نتیجه ۹.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد،

$\dfrac{R}{N^\star(R)}$ آرمنداریز است $\Longleftarrow$ $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ آرمنداریز است $\Longleftarrow$ R آرمنداریز باشد.

تصویر همریخت حلقه‌های آرمنداریز لزوماً آرمنداریز نیست. به عنوان مثال حلقه‌ی $\dfrac{Z}{8Z} \oplus \dfrac{Z}{8Z}$ تصویر همریخت حلقه‌ی آرمنداریز $Z \oplus \dfrac{Z}{8Z}$ است، اما خودش آرمنداریز نیست. چون مربع چندجمله‌ای $f(x) = (\bar{4}, \bar{0}) + (\bar{4}, \bar{0})x$ از حلقه‌ی $\left(\dfrac{Z}{8Z} \oplus \dfrac{Z}{8Z}\right)[x]$ صفر است، اما $0 \neq (\bar{4}, \bar{1})(\bar{4}, \bar{0})$.

۳.۲ خاصیت APR روی حلقه‌های NI و ۲- اولیه

تعریف ۱.۳.۲. حلقه‌ی R را حلقه‌ی NI می‌نامیم هرگاه $N^\star(R) = N(R)$. واضح است که حلقه‌ی R، NI است اگر و تنها اگر $N(R)$ یک ایده‌آل دو طرفه باشد.

گزاره ۲.۳.۲. حلقه‌ی R، NI است اگر و تنها اگر $R/N^\star(R)$ تقلیل یافته باشد.

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R، NI باشد بنابراین $N^\star(R) = N(R)$. چون $N(R)$ مجموعه تمام عناصر پوچ توان است لذا $R/N(R)$ تقلیل یافته است. لذا $R/N^\star(R)$ نیز تقلیل یافته است.
بالعکس، فرض کنیم $R/N^\star(R)$ تقلیل یافته باشد لذا تمام عناصر پوچ توان R در $N^\star(R)$ است. پس $N(R) \subseteq N^\star(R)$ از طرفی $N^\star(R) \subseteq N(R)$، بنابراین $N(R) = N^\star(R)$ لذا حلقه‌ی R، NI است.
□

گزاره ۳.۳.۲. حلقه‌های NI، پوچ- آرمنداریز هستند.

برهان. فرض کنیم R یک حلقه‌ی NI باشد. بنابراین $\dfrac{R}{N^\star(R)}$ تقلیل یافته است، لذا آرمنداریز است. فرض کنیم $f(x), g(x) \in R[x]$ و $f(x)g(x) \in N(R)[x]$. اگر $\bar{f}(x)$ و $\bar{g}(x)$ چندجمله‌ای‌های نظیر در $\dfrac{R}{N(R)}[x]$ باشند، پس $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{0}$. چون $\dfrac{R}{N(R)}$ آرمنداریز است، $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ برای هر $\bar{a} \in C_{\bar{f}(x)}$ و $\bar{b} \in C_{\bar{g}(x)}$. بنابراین $ab = 0$، برای هر $a \in C_{f(x)}$ و $b \in C_{g(x)}$. یعنی R، پوچ- آرمنداریز است.
□

گزاره ۴.۳.۲. حلقه‌ی R، NI است اگر و تنها اگر حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی R نیز NI باشد.

برهان. فرض کنیم U حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلثی $n \times n$ روی R باشد. فرض کنیم R، NI باشد، بنابراین $N(U) = \{(a_{ij}) \in U | a_{ii} \in N(R),\ i = ۱, ۲, \cdots, n\}$ یک ایده‌آل است در نتیجه U، NI است.
بالعکس: کافی است ثابت کنیم حلقه‌ی NI نسبت به زیر حلقه‌هایش بسته است و مجموع مستقیم زیر حلقه‌هایش است. فرض کنیم R یک حلقه‌ی NI و S یک زیر حلقه‌ای از R باشد. فرض کنیم $a, b \in N(S)$ و $s \in S$. بنابراین $a - b$، sa و as مشمول در $S \cap N(R) = N(S)$. چون R، NI است در نتیجه S نیز NI است. فرض کنیم برای هر $i \in I$، R_iها حلقه‌های NI باشند و D مجموع مستقیم R_iها باشد. فرض کنیم $C = \{c_i\} \in N(D)$ که $C^m = ۰$ و $c_i \in R_i$. بنابراین برای هر $i \in I$، $c_i^m = ۰$، در این صورت $c_i \in N^\star(R_i)$، چون هر R_i، NI است. با توجه به این که $N^\star(\oplus_{i\in J} R_i) = \oplus_{i\in I} N^\star(R_i)$ و این که تعداد متناهی از c_iها غیر صفر هستند، می‌توان نتیجه گرفت $C \in N^\star(D)$ بنابراین $N(D) \subseteq N^\star(D)$. از طرفی $N^\star(D) \subseteq N(D)$ در نتیجه $N(D) = N^\star(D)$، بنابراین D، NI است. $\square$

تعریف ۵.۳.۲. مجموعه I را مستقیم می‌نامیم هر گاه I یک مجموعه جزئا مرتبی با رابطه‌ی $\leq$ و هر زوج از عناصر آن دارای کران بالا باشد.
(A_i, ϕ_i^j) را یک سیستم مستقیم می‌نامیم هر گاه برای $i \in I$، A_iها مجموعه‌های مستقیم باشند و نگاشت $\phi_i^j : A_i \longrightarrow A_i$ که $i \leq j$ دارای دو شرط زیر باشد.

۱. وقتی که $i \leq j \leq k$، $\phi_j^k o \phi_i^j = \phi_i^k$.

۲. برای هر i، $\phi_i^i = ۱_{A_i}$.

$\varinjlim A_i$ را حد مستقیم[۳]، سیستم مستقیم[۴] (A_i, ϕ_i^j) می‌نامیم هر گاه همریختی $\mu_i : A_i \longrightarrow \varinjlim A_i$ برای هر $i \leq j$ در $\mu_i = \mu_j o \phi_i^j$ صدق کند. همچنین هر خانواده از همریختی‌های $g_i : A_i \longrightarrow A$ برای هر $i \leq j$ در $g_i = g_j o \phi_i^j$ صدق کند. در این صورت نگاشت منحصربفرد $g : \varinjlim A_i \longrightarrow A$ وجود دارد به طوری که برای هر i، $g o \mu_i = g_i$.

گزاره ۶.۳.۲. حد مستقیم سیستم مستقیم حلقه‌های NI، NI است.

برهان. فرض کنیم $R = \cup R_i = \varinjlim R_i$ حد مستقیم سیستم مستقیم (R_i, σ_{ij}) باشد به طوری که $\sigma_{ij} = \sigma_i^j$ و برای هر i، R_iها حلقه‌هایی NI هستند. نشان می‌دهیم $N(R)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R است. فرض کنیم برای هر $x, y \in N(R)$، iای وجود دارد که $x, y \in R_i$ یا i, jای وجود دارد که $x \in R_i$ و $y \in R_j$. چون برای هر $j \leq i$، $R_j \subseteq R_i$ لذا $x, y \in R_i$. پس در هر دو حالت R_iیی وجود دارد که هم

[۳]Direct Limit

[۴]Direct System

شامل x و هم شامل y باشد. بنابراین $x+y \in N(R_i) \subseteq N(R)$ در نتیجه $x+y \in N(R)$. برای هر $a \in R$ و برای هر $x \in N(R)$ وجود دارد iای که $a \in R_i$ و $x \in N(R_i)$ چون R_i، NI است لذا $ax, xa \in N(R_i) \subseteq N(R)$ در نتیجه $ax, xa \in N(R)$. بنابراین حلقه‌ی R، NI است. $\square$

در ادامه نشان می‌دهیم عکس قضیه (۸.۲.۲) قسمت (۱) برقرار نیست. با یک مثال نشان می‌دهیم هر حلقه‌ی پوچ- آرمندار یز APR نیست.

