
بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالي

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده ریاضی

گزارش پاياني طرح پژوهشي با عنوان:

برآورد پارامترهای مدل موازی با خطاهای بیضی گون

Estimation of parameters of parallelism model with elliptically distributed errors

مجري:

محمد آرشي

عضو هيئت علمي دانشگاه صنعتي شاهرود

از تاريخ 1387/8/26   تا تاريخ 1388/2/20

اين پژوهش با استفاده از اعتبارات پژوهشي دانشگاه صنعتي شاهرود انجام گرديده است

كد طرح 23029

ارديبهشت 1388

➢ چکیده

در این طرح، مدل رگرسیون موازي را که یکي از پرکاربردترین مدل هاي رگرسیوني است، مورد بررسي قرارمي دهیم. حالت هاي خاصي از این مدل عبارتند از: مدل هاي مکاني، رگرسیون خطي ساده، رگرسیون چندگانه و رگرسیون به ظاهر نامرتبط[1].

در این مجموعه برآوردگرهاي متفاوتي براي بردار پارامترهاي شیب و عرض از مبداء ارائه مي دهیم. به علاوه فرض مي کنیم بردار خطاي تصادفي متعلق به خانواده بزرگي از توزیع ها است و با این فرض، توابع مخاطره موزون برآوردگرهاي ارائه شده را محاسبه مي کنیم. در نهایت با مقایسه توابع مخاطره بدست آمده، رفتار برآوردگرها را نسبت به یکدیگر مورد بررسي قرار داده و در حالت هاي مختلفي شرایط برتري برآوردگرها را نسبت به یکدیگر بدست مي آوریم.

[1] Seemingly unrelated regression model

فهرست مندرجات

➢ مقدمه

چند آزمايشگاه (مثلا p تا) را در نظر بگيريد كه بر روي يك نوع آزمايش بيوزيستي تحقيق مي كنند. اغلب مدلي كه براي پردازش داده هاي اين تحقيق مورد استفاده قرار مي گيرد مدل رگرسيون خطي، با خطاهاي تصادفي داراي توزيع نرمال، مي باشد؛ و مسئله اصلي مورد بررسي برآورد عرض از مبداء و شيب مدل رگرسيوني، و چگونگي تركيب اين نتايج از آزمايشگاه هاي مختلف براي تحليلي بهبود يافته مي باشد.

در تركيب نتايج چند مدل خطي، مي توان انتظار داشت كه شيب خط براي تمام مدل ها يكسان ولي عرض از مبدا متفاوت باشد كه نتيجه آن مدل رگرسيون موازي[2] براي تركيب نتايج چند آزمايشگاه مي باشد. اولين تحقيقات در اين زمينه توسط لامبرت[3] و همكاران (1985)، آكريتوس[4] و همكاران (1985) و صالح و سن[5] (1985) تحت مدل هاي نرمال و ناپارامتري صورت گرفته است. براي مشاهده جزئيات به صالح (2006) مراجعه كنيد. همچنين براي مشاهده كارهاي مختلف در اين زمينه با فرض نرمال بودن خطاها مي توان به خان[6] (2002، 2003 و 2006) و خان وصالح (2006) مراجعه كرد.

در اين طرح، مدل رگرسيون موازي را در حالت كلي تر خطاهاي وابسته مورد بحث و بررسي قرار مي دهيم. براي اين منظور مدل رگرسيون موازي زير را در نظر بگيريد.

$$Y = \mathrm{B}\theta + X\beta + E, \tag{1}$$

---

[2] Parallelism model
[3] Lambert
[4] Akritus
[5] Saleh and Sen
[6] Khan

که در آن $Y = (Y_1', \cdots, Y_p')'$ يك بردار n-بعدي به طوري که $Y_\alpha = (Y_{\alpha 1}, \cdots, Y_{\alpha n_\alpha})'$ به ازاي $\alpha = 1, \cdots, p$ و $n = n_1, \cdots, n_p$، $B = Diag(1_{n_1}, \cdots, 1_{n_p})$، که در آن $1_{n_\alpha} = (1, \cdots, 1)'$ يك بردار n_α-تايي از 1 ها است. همچنين $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_p)'$ بردار عرض از مبداء، $X = Diag(X_1, \cdots, X_p)$ که در آن $X_\alpha = (x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha n_\alpha})'$ و $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_p)$ بردار شيب خط مي باشند. به طور مشابه $E = (\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p')'$ بردار n-تايي خطاهاي تصادفي است که در آن $\varepsilon_\alpha = (\varepsilon_{\alpha 1}, \cdots, \varepsilon_{\alpha n_\alpha})'$. در اين طرح فرض مي کنيم بردار خطاي تصادفي داراي توزيع بيضي گون[7] (ECD) به صورت $E \sim E_n(0, \sigma^2 V, \psi)$ براي $V = Diag(V_1, \cdots, V_p)$ (هر V_α يك ماتريس معين مثبت است) مي باشد. در اين صورت تابع مشخصه E به صورت زير است

(2)

$$\phi_\varepsilon(t) = \psi\left(\frac{\sigma^2}{2} t' V t\right)$$

که در آن ψ تابع اندازه پذير بورل به نام تابع مولد مشخصه[8] مي باشد. فنگ[9] و همکاران (1990) را ببينيد.

اگر E داراي تابع چگالي باشد، آن را مي توان به صورت زير نشان داد. (چو[10]، 1973 را ببينيد)

(3)

$$f(\varepsilon) = d_n \left|\sigma^2 V\right|^{-\frac{1}{2}} g_n\left[\frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon' V^{-1} \varepsilon\right]$$

$$= \int_0^\infty W(\tau) N_n\left(0, \tau^{-1}\sigma^2 V\right) d\tau,$$

که در آن

(4)

$$W(\tau) = (2\pi)^{n/2} \sigma^n |V|^{1/2} \tau^{-n/2} L^{-1}[h(s)],$$

$L^{-1}[h(s)]$ نشان دهنده تبديل لاپلاس معکوس[11] تابع $h(s)$ در $s = \tau[E'V^{-1}E/2\sigma^2]$، d_n ثابت نرمال سازي[12] براي بعضي توابع $g_n(.)$ به نام تابع مولد چگالي[13] است. دراين حالت مي

[7] Elliptically contoured distribution
[8] Characteristic generator
[9] Fang
[10] Chu

نویسیم $E \sim E_n(0,\sigma^2 V, g_n)$. لازم به ذکر است، اگر $g_n(.)$ به n بستگي نداشته باشد به طور مختصر مي نويسيم $g(.)$.

در جدول زیر چند نمونه از توزیع هاي بيضي گون به همراه تابع وزن $W(.)$ آورده شده است.

جدول 1: توزیع هاي بيضي گون به همراه تابع وزن $W(.)$

Distribution	$f(s)$	$W(t)$
Multivariate Normal	$\frac{\lvert\Sigma\rvert^{-1/2} e^{-s}}{(2\pi)^{n/2}}$	$\delta(t-1)$
Multivariate Pearson Type VII	$\frac{\Gamma(m)\lvert\Sigma\rvert^{-1/2}(1+2s/q)^{-m}}{(q\pi)^{n/2}\Gamma(m-n/2)}$	$\frac{t^{m-n/2-1}e^{-qt/2}}{(q/2)^{n/2-m}\Gamma(m-n/2)}$
Multivariate Student's t	$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)\lvert\Sigma\rvert^{-1/2}(\nu+2s)^{\frac{-(\nu+n)}{2}}}{(\nu\pi)^{n/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$	$\frac{\nu^{\frac{\nu}{2}}t^{\frac{\nu}{2}-1}e^{\frac{-\nu t}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$

در ادامه براي سهولت فرض مي کنيم $E \sim E_n(0,\sigma^2 V, g)$. در این صورت مي توان نتيجه گرفت که $E(E)=0$ و

(5)

$$E(E'E) = -2\sigma^2\psi'(0)V = \sigma_e^2 V$$

که در آن $\sigma_e^2 = -2\sigma^2\psi'(0)$. لازم به ذکر است که اميدرياضي در (5) به شرط $|\psi'(0)| < \infty$ موجود مي باشد.

---

[11] Inverse Laplace transform

[12] Normalizing constant

[13] Density generator

زير كلاس ديگري از ECD ها كه كلاس فوق را در بر مي گيرد با اندازه علامت W روي فضاي (R^+, B)، تابع چگالي $f(.)$ را به صورت زير تعيين مي كند

(i) $$f(E) = \int_0^\infty N_n\left(0, \tau^{-1}\sigma^2 V\right) W(d\tau)$$

(ii) $$\int_0^\infty \tau^{-1} W^+(d\tau) < \infty$$

(iii) $$\int_0^\infty \tau^{-1} W^-(d\tau) < \infty$$

كه در آن $W^+ - W^-$ تجزيه جردن[14] اندازه W در قسمت هاي مثبت و منفي است (براي آگاهي بيشتر در اين زمينه سريواستاوا و بيلوديو[15]، 1989 را ببينيد). ECDها جانشين مناسبي به جاي مدل هاي نرمال، زماني كه دنباله هاي توزيع سبك تر (نازك تر) يا سنگين تر (پهن تر) هستند، مي باشند.

موضوعات در رابطه با نظريه توزيع و استنباط در مورد ECDها را مي توان در كتاب هاي مورهد[16](1982)، فنگ و همكاران (1990)، گوپتا و وارگا[17](1993) و اندرسن[18] (2003) يافت. برخي از توزيع هاي مهم مربوط به اين خانواده عبارتند از توزيع هاي چندمتغيره نرمال، پيرسن نوع II/VII، t استيودنت، لجستيك و كتز.

