

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه آمار

مدل‌های نیمه پارامتری تحلیل بقا برای داده‌های بازگشتی با روش هسته

دانشجو: احسان اسحقی

اساتید راهنما:

دکتر داود شاهسونی

دکتر حسین باغیشنی

پایان‌نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: اسحقی

نام: احسان

عنوان: مدل‌های نیمه‌پارامتری تحلیل بقا برای داده‌های بازگشتی با روش هسته

اساتید راهنما: دکتر داود شاهسونی و دکتر حسین باغیشنی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: آمار

گرایش: آمار ریاضی

دانشگاه: دانشگاه شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲

تعداد صفحات: ۱۲۳

واژگان کلیدی: تابع هسته، توزیع مجانبی، داده‌های بازگشتی، سازگاری، مدل نیمه‌پارامتری بقا، نرخ همگرایی.

چکیده

در برخی از مدل‌های نیمه‌پارامتری بقا، که برای مدل‌بندی داده‌های بازگشتی بقا منعطف و مفید هستند، ضرایب متغیرهای موجود در مدل، پویا و وابسته به زمان می‌باشند. در این مدل‌ها، برآوردگرها به صورت بسته و دقیق به دست نمی‌آیند و بایستی از روش‌های تقریبی عددی برای محاسبه آن‌ها استفاده نمود. شکل پیچیده این برآوردگرها، به دست آوردن توزیع آن‌ها را ناممکن می‌سازد. در این موارد معمولاً، از نظریه مجانبی توزیع‌ها برای بررسی ویژگی‌های برآوردگرها استفاده می‌شود. در این پایان‌نامه ضمن معرفی این مدل‌ها، به تشریح برآورد پارامترهای آن، به کمک بسط تیلور و روش هسته پرداخته، سازگاری و نرمال مجانبی بودن توزیع برآوردگرها را نشان می‌دهیم. سپس عملکرد مدل و روش برآورد را با استفاده از یک مطالعه شبیه‌سازی جامع، ارزیابی می‌کنیم و در پایان، کاربرد مدل را با تحلیل داده‌های مربوط به شوک‌های واردشده به بیماران قلبی در یکی از بیمارستان‌های شهر مشهد، نشان می‌دهیم.

تقدیم بہ پدر و مادر

سپاس‌گزاری

خداوند را شاکر هستم که به من قدرت انجام این پایان‌نامه را عطا کرد. در ابتدا، از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای محترم، جناب آقایان دکتر داود شاهسونی و دکتر حسین باغیشنی که از ابتدای راه و در طی انجام تحقیق، با راهنمایی‌های خود مرا در نگارش این اثر یاری نمودند، تشکر می‌کنم. بر خود لازم می‌دانم که از اساتید محترم داور، جناب آقایان دکتر احمد نزاکتی و دکتر مهدی روزبه، و همچنین از تمام اساتید فرهیخته گروه آمار دانشگاه شاهرود، سرکار خانم دکتر اقبال و جناب آقای دکتر محمد آرشی، تشکر و قدردانی نمایم. وظیفه خود می‌دانم که از زحمات پدر و مادر بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم که پیوسته راهنمای من در سختی‌ها و مشکلات بوده‌اند، قدردانی به عمل آورم. همچنین از برادران و خواهرم که همواره پشتیبان من بوده‌اند، صمیمانه سپاس‌گذاری می‌کنم. با سپاس بی‌دریغ خدمت دوستان و همکلاسی‌های گران‌مایه‌ام، آقایان حمید کرمی کبیر، میعاد ولی‌پور، محمد گواهی، علی یعقوبی و پیمان برآبادی که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری داده‌اند. در پایان از تمامی دانشجویان آمار دانشکده ریاضی و مسئولین محترم آموزش دانشکده، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

احسان اسحق
شهریور ۱۳۹۲

فهرست مقالات مستخرج از متن پایان نامه

اسحقى، ا.، باغيشنى، ح. و شاهسونى، د. (۱۳۹۲)، "سازگارى و نرخ همگرایی برآوردگرهای مدل نیمه پارامتری بقا برای داده‌های بازگشتی"، نهمین سمینار احتمال و فرآیندهای تصادفی، ص ۵، زاهدان.

اسحقى، ا.، باغيشنى، ح. و شاهسونى، د. (۱۳۹۲)، "مدل‌های نیمه پارامتری بقا برای داده‌های بازگشتی"، مجله علوم آماری، تحت داوری.

پیش‌گفتار

مدل‌های آماری به سه دسته کلی پارامتری، نیمه‌پارامتری و ناپارامتری تقسیم می‌شوند. یکی از پرکاربردترین مدل‌های آماری، مدل رگرسیون است که اهمیت ویژه و گسترده‌ای در اکثر علوم از جمله پزشکی، مهندسی و محیط زیست دارد. این مدل‌ها برای بیان یا به الگو درآوردن رابطه بین متغیر پاسخ و مجموعه متغیرهای پیشگو یا تبیینی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در طبیعت، یک پیشامد ممکن است بیش از یک بار در طول زمان رخ دهد. چون رخداد چنین پیشامدهایی به هم وابسته هستند، مطالعه آن‌ها می‌تواند درک روشنی از وقوع آنان در آینده بدهد. از آن‌جا که چنین پیشامدهایی را در طول زمان مورد بررسی قرار می‌دهیم، آگاهی از چگونگی تاثیر عوامل موثر در رخداد این پیشامدها در طول زمان حیاتی است. برخی از این عوامل ممکن است تاثیری متناسب با زمان و برخی دیگر اثری فارغ از زمان بر وقوع آن پیشامد داشته باشند. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که با در نظر گرفتن مدلی که شامل اثرات وابسته به و مستقل از زمان است، مطالعه دقیق‌تری از وقوع آن پیشامد داشته باشیم. در همین راستا، مدل نیمه‌پارامتری رگرسیونی را با ترکیبی از ضرایب وابسته به و مستقل از زمان برای مدل‌بندی داده‌های بازگشتی بقا معرفی خواهیم کرد. بدین منظور در ۵ فصل، مطالب زیر را بیان می‌کنیم:

- در فصل اول، ابتدا تعاریف مورد نیاز را مطرح می‌کنیم. سپس تاریخچه‌ای از مدل‌های بقا را ذکر کرده و در نهایت مدل نیمه‌پارامتری بقای مورد نظر را همراه با معادله‌هایی برای برآورد ضرایب، ارائه می‌کنیم.
- در فصل دوم، ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها شامل سازگاری، نرخ همگرایی و نرمال مجانبی بودن را در قالب یک قضیه کلی (قضیه ۲.۱.۲) بیان و اثبات می‌کنیم.
- در فصل سوم، با ارائه یک مطالعه شبیه‌سازی جامع، در قالب دو مثال، عملکرد برآوردگرهای معرفی شده در فصل اول و همچنین ویژگی‌های مجانبی این برآوردگرها را ارزیابی می‌کنیم. در این فصل برای هموار کردن همه ضرایب وابسته به زمان، از یک پارامتر همواری استفاده

می‌شود.

● در فصل چهارم، ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها را زمانی که برای هر ضریب وابسته به زمان یک پارامتر همواری متفاوت در نظر گرفته می‌شود، بررسی می‌کنیم و این ویژگی‌ها را با شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

● در فصل پنجم، مدل پیشنهادی را بر روی داده‌های بیماران قلبی بیمارستان قائم مشهد برازش می‌دهیم. برای هموار کردن برآوردهای ضرایب وابسته به زمان در این فصل، از هر دو رهیافت پارامتر همواری یکسان و پارامتر همواری متفاوت استفاده می‌کنیم.

در این پایان‌نامه، مواردی را که برهان توسط خود نویسنده ارایه شده است، با علامت * و مواردی را که قضیه و برهان هر دو از نویسنده هستند، با نماد ** نمایش داده‌ایم.