مثال ۷.۳.۲. فرض کنیم S یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد و n عدد صحیح مثبت و $R_n = U_{2^n}(S)$. ($U_{2^n}(S)$ حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $2^n \times 2^n$ روی S است) بنا به گزاره (۴.۳.۲) هر R_n یک حلقه‌ی NI است. نگاشت $\sigma : R_n \longrightarrow R_{n+1}$ را با ضابطه‌ی $A \longrightarrow \begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}$ تعریف می‌کنیم. R_n را می‌توان به عنوان یک زیر حلقه‌ای از R_{n+1} در نظر گرفت(به عبارت دیگر برای $A \in R_n$، $A = \sigma(A)$).
همچنین $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ حد مستقیم، سیستم مستقیم (R_n, σ_{ij}) به طوری که $\sigma_{ij} = \sigma^{j-i}$ که $i \leq j$ و $I = \{1, 2, \cdots\}$. بنا به گزاره (۶.۳.۲)، R یک حلقه‌ی NI است لذا بنا به گزاره (۳.۳.۲)، R پوچ- آرمندار یز است. حال نشان می‌دهیم R، APR نیست، برای این منظور ابتدا نشان می‌دهیم $N_*(R) = \circ$. فرض کنیم $\circ \neq A \in R$. بنابراین برای برخی از nها، $A = (a_{st}) \in R_n$. فرض کنیم i کوچکترین عددی باشد که سطر iام ماتریس A، شامل یک درایه‌ی غیر صفر است و j کوچکترین اندیس باشد که $a_{ij} \neq \circ$ در سطر ذکر شده است. قرار می‌دهیم $a = a_{ij}$. S تقلیل یافته است لذا نیم اول است. بنابراین دنباله‌ی ناایستای $(a_\circ, a_1, \cdots, a_y, \cdots)$ وجود دارد به طوری که $a_\circ = a$ و $a_y = a_{y-1}s_{y-1}a_{y-1}$ که $s_{y-1} \in S$ و $y = 1, 2, \cdots$.
ماتریس مربعی که مؤلفه‌ی (u, v)ام آن یک و سایر مؤلفه‌هایش صفر است را با e_{uv} نشان می‌دهیم.
فرض کنیم $A \in R_n$ و عناصر قطر A غیر صفر باشد یعنی $a_{ii} = a$. فرض کنیم $A_\circ = A$ و $A_1 = A_\circ(s_\circ e_{ii})A_\circ \in A_\circ R A_\circ$، بنابراین مؤلفه‌ی (i,i)ام A_1 برابر $a_\circ s_\circ a_\circ = a_1 \neq \circ$.
فرض کنیم $A_2 = A_1(s_1 e_{ii})A_1 \in A_1 R A_1$، بنابراین مؤلفه‌ی (i,i)ام A_2 برابر $a_1 s_1 a_1 = a_2 \neq \circ$.
با ادامه‌ی این روند بدست می‌آوریم مؤلفه‌ی (i,i)ام A_k برای هر k برابر $a_{k-1}s_{k-1}a_{k-1} = a_k \neq \circ$.
بنابراین با استقرا دنباله‌ی ناایستا $\{A_k\}$ بدست می‌آید به طوری که $A_\circ = A$ و $A_{k+1} \in A_k R A_k$ برای $k = \circ, 1, 2, \cdots$.
حال فرض کنیم عناصر قطر A صفر باشد بنابراین برای $i < j$ مؤلفه‌ی $(i+2^k, j+2^k)$ از A در R_{n+1} است و $k = n, n+1, n+2, \cdots$. فرض کنیم $A_\circ = A$ و $A_1 = A_\circ(s_\circ B_\circ)A_\circ \in A_\circ R A_\circ$ که $A_\circ$ در R_{n+1} در نظر گرفته شده و $B_\circ = e_{j(i+2^n)} \in R_{n+1}$.
قرار می‌دهیم $A_1 = (b_{st})$ و i کوچکترین عددی باشد که سطر iام ماتریس A_1 شامل یک درایه‌ی ناصفر است و $j+2^n$ کوچکترین اندیسی باشد که $b_{i(j+2^n)} = a_\circ s_\circ a_\circ = a_1 \neq \circ$ در سطر ذکر شده است.
فرض کنیم $A_2 = A_1(s_1 B_1)A_1 \in A_1 R A_1$ و $B_1 = e_{(j+2^n)(i+2^{n+1})} \in R_{n+2}$.
قرار می‌دهیم $A_2 = (C_{st})$, و i کوچکترین عددی باشد که سطر iام ماتریس A_2 شامل یک درایه‌ی ناصفر است و $j+2^n+2^{n+1}$ کوچکترین اندیسی باشد به طوری که $b_{i(j+2^n+2^{n+1})} = a_1 s_1 a_1 = a_2 \neq \circ$ در سطر ذکر شده است.
با ادامه‌ی این روند مؤلفه‌ی $(i, j+2^n+2^{n+1}+\cdots+2^{n+(k-1)})$ام از A_k را بدست می‌آوریم که برابر

$a_k \neq ۰ = a_{k-۱}s_{k-۱}a_{k-۱}$ برای هر k. بنابراین دنباله‌ی ناایستای $\{A_k\}$ بدست می‌آید که $A_۰ = A$ و $A_{k+۱} \in A_kRA_k$ برای $k = ۰, ۱, \cdots$. بنابراین A قویاً پوچ توان نیست. لذا $N_\star(R) = ۰$.
واضح است که $A \in N(R)$، بنابراین R، ۲-اولیه نیست(چون $N_\star(R) \neq N(R)$).
چندجمله‌ای‌های $g(x) = e_{۲۲} - e_{۱۲}x$ و $f(x) = e_{۱۱} + e_{۱۲}x$ را روی R در نظر می‌گیریم بنابراین $f(x)g(x) = ۰$، اما $e_{۱۱}e_{۱۲} = e_{۱۲} \neq ۰$ و $e_{۱۲}(-e_{۲۲}) = -e_{۱۲} \neq ۰$ بنابراین داریم:

$$N^\star(R) = \{m = (m_{ij}) \in R | m_{ii} = ۰, \quad \forall i\} \neq ۰.$$

در نتیجه $N_\star(R) \neq N^\star(R)$، لذا بنا به قسمت (۵) لم (۲.۲.۲)، R حلقه‌ی APR نیست.

با یک مثال نشان می‌دهیم عکس قضیه (۸.۲.۲) قسمت (۲) نیز برقرار نیست.

مثال ۸.۳.۲. فرض کنیم T یک حلقه‌ی جابجایی باشد و $R = U_۲(T)$. بنابراین

$$N_\star(T) = N^\star(T) = N(T).$$

همچنین $N_\star(R) = \begin{pmatrix} N_\star(T) & T \\ ۰ & N_\star(T) \end{pmatrix}$. بنابراین $\frac{R}{N_\star(R)} \cong \frac{T}{N_\star(T)} \oplus \frac{T}{N_\star(T)}$. چون $N_\star(T) = N(T)$، حلقه‌ی T، ۲- اولیه است بنابراین $\frac{T}{N_\star(T)}$ تقلیل یافته است لذا آرمنداریز است. بنابراین $\frac{R}{N_\star(R)}$ نیز آرمنداریز است. در نتیجه R، حلقه‌ی APR است. اما R آرمنداریز نیست چون R آبلی نیست.

در مثال (۸.۳.۲) دیدیم که $U_n(A)$، APR است اگر $\frac{A}{N_\star(A)}$ تقلیل یافته باشد. اما $Mat_n(A)$ برای $n \geq ۲$ روی حلقه‌ی A، نمی‌تواند APR باشد زیرا $\frac{Mat_n(A)}{N_\star(Mat_n(A))}$ نمی‌تواند آبلی باشد. پس $U_n(A)$، APR است اگر حلقه‌ی A، ۲- اولیه باشد. $(n = ۱, ۲, \cdots)$ واضح است که حلقه‌های ۲- اولیه، NI هستند ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست. در مثال (۷.۳.۲) نشان دادیم که حلقه‌ی R، NI است ولی ۲- اولیه نیست.

نتیجه ۹.۳.۲. از این که حلقه‌ی $U_n(A)$ روی حلقه‌ی ۲- اولیه‌ی A، APR است می‌توان نتیجه گرفت که حلقه‌های APR لزوماً آبلی نیستند در حالی که حلقه‌های آرمنداریز آبلی هستند.

گزاره ۱۰.۳.۲. فرض کنیم S یک حلقه‌ی آبلی باشد تعریف می‌کنیم:

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in S \right\}, \quad n \geq ۲.$$

و هر خود توان در R_n به فرم

$$\begin{pmatrix} f & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & f & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & f & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & f \end{pmatrix}$$

و $f^{۲} = f \in S$، بنابراین R_nها آبلی هستند.

برهان. با استقرا روی n حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $n = ۲$.
فرض کنیم $\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{smallmatrix}\right) \in R_{۲}$ یک خود توان باشد لذا

$$\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix}.$$

در نتیجه $c^{۲} = c$ و $cd + dc = d$. در نتیجه $c(cd) + c(dc) = cd$. چون c خود توان است پس $cd + cdc = cd$ لذا $cdc = ۰$ اما $c, d \in S$. چون S حلقه‌ای آبلی است پس c مرکزی است. حال از

$$۰ = cdc = c(dc) = (dc)c = dc^{۲} = dc,$$

و

$$۰ = cdc = (cd)c = c(cd) = c^{۲}d = cd.$$

همچنین از $cd + dc = d$ داریم، $d = ۰$. بنابراین هر خود توان در $R_{۲}$ به فرم $\left(\begin{smallmatrix} f & ۰ \\ ۰ & f \end{smallmatrix}\right) \in R_{۲}$ است که $f^{۲} = f \in S$.

فرض کنیم حکم برای ماتریس‌های $(n - ۱) \times (n - ۱)$ برقرار باشد. فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix}$$

خود توان در R_n باشد. نشان می‌دهیم برای هر i, j، $a_{ij} = ۰$. فرض کنیم دو ماتریس

$$\begin{pmatrix} a & a_{۲۳} & a_{۲۴} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & a & a_{۳۴} & \cdots & a_{۳n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۴n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱(n-۱)} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲(n-۱)} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳(n-۱)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix}$$

در $R_{n-۱}$ خود توان باشند.
بنابراین a_{ij} در آن‌ها صفر هستند و با توجه به فرض استقرا $a^{۲} = a$ و

$$A = \begin{pmatrix} a & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & a_{۱n} \\ ۰ & a & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & a \end{pmatrix}$$

است که $aa_{۱n} + a_{۱n}a = a_{۱n}$. چون a خود توان است پس $aa_{۱n} + aa_{۱n}a = aa_{۱n}$ لذا $aa_{۱n}a = ۰$ اما $a, a_{۱n} \in S$. چون S حلقه‌ای آبلی است پس a مرکزی است. حال از

$$۰ = aa_{۱n}a = (aa_{۱n})a = a(aa_{۱n}) = a^{۲}a_{۱n} = aa_{۱n},$$

و

$$0 = aa_{1n}a = a(a_{1n}a) = (a_{1n}a)a = a_{1n}a^2 = a_{1n}a.$$

همچنین از $aa_{1n} + a_{1n}a = a_{1n}$ داریم، $a_{1n} = 0$.
بنابراین هر خود توان در R_n به فرم

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

است که $a^2 = a \in S$. همچنین چون حلقه‌ی S آبلی است پس حلقه‌ی R_n نیز آبلی

□

حال با یک مثال نشان می‌دهیم که حلقه‌های آبلی لزوماً APR نیستند.