ادامه اين طرح، موضوعات زير را شامل مي شود

1) برآورد پارامترهاي مدل رگرسيون موازي و آماره آزمون
2) ارائه برخي برآوردگرهاي بهبود يافته
3) محاسبه اريبي، مخاطره و ماتريس MSE
4) مقايسه برآوردگرها
5) كاربرد در توزيع t استيودنت چندمتغيره

[14] Jordan decomposition
[15] Srivastava and Bilodeau
[16] Muirhead
[17] Gupta and Varga
[18] Anderson

➢ برآورد پارامترهای مدل رگرسیون موازی و آماره آزمون

در اين بخش، براي راحتي ادامه كار ، ابتدا برخي نمادها را معرفي مي كنيم كه عبارتند از

$$Y_2^* = X'V^{-1}Y \qquad Y_1^* = B'V^{-1}Y$$

$$K_2 = X'V^{-1}X \qquad K_3 = B'V^{-1}X \qquad K_1 = B'V^{-1}B$$

كه در آن ها

$$Y_1^* = \left(y_1^{(1)},\ldots,y_p^{(1)}\right), y_\alpha^{(1)} = 1'_{n\alpha}V_\alpha^{-1}Y_\alpha,$$

$$Y_2^* = \left(y_1^{(2)},\ldots,y_p^{(2)}\right), y_\alpha^{(2)} = X'_\alpha V_\alpha^{-1}Y_\alpha,$$

$$K_1 = Diag\left(k_1^{(1)},\ldots,k_p^{(1)}\right), k_\alpha^{(1)} = 1'_{n\alpha}V_\alpha^{-1}1_{n\alpha},$$

$$K_2 = Diag\left(k_1^{(2)},\ldots,k_p^{(2)}\right), k_\alpha^{(2)} = X'_\alpha V_\alpha^{-1}X_\alpha,$$

$$K_3 = Diag\left(k_1^{(3)},\ldots,k_p^{(3)}\right), k_\alpha^{(3)} = 1'_{n\alpha}V_\alpha^{-1}X_\alpha.$$

در اين قسمت، ابتدا برآوردگر محدودنشده[19] (UE) را براي بردارهاي θ و β بدست مي آوريم. بر اساس نظريه كمترين توان هاي دوم[20]، بايد مجموعه معادلات نرمال زير را همزمان حل كنيم.

---

[19] Unrestricted estimator

[20] Least square theory

$$\begin{cases} K_1\theta + K_3\beta = Y_1^*, \\ K_3\theta + K_2\beta = Y_2^*. \end{cases}$$

بنابراين برآوردگرهاي كمترين توان هاي دوم (SEL) پارامترهاي θ و β عبارتند از

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_3 & K_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1^* \\ Y_2^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{22}^{-1} & -K_1^{-1}K_3C_{11}^{-1} \\ -K_2^{-1}K_3C_{22}^{-1} & C_{11}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1^* \\ Y_2^* \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

كه در آن C_{11} و C_{22} به ترتيب متمم شور[21] K_1 و K_2 هستند و برابرند با

$$C_{11} = K_2 - K_3K_1^{-1}K_3, \qquad C_{22} = K_1 - K_3K_2^{-1}K_3.$$

و داريم

$$C_{11}^{-1} = Diag\left(C_1^{(11)},\ldots,C_p^{(11)}\right), C_\alpha^{(11)} = \left[k_\alpha^{(2)} - \frac{\left(k_\alpha^{(3)}\right)^2}{k_\alpha^{(1)}}\right]^{-1},$$

$$C_{22}^{-1} = Diag\left(C_1^{(22)},\ldots,C_p^{(22)}\right), C_\alpha^{(22)} = \left[k_\alpha^{(1)} - \frac{\left(k_\alpha^{(3)}\right)^2}{k_\alpha^{(2)}}\right]^{-1}.$$

دقت كنيد كه $K_1^{-1}K_3C_{11}^{-1} = K_2^{-1}K_3C_{22}^{-1}$.

همچنين UE پارامتر σ^2 عبارتست از

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\tilde{E}'V^{-1}\tilde{E}$$

كه در آن $\tilde{E} = Y - \mathrm{B}\tilde{\theta} - X\tilde{\beta}$.

لذا برآوردگر ناريب σ_e^2 برابر است با

$$s_e^2 = \frac{n-1}{n-2p}\tilde{\sigma}^2 \qquad (7)$$

[21] Schur complement

قضيه 2.1 فرض كنيد $Y|\theta,\beta,\sigma^2 \sim E_n(B\theta+X\beta,\sigma^2 V,g)$. در اين صورت داريم

(8)

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{bmatrix} \sim E_{2p}\left\{\begin{bmatrix} \theta \\ \beta \end{bmatrix}, \sigma^2 K^{-1}, g\right\}$$

كه در آن

(9)

$$K=\begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_3 & K_2 \end{bmatrix}.$$

برهان: از رابطه (6) داريم

$$Cov\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_3 & K_2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

لذا با استفاده از قضيه 6.1.1 صالح (2006) مي توان نتيجه گرفت تحت توزيع نرمال

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{bmatrix} \sim N_{2p}\left\{\begin{bmatrix} \theta \\ \beta \end{bmatrix}, \sigma^2 K^{-1}\right\}.$$

بنابراين با استفاده از قضيه 1 چو (1973) مي توان نوشت

$$f_{\tilde{\theta}_n,\tilde{\beta}_n(x,y)} = \int_0^\infty W^*(\tau) N_{2p}\left\{\begin{bmatrix} \theta \\ \beta \end{bmatrix}, \sigma^2 K^{-1}\right\} d\tau$$

كه در آن W^* همان اندازه در رابطه (4) با جايگزاري K^{-1} و $2p$ به جاي V و n است.

در ادامه قضيه اساسي زير را كه در بدست آوردن آماره آزمون كاربرد دارد مطرح مي كنيم.

قضيه 2.2 (اندرسن و همكاران، 1986) فرض كنيد Ω_0 مجموعه اي متعلق به فضاي (μ,V) كه در آن V يك ماتريس معين مثبت است، باشد به طوري كه اگر $(\mu,\mathrm{V})\in\Omega_0$، آن گاه به ازاي تمام $c>0$ داشته باشيم $(\mu,c\mathrm{V})\in\Omega_0$. همچنين فرض كنيد $g(.)$ تابعي است به طوري كه $g(x'x)$ يك تابع چگالي روي فضاي R^{N} تعريف مي كنيد و تابع $y^{\frac{N}{2}}g(y)$ داراي ماكزيمم مثبت y_{g} است. علاوه بر اين اگر بر اساس مشاهده x از تابع $|\mathrm{V}|^{\frac{-1}{2}}\mathrm{g}[(\mathrm{x}-\mu)'\mathrm{V}^{-1}(\mathrm{x}-\mu)]$، برآوردگرهاي

درستنمايي ماكزيمم تحت نرمال بودن به صورت $(\tilde{\mu},\tilde{V})\epsilon\Omega_0$ موجود بوده و يكتا باشند و با احتمال يك داشته باشيم $\tilde{V}>0$، آنگاه برآوردگرهاي درستنمايي ماكزيمم در حالت چگالي $g(.)$ عبارتند از

$$\hat{\mu}=\tilde{\mu}, \qquad \hat{V}=\frac{N}{y_g}\tilde{V},$$

و ماكزيمم تابع درستنمايي برابر است با

$$|\hat{V}|^{-\frac{1}{2}}g(y_g).$$

لازم به ذكر است تحت توزيع نرمال برآوردگرهاي درستنمايي ماكزيمم θ و β همان هايي هستند كه با رابطه (6) مشخص شده اند.

همان طور كه در مقدمه نيز به آن اشاره شد، در مدل رگرسيون موازي، شيب تمام معادلات رگرسيوني ثابت است؛ لذا به منظور فرمول بندي چنين پيش فرضي، در اين قسمت فرضيه صفر $H_0{:}\beta=\beta_0 1_p$ را مورد بررسي قرار مي دهيم. قبل از اين كه آماره آزمون فرضيه صفر ارائه شده را مشخص كنيم، به اين مسئله مي پردازيم كه اگر فرضيه صفر مورد نظر درست باشد چه تغييري در ساختار برآوردگرهاي محدودنشده θ و β ايجاد مي شود. لذا در اين قسمت برآوردگر محدودشده[22] (RE) تحت فرضيه صفر $H_0{:}\beta=\beta_0 1_p$ را براي هر دو پارامتر مورد نظر ارائه مي دهيم.