فهرست مطالب

خ	فهرست تصاویر
۱	۱ تعاریف مقدماتی
۱	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ انواع داده‌های بقا
۵	۱.۲.۱ زمان‌های در معرض خطر
۶	۳.۱ مدل‌های شرطی و حاشیه‌ای
۱۱	۴.۱ مدل نیمه‌پارامتری بقا
۱۲	۱.۴.۱ معرفی مدل
۱۳	۲.۴.۱ برازش مدل
۱۵	۳.۴.۱ هموارساز هسته
۱۸	۵.۱ ترتیب‌ها و ترتیب‌های تصادفی
۲۲	۲ ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها
۲۳	۱.۲ سازگاری، نرخ همگرایی و توزیع مجانبی نرمال
۵۲	۲.۲ آزمون وابستگی به زمان ضرایب رگرسیونی
۵۴	۳ ارزیابی عملکرد برآوردگرها
۵۴	۱.۳ مطالعه شبیه‌سازی
۵۴	۱.۱.۳ مثال اول

۶۱	مثال دوم ۲.۱.۳
۷۸		۴ برآزش مدل با چندین پارامتر همواری*
۷۸	۱.۴ مقدمه
۷۹	۲.۴ تعاریف و نمادها
۸۰	۳.۴ ویژگی‌های مجانبی
۸۷	۴.۴ مطالعه شبیه‌سازی
۹۱		۵ کاربرد مدل: شوک‌های وارد شده به بیماران قلبی
۹۱	۱.۵ مقدمه
۹۲	۲.۵ اهمیت مطالعه
۹۴	۳.۵ معرفی داده‌ها
۹۵	۴.۵ برآزش مدل و تحلیل داده‌ها
۹۸	۵.۵ پیشنهادات برای آینده تحقیق
۹۹		آ نمادها و تعریف‌ها
۱۰۷		ب کد برنامه R برای اجرای مثال اول فصل سوم
۱۱۸		مراجع

فهرست تصاویر

۵	۱.۱	سانسور نوع یک
۶	۲.۱	سانسور فزاینده نوع یک
		۱.۳	نمودار ضرایب رگرسیونی تجمعی در مدل (۱.۳) با هسته اپانچنیکوف با پهنای
۵۸		نوار $h = 0.4$ (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$
		۲.۳	نمودار ضرایب رگرسیونی تجمعی در مدل (۱.۳) با هسته نرمال با پهنای نوار
۵۹		نوار $h = 0.4$ (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$
		۳.۳	نرخ پوشش برای برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی در مدل (۱.۳) با هسته
۶۰		اپانچنیکوف با پهنای نوار $h = 0.4$ (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$
		۴.۳	نرخ پوشش برای برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی در مدل (۱.۳) با هسته نرمال
۶۰		با پهنای نوار $h = 0.4$ (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$
		۵.۳	نمودارهای چگالی برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی استانداردشده با هسته
			اپانچنیکوف در مدل (۱.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتماد (د)
۶۱		صدم
		۶.۳	نمودارهای متعلق به ضریب رگرسیونی مستقل از زمان استانداردشده در مدل
۶۲		(۱.۳) با هسته اپانچنیکوف: (آ) نمودار چگالی (ب) نمودار چندک-چندک
		۷.۳	نمودارهای چندک-چندک برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی با هسته اپانچنیکوف
۶۳		در مدل (۱.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتماد (د) صدم

- ۸.۳ نمودارهای چگالی برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی استاندارد شده با هسته نرمال
 در مدل (۱.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتم (د) صدم ۶۳
- ۹.۳ نمودارهای متعلق به ضریب رگرسیونی مستقل از زمان استاندارد شده در مدل
 (۱.۳) با هسته نرمال: (آ) نمودار چگالی (ب) نمودار چندک-چندک ۶۴
- ۱۰.۳ نمودارهای چندک-چندک برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی با هسته نرمال در
 مدل (۱.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتم (د) صدم ۶۴
- ۱۱.۳ نمودار برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t) = \int_0^T 0.5 \cos(2t - 1/75) dt$ در مدل
 (۲.۳) با هسته اپانچنیکوف: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$ ۶۷
- ۱۲.۳ نمودار برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t) = \int_0^T 0.7(\sqrt{t} - 1) dt$ در مدل (۲.۳)
 با هسته اپانچنیکوف: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$ ۶۷
- ۱۳.۳ نمودار برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t) = \int_0^T 0.5 \cos(2t - 1/75) dt$ در مدل
 (۲.۳) با هسته نرمال: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$ ۶۸
- ۱۴.۳ نمودار برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t) = \int_0^T 0.7(\sqrt{t} - 1) dt$ در مدل (۲.۳)
 با هسته نرمال: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$ ۶۸
- ۱۵.۳ نمودار نرخ پوشش برای برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t) = \int_0^T 0.5 \cos(2t - 1/75) dt$
 در مدل (۲.۳) با هسته اپانچنیکوف: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$ ۶۹
- ۱۶.۳ نمودار نرخ پوشش برای برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t) = \int_0^T 0.7(\sqrt{t} - 1) dt$
 در مدل (۲.۳) با هسته اپانچنیکوف: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$ ۷۰
- ۱۷.۳ نمودار نرخ پوشش برای برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t) = \int_0^T 0.5 \cos(2t - 1/75) dt$
 در مدل (۲.۳) با هسته نرمال: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$ ۷۰
- ۱۸.۳ نمودار نرخ پوشش برای برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t) = \int_0^T 0.7(\sqrt{t} - 1) dt$
 در مدل (۲.۳) با هسته نرمال: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$ ۷۱

- ۱۹.۳ نمودارهای چگالی برآورد ضریب رگرسیونی استانداردشده $B_{0.1}(t)$ با هسته اپانچنیکوف
 در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) نهم (ج) دهم (د) یازدهم ۷۲
- ۲۰.۳ نمودارهای چندک-چندک متعلق به برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t)$ با هسته
 اپانچنیکوف در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) نهم (ج) دهم (د) یازدهم ۷۲
- ۲۱.۳ نمودارهای چگالی برآورد ضریب رگرسیونی استانداردشده $B_{0.2}(t)$ با هسته اپانچنیکوف
 در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) نهم (ج) دهم (د) یازدهم ۷۳
- ۲۲.۳ نمودارهای چندک-چندک متعلق به برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t)$ با هسته
 اپانچنیکوف در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) نهم (ج) دهم (د) یازدهم ۷۳
- ۲۳.۳ نمودارهای متعلق به ضریب رگرسیونی مستقل از زمان استانداردشده در مدل
 (۲.۳) با هسته اپانچنیکوف: (آ) نمودار چگالی (ب) نمودار چندک-چندک ۷۴
- ۲۴.۳ نمودارهای چگالی برآورد ضریب رگرسیونی استانداردشده $B_{0.1}(t)$ با هسته نرمال
 در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) نهم (ج) دهم (د) یازدهم ۷۴
- ۲۵.۳ نمودارهای چندک-چندک متعلق به برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t)$ با هسته
 نرمال در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) نهم (ج) دهم (د) یازدهم ۷۵
- ۲۶.۳ نمودارهای چگالی برآورد ضریب رگرسیونی استانداردشده $B_{0.2}(t)$ با هسته نرمال
 در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) نهم (ج) دهم (د) یازدهم ۷۵
- ۲۷.۳ نمودارهای چندک-چندک متعلق به برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t)$ با هسته
 نرمال در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) نهم (ج) دهم (د) یازدهم ۷۶
- ۲۸.۳ نمودارهای متعلق به ضریب رگرسیونی مستقل از زمان استانداردشده در مدل
 (۲.۳) با هسته نرمال: (آ) نمودار چگالی (ب) نمودار چندک-چندک ۷۶
- ۱.۴ نمودار ضرایب رگرسیونی تجمعی در مدل (۲.۳) برای برآورد ضرایب $B_1(\cdot)$
 (ب) $B_2(\cdot)$ ۸۸