مثال ۱۱.۳.۲. فرض کنیم S یک حلقه‌ی تقلیل یافته و n عدد صحیح مثبت باشد و $R_n = U_{2^n}(S)$. در مثال (۷.۳.۲) نشان دادیم که R_nها حلقه‌های NI هستند و $R = \cup_{n=1}^{\infty} R_n$ حلقه‌ی APR نیست در حالی که بنا به گزاره (۱۰.۳.۲)، R آبلی است.

تعریف ۱۲.۳.۲. حلقه‌ی R را فون‌نیومن منظم[5](منظم) گوییم، برای هر $a \in R$ وجود داشته باشد $x \in R$ به طوری که $a = axa$.
R تقلیل یافته باشد $\Longleftarrow$ R آبلی باشد $\Longleftarrow$ R آرمنداریز باشد $\Longleftarrow$ حلقه منظم R، APR است.

تعریف ۱۳.۳.۲. حلقه‌ی R را π- منظم[6] می‌نامیم، هرگاه برای هر $a \in R$ وجود داشته باشد عدد صحیح مثبت n و $b \in R$ به طوری که $a^n = a^n b a^n$. حلقه‌های منظم به وضوح π- منظم هستند.

ممکن است این سوال پیش بیاید که آیا حلقه‌های π- منظم آبلی، APR هستند یا خیر؟ با یک مثال نشان می‌دهیم که جواب منفی است.

مثال ۱۴.۳.۲. فرض کنیم S یک حلقه‌ی تقسیم باشد و U_n حلقه‌ی ماتریس بالامثلثی $2^n \times 2^n$ روی حلقه‌ی S باشد (n عدد صحیح مثبت است). حلقه‌ی D_n را که زیر حلقه‌ای از U_n است را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_n = \{M \in U_n | \text{درایه‌های روی قطر } \mathbf{M} \text{ باهم برابر باشند}\}$$

نگاشت $\sigma : D_n \longrightarrow D_{n+1}$ را با ضابطه‌ی $A \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین D_n را می‌توان بعنوان زیر حلقه‌ای از D_{n+1} در نظر گرفت. حلقه‌ی R را حد مستقیم، سیستم مستقیم (D_n, σ_{ij}) در

[5] Von Neumann Regular Ring
[6] π- Regular Ring

نظر می‌گیریم که $\sigma_{ij} = \sigma^{i-j}$. در مثال (۷.۳.۲) ثابت کردیم که حلقه‌ی R، APR نیست. همچنین بنا به گزاره (۱۰.۳.۲) D_nها آبلی هستند و عناصر خود توان آن به فرم :

$$\begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f \end{pmatrix}$$

که $f^2 = f \in S$. بنابراین R آبلی است. چون هر عنصر D_n، وارون‌پذیر یا پوچ توان است، لذا D_n، π- منظم است بنابراین R، π- منظم است. در نتیجه R یک حلقه‌ی π- منظم آبلی است در حالی که R، حلقه‌ی APR نیست.

۴.۲ بررسی زیرحلقه‌های حلقه‌ی APR

کلاس حلقه‌های آرمندار‌یز روی زیر حلقه‌هایش بسته است. ممکن است این سوال پیش بیاید که آیا زیر حلقه‌های، حلقه‌های APR، نیز APR هستند یا خیر؟ در ادامه برخی از انواع زیر حلقه‌هایی که خاصیت APR را به ارث می‌برند را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۱.۴.۲. فرض کنیم R یک حلقه‌ی APR و S یک زیر حلقه‌ی R باشد.

۱. اگر $N_*(S) \subseteq N_*(R)$، آنگاه S، APR است.

۲. اگر S یک ایده‌آل سره از R باشد، آنگاه S، APR است.

۳. اگر R یک حلقه‌ی NI باشد، آنگاه S، APR است.

۴. اگر $e^2 = e \in R$ در R مرکزی باشد، آنگاه eR، APR است.

برهان. (۱). فرض کنیم $N_*(S) \subseteq N_*(R)$ و $f(x)g(x) \in N_*(S)[x]$ برای $f(x), g(x) \in S[x]$. بنابراین $f(x)g(x) \in N_*(R)[x]$. چون R، APR است، برای هر $a \in C_{f(x)}$ و $b \in C_{g(x)}$، $ab \in N_*(R)$. با توجه به مفاهیم مقدماتی رابطه‌ی شمول $S \cap N_*(R) \subseteq N_*(S)$ را داریم. چون $N_*(S) \subseteq N_*(R)$بنابراین $S \cap N_*(R) = N_*(S)$ لذا $ab \in N_*(S)$. در نتیجه S، APR است.
(۲). اگر S یک ایده‌آل از R باشد، بنابراین $N_*(S) \subseteq N_*(R)$، لذا بنا به قسمت (۱)، S، APR است.
(۳). فرض کنیم R، NI باشد پس $N^*(R) = N(R)$. چون R، APR است بنا به قسمت (۵) لم (۲.۲.۲)، $N_*(R) = N^*(R)$. در نتیجه $N_*(R) = N^*(R) = N(R)$. چون R، APR است بنا به قضیه (۱.۱.۳)قسمت (۲) در فصل سوم، $N(R)[x] = N(R[x])$. داریم:

$$N(S)[x] \subseteq S[x] \cap N(R[x]) = N(S[x]),$$

برای $f(x), g(x) \in S[x]$ فرض کنیم $f(x)g(x) \in N_*(S)[x]$، بنابراین

$$f(x)g(x) \in N_*(S)[x] \subseteq N(S)[x] \subseteq N(S[x]) \subseteq N(R[x]) = N(R)[x] = N_*(R)[x],$$

و چون R، APR است برای هر $a \in C_{f(x)}$ و $b \in C_{g(x)}$، $ab \in N_\star(R)$ در نتیجه $ab \in S \cap N_\star(R) \subseteq N_\star(S)$، بنابراین S، APR است.

(۴). فرض کنیم $e^2 = e \in R$ یک عنصر مرکزی R باشد. توجه کنید که $eR \cap N_\star(R) = eN_\star(R)$. فرض کنیم $eb \in eR$. دنباله‌ی $eb_0, eb_1, \cdots, eb_n, \cdots$ را در نظر می‌گیریم که

$$\begin{aligned} &eb_0 = eb,\\ &eb_1 \in eb_0 Reb_0 = eb_0 eReb_0,\\ &eb_2 \in eb_1 Reb_1 = eb_1 eReb_1,\\ &\vdots\\ &eb_n \in eb_{n-1} Reb_{n-1} = eb_{n-1} eReb_{n-1}, \end{aligned}$$

اگر $eb \in N_\star(eR)$ باشد، سرانجام این دنباله صفر است در نتیجه $eb \in N_\star(R)$. بنابراین $eb \in eR \cap N_\star(R) = eN_\star(R)$ پس $N_\star(eR) \subseteq eN_\star(R)$. لذا بنا به قسمت (۱) eR حلقه‌ی APR است. $\square$

نتیجه ۲.۴.۲. فرض کنیم R_iها حلقه و $i \in I$ باشد، بنابراین $\prod_{i\in I} R_i$ ($\oplus_{i\in I} R_i$)، APR است اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، R_iها APR باشند.

برهان. می‌توان به سادگی نشان داد که $N_\star(\prod_{i\in I} R_i) = \prod_{i\in I} N_\star(R_i)$ و $N_\star(\oplus_{i\in I} R_i) = \oplus_{i\in I} N_\star(R_i)$. در نتیجه $\dfrac{\prod_{i\in I} R_i}{N_\star(\prod_{i\in I} R_i)} \cong \prod_{i\in I} \dfrac{R_i}{N_\star(R_i)}$ و $\dfrac{\oplus_{i\in I} R_i}{N_\star(\oplus_{i\in I} R_i)} \cong \oplus_{i\in I} \dfrac{R_i}{N_\star(R_i)}$. با توجه به گزاره (۱.۴.۲) قسمت (۴) و این واقعیت که $(\oplus_{i\in I} R_i)[x] \cong \oplus_{i\in I} R_i[x]$ و $(\prod_{i\in I} R_i)[x]$ با زیر حلقه‌ای از $\prod_{i\in I} R_i[x]$ ایزومورف[7] است، برهان حاصل می‌شود.

$\square$

به عنوان یک نتیجه از (۲.۴.۲) داریم یک حلقه‌ی R، APR است اگر وتنها اگر eR و $(1-e)R$ هر دو APR باشند. e عنصر خود توان مرکزی R است. در ادامه ایده‌آل‌هایی از R مانند I را پیدا خواهیم کرد به طوری که $\dfrac{R}{I}$، APR شود.

گزاره ۳.۴.۲. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد و $I \subseteq N_\star(R)$، در این صورت، R، APR است اگر و تنها اگر $\dfrac{R}{I}$، APR باشد.

برهان. فرض کنیم $\bar{R} = \dfrac{R}{I}$. داریم $N_\star(\bar{R}) = \dfrac{N_\star(R)}{I}$. فرض کنیم $f(x), g(x) \in R[x]$ و $f(x)g(x) \in N_\star(R)[x]$ پس $\bar{f}(x)\bar{g}(x) \in N_\star(\bar{R})[x]$. چون $\bar{R}$، APR است،برای هر $a \in C_{\bar{f}(x)}$ و $b \in C_{\bar{g}(x)}$، $\bar{a}\bar{b} \in N_\star(\bar{R})$. یعنی $\bar{a}\bar{b} \in \dfrac{N_\star(R)}{I}$ بنابراین $ab \in N_\star(R)$. لذا حلقه‌ی R، APR است.