فرض كنيد λ يك بردار p-بعدي از ضرايب لاگرانژ است. در اين حالت براي بدست آوردن REها عبارت زير را نسبت به پارامترهاي مدل و λ مي نيمم مي كنيم

$$E'V^{-1}E+2\lambda'(\beta-\beta_0 1_p)$$

متعاقبا مجموعه معادلات نرمال زير بدست مي آيند

$$\begin{cases} K_1\theta+K_3\beta=Y_1^* \\ K_3\theta+K_2\beta+\lambda=Y_2^* \\ \beta=\beta_0 1_p \end{cases}$$

و در نهايت با حل كردن مجموعه معادلات زير نسبت به λ و محدوديت $H_0{:}\beta=\beta_0 1_p$، مي توان برآوردگرهاي محدودشده را بدست آورد

[22] Restricted estimator

(10)

$$\begin{bmatrix}\hat{\theta}_n\\ \hat{\beta}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{22}^{-1} & -K_1^{-1}K_3C_{11}^{-1}\\ -K_2^{-1}K_3C_{22}^{-1} & C_{11}^{-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}Y_1^*\\ Y_2^*-\lambda\end{bmatrix}.$$

به راحتي مي توان نتيجه گرفت كه *RE* پارامتر θ برابر است با

$$\hat{\theta}=\tilde{\theta}-\mathrm{K}_1^{-1}\mathrm{K}_3(\tilde{\beta}-\hat{\beta})$$

اما توجه كنيد كه در محدوديت $H_0:\beta=\beta_0 1_p$، β_0 يك اسكالر مجهول مي باشد كه مي توان با استفاده از مدل رگرسيون خطي ساده آن را برآورد كرد؛ كه با در نظر گرفتن $K_1^{-1}\mathrm{K}_3=\mathrm{Diag}(\mathrm{k}_1^{(13)},\cdots,\mathrm{k}_\mathrm{p}^{(13)})$، برآوردگر LS پارامتر β_0 برابر است با

$$\hat{\beta}_0=c_1^{(22)}\left(y_1^{(2)}-k_1^{(13)}y_1^{(1)}\right),$$

كه در آن $k_\alpha^{(13)}=(1_{\mathrm{n}_\alpha}{}'\mathrm{V}_\alpha^{-1}1_{\mathrm{n}_\alpha})^{-1}1_{\mathrm{n}_\alpha}{}'\mathrm{V}_\alpha^{-1}\mathrm{X}_\alpha$.

بنابراين، REهاي θ و β عبارتند از

(11) $$\hat{\theta}_n=\tilde{\theta}_n+K_1^{-1}K_3H\tilde{\beta}_n$$ و

$$\hat{\beta}_n=\frac{1_p1_p'C_{11}\tilde{\beta}_n}{C}=\hat{\beta}_0 1_p,$$

كه در آن ها

$$H=I_p-\frac{1_p1_p'C_{11}}{C},C=tr(C_{11}),$$

$$\hat{\beta}_n=\left(\hat{\beta}_0,\ldots,\hat{\beta}_0\right)'=\hat{\beta}_0 1_p.$$

متعاقبا، برآوردگر محدودشده σ_e^2 برابر است با

(12) $$\hat{E}=Y-\mathrm{B}\hat{\theta}-X\hat{\beta}\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{m}\hat{E}'V^{-1}\hat{E},$$

$$m=n-2p.$$

حال در این قسمت آماره آزمون نسبت درستنمايي[23] (LRC) را براي فرضيه $H_0:\beta=\beta_0 1_p$ و توزيع آن را، مشخص مي كنيم.

قضيه 2.3 فرض كنيد $\Omega=\{(\theta,\beta,\sigma,V):\theta,\beta\epsilon R^p,\sigma\epsilon R^+,V>0\}$ و $\omega=\left\{(\theta,\beta,\sigma,V):\theta,\beta\epsilon R^p,\beta=\beta_0 1_p,\sigma\epsilon R^+,V>0\right\}$. علاوه بر این فرض كنيد تابع $y^{\frac{N}{2}}g(y)$ داراي ماكزيمم مثبت و متناهي y_g است. در این صورت LRC براي آزمون فرضيه صفر $H_0:\beta=\beta_0 1_p$ برابر است با

(13)

$$l_n=\frac{\tilde{\beta}_n' H' C_{11} H \tilde{\beta}_n}{(p-1)s_e^2}$$

همچنين l_n داراي توزيع تعديل شده F غيرمركزي تعميم يافته[24] با تابع چگالي احتمال زير مي باشد

(14)

$$g_{p,m}^*(l_n)=\sum_{r\geq 0}\frac{\left(\frac{p-1}{m}\right)^{\frac{1}{2}(p+2r-1)} l_n^{\frac{1}{2}(p+2r-3)} K_{(r)}^{(\Delta_*^2)}}{\mathrm{B}\left(\frac{p+2r-1}{2},\frac{m}{2}\right)\left(1+\frac{p-1}{m}l_n\right)^{\frac{1}{2}(p+m+2r-1)}}$$

كه در آن به ازاي $\xi=\beta' H' C_{11} H\beta$، $\Delta_*^2=\xi/\sigma_e^2$، و توزيع مخلوط[25] برابر است با

(15)

$$K_{(r)}^{(\Delta_*^2)}=\int_0^\infty w(\tau)\left(-\psi'(o)\tau\Delta_*^2\right)^r e^{\psi'(o)\tau\Delta_*^2}d\tau$$

برهان: با توجه به این كه $Y|\theta,\beta,\sigma^2\sim E_n(B\theta+X\beta,\sigma^2 V,g)$، با استفاده از قضيه 2.2، LR به صورت زير بدست مي آيد

$$LR=\frac{\max_\omega f_Y(y)}{\max_\Omega f_Y(y)}$$

[23] Likelihood ratio criterion
[24] Modified generalized non-central F distribution
[25] Mixing distribution

$$=\frac{d_n\left|\hat{\sigma}^2 V\right|^{-\frac{1}{2}}\max_y g\left[\frac{y'V^{-1}y}{2\sigma^2}\right]}{d_n\left|\tilde{\sigma}^2 V\right|^{-\frac{1}{2}}\max_y g\left[\frac{y'V^{-1}y}{2\sigma^2}\right]}$$

$$=\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\hat{\sigma}}\right)^n\frac{g(y_g)}{g(y_g)}$$

$$=\left\{\frac{\tilde{E}'V^{-1}\tilde{E}/(n-1)}{\hat{E}'V^{-1}\hat{E}/m}\right\}^n$$

$$=\left\{\frac{m\tilde{E}'V^{-1}\tilde{E}}{(n-1)[\tilde{E}'V^{-1}\tilde{E}+\tilde{\beta}_n'H'C_{11}H\tilde{\beta}_n]}\right\}^n$$

$$=\left(\frac{1}{1+\frac{p-1}{m}l_n}\right)$$

بنابراين مي توان از l_n به عنوان آماره آزمون فرضيه صفر $H_0:\beta=\beta_0 1_p$ استفاده كرد.

حال به منظور يافتن توزيع l_n، فرض كنيد $f_{(\Upsilon,s_e^2)}(.,.,.)$ نشان دهنده تابع توزيع توام (Υ,s_e^2) به ازاي $\Upsilon=(\hat{\theta}_n',\hat{\beta}_n')'$. با استفاده از تابع وزن (4) مي توان نوشت

(16)

$$f_{(\Upsilon,s_e^2)}(x,y,z)=\int_0^\infty W(\tau)f^*_{(r,s_e^2)}(x,y,z)d\tau$$

كه در آن $f^*_{(\Upsilon,s_e^2)}(.,.,.)$ نشان دهنده توزيع توام (Υ,s_e^2) تحت فرض $\Upsilon\sim N_n(0,\sigma^2\tau^{-1}V)$ است. تحت فرض اخير Υ مستقل از s_e^2 است و داريم

(17)

$$f_{(r,s_e^2)}(x,y,z)=\ddot{f}_r(x,y)h_{s_e^2}(z),$$

که در آن $\ddot{\mathrm{f}}_{\mathrm{Y}}(.,.)$ تابع چگالي احتمال $\mathrm{N_{2p}}(\dot{\mathrm{Y}},\sigma^2\tau^{-1}\mathrm{K}^{-1})$ به ازاي $\dot{Y}=(\theta',\beta')'$، و $h_{s_e^2}(.)$ چگالي s_e^2 مي باشند. با استفاده از (16) و (17) مي توان توزيع l_n را به صورت زير بدست آورد

(18)

$$g^*_{p,m}(L_n)=\int_0^\infty W(\tau)G_{p,m}(l_n,\Delta_*^2)d\tau,$$

که در آن $G_{p,m}(l_n,\Delta_*^2)$ نشان دهنده توزيع l_n تحت فرض $\mathrm{Y}\sim\mathrm{N_n}(0,\sigma^2\tau^{-1}\mathrm{V})$ است.

حال فرض کنيد $z_1=\mathrm{V}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{Y}-\tilde{\mathrm{Y}})$ که در آن $\tilde{Y}=\mathrm{B}\tilde{\theta}+\mathrm{X}\tilde{\beta}$. تحت فرض نرمال بودن، مي توان نتيجه گرفت $\tau^{\frac{1}{2}}\sigma^{-1}(\mathrm{I_n}-\mathrm{A})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{z}_1\sim\mathrm{N_n}(0,\mathrm{I_n})$. که در آن

$$A=BC_{22}^{-1}B'V^{-1}-BK_1^{-1}K_3C_{11}^{-1}X'V^{-1}+XC_{11}^{-1}X'V^{-1}-XK_2^{-1}K_3C_{22}^{-1}B'V^{-1}$$

يك ماتريس خودتوان و متقارن است و در نتيجه (I_n-A) نيز خودتوان و متقارن مي باشد. و داريم

$$rank(I_n-A)=tr(I_n-A)=n-2p$$

بنابراين داريم

(19)

$$s_e^2=\frac{z_1'(I_n-A)^{-1/2}(I_n-A)(I_n-A)^{-1/2}z_1}{n-2p}\sim\sigma^2\tau^{-1}\chi^2_{n-2p}.$$

همچنين $\tilde{\beta}_{\mathrm{n}}\sim\mathrm{N_p}(\beta,\sigma^2\tau^{-1}\mathrm{C}_{11}^{-1})$.