- ۲.۴ نمودار نرخ پوشش تجربی در مدل (۲.۳) برای برآورد $B_2(\cdot)$ با $B_1(\cdot)$ (آ) پهنای نوارهای یکسان، (ب) پهنای نوارهای متفاوت. ۸۹
- ۳.۴ نمودار نرخ پوشش تجربی در مدل (۲.۳) برای برآورد ضرایب $B_1(\cdot)$ با (آ) پهنای نوارهای یکسان، (ب) پهنای نوارهای متفاوت. ۸۹
- ۴.۴ نمودارهای چگالی و چندک-چندک برآورد ضریب $B_2(\cdot)$ استاندارد شده با هسته اپانچنیکوف در مدل (۲.۳) در نقطه زمانی صدم با استفاده از: آ و ج) پهنای نوار متفاوت، ب و د) پهنای نوار یکسان. ۹۰
- ۱.۵ نمودارهای مربوط به مدل (۱.۵): (آ) ضرایب رگرسیونی $\beta_0(t)$ (ب) ضرایب رگرسیونی تجمعی $B_0(t)$ با پارامترهای همواری یکسان. ۹۶
- ۲.۵ نمودارهای مربوط به مدل (۱.۵): (آ) ضرایب رگرسیونی $\beta_0(t)$ (ب) ضرایب رگرسیونی تجمعی $B_0(t)$ با پارامترهای همواری متفاوت. ۹۶

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

برای بررسی وقوع یک پیشامد، نیازمند اندازه‌گیری عوامل یا متغیرهایی هستیم که منجر به وقوع آن پیشامد می‌شوند. برای مثال اگر پیشامد مورد نظر تعداد تصادفات در جاده‌ها باشد، ممکن است با اندازه‌گیری متغیری مانند تعداد خودروها، مدلی ایجاد کنیم که رابطه بین این دو را توجیه نماید. گاهی اوقات اندازه‌گیری متغیر مورد نظر بر حسب نوع تحقیق، چندین بار در طول یک بازه زمانی انجام می‌شود که در این حالت داده به‌وجود آمده، یک داده طولی نامیده می‌شود (مارتینوسن و شیکه، ۲۰۰۶). برخی از مطالعاتی که در علوم مانند مهندسی یا پزشکی انجام می‌شوند، معمولاً در یک بازه زمانی صورت می‌گیرند و متغیرهای مورد نظر در طول این بازه اندازه‌گیری می‌شوند. بنابراین در این علوم، غالباً با داده‌های طولی سروکار داریم. برای نمونه، اندازه‌گیری هر هفته فشار خون بیماران به مدت یک سال برای برآورد نرخ خطر سکته، یا بررسی نوسانات برق یک کارخانه به مدت ۲ سال برای برآورد تعداد دستگاه‌های خراب‌شده، مثال‌هایی از این دست هستند.

گاهی اوقات در این علوم با پیشامدهایی مواجه می‌شویم که زمان رخداد واقعه، مورد نظر هستند (داده‌های بقا)^۱ و در طول یک بازه زمانی، بیش از یک بار رخ می‌دهند. بررسی این پیشامدها که پیشامدهای بازگشتی^۲ (کوک و لااولاس، ۲۰۰۷) نامیده می‌شوند، از اهمیت بسزایی برخوردار است. برای مثال، تکرار مشکلات تنفسی در بیماران مبتلا به فیبروز کیستی (ترنیو و همیلتون، ۱۹۹۷)

^۱Survival data

^۲Recurrent events

و عفونت‌های متوالی بیماران ایدزی (لی و لاگاکوس، ۱۹۹۷)، پیشامدهای بازگشتی را به وجود می‌آورند. سکتة قلبی و عود بیماری، دیگر مثال‌های پیشامدهای بازگشتی هستند. به داده‌های حاصل از این پیشامدها، داده‌های بازگشتی می‌گویند. یکی از ویژگی‌های طبیعی داده‌های بازگشتی، ترتیبی بودن این داده‌ها است. از دیگر ویژگی‌های داده‌های بازگشتی، این است که معمولاً نمی‌توان رخداد‌های متفاوت برای یک فرد را مستقل از هم در نظر گرفت. به عنوان مثال شخصی که برای اولین بار دچار حمله قلبی می‌شود، در معرض خطر بیشتری برای رخداد حمله دوم خواهد بود.

برای تحلیل این نوع داده‌ها، بسیاری از محققان نرخ پیشامدها را یا با در نظر گرفتن زمان‌های رخداد تا مشاهده اولین پیشامد یا با استفاده از تمام زمان‌های رخداد با استفاده از مدل کاکس^۳ برآورد می‌کنند (وینکه، ۲۰۱۱). این گونه روش‌های معمول، ناکارآمد هستند زیرا در این روش‌ها، تنها بخش‌هایی از اطلاعات موجود در داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند و اطلاعات مربوط به آزمودنی‌هایی که برای آن‌ها در طول مدت مطالعه پیشامد مورد نظر رخ نمی‌دهند، در نظر گرفته نمی‌شوند. بنابراین با چنین رهیافتی که تنها داده‌های کامل مورد استفاده قرار می‌گیرند، به برآوردهایی اریب دست می‌یابیم (وینکه، ۲۰۱۱). برای این منظور، استفاده از مفهوم سانسور^۴، این مشکل را مرتفع می‌کند. بنابراین برای دستیابی به برآوردهایی دقیق‌تر، به رهیافت‌های پیچیده‌تری نیاز داریم. کار با داده‌های سانسور شده و دیگر انواع داده‌های ناکامل، با استفاده از مدل‌هایی به نام مدل شدت^۵ بسیار آسان می‌شود (مارتینوسن و شیکه، ۲۰۰۶). بدین منظور، ابتدا تعریفی از متغیر و داده‌های بقا ارایه کرده و سپس داده‌های کامل و سانسور شده را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱. متغیر بقا متغیر تصادفی Y را متغیر تصادفی بقا در نظر می‌گیریم، اگر و تنها اگر $Y \in [0, +\infty)$.

تعریف ۲. داده‌های بقا داده‌های y_1, y_2, \dots, y_n را داده‌های بقا گوئیم، اگر از متغیر تصادفی بقا Y مشاهده شده باشند. معمولاً این مقادیر نامنفی، زمان شکست یک مولفه فیزیکی (مکانیکی یا الکتریکی) یا زمان مرگ یک واحد زنده (سلول، بیمار، حیوان، انسان و ...) هستند. ممکن است

^۳Cox model

^۴Censor

^۵Intensity model

این متغیر، زمان یادگیری یک مهارت باشد یا حتی امکان دارد هیچ ارتباطی با زمان نداشته باشد. برای مثال، متغیر می‌تواند مبلغ پرداختی یک شرکت بیمه در وضعیت خاصی باشد. در برخی موارد، بیمار بهبود یافته و مبلغ کل پرداختی او معلوم است. در موارد دیگر بیماری هنوز ادامه دارد و تنها مبلغ پرداختی تا آن زمان معلوم است (میلر، ۱۳۸۷).

۲.۱ انواع داده‌های بقا

داده‌های بقا به دو بخش کلی تقسیم می‌شوند:

داده کامل: داده مربوط به واحد آزمایشی است که وارد مطالعه می‌شود و قبل از یا در پایان مطالعه، پیشامد مطلوب برای وی رخ می‌دهد.

داده سانسور شده از راست: اگر در پایان یک مطالعه آماری، محقق تنها از رخ ندادن پیشامد مطلوب در برخی واحدهای آزمایشی مطلع باشد، در این مطالعه سانسور راست اتفاق افتاده است (مارتینوسن و شیکه، ۲۰۰۶). در این حالت، محقق از طول عمر (زمان رخداد پیشامد مطلوب) واحد بی‌اطلاع است و تنها این را می‌داند که واحد مورد مطالعه در پایان آزمایش هنوز بقا داشته است. این سانسور به انواع سانسور نوع یک، فزاینده نوع یک، نوع یک تعمیم‌یافته، نوع دو، و فزاینده نوع دو تقسیم می‌شود. در این بخش، تعاریفی از سانسورهای نوع یک و فزاینده نوع یک ارائه می‌دهیم. برای آگاهی از تعاریف سایر سانسورها به نادری (۱۳۹۱) مراجعه کنید.