بالعکس فرض کنیم R، APR باشد، داریم $\dfrac{R}{N_\star(R)} = \dfrac{\bar{R}}{N_\star(\bar{R})}$. بنابراین $\dfrac{\bar{R}}{N_\star(\bar{R})}$ آرمنداریز است. لذا $\bar{R}$، APR است. $\square$

[7]Isomorphic

گزاره ۴.۴.۲. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آل سره‌ی R باشد و $N_\star(R) \subseteq I$. اگر $\frac{R}{I}$ آرمنداریز و I یک حلقه‌ی ۲- اولیه باشد آنگاه R، APR است.

برهان. فرض کنیم $\bar{R} = \frac{R}{I}$ آرمنداریز باشد و I حلقه‌ی ۲- اولیه و $N_\star(R) \subseteq I$ باشد. داریم $N_\star(R) \subseteq N_\star(I)$. از طرفی چون I یک ایده‌آل از R است، پس $N_\star(I) \subseteq N_\star(R)$. بنابراین $N_\star(I) = N_\star(R)$. چون I، ۲- اولیه است، $\frac{I}{N_\star(R)}$ تقلیل یافته است. فرض کنیم $f(x)g(x) \in N_\star(R)[x]$ و $f(x) = \sum_{i=\circ}^{m} a_i x^i \in R[x]$ و $g(x) = \sum_{j=\circ}^{n} b_j x^j$. چون $N_\star(R) \subseteq I$ پس $f(x)g(x) \in I[x]$ و چون $\frac{R}{I}$ آرمنداریز است. برای هر i, j، $a_i b_j \in I$. با استقرا روی m نشان می‌دهیم برای هر i, j، $a_i b_j = \circ$. برای $m = \circ$ نتیجه به وضوح حاصل است. فرض کنیم $m > \circ$ باشد. ادعا می‌کنیم برای هر $j \in \{\circ, ۱, \cdots, n\}$، $a_\circ b_j = \circ$. فرض کنیم $۱ \leq k < m$ و برای هر $j \in \{\circ, ۱, \cdots, k-۱\}$، $a_\circ b_j = \circ$. در نتیجه $b_j I a_\circ = \circ$ و از این رو :

$$(a_{k-j}b_j)(a_\circ b_k)^۲ = a_{k-j}b_j(a_\circ b_k)a_\circ b_k \in a_{k-j}b_j I a_\circ b_k = a_{k-j}(b_j I a_\circ)b_k = \circ$$

عنصر $a_\circ b_k + \sum_{j=\circ}^{k-۱} a_{k-j}b_j = a_\circ b_k + a_۱ b_{k-۱} + \cdots + a_k b_\circ = \circ$ ضریب x^k در چندجمله‌ای $f(x)g(x) = \circ$ است. اگر $(a_\circ b_k)^۲$ را از راست در ضریب x^k ضرب کنیم،آنگاه داریم:

$$\circ = (a_\circ b_k + \sum_{j=\circ}^{k-۱} a_{k-j}b_j)(a_\circ b_k)^۲ = (a_\circ b_k)^۲.$$

چون I تقلیل یافته است و $a_\circ b_k \in I$، از این رو $a_\circ b_k = \circ$. در نتیجه برای هر $j \in \{\circ, ۱, \cdots, n\}$، $a_\circ b_j = \circ$ و لذا $f_۱(x)g(x) = \circ$، که $f_۱(x) = a_۱ + a_۲ x + \cdots + a_m x^{m-۱}$. چون $deg(f_۱(x)) < m$، با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر $۱ \leq i \leq m$ و $\circ \leq j \leq n$، $a_i b_j = \circ$. بنابراین برای هر i, j، $a_i b_j = \circ$. بنابراین R حلقه‌ی آرمنداریز است. بنا به قسمت (۲) قضیه (۸.۲.۲)، R حلقه‌ی APR است.

□

مثال ۵.۴.۲. فرض کنیم حلقه نیم اولیه A، APR باشد و $R = A \oplus Mat_n(A)$ و $n \geq ۲$. پس $N_\star(R) = \circ$. فرض کنیم $I = \circ \oplus Mat_n(A)$. حلقه $\frac{R}{I} \cong A$ که یک حلقه‌ی APR است. اما چون $I \not\subseteq N_\star(R)$ بنا به گزاره (۳.۴.۲)، R، APR، نیست.

گزاره ۶.۴.۲. ۱. فرض کنیم R حلقه‌ی آرتینی چپ یا راست باشد. R، APR است اگر و تنها اگر R، ۲- اولیه باشد.

۲. فرض کنیم هر حلقه تقسیم اول از حلقه‌ی R، نوتری راست و چپ باشد. در این صورت، R، APR است اگر و تنها اگر ۲- اولیه باشد.

برهان. ۱. کافی است نشان دهیم اگر R، APR باشد آنگاه R، ۲- اولیه است. بنا به فرض $\frac{R}{N_\star(R)}$، آرتینی و نیم ساده است. از طرفی چون R، APR است، $\frac{R}{N_\star(R)}$ آرمنداریز است

بنابراین $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ آبلی است. از این رو $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ با مجموع مستقیم تعداد متناهی از حلقه‌های تقسیم برابر است. بنابراین $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ تقلیل یافته است. لذا R، ۲- اولیه است.

۲. فرض کنیم R، APR باشد. بنا به قضیه (۸.۲.۲)، $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ حاصل‌ضرب مستقیم از حلقه‌های آرمنداریز اول $\dfrac{R}{P_i}$ است. P_iها ایده‌آل‌های اول از حلقه‌ی R هستند و $N_\star(R) = \bigcap_{i\in I} P_i$. بنا به فرض هر یک از $\dfrac{R}{P_i}$ها نوتری راست و چپ است لذا بنا به گزاره (۲۳.۲.۱) $\dfrac{R}{P_i}$ ها تقلیل یافته هستند، در نتیجه $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ تقلیل یافته است، لذا R، ۲- اولیه است.

$\square$

فصل ۳

مثال‌های بیشتر

۱.۳ خاصیت APR روی حلقه سری‌های توانی

در این فصل به بررسی خاصیت APR روی حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها می‌پردازیم. حلقه‌ی سری‌های توانی[۱] را با $R[[x]]$ نشان می‌دهیم که x متغیری روی حلقه R است. فرض کنیم X مجموعه غیر تهی از متغیرهای تعویض‌پذیر روی R باشد. حلقه چندجمله‌ای با X روی R را با $R[X]$ نشان می‌دهیم و اگر $X = \{x\}$ بصورت $R[x]$ می‌نویسیم.

قضیه ۱.۱.۳. (۱). حلقه‌ی R، APR است اگر و تنها اگر $R[X]$ نیز APR باشد.
(۲). اگر R حلقه‌ی APR باشد آنگاه $N(R[X]) = N(R)[X]$.

برهان. قسمت (۱): فرض کنیم R، APR باشد بنابراین بنا به قضیه (۹.۲.۱) و نتیجه (۱۰.۲.۱) $\dfrac{R[X]}{N_\star(R)[X]} \cong \dfrac{R}{N_\star(R)}[X]$ نیز آرمنداریز است. از طرفی بنا به گزاره (۱۳.۱.۱) داریم $N_\star(R)[X] = N_\star(R[X])$ بنابراین $\dfrac{R[X]}{N_\star(R[X])} = \dfrac{R[X]}{N_\star(R)[X]}$ آرمنداریز است در نتیجه $R[X]$، APR است.
بالعکس، فرض کنیم $R[X]$، APR باشد بنابراین $\dfrac{R[X]}{N_\star(R[X])}$ آرمنداریز است بنابراین با توجه به برهان قبل $\dfrac{R}{N_\star(R)}[X]$ آرمنداریز است. واضح است که زیرحلقه‌های حلقه‌های آرمنداریز، آرمنداریز است. در نتیجه $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ آرمنداریز است لذا R، APR است.
قسمت (۲): فرض کنیم R حلقه APR باشد با توجه به قسمت (۱) $R[x]$، APR است. بعلاوه بنا به قضیه ،(۸.۲.۲) R و $R[x]$ هر دو پوچ–آرمنداریزاند. در نتیجه بنا به قضیه (۱۲.۳.۱)، $N(R[x]) = N(R)[x]$. برای هر $x, y \in X$، $R[x, y]$ را در نظر می‌گیریم با توجه به نتیجه قبل داریم:

$$N(R[x, y]) = N(R[x])[y] = N(R)[x][y] = N(R)[x, y].$$

[۱] Power Series Ring

از این رو با استقرا روی هر زیرمجموعه متناهی $X_\circ$ از X بدست می‌آوریم:
$$N(R[X_\circ]) = N(R)[X_\circ],$$

در نتیجه :
$$N(R[X]) = N(R)[X].$$

□

عکس قسمت (۲) قضیه (۱.۱.۳) لزوماً برقرار نیست چون در مثال (۷.۳.۲) می‌بینیم R حلقه APR نیست اما $N(R[X]) = N(R)[X]$ و $N(R) = \{m = (m_{ij}) \in R | m_{ii} = \circ, \ \text{برای هر}\ i\}$.

نتیجه ۲.۱.۳. اگر R یک حلقه ۲-اولیه باشد آنگاه $R[X]$ نیز ۲-اولیه است.

برهان. فرض کنیم R حلقه ۲-اولیه باشد بنابراین R، APR است. بنا بر قضیه (۱.۱.۳)، $N(R[X]) = N(R)[X]$. از طرفی بنا به گزاره (۱۲.۳.۱) نیز خواهیم داشت :
$$N(R[X]) = N(R)[X] = N_*(R)[X] = N_*(R[X]),$$

در نتیجه $R[X]$، ۲-اولیه است. □

در ادامه نشان می‌دهیم که قسمت (۱) قضیه (۱.۱.۳) برای حلقه‌های سری توانی درست نیست.