در اين قسمت براي بدست آوردن توزيع صورت کسر l_n، با استفاده از روشي مشابه روش کتاب صالح (2006) صفحه 275، فرض کنيد $\Gamma=(\Gamma_1,\Gamma_2)$ ماتريس متعامدي است به طوري که براي ماتريس هاي Γ_1 در اندازه $p\times(p-1)$ و Γ_2 در اندازه $p\times1$ داريم $\Gamma_1\Gamma_2=0$ و $\Gamma_1\Gamma_1'+\Gamma_2\Gamma_2'=\mathrm{I_p}$. بنابراين براي ماتريس خودتوان و متقارن $H=C_{11}^{-\frac{1}{2}}H'C_{11}HC_{11}^{-\frac{1}{2}}$ با رتبه $p-1$، داريم $\Gamma H\Gamma'=\begin{pmatrix}I_{p-1}&0\\0&0\end{pmatrix}$. در اين قسمت فرض کنيد $z_2=\tau^{\frac{1}{2}}\sigma^{-1}\Gamma C_{11}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\beta}_n$. تحت

فرض نرمال بودن مي توان نتيجه گرفت $z_2 \sim N_p(\sigma^{-1}\tau^{\frac{1}{2}}\Gamma C_{11}^{-\frac{1}{2}}\beta, I_p)$. با افراز z_2 به صورت $z_2 = (\dot{z}_1', \dot{z}_2')'$ كه در آن $\dot{z}_1$ برداري در اندازه $p-1$ است، بدست مي آوريم

(20)

$$\tilde{\beta}_n' H' C_{11} H \tilde{\beta}_n = \sigma^2\tau^{-1}\dot{z}_1'\dot{z}_1 \sim \sigma^2\tau^{-1}\chi^2_{p-1}\left(\frac{\xi}{\sigma^2\tau^{-1}}\right).$$

نتيجتا با استفاده از روابط (19) و (20) داريم $l_n \sim F_{p-1,m}\left(\frac{\xi}{\sigma^2\tau^{-1}}\right)$، كه داراي تابع چگالي احتمال زير است

$$G_{p,m}(L_n) = \sum_{r\geq 0} \frac{\left(\frac{p-1}{m}\right)^{\frac{1}{2}(p+2r-1)} L_n^{\frac{1}{2}(p+2r-3)} \left(\frac{\xi}{2\sigma^2\tau^{-1}}\right)^r e^{\frac{-\xi\tau}{2\sigma^2}}}{r!B\left(\frac{p+2r-1}{2}, \frac{m}{2}\right)\left(1+\frac{p-1}{m}L_n\right)^{\frac{1}{2}(p+m+2r-1)}}.$$

حال تحت فرض كلي $Y|\theta,\beta,\sigma^2 \sim E_n(B\theta + X\beta, \sigma^2 V, g)$ با استفاده از رابطه (18) مي توان نتيجه گرفت

$$g^*_{p,m}(L) = \int_0^\infty W(\tau) G_{p,m}(L_n) d\tau$$

$$= \sum_{r\geq 0} \frac{\left(\frac{p-1}{m}\right)^{\frac{1}{2}(p+2r-1)} L_n^{\frac{1}{2}(p+2r-3)} K_{(r)}^{\left(\Delta_*^2\right)}}{r!B\left(\frac{p+2r-1}{2}, \frac{m}{2}\right)\left(1+\frac{p-1}{m}L_n\right)^{\frac{1}{2}(p+m+2r-1)}}.$$

و اثبات كامل است.

فرع 2.1 تحت درستي فرضيه صفر $H_0: \beta = \beta_0 1_p$، l_n داراي توزيع F مركزي با درجات آزادي $p-1$ و m و تابع چگالي زير است

(21)

$$g^*_{p,m}(L_n) = \frac{\left(\frac{p-1}{m}\right)^{\frac{p-1}{2}} L_n^{\frac{p-1}{2}-1}}{B\left(\frac{p-1}{2}, \frac{m}{2}\right)\left(1+\frac{p-1}{m}L_n\right)^{\frac{1}{2}(p+m-1)}},$$

فرع 2.2 تابع توان l_n در سطح معني داري[26] γ به صورت زير است

(22)

$$g_{p,m}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)=\sum_{r\geq 0}\frac{1}{r!}K_{(r)}^{\left(\Delta_*^2\right)}I_x\left[\frac{1}{2}(p+2r),\frac{m}{2}\right],$$

كه در آن $I_x(.,.)$ تابع بتاي ناقص[27]، $x=\frac{p\,l_\gamma}{m+p\,l_\gamma}$ و $l_\gamma=\frac{p-1}{p+2}F_{p-1,m}(\gamma)$.

در ادامه قضيه زير را بدون اثبات ارائه مي دهيم.

قضيه 2.4

$$\begin{pmatrix}\hat{\theta}_n\\ \tilde{\beta}_n\end{pmatrix}\sim E_{2p}\left\{\begin{pmatrix}\theta+K_1^{-1}K_3H\beta\\ \beta\end{pmatrix};\sigma^2\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & C_{11}^{-1}\end{pmatrix},g\right\},$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{\beta}_n\\ \tilde{\beta}_n-\hat{\beta}_n\end{pmatrix}\sim E_{2p}\left\{\begin{pmatrix}\beta\\ H\beta\end{pmatrix};\sigma^2\begin{pmatrix}C_{11}^{-1} & HC_{11}^{-1}\\ C_{11}^{-1}H' & HC_{11}^{-1}\end{pmatrix},g\right\},$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{\beta}_n-\beta_0 1_p\\ \tilde{\beta}_n-\hat{\beta}_n\end{pmatrix}\sim E_{2p}\left\{\begin{pmatrix}(\bar{\beta}-\beta_0)1_p\\ H\beta\end{pmatrix};\sigma^2\begin{pmatrix}\frac{1_p1_p'}{c} & 0\\ 0 & HC_{11}^{-1}\end{pmatrix},g\right\},$$

كه درآن ها

$$\bar{\beta}1_p=\frac{1_p1_p'C_{11}^{-1}}{C},\qquad D_{12}=\frac{-1_p1_p'k_1^{-1}K_3}{C},\qquad D_{11}=K_1^{-1}+\frac{K_1^{-1}K_31_p1_p'K_3K_1^{-1}}{C}.$$

[26] Level of significance
[27] Incomplete Beta function

➢ ارائه برخی برآوردگرهای بهبود یافته

در این بخش، سه برآوردگر دیگر با نام هاي برآوردگر آزمون اولیه[28] (PTE)، برآوردگر انقباضي نوع استاین[29] (SE) و برآوردگر انقباضي نوع مثبت[30] (PRSE) را براي پارامترهاي مورد نظر ارائه مي دهیم.

برآوردگرهاي آزمون اولیه بردارهاي β و θ به ترتیب عبارتند از

$$\hat{\beta}_n^{PT} = \tilde{\beta}_n - H\tilde{\beta}_n I\left(L_n < F_{p-1,m}(\gamma)\right) \tag{23}$$

و

$$\hat{\theta}_n^{PT} = \tilde{\theta}_n - K_1^{-1}K_3 H\tilde{\beta}_n I\left(L_n < F_{p-1,m}(\gamma)\right), \tag{24}$$

که در آن $I(A)$ تابع نشانگر مجموعه A، $F_{\mathrm{p-1,m}}(\gamma)$ چندك بالایي توزیع F مرکزي با $p-1$ و m درجات آزادي به اندازه γ است.

یکي از معایب PTE، وابستگي شدید آن به مقدار γ، سطح معني داري است. همچنین PTE خاصیت گسسته سازي دارید، که مطلوب نمي باشد. براي رفع این معایب، برآوردگرهاي انقباضي نوع استاین[31] (SSE) بردارهاي β و θ را به صورت زیر تعریف مي کنیم.

---

[28] Preliminary test estimator
[29] Stein-type shrinkage estimator
[30] Positive-rule shrinkage estimator
[31] Stein-type shrinkage estimator

(25)
$$\hat{\beta}_n^S = \tilde{\beta}_n - cH\tilde{\beta}_n L_n^{-1}$$

و

(26)
$$\hat{\theta}_n^S = \tilde{\theta}_n + cK_1^{-1}K_3H\tilde{\beta}_n L_n^{-1},$$

که در آن ها،

(27)
$$c = \frac{(p-3)m}{(p-1)(m+2)}.$$

توجه کنید که برآوردگرهاي اخير، تركيبات محدبي از $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$ نمي باشند و لذا ممكن است مقادير آن ها از $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$ تجاوز كند. بنابراين براي منقبض كردن اين برآوردگرها به $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$، برآوردگرهايي به صورت تركيبات محدب $\hat{\beta}$ و $\hat{\beta}^S$، و $\hat{\theta}$ و $\hat{\theta}^S$ را با استفاده از روش آزمون اوليه معرفي مي كنيم. به اين برآوردگر، برآوردگر انقباضي نوع مثبت[32] (PRSE) مي گويند. به ازاي $p \geq 4$، اين برآوردگرها عبارتند از

(28)
$$\hat{\beta}_n^{S+} = \hat{\beta}_n I(L_n < c) + \hat{\beta}_n^S I(L_n > c)$$

$$= \hat{\beta}_n + (1 - cL_n^{-1}) I(L_n > c) H\tilde{\beta}_n$$

و

(29)
$$\hat{\theta}_n^{S+} = \hat{\theta}_n I(L_n < c) + \hat{\theta}_n^S I(L_n > c)$$

$$= \hat{\theta}_n - (\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n^S) I(L_n > c)$$

$$= \hat{\theta}_n - (1 - cL_n^{-1}) I(L_n > c) K_1^{-1} K_3 H\tilde{\beta}_n$$

Positive rule shrinkage estimator [32]

$$= \tilde{\theta}_n + K_1^{-1} K_3 H \tilde{\beta}_n \{1 - (1 - cL_n^{-1}) I(L_n > c)\}.$$

براي آگاهي بيشتر در رابطه با برآوردگرهاي ارائه شده در اين بخش به جاج و باك[33] (1978) و صالح (2006) تحت توزيع نرمال و حالات مختلف ناپارامتري مراجعه كنيد.