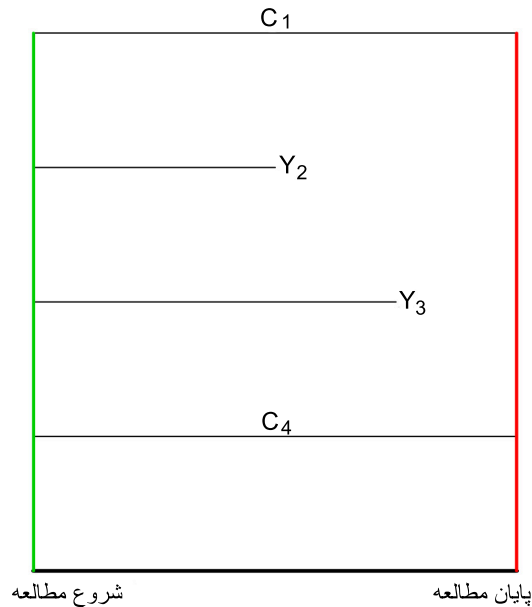
تعریف ۳. سانسور نوع یک ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین نوع سانسور راست، طرح سانسور نوع یک است. این طرح، مطالعاتی را شامل می‌شود که در آن محقق برای پایان آزمایش یک زمان را مشخص می‌کند. بنابراین ممکن است که پس از اتمام زمان تعیین‌شده، پیشامد مطلوب در برخی از واحدهای آزمایشی رخ نداده باشد. در این صورت طول عمر واحدهایی که پیشامد مطلوب را تجربه کرده‌اند، مشاهده می‌شود و سایر طول عمرها سانسور می‌گردند. به این معنی که زمان رخداد پیشامد مورد نظر برای واحدهای سانسور شده برابر با طول دوره آزمایش ثبت می‌گردد. این زمان مشخص شده برای پایان مطالعه را در اصطلاح، زمان یا نقطه سانسور می‌گویند که می‌تواند برای هر یک از افراد متفاوت باشد.

برای مثال، فرض کنید آزمایشی روی بیمارانی خاص که در یک بیمارستان بستری هستند، با تعداد ثابتی از افراد انجام می‌گیرد. در این مطالعه، بر روی بیماران یک روش درمانی جدید آزمایش می‌شود تا این که در آن‌ها بهبودی مشاهده گردد. به دلیل ملاحظات اقتصادی و زمانی، محقق مایل است آزمایش را تا یک زمان مشخص (مثلاً ۳ ماه) ادامه دهد. در پایان این دوره زمانی، ممکن است برخی از بیماران شرایط بهبودی را نداشته باشند. حال اگر هیچ شرط و محدودیت دیگری وجود نداشته باشد، برای همه افرادی که در آن‌ها بهبودی مشاهده نشده است (مشاهدات سانسور شده) زمان بهبودی برابر با طول دوره مطالعه (۳ ماه) ثبت خواهد شد و تحلیل‌گر بر اساس آن‌ها نتایج آزمایش را اعلام می‌کند.

به طور کلی، در آمار متغیر تصادفی را با حروف بزرگ لاتین و مقادیر آن را با حروف کوچک متناظرش نشان می‌دهیم. این قرارداد برای طرح‌های سانسور، به دلیل ثابت یا تصادفی بودن زمان سانسور، کمی فرق می‌کند. در این حالت فرض می‌کنیم که Y نشان‌دهنده متغیر تصادفی طول عمر و C زمان سانسور راست ثابت باشد. مقدار دقیق Y برای یک واحد آزمایشی معلوم است، اگر و تنها اگر Y کوچکتر یا مساوی C باشد و در صورتی که از C بزرگتر باشد، واحد مورد نظر در پایان آزمایش هنوز بقا داشته یا پیشامد مطلوب را تجربه نکرده است. بنابراین، در اصطلاح در C سانسور شده است. حال با بیان این تعریف به منظور ساده‌سازی، می‌توان داده‌های حاصل از آزمایش را با جفت متغیرهای تصادفی (\mathbb{T}, δ) نمایش داد که در آن \mathbb{T} متغیر طول عمر است و δ بر حسب این که طول عمر واحد مورد نظر مشاهده یا سانسور شده باشد، به ترتیب مقادیر ۱ و ۰ را می‌گیرد و \mathbb{T} برابر با مقدار Y است، اگر طول عمر فرد، مشاهده شده باشد و C است، اگر سانسور شده باشد؛ یعنی $\mathbb{T} = \min\{Y, C\}$.

مثال ۴. در آزمایشگاهی به گروه بزرگی از موش‌ها داروی سرطان‌زا خورانده می‌شود. هدف از انجام این آزمایش، بررسی اثر سرطان روی بقای موش‌ها بوده است. در این راستا، از زمان شروع مطالعه تا زمان مرگ موش‌ها یا زمان از قبل مشخص شده برای خاتمه آزمایش (زمان سانسور)، هر یک از موش‌ها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. حال در این مطالعه، واحدهایی که بعد از پایان زمان تعیین شده زنده باقی مانده‌اند، به عنوان مشاهده سانسور شده در نظر گرفته می‌شوند. همانطور که در شکل

۱.۱ توجه دارید، این موضوع به وضوح دیده می‌شود که تنها طول عمر موش‌های ۲ و ۳ مشاهده شده‌اند و دو واحد دیگر سانسور شده‌اند.



شکل ۱.۱: سانسور نوع یک

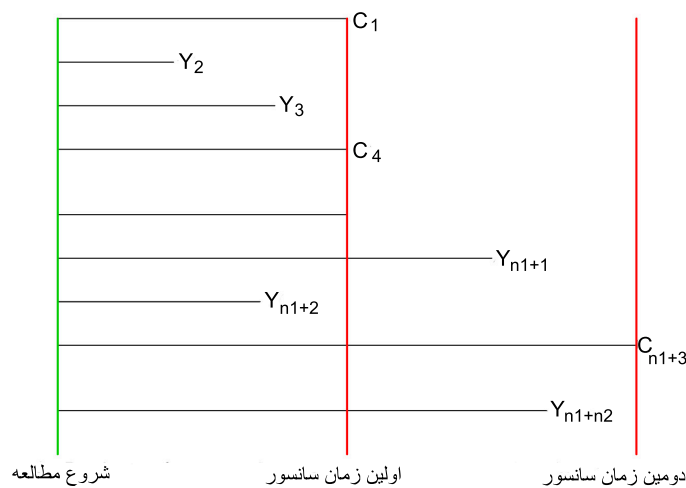
تعریف ۵. سانسور فزاینده نوع یک با تعمیم سانسور نوع یک، اگر هر یک از واحدهای آزمایشی زمان سانسوری متفاوت داشته باشند، طرح سانسور فزاینده نوع یک تعریف می‌شود.

مزیت اصلی این روش آن است که هر یک از واحدهای آزمایشی (در مثال قبل موش‌ها)، اطلاعات مناسبی را در رابطه با سیر طبیعی حیات خود به پژوهش‌گر می‌دهند. شکل ۲.۱ این نوع سانسور را نشان می‌دهد

۱.۲.۱ زمان‌های در معرض خطر

پیشامدهای یک آزمودنی را که در بازه $[\tau_0, \tau]$ رخ می‌دهند، در نظر بگیرید. فرض کنید $I(\cdot)$ تابع نشان‌گری باشد که $I(A) = 1$ اگر A برقرار باشد، در غیر این صورت $I(A) = 0$. تابع $Y(t) = I(\tau_0 \leq t \leq \tau)$ ، تابع نشان‌گر در معرض خطر^۶ نام دارد و به منظور تعیین آزمودنی‌هایی

^۶At risk



شکل ۲.۱: سانسور فزاینده نوع یک

است که در بازه مشخص شده، پیشامد برای آن‌ها رخ می‌دهد. زمان τ گاهی اوقات زمان سانسور هم در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه $Y(t) = 1$ به این معنی است که آزمودنی، تحت مطالعه قرار دارد و در معرض خطر وقوع پیشامد در زمان t است.