مثال ۳.۱.۳. فرض کنیم F میدان و V یک فضای برداری چپ با بعد نامتناهی روی F با پایه‌ی $\{v_1, v_2, \cdots\}$ باشد. فرض کنیم $A = End_F(V)$. (مجموعه تمام تبدیلات خطی روی V)، تعریف می‌کنیم:
$$A_1 = \{f \in A | rank(f) < \infty, f(v_i) = a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, a_j \in F\},$$

فرض کنیم R یک F-زیرجبر از A تولید شده توسط A_1 و 1_A باشد و $B = \{g \in A_1 | g(v_i) = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, a_j \in F\}$ ایده‌آلی از R باشد توجه کنید که هر عنصر از B قویاً پوچ توان است. بنابراین $B \subseteq P(R)$، اما
$$\frac{R}{B} \cong \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, b, b, \cdots) | a_i, b \in F, \ \ n = 1, 2, \cdots\},$$

تقلیل یافته است. بنابراین نیم اولیه است. چون رادیکال اول کوچکترین ایده‌آل است بنابراین $P(R) = B$، بنابراین
$$\frac{R}{P(R)} \cong \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, b, b, \cdots) | a_i, b \in F, \ \ n = 1, 2, \cdots\} \subset \prod_{i=1}^{\infty} F_i, \ \ \forall i \ \ F_i = F$$

چون $\frac{R}{P(R)}$ تقلیل یافته است لذا حلقه R، ۲-اولیه است، بنابراین R، APR است.
هر عنصر از R را می‌توان بصورت e_{ij}ها نشان داد به طوری که e_{ij} یک ماتریس نامتناهی روی F است که مؤلفه‌ی (i,j)ام آن یک و سایر مؤلفه‌هایش صفر است. $R[[x]]$ حلقه سری‌های توانی روی R است.

فرض کنیم:

$$f(x) = e_{12}x + (e_{34} + e_{56})x^2 + \cdots + \Big(\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} e_{(2^n+2i-1)(2^n+2i)} \Big) x^n + \cdots \in R[[x]],$$
$$g(x) = e_{23}x + (e_{45} + e_{67})x^2 + \cdots + \Big(\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} e_{(2^n+2i)(2^n+2i+1)} \Big) x^n + \cdots \in R[[x]],$$

بنابراین $f(x)^2 = 0 = g(x)^2$، اما

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (e_{12} + e_{23})x + (e_{34} + e_{45} + e_{56} + e_{67})x^2 + \cdots \\ &+ \Big(\sum_{i=0}^{2^n-1} (e_{(2n+2i-1)(2^n+2i)} + e_{(2^n+2i)(2^n+2i+1)}) \Big) x^n + \cdots , \end{aligned}$$

با توجه به

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} (e_{(2^n+2i-1)(2^n+2i)} + e_{(2^n+2i)(2^n+2i+1)}),$$

خواهیم داشت $\alpha_n^{2^n-1} \neq 0$ و $\alpha_n^{2^n} = 0$ بنابراین $f(x) + g(x)$ پوچ توان نیست، بنابراین $f(x) \notin P(R[[x]])$ یا $g(x) \notin P(R[[x]])$. ($P(R[[x]])$ رادیکال اول[۲] حلقه $R[[x]]$ است.) بنابراین $R[[x]]$، ۲-اولیه نیست. لذا $R[[x]]$، APR نیست.

گزاره ۴.۱.۳. حلقه‌ی سری‌های توانی روی حلقه‌های تقلیل یافته، آرمنداریز هستند.

برهان. فرض کنیم R حلقه‌ی تقلیل یافته باشد. همچنین فرض کنیم $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ و $g = b_0 + b_1x + b^2x^2 + \cdots + b^nx^n + \cdots$ متعلق به $R[[x]]$ باشند به طوری که $fg = 0$. چون R تقلیل یافته است بنابراین R، آرمنداریز است در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &a_0b_0 = 0 \\ &a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \\ &a_0b_1 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \\ &\vdots \\ &a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = 0 \end{aligned}$$

در ادامه محاسباتی را انجام می‌دهیم. از $a_0b_0 = 0$ شروع می‌کنیم.(بنابراین $b_0a_0 = 0$) معادلات بالا

[۲] Prime Radical

را از چپ در b_0 ضرب می‌کنیم، برای هر $i \geq 0$ خواهیم داشت $a_ib_0 = 0$ در نتیجه:

$$a_0b_1 = 0$$
$$a_0b_2 + a_1b_1 = 0$$
$$\vdots$$
$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 = 0$$

حال از $a_0b_1 = 0$ شروع می‌کنیم.(بنابراین $b_0a_1 = 0$) معادله کاهش‌یافته بالا را از چپ در b_1 ضرب می‌کنیم خواهیم داشت:

$$a_ib_1 = 0$$

به همین ترتیب با استفاده از استقرا خواهیم داشت:

$$a_ib_j = 0, \quad \forall i,j \geq 0$$

. □

در ادامه خاصیت APR را در خصوص حلقه‌های سری توانی بررسی می‌کنیم

گزاره ۳.۱.۵. اگر R حلقه ۲-اولیه با پوچ توان $N_\star(R)$ باشد آنگاه $R[[x]]$، APR است.

برهان. فرض کنیم R حلقه ۲- اولیه باشد بنا به نتیجه (۱.۱.۱۸) داریم $N_\star(R[[x]]) \subseteq N_\star(R)[[x]]$. در اینجا چون $N_\star(R)$ پوچ توان است لذا $N_\star(R[[x]]) = N_\star(R)[[x]]$. فرض کنیم $R[[x]][y]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با متغیر y روی $R[[x]]$ باشد بنابراین

$$N_\star(R[[x]][y]) = N_\star(R[[x]])[y] = N_\star(R)[[x]][y] \subset N_\star(R)[y][[x]]$$

(چون برای هر حلقه A و متغیرهای تعویض‌پذیر x و y روی A، $A[[x]][y] \subset A[y][[x]]$). حال فرض کنیم $f(y)g(y) \in N_\star(R[[x]])[y]$ و $f(y), g(y) \in R[[x]][y]$ بنابراین $f(y)g(y) \in N_\star(R)[y][[x]]$. $f(y)$ و $g(y)$ را بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(y)x^i, \quad g(y) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j(y)x^j, \quad \forall i,j \;\; s_i(y), t_j(y) \in R[y].$$

بنابراین

$$f(y)g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=k} s_i(t), t_j(y) \Big) x^k.$$

حلقه R، ۲-اولیه است بنابراین $\dfrac{R}{N_\star(R)}$ تقلیل یافته است در نتیجه:

$$\frac{R}{N_\star(R)}[y][[x]] \cong \frac{R[y]}{N_\star(R)[y]}[[x]] \cong \frac{R[y][[x]]}{N_\star(R)[y][[x]]}.$$

نیز تقلیل یافته است. از این رو بنا به گزاره (۳.۱.۴) $\dfrac{R}{N_\star(R)}[y][[x]]$ آرمنداریز است. چون $f(y)g(y) \in N_\star(R)[y][[x]]$ بنابراین برای هر i,j داریم:

$$s_i(y)t_j(y) \in N_\star(R)[y]$$

. اما R، APR است بنابراین برای هر $a \in C_{s_i(y)}$ و $b \in C_{t_j(y)}$ داریم:

$$ab \in N_\star(R).$$

در نتیجه برای هر $\alpha \in C_{f(y)}$ و $\beta \in C_{g(y)}$، $\alpha\beta \in N_\star(R)[[x]] = N_\star(R[[x]])$. چون a و b به ترتیب مجموع ضرایبی از جمله‌های $f(y)$ و $g(y)$ هستند. $\square$

۲.۳ خاصیت APR روی حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب و چندجمله‌ای‌های مشتق

خاصیت APR را روی حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب[۳] و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق[۴] بررسی می‌کنیم این دو حلقه مثال‌های نقضی برای قضیه (۱.۱.۳) هستند.
فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد تابع جمعی $\delta : R \to R$ را یک σ-مشتق می‌نامیم هر گاه، برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $\delta(ab) = \delta(a)b + \sigma(a)\delta(b)$. فرض کنیم σ یک درونریختی و δ یک تابع σ-مشتق از حلقه‌ی R باشد حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب روی R را با $R[x;\sigma,\delta]$ نشان می‌دهیم عناصر آن چندجمله‌ای‌هایی به فرم $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ هستند که $a_i \in R$ و $n \geq 0$ دو عمل جمع و ضرب روی $R[x;\sigma,\delta]$ به طور طبیعی تعریف می‌شوند به طوری که برای هر $a \in R$ داریم:

$$xa = \sigma(a)x + \delta(a)$$

اگر σ تابع همانی باشد آنگاه $R[x;\sigma,\delta]$ را با $R[x;\delta]$ نشان می‌دهیم و آن را حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق روی R می‌نامیم. هر گاه $\delta = 0$ باشد به جای $R[x;\sigma,\delta]$ از $k[x;\sigma]$ استفاده می‌کنیم.
در ادامه نشان می‌دهیم که حلقه چندجمله‌ای‌های اریب روی حلقه‌های APR لزوماً APR نیست.