➢ محاسبه اريبی، مخاطره و ماتريس MSE

در اين بخش، اريبي، توابع مخاطره وزني و ماتريس هاي MSE را براي برآوردگرهاي ارائه شده در بخش قبل بدست مي آوريم.

فرض كنيد δ^* برآوردگري براي پارمتر مجهول δ_o باشد. دراين صورت اريبي، تابع مخاطره و ماتريس MSE برآوردگر δ^* را به ترتيب با $b(\delta^*)$، $R(\delta^*; W)$ و $M(\delta^*)$ نشان داده و به صورت زير تعريف مي كنيم.

$$b(\delta^*) = E(\delta^* - \delta_o)$$

$$R(\delta^*; W) = E(\delta^* - \delta_o)' W (\delta^* - \delta_o)$$

---

[33] Judge and Bock

$$M(\delta^*) = E(\delta^* - \delta_o)(\delta^* - \delta_o)'$$

که در آن ها W يك ماتريس معين مثبت است.

در اين قسمت با استفاده از روابط (5) و (9) داريم

$$M\left(\tilde{\beta}_n\right)=\sigma_e^2 C_{11}^{-1}, \quad b\left(\tilde{\beta}_n\right)=0, \quad R\left(\tilde{\beta}_n;W\right)=\sigma_e^2 tr\left(WC_{11}^{-1}\right), \quad (30)$$

$$M\left(\tilde{\theta}_n\right)=\sigma_e^2 C_{11}^{-1}, \quad b\left(\tilde{\theta}_n\right)=0, \quad R\left(\tilde{\theta}_n;W\right)=\sigma_e^2 tr\left(WC_{11}^{-1}\right), \quad (31)$$

همچنين با استفاده از قضيه 2.4 مي توان نوشت

$$b\left(\hat{\beta}_n\right)=-H\beta, \quad M\left(\hat{\beta}_n\right)=\frac{\sigma_e^2 1_p 1_p'}{C}+H\beta\beta' H', \; R\left(\hat{\beta}_n;W\right)=\frac{\sigma_e^2 1_p' W 1_p}{C}+\beta' H' W H\beta, \quad (32)$$

$$M\left(\hat{\theta}_n\right)=\sigma_e^2 D_{11}+K_1^{-1}K_3 H\beta\beta' H' K_3 K_1^{-1}, \; b\left(\hat{\theta}_n\right)=K_1^{-1}K_3 H\beta, \quad (33)$$

$$R\left(\hat{\theta}_n;W\right)=\sigma_e^2 tr\left(WD_{11}\right)+\beta' H' K_1^{-1}K_3 W K_3 K_1^{-1} H\beta.$$

خواص برآوردگرهای PT پارامترهای $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{\theta}$

$$b\left(\hat{\beta}_n^{PT}\right)=-H\beta G_{p+1,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right),$$

$$M\left(\hat{\beta}_n^{PT}\right)=\sigma_e^2 C_{11}^{-1}-\sigma_e^2 H C_{11}^{-1} G_{p+1,m}^{(1)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)+H\beta\beta' H'$$
$$\times\left\{2G_{p+1,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)-G_{p+3,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)\right\},$$

$$R\left(\hat{\beta}_n^{PT};W\right)=\sigma_e^2 tr(WC_{11}^{-1})-\sigma_e^2 tr(WHC_{11}^{-1})G_{p+1,m}^{(1)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)+\beta' H' W H\beta$$
$$\times\left\{2G_{p+1,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)-G_{p+3,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)\right\},$$

$$b\left(\hat{\theta}_n^{PT}\right)=K_1^{-1}K_3 H\beta G_{p+1,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right),$$

$$M\left(\hat{\theta}_n^{PT}\right)=\sigma_e^2 C_{22}^{-1}-\sigma_e^2\left(C_{22}^{-1}-D_{11}\right)G_{p+1,m}^{(1)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)$$
$$+K_1^{-1}K_3 H\beta\beta' H' K_3 K_1^{-1}\left\{2G_{p+1,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)-G_{p+3,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)\right\},$$

$$R\left(\hat{\theta}_n^{PT},W\right)=\sigma_e^2 tr(WC_{22}^{-1})-\sigma_e^2 tr\left[W\left(C_{22}^{-1}-D_{11}\right)\right]G_{p+1,m}^{(1)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)$$
$$+\beta' H' K_1^{-1}K_3' W K_3 K_1^{-1} H\beta\times\left\{2G_{p+1,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)-G_{p+3,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)\right\},$$

که در آن ها

$$G_{p,m}^{(j)}\left(l_{\gamma};\Delta_*^2\right)=\sum_{r\geq 0}\frac{1}{r!}K_{(r+j-2)}^{\left(\Delta_*^2\right)}I_x\left[\frac{1}{2}(p+2r),\frac{m}{2}\right]$$

خواص برآوردگرهای SS پارامترهای β و θ

$$b\left(\hat{\beta}_n^S\right)=-c(p-1)H\beta E^{(2)}\left[\chi_{p+1}^{*-2}\left(\Delta_*^2\right)\right],$$

$$M\left(\hat{\beta}_n^S\right)=\sigma_e^2C_{11}^{-1}-c(p-1)\sigma_e^2HC_{11}^{-1}\left\{2E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*-2}\left(\Delta_*^2\right)\right]-(p-3)E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]\right\}$$

$$+c\left(p^2-1\right)H\beta\beta'H'E^{(2)}\left[\chi_{p+3}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right],$$

$$R\left(\hat{\beta}_n^S;W\right)=\sigma_e^2tr\left(WC_{11}^{-1}\right)-c(p-1)\sigma_e^2tr\left(WHC_{11}^{-1}\right)\left\{2E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*-2}\left(\Delta_*^2\right)\right]\right.$$

$$\left.-(p-3)E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]\right\}+c\left(p^2-1\right)\beta'H'WH\beta E^{(2)}\left[\chi_{p+3}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right],$$

$$b\left(\hat{\theta}_n^S\right)=c(p-1)K_1^{-1}K_3H\beta E^{(2)}\left[\chi_{p+1}^{*-2}\left(\Delta_*^2\right)\right],$$

$$M\left(\hat{\theta}_n^S\right)=\sigma_e^2C_{22}^{-1}-c(p-1)\sigma_e^2K_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}$$

$$\times\left\{(p-3)E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]+2\Delta_*^2E^{(1)}\left[\chi_{p+3}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]\right\}$$

$$+c\left(p^2-1\right)K_1^{-1}K_3H\beta\beta'H'K_3K_1^{-1}E^{(2)}\left[\chi_{p+3}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right],$$

$$R\left(\hat{\theta}_n^S;W\right)=\sigma_e^2tr(WC_{22}^{-1})-c(p-1)\sigma_e^2tr(WK_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1})$$

$$\times\left\{(p-3)E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]+2\Delta_*^2E^{(1)}\left[\chi_{p+3}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]\right\}$$

$$+c\left(p^2-1\right)\beta H'K_1^{-1}K_3WK_3K_1^{-1}H\beta E^{(2)}\left[\chi_{p+3}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right],$$

که در آن ها

$$E^{(j)}\left[\chi_{p+s}^{*-2}\left(\Delta_*^2\right)\right]=\sum_{r\geq 0}\frac{1}{r!}K_{(r+j-2)}^{\left(\Delta_*^2\right)}(p+s-2+2r)^{-1},$$

$$E^{(j)}\left[\chi_{p+s}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]=\sum_{r\geq 0}\frac{1}{r!}K_{(r+j-2)}^{\left(\Delta_*^2\right)}(q+s-2+2r)^{-1}(p+s-4+2r)^{-1}.$$

خواص برآوردگرهای PRS پارامترهای β و θ

$$b\left(\hat{\beta}_n^{S+}\right)=-H\beta\left\{G_{p+1,m}^{(2)}\left(c_1;\Delta_*^2\right)+c_1E^{(2)}\left[F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)>c_1\right)\right]\right\},$$

$$M\left(\hat{\beta}_n^{S+}\right)=M\left(\hat{\beta}_n^{S}\right)-\sigma_e^2 HC_{11}^{-1}E^{(1)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]$$

$$+2H\beta\beta'H'E^{(2)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]$$

$$-E^{(2)}\left[\left(1-c_2F_{p+3,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+3,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_2\right)\right],$$

$$R\left(\hat{\beta}_n^{S+};W\right)=R\left(\hat{\beta}_n^{S};W\right)$$

$$=-\sigma_e^2 te(WHC_{11}^{-1})E^{(1)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]$$

$$+2\beta'H'WH\beta E^{(2)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]$$

$$-E^{(2)}\left[\left(1-c_2F_{p+3,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+3,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_2\right)\right],$$

$$b\left(\hat{\theta}_n^{S+}\right)=c_1K_1^{-1}K_3H\beta\left\{E^{(2)}\left[F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right]-E^{(2)}\left[F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)I\left(F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]\right\}$$

$$+K_1^{-1}K_3H\beta G_{p+1,m}^{(2)}\left(c_1;\Delta_*^2\right),$$

$$M\left(\hat{\theta}_n^{S+}\right)=M\left(\hat{\theta}_n^{S}\right)-\sigma_e^2K_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}$$

$$\times E^{(1)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]$$

$$+K_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}$$

$$\times\left\{2E^{(2)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]-E^{(2)}\left[\left(1-c_2F_{p+3,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+3,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_2\right)\right]\right\},$$

$$R\left(\hat{\theta}_n^{S+};W\right)=R\left(\hat{\theta}_n^{S};W\right)-\sigma_e^2 tr\left(WK_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}\right)$$

$$\times E^{(1)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]$$

$$+\beta'H'K_1^{-1}K_3'WK_3K_1^{-1}H\beta$$

$$\times\left\{2E^{(2)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]-E^{(2)}\left[\left(1-c_2F_{p+3,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+3,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_2\right)\right]\right\},$$