۳.۱ مدل‌های شرطی و حاشیه‌ای

برای تحلیل داده‌های بازگشتی، به طور معمول از دو نوع مدل شرطی و حاشیه‌ای استفاده می‌شود که در ادامه به توضیح آن‌ها می‌پردازیم. زمان‌های رخداد T_1, T_2, \dots را برای یک فرد در نظر بگیرید و فرض کنید برای این فرد، زمان سانسور از راست C را داشته باشیم. یک فرآیند دارای پیشینه^۷ به صورت $X(t) = \{x(u), 0 \leq u < t\}$ ، نظیر فشار خون، را برای وی در نظر بگیرید. فرض کنید $N(t)$ و $\tilde{N}(t)$ ، به ترتیب نشان‌دهنده تعداد شکست‌های مشاهده‌شده و برآورده‌شده تا زمان t باشند. یکی از سوال‌هایی که ممکن است در تحلیل داده‌ها به وجود آید، وجود و چگونگی رابطه تعداد پیشامدهای بازگشتی با پیشینه $X(t)$ است. در موارد دیگر، سوال‌ها ممکن است درباره رابطه تعداد پیشامدهای بازگشتی با پیشینه پیشامدها باشد. بنابراین فرآیند شدت در یک مدل شرطی، Λ ،

^۷History

به صورت زیر تعریف می‌شود (پرینتس و همکاران، ۱۹۸۱):

$$\Lambda(t) = E\{\tilde{N}(t)|\tilde{N}(u), \{0 \leq u < t\}, X(t)\}. \quad (1.1)$$

توجه شود که شدت (۱.۱) به پیشینه متغیر و پیشامد قبلی شخص وابسته است. در مقابل، یک فرآیند شدت حاشیه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود (پرینتس و همکاران، ۱۹۸۱):

$$\Lambda(t) = E\{\tilde{N}(t)|X(t)\}.$$

به عبارت دیگر مقدار شدت حاشیه‌ای در زمان t تنها به پیشینه متغیر بستگی دارد. اگر هدف اصلی تنها تعیین تاثیر متغیر تبیینی بر تعداد پیشامدها باشد، آن‌گاه لزومی به استفاده از پیشینه پیشامدها نیست و می‌توان تنها از پیشینه متغیر مورد نظر استفاده کرد. بنابراین در این پایان‌نامه که هدف، تعیین تاثیرهای وابسته به زمان و مستقل از زمان متغیرها بر روی رخداد‌های بازگشتی است، از مدل‌های حاشیه‌ای استفاده می‌کنیم.

پس از ارایه تعریفی از تابع مخاطره، چند مدل حاشیه‌ای و شرطی را به طور مختصر معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶. تابع مخاطره تابع مخاطره^۸، که به شدت مرگ و میر^۹ نیز معروف است، نرخ یا تعداد مرگ و میر را در لحظه $(y, y + \Delta y)$ ، با شرط زنده بودن (سالم بودن) مورد تحت مطالعه تا زمان y نشان می‌دهد. این تابع یک تابع احتمال نیست زیرا بعضی مواقع مقادیر بزرگ‌تر از یک را نیز اختیار می‌کند. این تابع را با h نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta y | Y > y)}{\Delta y},$$

که در آن Y متغیر تصادفی بقا می‌باشد. با فرض زنده بودن واحد تا زمان y می‌توان گفت

$$h(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y}.$$

مدل‌های رگرسیونی تابع مخاطره شرطی، به طور گسترده در تحلیل بقا برای توصیف وابستگی زمان‌های بقا به متغیرهای تبیینی مورد استفاده قرار می‌گیرند (یه، ۲۰۰۴). مدل مخاطره نسبی کاکس^{۱۰} (کاکس، ۱۹۷۲)، یکی از معروف‌ترین این مدل‌هاست که در آن تابع مخاطره شرطی برای

^۸Hazard function

^۹Force of mortality

^{۱۰}Cox proportional hazard model

i امین مورد تحت مطالعه به صورت زیر مدل بندی می شود:

$$h_{x_i}(t) = h_i(t|\mathbf{X}_i) = h_o(t) \exp \{ \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta} \}. \quad (2.1)$$

در رابطه (۲.۱)، $h_o(t)$ تابع مخاطره پایه‌ای^{۱۱} مجهول (تابع مخاطره برای شخصی با $\mathbf{X} = \mathbf{0}$)، بردار پارامترهای رگرسیونی و $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ بردار پارامترهای مشاهده شده برای فرد i ام است. مدل (۲.۱) موسوم به مدل مخاطره‌ای متناسب^{۱۲} است و دلیل این نام گذاری آن است که نسبت مخاطره برای دو مورد تحت مطالعه $(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$ به مقدار t بستگی ندارد، یعنی

$$\frac{h_{\mathbf{X}_i}(t)}{h_{\mathbf{X}_j}(t)} = \frac{h_o(t) \exp \{ \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta} \}}{h_o(t) \exp \{ \mathbf{X}_j^T \boldsymbol{\beta} \}} = \frac{\exp \{ \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta} \}}{\exp \{ \mathbf{X}_j^T \boldsymbol{\beta} \}}.$$

در عمل، مدل بندی میانگین یا تعداد رخدادها پیشامدها برای داده‌های بازگشتی، قابل فهم تر از مدل بندی نرخ خطر برای این گونه داده‌ها است (سان و همکاران، ۲۰۱۱). زیرا درک این که فرد به طور متوسط چند سگته دیگر را تجربه می کند، آسان تر است تا نرخ خطری که فرد برای سگته‌های بعدی متوجه اش می باشد. بنابراین بهتر است که مدلی برای تعداد پیشامدها داشته باشیم. اندرسن و گیل (۱۹۸۲) با یک کار بنیادی در مدل کاکس، ایده فرآیند شمارشی آلن (۱۹۷۸) را با در نظر گرفتن فرآیند شمارشی $N_i(t)$ برای فرد i ام، به کار بردند. در حالت سانسور از راست، فرآیند شمارشی $N_i(t) = I(T_i \leq t; \delta_i = 1)$ ، که در آن T_i طول عمر i امین فرد است، به صورت زیر بیان می شود (مارتینوسن و شیکه، ۲۰۰۶):

$$N_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s) ds + M_i(t),$$

که $M_i(t)$ خطای مدل در برآورد شمارش رخدادها برای آزمودنی i ام، و $\lambda_i(\cdot)$ مدل شدت نامیده شده و به صورت

$$\lambda_i(t) = Y_i(t) h_i(t|\mathbf{X}_i),$$

تعریف می شود، به طوری که $Y_i(t) = I(T_i \geq t)$. این مدل از عملکرد مناسبی برخوردار نیست زیرا ممکن است برخی از خطرها در طول یک بازه زمانی مشخص، کاهش یابند. بنابراین مناسب

^{۱۱}Baseline hazard function

^{۱۲}Proportional hazard model

است که اثرات وابسته به زمان را وارد مدل کنیم. در نتیجه، مدل کاکس (۲.۱) نیازمند توسعه برای استفاده در موقعیت‌های متفاوت است. بدین منظور، مدل کاکس با ضرایب وابسته به زمان به صورت زیر بیان می‌شود (فیشر و لین، ۱۹۹۹):

$$h_i(t|\mathbf{X}_i(t)) = h_o(t) \exp\{\mathbf{X}_i(t)^T \boldsymbol{\beta}(t)\},$$

که هم اثرات و هم متغیرها در طول زمان تغییر می‌کنند. با قرار دادن اولین مولفه بردار متغیرها برابر ۱، مدل مخاطره کاکس با اثرات وابسته به زمان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} h_i(t|\mathbf{X}_i(t)) &= \exp\{\log(h_o(t))\} \exp\{\mathbf{X}_i(t)^T \boldsymbol{\beta}(t)\} \\ &= \exp\left\{ \left(1 \ X_{i_1}(t) \dots X_{i_p}(t) \right) \left(\log(h_o(t)) \ \beta_1(t) \dots \beta_p(t) \right)^T \right\} \\ &= \exp\{\mathbf{X}_i(t)^T \boldsymbol{\beta}(t)\}. \end{aligned}$$