مثال ۱.۲.۳. فرض کنیم D میدان و $R = D \oplus D$. واضح است که R تقلیل یافته است بنابراین ۲-اولیه است لذا R، APR خواهد بود. تعریف می‌کنیم $\sigma : R \to R$ با ضابطه‌ی $\sigma(s,t) = (t,s)$. که σ یک درونریختی از R است. $S = R[x;\sigma]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب روی R است. ادعا می‌کنیم S نیم اول است.(یعنی $P(S) = 0$) فرض کنیم I یک ایده‌آل غیر صفر از S باشد. چندجمله‌ای غیر صفر $f(x)$ را از I طوری انتخاب می‌کنیم که کمترین درجه را در I داشته باشد. فرض کنیم:

$$f(x) = a + bx + \cdots + cx^n, \quad a, b, \cdots, c \in R, \quad c \neq 0,$$

اگر n، زوج باشد بنابراین

$$f(x)^2 = a^2 + \cdots + c\sigma^n(c)x^{2n} = a^2 + \cdots + c^2x^{2n} \in I^2 \subseteq I,$$

و $f(x)^2$ غیر صفر است چون $c \neq 0$ و σ از درجه ۲ است. لذا $I^2 \neq 0$.
اگر n، فرد باشد بنابراین

$$f(x)x = ax + bx^2 + \cdots + cx^{n+1} \in I \Longrightarrow [f(x)x]^2 \in I^2 \subseteq I,$$

[۳] Skew Polynomials Ring
[۴] Differential Polynomials Ring

همچنین با محاسبات ساده می‌توان نشان داد $[f(x)x]^{۲}$ غیر صفر است و لذا $I^{۲} \neq ۰$ در نتیجه $P(S) = ۰$. از طرفی

$$[(۱,۰)x][(۱,۰)x] = (۱,۰)(۰,۱)x^{۲} = (۰,۰)x^{۲} = ۰,$$

در نتیجه $N(S) \neq ۰$ بنابراین $N_{\star}(S) = P(S) \neq N(S)$ یعنی S، ۲-اولیه نیست لذا S، APR نیست.

در ادامه می‌بینیم که حلقه چندجمله‌ای‌های مشتق روی حلقه APR، لزوماً APR نیست.
فرض کنیم $R = \frac{\mathbb{Z}_{۲}[x]}{< x^{۲} >}$ و δ تابع مشتق به طوری که $\delta(\bar{x}) = ۱$ باشد و $\bar{x} = x + < x^{۲} >$. فرض کنیم $R[y;\delta] = (\frac{\mathbb{Z}_{۲}[x]}{< x^{۲} >})[y;\delta]$ حلقه چندجمله‌ای‌های مشتق روی R باشد. قرار می‌دهیم:

$$e_{۱۱} = \bar{x}y, \quad e_{۱۲} = \bar{x}, \quad e_{۲۱} = \bar{x}y^{۲} + y, \quad e_{۲۲} = ۱ + \bar{x}y,$$

بنابراین تشکیل یک دستگاه ماتریس‌های یکه در $R[y;\delta]$ را می‌دهند.
حال مرکز ساز این ماتریس‌های یکه در $R[y;\delta]$، $\mathbb{Z}_{۲}[y^{۲}]$ است. بنابراین :

$$R[y;\delta] \cong Mat_{۲}(\mathbb{Z}_{۲}[y^{۲}]) \cong Mat_{۲}(\mathbb{Z}_{۲})[t].$$

مثال ۲.۲.۳. فرض کنیم $R = \frac{\mathbb{Z}_{۲}[t]}{t^{۲}\mathbb{Z}_{۲}[t]}$ آبلی باشد (بنابراین APR است). که $\mathbb{Z}_{۲}[t]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با متغیر t روی $\mathbb{Z}_{۲}$ است. تعریف می‌کنیم تابع مشتق δ از R را بصورت $\delta(t, I) = ۱ + I$ و $I = t^{۲}\mathbb{Z}_{۲}[t]$.
بنابراین با توجه به توضیحات پاراگراف قبل خواهیم داشت:

$$R[x:\delta] \cong Mat_{۲}(\mathbb{Z}_{۲}[x^{۲}]),$$

در حالی که $Mat_{۲}(\mathbb{Z}_{۲}[x^{۲}])$ بنا بر توضیحات مثال (۸.۳.۲) APR نیست. لذا حلقه چندجمله‌ای‌های مشتق روی حلقه‌های APR، APR نیست.

با توجه به قضیه (۴.۳.۲) حاصل‌ضرب مستقیم حلقه‌های آرمنداریز، آرمنداریز است ممکن است حدس بزنید که حاصل‌ضرب مستقیم حلقه‌های APR نیز APR است. حال نشان می‌دهیم که این حدس درست نیست.

گزاره ۳.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه و n یک عدد صحیح مثبت باشد.

۱. $\frac{R[x]}{x^{n}R[x]}$، APR است اگر و تنها اگر R، APR باشد.

۲. $\frac{R[[x]]}{x^{n}R[[x]]}$، APR است اگر و تنها اگر R، APR باشد.

برهان. (۱). فرض کنیم $E = \frac{R[x]}{x^{n}R[x]}$. واضح است که $N_{\star}(E) = \frac{N_{\star}(R) + xR[x]}{x^{n}R[x]}$. بنابراین $\frac{E}{N_{\star}(E)} \cong \frac{R}{N_{\star}(R)}$ و اثبات تمام است.
(۲). اثبات این قسمت به سادگی از (۱) نتیجه می‌شود. □

مثال ۴.۲.۳. فرض کنیم حلقه R، همان حلقه مثال (۳.۱.۳) باشد. بنابراین R، APR است. در مثال (۳.۱.۳) نشان داده بودیم که $R[[x]]$، APR نیست. هومورفسیم σ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\sigma : R[[x]] \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \frac{R[[x]]}{x^n R[[x]]},$$

با ضابطه

$$\sigma\big(f(x)\big) = \big(f(x) + x^n R[[x]]\big)_{n=1}^{\infty}.$$

چون $ker\sigma = 0$، $R[[x]]$ حاصل‌ضرب مستقیمی از $\frac{R[[x]]}{x^n R[[x]]}$ها است. چون R، APR است، بنا به قسمت دوم گزاره (۳.۲.۳) هر یک از $\frac{R[[x]]}{x^n R[[x]]}$ها نیز APR هستند. بنابراین $R[[x]]$ حاصل‌ضرب مستقیم حلقه‌های APR است. در حالیکه $R[[x]]$، APR نیست.

تعریف ۵.۲.۳. زیرمجموعه S از حلقه‌ی R را منوئید ضربی[۵] می‌نامیم هر گاه:

۱. $1_R \in S$.

۲. برای هر $x, y \in S$، $xy \in S$.

۳. برای هر $x, y, z \in S$، $(xy)z = x(yz)$.

گزاره ۶.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه و M یک منوئید ضربی شامل عناصر منظم مرکزی در R باشد. بنابراین R، APR است اگر و تنها اگر $M^{-1}R$، نیز APR باشد.

برهان. فرض کنیم R، APR و $E = M^{-1}R$ باشد. توجه کنید که $N_\star(E) = M^{-1}N_\star(R)$. فرض کنیم $f(x)g(x) \in N_\star(E)[x]$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j \in E[x]$ و $f(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$ برای هر i, j، فرض کنیم $\alpha_i = a_i u^{-1}$ و $\beta_j = b_j v^{-1}$، که $a_i, b_j \in R$ و $u, v \in M$ هستند. بنابراین:

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \alpha_i\beta_j x^{i+j} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j u^{-1}v^{-1}x^{i+j} = \Big(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}\Big)(uv)^{-1} \in N_\star(E)[x],$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\Big(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}\Big) \in N_\star(R)[x].$$

چون R، APR است. لذا برای هر i, j، $a_i b_j \in N_\star(R)$ بنابراین:

$$\alpha_i\beta_j = a_i u^{-1} b_j v^{-1} = a_i b_j u^{-1} v^{-1} \in N_\star(E).$$

بنابراین E ، APR است. عکس قضیه نیز از گزاره (۱.۴.۲) بدست می‌آید. □

$R[x; x^{-1}]$ را حلقه چندجمله‌ای لوران[۶] گوییم که $x \in R$ و شامل چندجمله‌ای‌هایی به فرم $\sum_{i=k}^{n} m_i x^i$ با جمع و ضرب معمولی است که $m_i \in R$ و n و k اعداد صحیح (ممکن منفی) هستند.

[۵] Multiplicative Monoid

[۶] Laurent Polynomials Ring

نتیجه ۷.۲.۳. حلقه R، APR است اگر و تنها اگر $R[x]$، APR باشد اگر و تنها اگر $R[x, x^{-1}]$، APR باشد.

برهان. فرض کنیم $M = \{1, x, x^2, \cdots\}$. بنابراین M منوئید ضربی شامل عناصر منظم مرکزی در $R[x]$ است. توجه کنید که $R[x; x^{-1}] = M^{-1}R[x]$. با توجه به قضیه (۱.۱.۳) و گزاره (۶.۲.۳) اثبات بدست می‌آید. □

۳.۳ خاصیت APR روی حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$

برای هر حلقه A، $Mat_n(A)$ $(n \geq 2)$ نمی‌تواند پوچ-آرمنداریز باشد. فرض کنیم $f(x) = e_{11} - e_{12}x$ و $g(x) = (e_{21} + e_{22}) + (e_{11} + e_{12})x$ متعلق به $Mat_n(A)[x]$ باشند بنابراین $f(x)g(x) = 0$ اما $e_{11}(e_{11} + e_{12}) = e_{11} + e_{12} \notin N(Mat_n(A))$. در نتیجه $Mat_n(A)$ پوچ-آرمنداریز نیست. لذا بنا به قضیه (۸.۲.۲). $Mat_n(A)$، APR نیست. در ادامه بعضی از انواع زیرحلقه‌های APR، از حلقه $Mat_n(A)$ را پیدا خواهیم کرد.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنیم R یک حلقه باشد. گزاره‌های زیر معادلند:

۱. R، APR است،

۲. $U_n(R)$، APR است، ($U_n(R)$ نمایانگر حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی روی R است.)