که در آن ها

$$E^{(j)}\left[F_{p+s,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)I\left(F_{p+s,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_i\right)\right]$$

$$=\sum_{r\geq 0}\frac{1}{r!}K_{(r+j-2)}^{\left(\Delta_*^2\right)}(p+s)(p+s-2+2r)^{-1}I_{x'}\left[\frac{p+s-2+2r}{2},\frac{m+2}{2}\right]$$

$$E^{(j)}\left[F_{p+s,m}^{-2}\left(\Delta_*^2\right)I\left(F_{p+s,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_i\right)\right],$$

$$= \sum_{r\geq 0} \frac{(q+s)^2}{r!m} K_{(r+j-2)}^{(\Delta_*^2)} [(p+s-2+2r)(p+s-4+2r)]^{-1} I_{x'}\left[\frac{p+s-2+2r}{2}, \frac{m+2}{2}\right]$$

به ازاي $s=1$ مقدار $c_1 = \frac{c(p-1)}{p+1}$ و به ازاي $s=3$ مقدار $c_2 = \frac{c(p-1)}{p+3}$ را به كار مي بريم.

همچنين $X' = \frac{c(p-1)}{m+c(p-1)}$.

➢ مقايسه برآوردگرها

در اين بخش، با استفاده از توابع مخاطره برآوردگرها، كه در بخش قبل آن ها را ارائه كرديم، برآوردگرهاي موردنظر را با يكديگر مقايسه مي كنيم. همچنين شرايطي را كه هر يك از برآوردگرها بر ديگري برتري دارد را بدست مي آوريم.

ابتدا فرض كنيد $\ddot{B} = \beta' H' K_1^{-1} K_3 W K_3 K_1^{-1} H \beta$، در اين صورت با استفاده از روابط (22) و (23) داريم

(34)

$$R(\tilde{\theta}_n; W) - R(\hat{\theta}_n; W) = \sigma_e^2 tr\left[W\left(C_{22}^{-1} - D_{11}\right)\right] - \ddot{B}.$$

حال دقت کنيد که $\sigma_e^2 \mathrm{tr}[\mathrm{W}(\mathrm{C}_{22}^{-1} - \mathrm{D}_{11})] \leq \sigma_e^2 \mathrm{tr}(\mathrm{C}_{22}^{-1}\mathrm{W})$؛ و همچنين $K_3 \mathrm{K}_1^{-1} \mathrm{C}_{11}^{-1} \mathrm{K}_1^{-1} \mathrm{K}_3 = \mathrm{C}_{22}^{-1} - \mathrm{K}_1^{-1}$. بنابراين داريم

$$
\begin{aligned}
\frac{\ddot{B}}{\xi} &\leq \lambda_1\left(C_{11}^{-1}K_1^{-1}K_3WK_3K_1^{-1}\right) \\
&= \lambda_1\left(K_3K_1^{-1}C_{11}^{-1}K_1^{-1}K_3W\right) \\
&= \lambda_1\left[\left(C_{22}^{-1} - K_1^{-1}\right)W\right] \\
&< \lambda_1\left(C_{22}^{-1}W\right) \\
&< tr\left(C_{22}^{-1}W\right).
\end{aligned}
$$

که در آن $\lambda_1(\mathrm{A})$ بزرگترين مقدار ويژه ماتريس A مي باشد. لذا مي توان نتيجه گرفت که رابطه (34) به ازاي مقادير از Δ_*^2 که در رابطه $\Delta_*^2 \leq \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{C}_{22}^{-1}\mathrm{W})}{\lambda_1(\mathrm{C}_{22}^{-1}\mathrm{W})}$ صدق مي کند، نامنفي است و برآوردگر $\hat{\theta}_\mathrm{n}$ بر برآوردگر $\tilde{\theta}_\mathrm{n}$ برتري دارد. در اين حالت مي نويسيم $\hat{\theta}_\mathrm{n} \succcurlyeq \tilde{\theta}_\mathrm{n}$. همچنين با استفاده از رابطه $\ddot{B} \geq \xi\lambda_\mathrm{p}[(\mathrm{C}_{22}^{-1} - \mathrm{K}_1^{-1})\mathrm{W}]$ به ازاي مقاديري از Δ_*^2 که در رابطه $\Delta_*^2 \geq \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{C}_{22}^{-1}\mathrm{W})}{\lambda_\mathrm{p}(\mathrm{C}_{22}^{-1}\mathrm{W})}$ صدق کند (λ_p کوچکترين مقدار ويژه ماتريس A است)، $\hat{\theta}_\mathrm{n} \preccurlyeq \tilde{\theta}_\mathrm{n}$.

در مقايسه برآوردگرهاي $\hat{\theta}_\mathrm{n}$ و $\tilde{\theta}_\mathrm{n}$ با برآوردگر $\hat{\theta}_\mathrm{n}^{\mathrm{PT}}$ داريم

$$
\hat{\theta}_n^{PT} \geq \tilde{\theta}_n \Leftrightarrow \Delta_*^2 \leq \frac{tr\left(C_{22}^{-1}W\right)G_{p+1,m}^{(1)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)}{\lambda_1\left(C_{22}^{-1}W\right)\left[2G_{p+1,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right) - G_{p+3,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)\right]}.
$$

$$
\hat{\theta}_n^{PT} \geq \hat{\theta}_n \Leftrightarrow \Delta_*^2 \geq \frac{tr\left(C_{22}^{-1}W\right)\left[1 - G_{p+1,m}^{(1)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)\right]}{\lambda_1\left(C_{22}^{-1}W\right)\left[1 - 2G_{p+1,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right) - G_{p+3,m}^{(2)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)\right]}.
$$

در مقايسه برآوردگر $\hat{\theta}_\mathrm{n}^\mathrm{S}$ با برآوردگر $\tilde{\theta}_\mathrm{n}$، با استفاده از تفاوت توابع مخاطره به ازاي $p \geq 4$ داريم

$$
\begin{aligned}
R\left(\tilde{\theta}_n;W\right) - R\left(\hat{\theta}_n^S;W\right) &= c(p-1)\sigma_e^2 tr\left(WK_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}\right) \\
&\quad \times \left\{(p-3)E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right] + 2\Delta_*^2 E^{(1)}\left[\chi_{p+3}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]\right\} \\
&\quad - c\left(p^2-1\right)\ddot{B}E^{(2)}\left[\chi_{p+3}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$\geq c(p-1)\sigma_e^2 tr\left(WK_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}\right)$$

$$\times\left\{(p-3)E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]+2\Delta_*^2E^{(1)}\left[\chi_{p+3}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]\right\}$$

$$-c\left(p^2-1\right)\Delta^2 tr\left(C_{22}^{-1}W\right)E^{(2)}\left[\chi_{p+3}^{*-4}\left(\Delta_*^2\right)\right] \qquad (35)$$

سمت راست رابطه (35) نسبت به Δ_*^2 غير صعودي مي باشد و در نقطه $\Delta_*^2=0$ ماكزيمم مي شود؛ بنابراين $\hat{\theta}_n^S \succcurlyeq \tilde{\theta}_n$.

در مقايسه برآوردگر θ_n^{S+} و برآوردگر θ_n^S، با استفاده از تفاوت توابع مخاطره، مي توان نوشت

$$R\left(\hat{\theta}_n^S;W\right)-R\left(\hat{\theta}_n^{S+}\right)=\sigma_e^2 tr\left(WK_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}\right)$$

$$\times E^{(1)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]$$

$$-2\ddot{B}E^{(2)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]$$

$$+\ddot{B}E^{(2)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+3,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_2\right)\right]$$

(36)

از آن جايي كه $F_{p+1,m}(\Delta_*^2)<c_1$ ، داريم $\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}(\Delta_*^2)\right)<0$. بنابراين سمت راست رابطه (36) به طور مطلق مثبت است و مي توان نوشت

$$-2\ddot{B}E^{(2)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]>0$$

همچنين از آن جايي كه اميد رياضي يك متغير تصادفي مثبت، مثبت است؛ مي توان نتيجه گرفت

$$E^{(1)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)\right)^2 I\left(F_{p+1,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_1\right)\right]>0$$

بنابراين برآوردگر θ_n^{S+} به طور يكنواخت بر برآوردگر θ_n^S برتري دارد.