بنابراین مدل شدت کاکس را می‌توان به صورت

$$\lambda_i(t) = Y_i(t) \exp\{\mathbf{X}_i(t)^T \boldsymbol{\beta}(t)\},$$

نوشت، به طوری که $\beta_o(t)$ ، اولین مولفه $\boldsymbol{\beta}(t)$ ، لگاریتم تابع مخاطره پایه‌ای در زمان t است. دیگر مدل رگرسیونی تابع مخاطره، مدل رگرسیونی مخاطره افزایشی آلن^{۱۳} است که به صورت زیر تعریف می‌شود (آلن، ۱۹۸۹):

$$h_i(t|\mathbf{X}_i(t)) = \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta}.$$

در این مدل، متغیرها و اثرات می‌توانند وابسته به زمان باشند و با استدلالی مشابه برای ساخت مدل شدت کاکس، مدل شدت آلن به صورت

$$\lambda_i(t) = Y_i(t) \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta},$$

تعریف می‌شود. به‌علاوه با استفاده از مدل مخاطره افزایشی آلن و مدل‌های کاکس، می‌توان به نتایج منعطف‌تری دست یافت (مارتینوسن و شیکه، ۲۰۰۶). لین و بینگ (۱۹۹۵) مدل شدت زیر را در نظر گرفتند:

$$\lambda(t) = Y(t)[g(\mathbf{X}^T(t))\boldsymbol{\alpha} + h_o(t)h(\mathbf{Z}^T(t))\boldsymbol{\beta}],$$

^{۱۳}Aalen's additive hazard model

به طوری که $Y(t)$ تابع نشان‌گر خطر، $(\mathbf{X}(t), \mathbf{Z}(t))$ بردار متغیرهای $q + p$ بعدی، (α, β) بردار ضرایب رگرسیونی $q + p$ بعدی و $h_0(t)$ تابع مخاطره پایه‌ای نامعلوم در زمان t هستند. دو تابع $h(\cdot)$ و $g(\cdot)$ معلوم فرض می‌شوند. مشکل این مدل، آن است که تنها مخاطره پایه‌ای وابسته به زمان است و بنابراین داده‌ها با اثرات وابسته به زمان در نظر گرفته نمی‌شوند. اگر اثرات وابسته به زمان در مدل حضور داشته باشند، مدل منعطف‌تر می‌شود زیرا در واقع ممکن است برخی از اثرات، با زمان تغییر کنند. مارتینسون و شیکه (۲۰۰۲)، مدل لین و بینگ را ارتقا داده و مدل شدتی به صورت زیر به دست آوردند:

$$\lambda(t) = Y(t)[\mathbf{X}^T(t)\alpha(t) + \rho(t)h_0(t) \exp\{\mathbf{Z}^T(t)\beta\}],$$

که در آن $Y(t)$ و $\rho(t)$ توابع نشان‌گر خطر، $\alpha(t)$ بردار q بعدی ضرایب رگرسیونی وابسته به زمان، و $h_0(t)$ تابع مخاطره پایه‌ای برای خطر $\rho(t)$ در زمان t هستند و همچنین β بردار ضرایب p بعدی است. این مدل تعمیمی از مدل لین و بینگ (۱۹۹۵) با $g(x) = x$ و $h(x) = \exp(x)$ است. شیکه و زانگ (۲۰۰۲)، ترکیب دیگری را ارائه دادند و مدل شدتی را که کاکس-آلن نامیده می‌شود به صورت

$$\lambda(t) = Y(t)[\mathbf{X}^T(t)\alpha(t)] \exp\{\mathbf{Z}^T(t)\beta\},$$

به دست آوردند که در آن $(\mathbf{X}^T(t), \mathbf{Z}^T(t))$ بردار متغیرها در زمان t است. اندرسن و گیل (۱۹۸۲) مدل فرآیند شمارشی با تابع شدتی از نوع کاکس را برای داده‌های بازگشتی ایجاد کردند. فرض کنید $N^*(t)$ تعداد رخدادها پیشامدها در بازه $[0, t]$ ، $\mathbf{X}(\cdot)$ بردار p بعدی متغیرهای تبیینی، σ نشان‌دهنده سیگما-جبر^{۱۴}، و $dN^*(t)$ تعداد رخدادها در بازه کوچک $[t, t + dt]$ باشند و $\lambda_X(\cdot)$ تابع شدت $N^*(t)$ همراه سیگما-جبر به صورت زیر باشد:

$$E\{dN^*(t) | \sigma(N^*(s), \mathbf{X}(s); s \in [0, t])\} = \lambda_X(t)dt.$$

آن‌گاه مدل شدت اندرسن-گیل^{۱۵} به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\lambda_X(t) = \exp\{\beta_0^T \mathbf{X}(t)\} \lambda_0(t), \quad (۳.۱)$$

^{۱۴} Sigma-algebra

^{۱۵} Andersen-Gill intensity model

به طوری که $\lambda_0(\cdot)$ یک تابع پیوسته مجهول و β بردار ضرایب رگرسیونی p بعدی است. مدل (۳.۱)، دارای دو فرض زیر است:

$$E\{dN^*(t)|\sigma(N^*(s), \mathbf{X}(s), s \in [0, t])\} = E\{dN^*(t)|\mathbf{X}(t)\} \quad (۱)$$

$$E\{dN^*(t)|\mathbf{X}(t)\} = \exp\{\beta_0^T \mathbf{X}(t)\} \lambda_0(t) dt \quad (۲)$$

لین و همکاران (۲۰۰۰) پیشنهاد کردند که فرض ۱ را ثابت در نظر بگیریم. استدلال آن‌ها این بود که وابستگی پیشامدهای بازگشتی تنها با متغیرهای وابسته به زمان به دست نمی‌آیند و از طرفی روشی وجود ندارد که این فرض را تایید کند. بنابراین آن‌ها تنها فرض ۲ را در نظر گرفتند. آن‌ها با در نظر گرفتن $d\mu_X(t) = E\{dN^*(t)|\mathbf{X}(t)\}$ مدل زیر را ایجاد کردند:

$$d\mu_X(t) = \exp\{\beta_0^T \mathbf{X}(t)\} d\mu_0(t).$$

در این مدل $\mu_0(\cdot)$ تابع پیوسته مجهول و $\mathbf{X}(\cdot)$ بردار متغیرها است. در این مدل، ضرایب مستقل از زمان هستند در حالی که در واقعیت، پارامترهای رگرسیونی ممکن است با زمان تغییر کنند. بنابراین شناخت و سنجش اثرات موقتی متغیرها در زمان‌های رخداد پیشامدهای بازگشتی، مهم است. در نتیجه، در نظر گرفتن مدل‌هایی با ترکیب متغیرهای تبیینی وابسته به و مستقل از زمان، از اهمیت بالایی برخوردار است. زیرا در واقعیت، معمولاً پیشامدها متأثر از هر دو پارامترهای وابسته به و مستقل از زمان هستند. می‌توان گفت با در نظر گرفتن مدلی با چنین ترکیبی، به استنباط‌های معقول‌تری دسترسی خواهیم یافت.

با توجه به مطالب ذکرشده، در این پایان‌نامه، مدل لین و همکاران (۲۰۰۰) را با در نظر گرفتن ضرایب وابسته به و مستقل از زمان مطالعه می‌کنیم (سان و همکاران، ۲۰۱۱).