۳. $D_n(R)$، APR است. ($D_n(R) = \{m \in U_n(R) |$ عناصر قطری m باهم برابر باشند$\}$)

برهان. داریم:

$$N_*(U_n(A)) = \{m = (m_{ij}) \in U_n(A) | m_{ii} \in N_*(A)\},$$

$$N_*(D_n(A)) = \{m = (m_{ij}) \in D_n(A) | m_{ii} \in N_*(A)\}.$$

بنابراین $\dfrac{U_n(R)}{N_*(U_n(R))}$ حاصل‌ضرب مستقیم nکپی از $\dfrac{R}{N_*(R)}$ است. همچنین $\dfrac{R}{N_*(R)} \cong \dfrac{D_n(R)}{N_*(D_n(R))}$. از این رو اثبات از قسمت (۳) لم (۲.۲.۲) و نتیجه (۲.۴.۲) و این حقیقت که حلقه‌ی A، APR است اگر و تنها اگر $\dfrac{A}{N_*(A)}$ آرمنداریز باشد، بدست می‌آید. □

این قضیه نشان می‌دهد که یک حلقه APR که آرمنداریز نیست می‌تواند توسط هر حلقه‌ی آرمنداریز ایجاد شده باشد.

فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی σ یک اینودمورفیسم روی R و M یک R-مدول باشد. توسیع بدیهی اوریب R، با M و σ را بصورت $R \oplus M$ نشان می‌دهیم با ضرب $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, \sigma(r_1)m_2 + r_2m_1)$ که $r_i \in R$ و $m_i \in M$. (r, m) را می‌توان بصورت $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ بیان کرد. و ضرب را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = \begin{pmatrix} r_1r_2 & \sigma(r_1)m_2 + r_2m_1 \\ 0 & r_1r_2 \end{pmatrix}.$$

تعریف ۲.۳.۳. فرض کنیم R و S دو حلقه و M یک (R,S)-دو مدول باشد یعنی یک R-مدول چپ و یک S-مدول راست است برای هر $r\in R$، $s\in S$ و $m\in M$، $(rm)s=r(ms)$. قرار می دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} R & M \\ \circ & S \end{bmatrix}=\left\{\begin{bmatrix} r & m \\ \circ & s \end{bmatrix}\Big| r\in R, m\in M, s\in S\right\}$$

می‌توان نشان داد که A با دو عمل جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها یک حلقه تشکیل می‌دهد، گاهی A را با علامت $R\oplus M\oplus S$ نیز نشان می دهیم. اگر $M, R=S$ یک (R,R)-دو مدول باشد آنگاه $\{\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ \circ & r \end{smallmatrix}\right)|r\in R, m\in M\}$ را توسیع بدیهی R بوسیله‌ی M می‌نامیم.

گزاره ۳.۳.۳. ۱). فرض کنیم $R_۱$ و $R_۲$ دو حلقه و M یک $(R_۱,R_۲)$-دو مدول باشد. $\left(\begin{smallmatrix} R_۱ & M \\ \circ & R_۲ \end{smallmatrix}\right)$، APR است اگر و تنها اگر $R_۱$ و $R_۲$ هر دو APR باشند.

۲). فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و σ یک ایندومورفیسم روی R و M یک R-مدول باشد. حلقه‌ی R، APR است اگر و تنها اگر توسیع بدیهی اریب R با M و σ نیز APR باشد.

۴.۳ توسیع دوروی حلقه‌هایAPR

فرض کنیم S یک حلقه‌ی جابجایی و R یک S-جبر باشد. دو عمل جمع و ضرب را روی $R\times S$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$(r_۱,s_۱).(r_۲,s_۲)=(r_۱r_۲+s_۱r_۲+s_۲r_۱, s_۱s_۲),$$
$$(r_۱,s_۱)+(r_۲,s_۲)=(r_۱+r_۲, s_۱+s_۲),$$
$$(r_۱,s_۱),(r_۲,s_۲)\in R\times S.$$

می‌توان نشان داد $R\times S$ با دو عمل دوتایی تعریف شده فوق یک حلقه است و آن را توسیع دورو R بوسیله‌ی S می‌نامیم و با علامت $R*S$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنیم R یک جبر روی میدان جابجایی S باشد. در اینجا فرض شده که R دارای عضو همانی است.

۱. R، APR است اگر و تنها اگر توسیع دوروی $R*S=D$ نیز APR باشد.

۲. R، آرمنداریز است اگر و تنها اگر $R*S=D$ نیز آرمنداریز باشد.

توجه کنید که $s\in S$، $۱_s\in R$. بنابراین $R=\{r+s|(r,s)\in D\}$. در نتیجه $N_\star(D)=N_\star(R)\oplus\circ$ (از طریق محاسبات ساده).

برهان. ۱). فرض کنیم R، APR باشد و برای $f(x)=\sum_{i=\circ}^m a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=\circ}^n b_jx^j\in D[x]$ داشته باشیم :

$$f(x)g(x)\in N_\star(D)[x].$$

قرار می‌دهیم $a_i=(\alpha_i,s_i)$ و $b_j=(\beta_j,t_j)$ برای هر i,j. i,j را طوری در نظر می‌گیریم که $s_i\neq \circ$ و $t_j\neq \circ$. فرض کنیم $i_\circ, j_\circ$ کوچکترین عدد صحیح باشد که در این شرط صدق کنند بنابراین ضریب $x^{i_\circ+j_\circ}$ از $f(x)g(x)$، $(p,s_\circ t_\circ)$ است برای بعضی از $p\in R$. و این یک تناقض است چون $(p,s_\circ t_\circ)\notin N_\star(D)$. بنابراین برای هر i، $s_i=\circ$ یا برای هر j، $t_j=\circ$ است. قرار می‌دهیم:

$$f(x)=f_\backslash(x)+f_\Upsilon(x),\qquad g(x)=g_\backslash(x)+g_\Upsilon(x),$$

که

$$f_\backslash(x)=\sum_{i=\circ}^{m}(\alpha_i,\circ)x^i,\ f_\Upsilon(x)=\sum_{i=\circ}^{m}(\circ,s_i)x^i,\ g_\backslash(x)=\sum_{j=\circ}^{n}(\beta_j,\circ)x^j,\ g_\Upsilon(x)=\sum_{j=\circ}^{n}(\circ,t_j)x^j.$$

فرض کنیم برای هر i، $s_i=\circ$، لذا $f_\Upsilon(x)=\circ$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(x)g(x)&=f_\backslash(x)g_\backslash(x)+f_\backslash(x)g_\Upsilon(x)\\ &\sum_{i+j=\circ}^{m+n}(\alpha_i\beta_j,\circ)x^{i+j}+\sum_{i+j=\circ}^{m+n}(\alpha_i t_j,\circ)x^{i+j}\\ &\sum_{i+j=\circ}^{m+n}(\alpha_i(\beta_j+t_j),\circ)x^{i+j}\in(N_\star(R)\oplus\circ)[x]. \end{aligned}$$

چون R، APR است، برای هر i,j داریم:

$$\alpha_i(\beta_j+t_j)\in N_\star(R).$$

در نتیجه برای هر i,j داریم:

$$a_ib_j=(\alpha_i,\circ)(\beta_j,t_j)\in N_\star(D).$$

محاسبات برای $g_\Upsilon(x)=\circ$ نیز مشابه بالا است. بنابراین D، APR است.

بلعکس: چون $N_\star(R)=N_\star(D)$ با توجه به نگاشت شمول $(r,\circ)\longrightarrow r$، $r\in R$ و گزاره (۱.۴.۲) اثبات کامل می‌شود.

۲). فرض کنیم $f(x)g(x)=\circ$ یا به عبارت دیگر $f(x)g(x)\in N_\star(D)[x]$، اثبات مشابه قسمت قبل بدست می‌آید.

□

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنیم R، یک جبر روی میدان جابجایی S باشد. فرض کنیم R بدون عنصر همانی باشد اگر $D=R*S$، APR باشد آنگاه R، APR است.

برهان. نشان می‌دهیم $N_\star(D)=N_\star(R)\oplus\circ$. فرض کنیم D، APR باشد، با توجه به نگاشت شمول $(r,\circ)\longrightarrow r$ که $r\in R$، داریم $N_\star(R)=N_\star(D)$ از این رو بنا به گزاره (۱.۴.۲) R نیز APR است. هر عنصر خودتوان در D به وضوح به فرم $(a,\circ)$ است. بنابراین $N_\star(D)\supseteq N_\star(R)\oplus\circ$. حال نشان می‌دهیم $N_\star(D)\subseteq N_\star(R)\oplus\circ$. فرض کنیم $z_\backslash=a\in N_\star(R)$ و $v_\backslash=(a,\circ)\in D$. دنباله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\omega_\backslash=\nu_\backslash d_\backslash v_\backslash,\quad \omega_\Upsilon=\omega_\backslash d_\Upsilon\omega_\backslash,\cdots,\omega_{k+1}=\omega_k d_k\omega_k,\cdots$$

که $k = 1, 2, \cdots$، d_k $(j = 1, 2, \cdots)$ در D به طور دلخواه انتخاب می‌شود و $d_k = (r_k, s_k)$ است، بنابراین $\omega_1(ar_1a + as_1a, 0) = (ab_1, 0) = (e_1a, 0)$ که $b_1 = r_1a + s_1a$ و $e_1 = ar_1 + as_1$،

$$\omega_2 = (ab_1r_2e_1a + ab_1s_2e_1a, 0) = (a(b_1r_2e_1 + b_1s_2e_1))a, 0),$$

قرار می‌دهیم :

$$z_2 = a(b_1r_2e_1 + b_1s_2e_1)a \in aRa = z_1Rz_1,$$

در نتیجه:

$$\omega_3 = (z_2r_3z_2 + z_2a_3z_2, 0) = (z_2b_2, 0) = (e_2z_2, 0),$$

که

$$b_2 = r_3z_2 + a_3z_2, \quad e_2 = z_2r_3 + z_2a_3,$$

در نتیجه:

$$\omega_4 = (z_2b_2r_4e_2z_2 + z_2b_2s_4e_2z_2, 0) = (z_2(b_2r_4e_2 + b_2s_4e_2)z_2, 0),$$

قرار می‌دهیم:

$$z_3 = z_2(b_2r_4e_2 + b_2s_4e_2)z_2 \in z_2Rz_2,$$

با ادامه‌ی این روند دنباله $z_1, z_2, \cdots, z_m, z_{m+1}, \cdots$ در R بدست می‌آید که $z_{m+1} \in z_mRz_m$ و $\omega_{2m} = (z_{m+1}, 0)$. اما، $z_1 \in N_\star(R)$ بنابراین برای برخی $l \geq 1$، $z_l = 0$ لذا $\omega_{2(l-1)} = 0$ در نتیجه $v_1 = (a, 0) \in N_\star(D)$. بنابراین $N_\star(R) \oplus 0 \subseteq N_\star(D)$.