اين بررسي نشان مي دهد كه اگر بتوان برتري برآوردگر θ_n^S را نسبت به بقيه برآوردگر ها ثابت كرد، همان نتيجه براي برآوردگر θ_n^{S+} برقرار است. لذا از اين به بعد، تنها برآوردگر θ_n^S را با بقيه برآوردگر ها مقايسه مي كنيم. در مقايسه برآوردگر θ_n^S و برآوردگر $\hat{\theta}_n$، ابتدا دقت كنيد تحت درستي فرضيه صفر، $\Delta_*^2=0$، و بنابراين مي توان نوشت

$$R\left(\hat{\theta}_n;W\right)-R\left(\hat{\theta}_n^{S+};W\right)=\sigma_e^2 tr\left(D_{11}W\right)-\sigma_e^2 tr\left(C_{22}^{-1}W\right)$$

$$+c(p-1)(p-3)\sigma_e^2 tr\left(WK_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}\right)\times E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*^{-4}}(0)\right]$$

$$=\sigma_e^2 tr\left(D_{11}W\right)-\sigma_e^2 tr\left(C_{22}^{-1}W\right)$$

$$+c(p-1)(p-3)\sigma_e^2 tr\left(W\left[C_{22}^{-1}-D_{11}\right]\right)\times E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*^{-4}}(0)\right]$$

$$=\sigma_e^2\left\{\frac{m(p-3)^2E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*^{-4}}(0)\right]}{m+2}-1\right\}$$

$$\times tr\left(W\left[C_{22}^{-1}-D_{11}\right]\right)\le 0.$$

بنابراين تحت درستي فرضيه صفر و برقراري شرط $\frac{m+2}{m(p-3)^2} \geq \left[\chi_{p+1}^{*-4}(0)\right] E^{(1)}$، مي توان نتيجه گرفت $\hat{\theta}_n \geqslant \hat{\theta}_n^S$. اما با زياد شدن مقدار Δ_*^2، تابع مخاطره $\hat{\theta}_n$ بي كران مي شود در صورتي كه تابع مخاطره برآوردگر θ_n^S همواره كمتر از تابع مخاطره برآوردگر $\tilde{\theta}_n$ است؛ در اين حالت برآوردگر θ_n^S بر برآوردگر $\hat{\theta}_n$ برتري دارد.

در مقايسه برآوردگر θ_n^S با برآوردگر $\hat{\theta}_n^{PT}$، تحت درستي فرضيه صفر، با استفاده از تفاوت توابع مخاطره، داريم

$$R\left(\hat{\theta}_n^{PT};W\right)-R\left(\hat{\theta}_n^{S};W\right)=c(p-1)(p-3)\sigma_e^2 tr\left(WK_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}\right)$$

$$\times E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*^{-4}}(0)\right]-\sigma_e^2 tr\left(W\left[C_{22}^{-1}-D_{11}\right]\right)E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*^{-4}}(0)\right]$$

$$=\sigma_e^2\left\{\frac{(p-3)^2m}{m+2}tr\left(W\left[C_{22}^{-1}-D_{11}\right]\right)E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*^{-4}}(0)\right]\right.$$

$$\left.-tr\left(W\left[C_{22}^{-1}-D_{11}\right]\right)G_{p+1,m}^{(1)}\left(l_\gamma,0\right)\right\}. \qquad (37)$$

سمت راست رابطه (37) به ازاي همه γهايي كه در رابطه زير صدق مي كنند، نامنفي است.

$$m(p-3)^2E^{(1)}\left[\chi_{p+1}^{*^{-4}}(0)\right]\le(m+2)G_{p+1,m}^{(1)}\left(l_\gamma,0\right). \qquad (38)$$

به عبارتي $\hat{\theta}_n^S \succcurlyeq \hat{\theta}_n^{PT}$. اما با زياد شدن مقدار Δ_*^2، مقدار تابع مخاطره $\hat{\theta}_n^{PT}$ از تابع مخاطره $\tilde{\theta}_n$ بيشتر مي شود در حالي كه تابع مخاطره برآوردگر θ_n^S همواره كمتر از تابع مخاطره برآوردگر $\tilde{\theta}_n$ است و در خارج از يك همسايگي كوچك از صفر، $\hat{\theta}_n^S \preccurlyeq \hat{\theta}_n^{PT}$.

در پايان، نشان مي دهيم كه عامل انقباض c در برآوردگر انقباضي نوع استاين نسبت به بردار پارامتر β و توزيع مخلوط (15) استوار[34] است

قضيه 5.1 فرض كنيد در مدل رگرسيون موازي (1)، $E \sim E_n(0, \sigma^2 V, \psi)$. در اين صورت برآوردگر انقباضي نوع استاين

$$\hat{\beta}_n^S = \tilde{\beta}_n - cQ^{-1}H\tilde{\beta}_n L_n^{-1}$$

$$= \tilde{\beta}_n - c^*\left(ms_e^2\right)Q^{-1}H\tilde{\beta}_n\left(\tilde{\beta}_n' H' Q^{-1}H\tilde{\beta}_n\right)^{-1}$$

$$= \tilde{\beta}_n - c^*\left(ms_e^2\right)Q^{-1}z\left(z_n' Q^{-1}z\right)^{-1}.$$

كه در آن $z = H\tilde{\beta}_n$ و Q يك ماتريس معين مثبت است، با شرط $0 < c^* \le \frac{2(p-3)}{m+2}$، نسبت به تابع زيان مربعي بر برآوردگر محدود نشده $\tilde{\beta}_n$ به طور يكنواخت برتري دارد.

برهان: با استفاده از تفاوت توابع مخاطره دو برآوردگر و با توجه به اين كه $\int_0^\infty \frac{\tau^{-2}}{z' Q^{-1} z}\, dW(\tau)d\tau > 0$ (سريواستاوا و بيلوديو، 1989 را ببينيد) داريم

$$E\left(\hat{\beta}_n^S - \beta\right)' Q\left(\hat{\beta}_n^S - \beta\right) - E\left(\tilde{\beta}_n - \beta\right)' Q\left(\tilde{\beta}_n - \beta\right)$$

$$= \left(c^*\right)^2 E\left[\left(ms_e^2\right)^2\left(z'Q^{-1}z\right)^{-1}\right] - 2c^* E\left[\left(ms_e^2\right)\left(\tilde{\beta}_n - \beta\right)' H\tilde{\beta}_n\left(z'Q^{-1}z\right)^{-1}\right]$$

$$= \left(c^*\right)^2 m(m+2)E_\tau\left[E_N z'Q^{-1}z^{-1}\right] - 2c^* m(p-3)E_\tau\left[E_N\left(z'Q^{-1}z\right)^{-1}\right] \le 0,$$

اگر و فقط اگر $0 < c^* \le \frac{2(p-3)}{m+2}$.

---

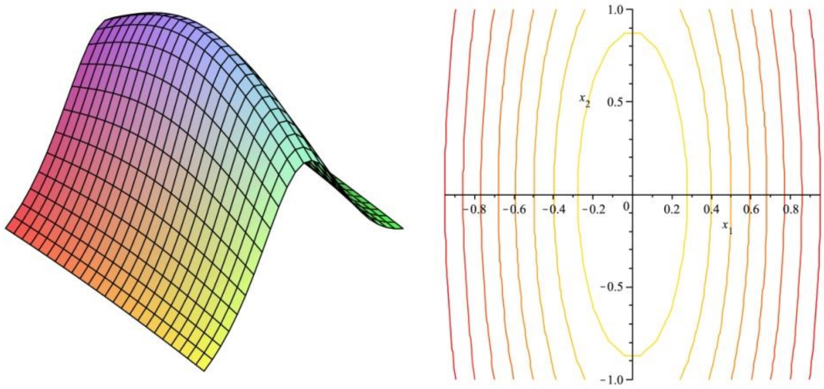
[34] Robust

➢ کاربرد در توزیع t استیودنت چندمتغیره

در این بخش، فرض مي کنيم خطاي مدل رگرسيون موازي (1)، يکي از معروفترين اعضاي کلاس ECDها به نام توزیع t استیودنت چندمتغیره باشد. در این حالت مي نويسيم $E\sim MT_n(0,\sigma^2 V,\nu)$ که در آن ν درجه آزادي اين توزيع مي باشد. تابع چگالي آن به صورت زير است.

$$f(\varepsilon)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+v}{2}\right)|V|^{-\frac{1}{2}}}{(\pi v)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sigma^n}\left(1+\frac{\varepsilon' V^{-1}\varepsilon}{v\sigma^2}\right)^{-\frac{n+v}{2}},0<v,\sigma<\infty$$

نمودار تابع چگالي احتمال و منحني هاي تراز اين توزيع در زير آورده شده است.



در این حالت با استفاده از جدول 1 داریم

$$W(\tau)=\frac{\nu(\nu\tau/2)^{\nu/2-1}e^{-\nu\tau/2}}{2\Gamma(\nu/2)}$$

توزیع t استیودنت چندمتغیره نقش بسیار مهمي در استنباط آماري استوار ایفا مي کند؛ به خصوص در مدل هایي با دمهاي پهن براي همپوشاني نقاط پرت و نقاط دور افتاده کاربرد فراواني دارد. زلنر (1976) براي اولین بار از توزیع t استیودنت چندمتغیره در مسائل برآورد و استنباط آماري استفاده کرد. پس از او کاربردهاي جالبي از این توزیع در کارهاي فراسر و ان جي[35] (1980)، اولا و والش[36] (1984)، لانگ[37] و همکاران (1989)، لوچي[38] و همکاران (2003)، خان (2005) و آرشي و طباطبایي (2008) مي توان یافت.