۴.۱ مدل نیمه پارامتری بقا

برای ساخت مدل، n نفر را در طول زمان مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید $N_i^*(t)$ تعداد پیشامدهایی باشد که در طول بازه $[0, t]$ برای فرد i رخ می‌دهد. همچنین $\mathbf{X}_i(\cdot)$ و $\mathbf{Z}_i(\cdot)$ بردارهای فرآیندهایی به ترتیب p و q بعدی برای فرد i نام باشند. در اکثر کاربردها، بازه زمانی مورد بررسی

محدود است و بنابراین ممکن است برخی از پیشامدها سانسور شوند. از این رو، $N_i^*(t)$ به طور کامل مشاهده نمی شود. اگر C_i را به عنوان زمان سانسور تعریف کنیم، آن گاه فرآیند قابل مشاهده به صورت $N_i(t) = N_i^*(t \wedge C_i)$ تعریف می شود به طوری که $a \wedge b = \min(a, b)$. فرض می کنیم با شرط داشتن $X_i(\cdot)$ و $Z_i(\cdot)$ و C_i ، $N_i^*(\cdot)$ مستقل از هم می باشند. تابع نشان گر خطر را به صورت $Y_i(t) = I(C_i \geq t)$ تعریف می کنیم. در نتیجه، مجموعه داده مشاهده شده به صورت $\{N_i(\cdot), Y_i(\cdot), \mathbf{X}_i(\cdot), \mathbf{Z}_i(\cdot)\}$ ، $i = 1, \dots, n$ می باشد.

۱.۴.۱ معرفی مدل

مدل رگرسیونی نرخ حاشیه ای را با ترکیبی از ضرایب وابسته به و مستقل از زمان، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E\{dN_i^*(t) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t)\} = \exp\{\beta_\circ(t)^T \mathbf{X}_i(t) + \gamma_\circ^T \mathbf{Z}_i(t)\} d\mu_\circ(t), \quad (۴.۱)$$

به طوری که $\beta_\circ(\cdot)$ بردار p بعدی ضرایب رگرسیونی وابسته به زمان، γ_\circ بردار q بعدی ضرایب رگرسیونی مستقل از زمان و $\mu_\circ(\cdot)$ تابع میانگین پایه ای است. دلیل اطلاق نیمه پارامتری بودن این مدل آن است که اثرات مستقل از زمان، به عنوان اثرات ثابت بخش پارامتری مدل را تشکیل می دهند اما توابع وابسته به زمان، شکل پارامتری مشخصی ندارند و قسمت ناپارامتری مدل هستند. فرض کنید

$$\mathbf{N}(t) = (N_1(t), \dots, N_n(t))^T,$$

$$X(t) = (\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_n(t))^T,$$

$$Z(t) = (\mathbf{Z}_1(t), \dots, \mathbf{Z}_n(t))^T,$$

و $N_\circ(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n N_i(t)$ تعریف می کنیم

$$M_i(t) = N_i(t) - \int_0^t Y_i(s) \exp\{\beta_\circ(s)^T \mathbf{X}_i(s) + \gamma_\circ^T \mathbf{Z}_i(s)\} d\mu_\circ(s), \quad i = 1, \dots, n. \quad (۵.۱)$$

تحت مدل (۴.۱)، $M_i(t)$ ها فرآیندهایی با میانگین صفر هستند به طوری که جمله اول رابطه (۵.۱)، تعداد رخداد های واقعی و جمله دوم تعداد رخداد هایی است که به وسیله مدل برآورد می کنیم. برای

اثبات صفر بودن میانگین $M_i(t)$ با استفاده از مدل (۴.۱) داریم

$$M_i(t) = N_i(t) - \int_0^t Y_i(s) E\{dN_i^*(s) | \mathbf{X}_i(s), \mathbf{Z}_i(s)\}.$$

چون افراد را تا زمان سانسور مورد مطالعه قرار می‌دهیم، پس $Y_i(t) = I(C_i \geq t) = 1$ که در این

صورت $N_i(t) = N_i^*(t \wedge C_i) = N_i^*(t)$ و داریم

$$\begin{aligned} E(M_i(t)) &= E(N_i(t)) - E\left(E \int_0^t dN_i^*(s) | \mathbf{X}_i(s), \mathbf{Z}_i(s)\right) \\ &= E(N_i(t)) - E(N_i^*(t)) \\ &= E(N_i(t)) - E(N_i(t)) = 0. \end{aligned} \quad (۶.۱)$$

۲.۴.۱ برآزش مدل

ابتدا دقت کنید خطا را می‌توان به صورت تفاضل نرخ‌ها به صورت زیر نوشت:

$$dM_i(t) = dN_i(t) - Y_i(t) \exp\{\beta_0(t)^T \mathbf{X}_i(t) + \gamma_0^T \mathbf{Z}_i(t)\} d\mu_0(t).$$

از طرفی با توجه به $\sum_{i=1}^n dM_i(t) = 0$ ، داریم

$$\sum_{i=1}^n [dN_i(t) - Y_i(t) \exp\{\beta_0(t)^T \mathbf{X}_i(t) + \gamma_0^T \mathbf{Z}_i(t)\} d\mu_0(t)] = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

که در آن τ مقدار تعیین شده‌ای است به طوری که $P(C_i \geq \tau) > 0$. در نتیجه

$$d\mu_0(t) = \frac{\sum_{i=1}^n dN_i(t)}{\sum_{i=1}^n Y_i(t) \exp\{\beta_0(t)^T \mathbf{X}_i(t) + \gamma_0^T \mathbf{Z}_i(t)\}}.$$

با تقسیم صورت و مخرج بر n و با توجه به تعریف $\phi_i(t; \beta_0(t), \gamma_0)$ و $S_0(t; \beta_0(t), \gamma_0)$ ، در

پیوست آ، داریم

$$d\mu_0(t) = \frac{dN_0(t)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(t; \beta_0(t), \gamma_0)} = S_0(t; \beta_0(t), \gamma_0)^{-1} dN_0(t). \quad (۷.۱)$$

بنابراین با داشتن مقادیر $\beta(t)$ و γ ، برآوردگر $\mu_0(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mu}_0(t; \beta(t), \gamma) = \hat{\mu}_0(t) = \int_0^t S_0(t; \beta(t), \gamma)^{-1} dN_0(t). \quad (۸.۱)$$

برای برآورد $\beta_0(t)$ و γ_0 ، با استفاده از معادله‌های برآوردیاب تعمیم‌یافته^{۱۶} (لیانگ و زگر،

^{۱۶} Generalized estimating equations

(۱۹۸۶) و با استفاده از $(\hat{\mu}_\circ(t; \beta_\circ(t), \gamma_\circ))$ ، معادله‌های برآوردیاب زیر را داریم:

$$\begin{aligned} X(t)^T [d\mathbf{N}(t) - \phi(t; \beta(t), \gamma) S_\circ(t; \beta(t), \gamma)^{-1} dN_\circ(t)] &= \circ, \quad \circ \leq t \leq \tau, \\ \int_\circ^\tau Z(t)^T [d\mathbf{N}(t) - \phi(t; \beta(t), \gamma) S_\circ(t; \beta(t), \gamma)^{-1} dN_\circ(t)] &= \circ, \end{aligned} \quad (9.1)$$

به طوری که $\phi(t; \beta(t), \gamma) = (\phi_1(t; \beta(t), \gamma), \dots, \phi_n(t; \beta(t), \gamma))^T$ معادله‌های (۹.۱) هر کدام معادله‌ای با دو مجهول هستند و بنابراین نمی‌توانیم به صورت بسته‌ای از برآوردگرها دست یابیم. پس با به کار بردن روش‌های عددی نظیر نیوتن-رافسون (رجوع شود به پیوست آ) به وسیله بسط تیلور تابع $\phi(t; \beta(t), \gamma) S_\circ(t; \beta(t), \gamma)^{-1}$ (رجوع شود به پیوست آ) حول برآورد جاری $(\beta^l(t), \gamma^l)$ ، می‌توانیم برآوردهایی برای $\beta_\circ(t)$ و γ_\circ به دست آوریم. با استفاده از الگوریتم نیوتن-رافسون، معادله‌های به‌هنگام کننده به صورت زیر تعریف می‌شوند (سان و همکاران، ۲۰۱۱):

$$\begin{aligned} &\{\beta^{l+1}(t) - \beta^l(t)\} S_\circ^l(t)^{-1} dN_\circ(t) \\ &= n^{-1} E_{xx}^l(t)^{-1} \{X(t) - \bar{X}^l(t)\}^T [d\mathbf{N}(t) \\ &\quad - \Phi^l(t) \{Z(t) - \bar{Z}^l(t)\} (\gamma^{l+1} - \gamma^l) S_\circ^l(t)^{-1} dN_\circ(t)], \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} &n^{-1} \int_\circ^\tau \{Z(t) - \bar{Z}^l(t)\}^T d\mathbf{N}(t) - \int_\circ^\tau E_{zx}^l(t) \{\beta^{l+1}(t) - \beta^l(t)\} S_\circ^l(t)^{-1} dN_\circ(t) \\ &= \int_\circ^\tau E_{zz}^l(t) (\gamma^{l+1} - \gamma^l) S_\circ^l(t)^{-1} dN_\circ(t), \end{aligned} \quad (11.1)$$