□

•

مراجع

[1] E. Hashemi, Introduction to Annihilators of Polynomials, (2012).

[2] D. D. Anderson, V. Camillo, Armendariz rings and gaussian rings, Communications in Algebra 26 , no. 7, (1998) 2265–2272.

[3] R. Antoine, Nilpotent elements and armendariz rings, Journal of Algebra 319 , no. 8, (2008) 3128–3140.

[4] E. P. Armendariz, A note on extensions of baer and pp-rings

[5] E. P. Armendariz, Hyeng Keun Koo, and Jae Keol Park, Isomorphic ore extensions, Communications in Algebra 15 , no. 12, (1987) 2633–2652.

[6] G. M. Bergman, Coproducts and some universal ring constructions, Transactions of the American Mathematical Society 200 , (1974) 33–88.

[7] —, Modules over coproducts of rings, Transactions of the American Mathematical Society 200 (1974), 1–32.

[8] G. F. Birkenmeier, Henry E Heatherly, and Enoch K Lee, Completely prime ideals and associated radicals, Ring theory (1992), 102–129.

[9] G. F. Birkenmeier, Jin Yong Kim, and Jae Keol Park, Regularity conditions and the simplicity of prime factor rings, Journal of Pure and Applied Algebra 115 (1997), no. 3, 213–230.

[10] Y. U. Cho, N. K. Kim, M. H. Kwon, Y. Lee, Classical quotient rings and ordinary extensions of 2-primal rings, Algebra Colloquium, vol. 13, World Scientific, 2006, pp. 513–523.

[11] J. Dorroh, Concerning adjunctions to algebras, Bulletin of the American Mathematical Society 38 (1932), no. 2, 85–88.

[12] K. R. Goodearl, Von neumann regular rings, (1979).

[13] K. Goodearl, R. Warfield Jr, An introduction to noncommutative noetherian rings, 1989, London Math. Soc., London.

[14] C. Huh, H. K. Kim, Y. Lee, pp rings and generalized pp rings, Journal of Pure and Applied Algebra 167 (2002), no. 1, 37–52.

[15] C. Huh, H. K. Kim, D. S. Lee, Y. Lee, Prime radicals of formal power series rings, Bulletin-Korean Mathematical Society 38 (2001), no. 4, 623–634.

[16] C. Huh, Y. Lee, A. Smoktunowicz, Armendariz rings and semicommutative rings, (2002).

[17] S. U. Hwang, Y. C. Jeon, Y. Lee, Structure and topological conditions of ni rings, Journal of Algebra 302 (2006), no. 1, 186–199.

[18] Y. C. Jeon, H. K. Kim, Y. Lee, J. S. Yoon, On weak armendariz rings, Bull. Korean Math. Soc 46 (2009), no. 1, 135–146.

[19] D. W. Jung, N. K. Kim, Y. Lee, S. P. Yang, Nil-armendariz rings and upper nilradicals, International Journal of Algebra and Computation 22 (2012), no. 06.

[20] N. K. Kim, K. H. Lee, Y. Lee, Power series rings satisfying a zero divisor property, Communications in Algebra 34 (2006), no. 6, 2205–2218.

[21] N. K. Kim, Y. Lee, Armendariz rings and reduced rings, Journal of Algebra 223 (2000), no. 2, 477–488.

[22] N. K. Kim, Y. Lee, S. J. Ryu, An ascending chain condition on wedderburn radicals, Communications in Algebra 34 (2006), no. 1, 37–50.

[23] T. Lam, A first course in noncommutative rings, 1991.

[24] J. Lambek, Lectures on rings and modules,, Blaisdell (1966).

[25] Y. Lee, C. Huh, H. K. Kim, Questions on 2-primal rings, Communications in Algebra 26 (1998), no. 2, 595–600.

[26] M. B. Rege, S. Chhawchharia, Armendariz rings, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences 73 (1997), no. 1, 14–17.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

استقرای ریاضی	mathematical induction
ایده‌آل اول	prime ideal
ایده‌آل اول مینیمال	minimal prim ideal
ایده‌آل پوچ ساز	annihilator ideal
ایده‌آل چپ	left ideal
ایده‌آل راست	right ideal
ایده‌آل ماکسیمال	maximal ideal
ایده‌آل وارون‌پذیر	invertible ideal
بعد متناهی	finite rank
پوچ آرمنداریز	nil- Armendariz
توابع چندجمله‌ای	polynomial functions
تابع مشتق داخلی	inner Derivation Function
تکریختی	monomorphism
توسیع بدیهی	trivial extension
توسیع دورو	Dorroh extension
چندجمله‌ای اولیه	primitive polynomial
حلقه‌ی ۲− اولیه	2- primal ring
حلقه‌ی آبلی	Ablian ring
حلقه‌ی آرتینی	Artinian ring
حلقه‌ی آرمنداریز	Armendariz ring
حلقه‌ی تقلیل یافته	reduced ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب	skew polynomials ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران	Laurent polynomials ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق	differential polynomial ring
حلقه‌ی فون نیومن منظم	Von Neumann regular

حلقه‌ی کسرهای راست .... right quaotient ring
حلقه‌ی موضعی .... local ring
حلقه‌ی نوتری .... noetherian ring
حلقه‌ی نیم اول .... semi prime ring
خود توان .... primitive idempotent
دامنه‌ی اور راست .... right ore domain
رادیکال اول .... prime radical
رادیکال پوچ بالایی .... upper nilradical
رادیکال پوچ پایینی .... lower nilradical
شرط اور راست .... right ore codition
شرط زنجیر افزایشی .... ascending chain condition
شرط زنجیر کاهشی .... descending chain codition
عنصر پوچ توان .... nilpotent element
عنصر منظم .... regular element

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Ablian ring	حلقه‌ی آبلی
annihilator ideal	ایده‌آل پوچ ساز
Armendariz ring	حلقه‌ی آرمنداریز
Artinian ring	حلقه‌ی آرتینی
ascending chain condition	شرط زنجیر افزایشی
descending chain codition	شرط زنجیر کاهشی
differential polynomial ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق
Dorroh extension	توسیع دورو
finite rank	بعد متناهی
inner Derivation Function	تابع مشتق داخلی
invertible ideal	ایده‌آل وارون‌پذیر
Laurent polynomials ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران
left ideal	ایده‌آل چپ
local ring	حلقه‌ی موضعی
lower nilradical	رادیکال پوچ پایینی
mathematical induction	استقرای ریاضی
maximal ideal	ایده‌آل ماکسیمال
minimal prim ideal	ایده‌آل اول مینیمال
monomorphism	تکریختی
nil- Armendariz	پوچ آرمنداریز
nilpotent element	عنصر پوچ توان
noetherian ring	حلقه‌ی نوتری
polynomial functions	توابع چندجمله‌ای
prime ideal	ایده‌آل اول
prime radical	رادیکال اول

primitive idempotent	خود توان
primitive polynomial	چندجمله‌ای اولیه
reduced ring	حلقه‌ی تقلیل یافته
regular element	عنصر منظم
right ideal	ایده‌آل راست
right ore codition	شرط اور راست
right ore domain	دامنه‌ی اور راست
right quaotient ring	حلقه‌ی کسرهای راست
semi prime ring	حلقه‌ی نیم اول
skew polynomials ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب
trivial extension	توسیع بدیهی
upper nilradical	رادیکال پوچ بالایی
Von Neumann regular	حلقه‌ی فون نیومن منظم
2- primal ring	حلقه‌ی ۲- اولیه

Aabstract

We observe from known results that the set of nilpotent elements in Armendariz rings has an important role. The upper nilradical coincides with the prime radical in Armendariz rings. So it can be shown that the factor ring of an Armendariz ring over its prime radical is also Armendariz, with the help of Antoine's results for nil-Armendariz rings. We study the structure of rings with such property in Armendariz rings and introduce APR as a generalization. It is shown that APR is placed between Armendariz and nil-Armendariz. It is shown that an APR ring which is not Armendariz, can always be constructed from any Armendariz ring. It is also proved that a ring R is APR if and only if so is $R[x]$ and that $N(R[x]) = N(R)[x]$ when R is APR, where $R[x]$ is the polynomial ring with an indeterminate x over R and $N(R)$ denotes the set of all nilpotent elements. Several kinds of APR rings are found or constructed in the precess related to ordinary ring constructions.
keywords: Armendariz rings, Nil-Armendariz rings, Upper nilradical, Prime radical, APR rings.

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Armendariz Property over Prime Radicals

Supervisor
Dr. Ebrahim Hashemi

by
Bibi Azize Shafeghi

2015