حال با فرض $E\sim MT_n(0,\sigma^2V,\nu)$ و با استفاده از رابطه (15) مي توان نتیجه گرفت

$$K_{(r)}^{(\Delta_*^2)}=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+r\right)\left(\frac{\Delta_*^2}{\nu-2}\right)^r}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(1+\frac{\Delta_*^2}{\nu-2}\right)^{\frac{\nu}{2}+r}}.$$

بنابراین، روابط زیر نتیجه مي شوند

[35] Fraser and Ng
[36] Ullah and Walsh
[37] Lange
[38] Loschi

$$G_{p,m}^{(j)}\left(l_\gamma;\Delta_*^2\right)=\sum_{r\geq 0}\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}+r\right)\left(\frac{\Delta_*^2}{v-2}\right)^r I_x\left[\frac{1}{2}(p+2r),\frac{m}{2}\right]}{\Gamma(r+1)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left(1+\frac{\Delta_*^2}{v-2}\right)^{\frac{v}{2}+r}},$$

$$E^{(j)}\left[\chi_{p+s}{*}^{-2}\left(\Delta_*^2\right)\right]=\sum_{r\geq 0}\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}+r+j-2\right)}{\Gamma(r+1)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)(p+s-2+2r)},$$

$$\times\frac{\left(\frac{\Delta_*^2}{v-2}\right)^r}{\left(1+\frac{\Delta_*^2}{v-2}\right)^{\frac{v}{2}+r+j-2}},$$

$$E^{(j)}\left[\chi_{p+s}{*}^{-4}\left(\Delta_*^2\right)\right]=\sum_{r\geq 0}\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}+r+j-2\right)\left(\frac{\Delta_*^2}{v-2}\right)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left(1+\frac{\Delta_*^2}{v-2}\right)^{\frac{v}{2}+r+j-2}}$$

$$\times\frac{1}{(q+s-2+2r)(p+s-4+2r)}$$

$$E^{(j)}\left[F_{p+s,m}^{-1}\left(\Delta_*^2\right)I\left(F_{p+s,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_i\right)\right]=\sum_{r\geq 0}\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}+r+j-2\right)\left(\frac{\Delta_*^2}{v-2}\right)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left(1+\frac{\Delta_*^2}{v-2}\right)^{\frac{v}{2}+r+j-2}}$$

$$\times\frac{(p+s)I_{x'}\left[\frac{p+s-2+2r}{2},\frac{m+2}{2}\right]}{(q+s-2+2r)},$$

$$E^{(j)}\left[F_{p+s,m}^{-2}\left(\Delta_*^2\right)I\left(F_{p+s,m}\left(\Delta_*^2\right)<c_i\right)\right]=\sum_{r\geq 0}\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}+r+j-2\right)\left(\frac{\Delta_*^2}{v-2}\right)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left(1+\frac{\Delta_*^2}{v-2}\right)^{\frac{v}{2}+r+j-2}}$$

$$\times \frac{(q+s) I_{x'}\left[\frac{p+s-4+2r}{2}, \frac{m+4}{2}\right]}{(q+s-2+2r)(p+s-4+2r)}.$$

بر اساس روابط فوق، شرايط برتري برآوردگرها كه در بخش قبلي در مورد آن ها بحث شد به صورت زير تبديل مي شوند.

تحت فرضيه H_o داريم

(i) $$G_{p,m}^{(j)}(l_\gamma;0) = I_x\left[\frac{p}{2}, \frac{m}{2}\right] = F_{p,m}(l_\gamma),$$

(ii) $$E^{(j)}\left[\chi_{p+s}^{*-4}(0)\right] = \frac{1}{(p+s-2)(p+s-4)},$$

(iii) $$E^{(j)}\left[\left(1-c_1 F_{p+1,m}^{-1}(0)\right)^2\right] = 1-c.$$

بنابراين با استفاده از (ii) مقدار ماكزيمم سمت راست رابطه (35) برابر است با

$$c\sigma_e^2 tr\left(WK_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}\right).$$

همچنين با استفاده از (ii) مي توان نتيجه گرفت كه به ازاي $c \le 1$، $\hat{\theta}_n \succcurlyeq \hat{\theta}_n^S$ و به ازاي $c \ge 1$، $\hat{\theta}_n \preccurlyeq \hat{\theta}_n^S$.

با استفاده از (i) و (ii)، شرط برتري برآوردگر $\hat{\theta}_n^{PT}$ بر برآوردگر $\hat{\theta}_n^S$ در رابطه (38) به $F_{p,m}(l_\gamma) \ge c$ تبديل مي شود. در غير اين صورت به ازاي γهايي كه در رابطه $F_{p,m}(l_\gamma) \le c$ صدق كند $\hat{\theta}_n^{PT} \preccurlyeq \hat{\theta}_n^S$.

در پايان، تحت فرضيه H_o، با استفاده از (iii)، مي توان نوشت

$$\begin{aligned} R\left(\hat{\theta}_n^{S+};W\right) &= R\left(\hat{\theta}_n;W\right) + \sigma_e^2 tr\left(WK_1^{-1}K_3HC_{11}^{-1}H'K_3K_1^{-1}\right) \\ &\quad \times \left\{(1-c) - E^{(1)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}(0)\right)^2 I\left(F_{p+1,m}(0) < c_1\right)\right]\right\} \\ &\ge R\left(\hat{\theta}_n;W\right), \end{aligned}$$

زيرا داريم

$$E^{(1)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}(0)\right)^2 I\left(F_{p+1,m}(0) < c_1\right)\right] \le E^{(1)}\left[\left(1-c_1F_{p+1,m}^{-1}(0)\right)^2\right] = 1-c.$$

➢ منابع

1) Akritus, M., Saleh, A. K. Md. E. and Sen, P. K., (1985). Nonparametric estimation of intercepts after a preliminary test on parallelism of several regression lines, *Biostatistics: Statistics in Biomedical, Public Health and Environmental Sciences*, Ed. P. K. Sen, Elsevier Science, North-Holland, 221-235.
2) Anderson, T. W., (2003). *An introduction to multivariate statistical analysis*, 3rd ed., John Wiley and Sons, New York.
3) Anderson, T. W., Fang, K. T. and Hsu, H., (1986). Maximum-likelihood estimates and likelihood-ratio criteria for multivariate elliptically contoured distributions, *The Canadian J. Statist.*, **14**, 55-59.
4) Arashi, M. and Tabatabaey, S. M. M., (2008). Stein-type improvement under stochastic constraints: Use of multivariate Student-t model in regression, *Statist. Prob. Lett.*, **78**, 2142-2153.
5) Chu, K. C., (1973). Estimation and decision for linear systems with elliptically random process. *IEEE Trans. Autom. Cont*., **18**, 499-505.
6) Fang, K. T., Kotz, S. and Ng, K. W., (1990). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, London, New York.
7) Fraser, D. A. S. and Ng, Kai. W., (1980). Multivariate regression analysis with spherical error, in *Multivariate Analysis-V*, 361-386, Ed. P. R. Krishnaiah, North-Hollad Publishing Company.
8) Gupta, A. K. and Varga, T., (1993). *Elliptically Contoured Models in Statistics*, Kluwer Academic Press.

9) Gupta, A. K. and Varga, T., (1995). Normal mixture representations of matrix variate elliptically contoured distributions, *Sankhya*, **57**, 68-78.
10) Judge, G. G. and bock, M. E., (1978). *The statistical implication of pre-test and Stein-rule estimators in Econometrics*, North-Holland, New York.
11) Khan, S., (2002). A note on an optimal tolerance region for the class of multivariate elliptically contoured location-scale Model, *J. Calcutta Statist. Assoc. Bull*., **53**, 125-131.
12) Khan, S., (2003). Estimation of the parameters of two parallel regression lines under uncertain prior information, *Biometrical J*., **45**, 73-90.
13) Khan, S., (2005). Estimation of parameters of the simple multivariate linear model with Student-t error, *J. Statist. Res*., **39**, 79-94.
14) Khan, S., (2006). Shrinkage estimation of the slope parameters of two parallel regression lines under uncertain prior information, *Model Assisted Statist. Appl*., **1**, 195-207.
15) Khan, B. U. and Saleh, A. K. Md. E., (2006). Improved estimation of regression parameters when the regression lines are parallel, *J. Appl. Prob. Statist*., **1**, 1-13.
16) Lambert, A., Saleh, A. K. Md. E. and Sen, P. K., (1985). On least squares estimation of intercept after a preliminary test on parallelism of regression lines, *Commun. Statist. Theory. Meth.*, **14**, 793-807.
17) Lange, K. L., Little, R. J. A. and Taylor, J. M. G., (1989). Robust statistical modeling using the t-distribution, *J. Amer. Statist. Assoc*., **84**, 881-896.
18) Loschi, R. H., Iglesian, P. L. and Arellano-Valle, R. B., (2003). Predictivistic characterization of multivariate student-t model, *J. Multivariate Anal*., **85**, 10-23.
19) Muirhead, R. J., (1982). *Aspect of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley, New York.
20) Saleh, A. K. Md. E. and Sen, P. K. (1985). Nonparametric shrinkage estimation in a parallelism problem, *Sankhya*, **47**, 156-165.
21) Saleh, A. K. Md. E., (2006). *Theory of Preliminary Test and Stein-type Estimation with Applications*, John Wiley, New York.
22) Srivastava, M. and Bilodeau, M., (1989). Stein estimation under elliptical distribution, *J. Mult. Annal*., **28**, 247-259.
23) Ullah, A. and Walsh, V. Z., (1984). On the robustness of LM, LR and W tests in regression models. *Econometrica*, **52**, 1055-1066.
24) Zellner, A., (1976). Bayesian and non-Bayesian Analysis of regression model with Multivariate Students t eorror terms, *J. Amer. Statist. Assoc*., **71**, 400-408.