که در آن‌ها، صورت‌های $E_m^l(t) = E_m(t; \beta^l(t), \gamma^l)$ ، به ازای $m = xx, xz, zz$ ، $\bar{X}^l(t)$ ، $\Phi^l(t)$ ، در پیوست آ تعریف شده‌اند. با قرار دادن رابطه (۱۰.۱) در (۱۱.۱) داریم

$$\begin{aligned} &n^{-1} \int_\circ^\tau \{Z(t) - \bar{Z}^l(t)\}^T d\mathbf{N}(t) \\ &- n^{-1} \int_\circ^\tau E_{zx}^l(t) E_{xx}^l(t)^{-1} \{X(t) - \bar{X}^l(t)\}^T [d\mathbf{N}(t) - \Phi^l(t) \{Z(t) - \bar{Z}^l(t)\} (\gamma^{l+1} - \gamma^l) \\ &\quad \times S_\circ^l(t)^{-1} dN_\circ(t)] \\ &= \int_\circ^\tau E_{zz}^l(t) (\gamma^{l+1} - \gamma^l) S_\circ^l(t)^{-1} dN_\circ(t). \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} & n^{-1} (\{Z(t) - \bar{Z}^l(t)\}^T - E_{zx}^l(t)E_{xx}^l(t)^{-1}\{X(t) - \bar{X}^l(t)\}^T d\mathbf{N}(t)) \\ &= \int_0^\tau [E_{zz}^l(t) - E_{zx}^l(t)E_{xx}^l(t)^{-1}E_{zx}^l(t)^T](\gamma^{l+1} - \gamma^l)S_0^l(t)^{-1}dN_0(t). \end{aligned} \quad (12.1)$$

و تعریف می کنیم

$$A(\tau; \beta(t), \gamma) = \int_0^\tau [E_{zz}^l(t) - E_{zx}^l(t)E_{xx}^l(t)^{-1}E_{zx}^l(t)^T]S_0^l(t)^{-1}dN_0(t),$$

به طوری که $A^l(\tau) = A(\tau; \beta^l(t), \gamma^l)$. با حل معادله (۱۲.۱) بر اساس γ^{l+1} ، به رابطه تکراری

$$\gamma^{l+1} = \Psi_r(\gamma^l) \text{ می رسیم به طوری که}$$

$$\Psi_r(\gamma^l) = \gamma^l + \frac{A^l(\tau)^{-1}}{n} \int_0^\tau [\{Z(t) - \bar{Z}^l(t)\}^T - E_{zx}^l(t)E_{xx}^l(t)^{-1}\{X(t) - \bar{X}^l(t)\}^T d\mathbf{N}(t)]. \quad (13.1)$$

برای برآورد $\beta_0(t)$ با استفاده از معادله (۱۰.۱)، تکرار معادله به ازای هر t باعث ناهمواری منحنی $\beta(t)$ می شود و حتی ممکن است سازگاری برآوردگر از بین برود. بنابراین از هموارساز استفاده می کنیم که در این پایان نامه از هموارساز هسته^{۱۷} استفاده شده است.

۳.۴.۱ هموارساز هسته

هسته یکی از روش های رگرسیونی است که در برآورد هر تابع $f(X)$ در دامنه اش، با برازش جداگانه مدل هایی متفاوت اما ساده در هر نقطه x ، برآوردهای قابل انعطافی ایجاد می کند. در این روش برای برازش هر کدام از مدل های ساده، تنها از نقاط نزدیک نقطه x (همسایگی x) استفاده می شود (هستی و همکاران، ۲۰۰۹). ساده ترین مدلی که در هر همسایگی نقطه x می توان به کار برد، میانگین مشاهدات است. با در نظر گرفتن چنین مدلی در هر همسایگی، خط برازش داده شده موازی محور افقی خواهد شد و در نتیجه با کنار هم قراردادن تمام همسایگی ها، منحنی ناپیوسته و ناهمواری ایجاد می شود. در این مدل، وزن هایی مساوی برای همه نقاط همسایگی در نظر گرفته می شود در صورتی که به منظور برآورد دقیق تر، نقطه های نزدیک به x ، اهمیت بیشتری نسبت به نقاط دورتر در ساخت مدل دارند. پس مناسب است که وزن هایی متناسب با فاصله نقاط

^{۱۷}Kernel smoother

همسایگی با نقطه مورد نظر، x_0 ، در نظر گرفته شود. بدین منظور متوسط موزون هسته نادارایا (۱۹۶۴) - واتسون^{۱۸} (۱۹۶۴)،

$$\hat{f}(x_0) = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i),$$

را با وزن‌های $w_i = \frac{K_h(x_0, x_i)}{\sum_{i=1}^N K_h(x_0, x_i)}$ که متناسب با فاصله نقاط از نقطه x_0 هستند، در نظر می‌گیریم به طوری که

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1,$$

و

$$K_h(x_0, x) = D\left(\frac{|x - x_0|}{h}\right),$$

تابعی از فاصله است که تابع وزن یا هسته نامیده می‌شود. در این تابع، h پارامتر همواری^{۱۹} یا پهنای نوار^{۲۰} نامیده می‌شود. این مقدار، عرض ناحیه همسایگی را تعیین می‌کند. با انتخاب h بزرگ، تعداد نقاط همسایگی بیشتر شده و باعث همواری بیشتر و با در نظر گرفتن h کوچک‌تر، همواری کمتر می‌شود. یکی از این توابع که به هسته اپانچنیکوف^{۲۱} معروف است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(t) = \frac{3}{4}(1 - t^2)I(|t| \leq 1),$$

که در آن $I(\cdot)$ ، تابع نشان‌گر است. از دیگر هسته‌های معروف، می‌توان به هسته نرمال با تابع وزن

$$D(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

اشاره کرد. با این تغییر در شکل‌گیری وزن‌ها، منحنی حاصل هموار می‌شود.

فرض کنید $\mu_0^l(t) = \hat{\mu}_0(t; \beta^l, \gamma^l)$. همچنین $\beta^l(t)$ و $\lambda^l(t)$ به ترتیب برآوردگرهای هسته

و $\beta_0(t)$

$$\lambda_0(t) = \frac{d}{dt} \mu_0(t), \quad (14.1)$$

^{۱۸}Nadaraya-Watson kernel weighted average

^{۱۹}Smoothing parameter

^{۲۰}Bandwidth

^{۲۱}Epanechnikov

با پهنای نوار h باشند. این برآوردگرهای هموار به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\beta^l(t) = \int \frac{K\left(\frac{u-t}{h}\right)}{\int K\left(\frac{u-t}{h}\right) du} \beta^l(u) du.$$

با تغییر متغیر $v = \frac{u-t}{h}$ ، داریم

$$\beta^l(t) = \int \frac{K\left(\frac{u-t}{h}\right)}{\int hK(v) dv} \beta^l(u) du.$$

با توجه به شرط (C۴) در فصل ۲، ۱ $\int K(u) du = 1$. بنابراین

$$\beta^l(t) = \int h^{-1} K\left(\frac{u-t}{h}\right) \beta^l(u) du. \quad (15.1)$$

با اثباتی مشابه می‌توان نوشت

$$\lambda_o^l(t) = \int h^{-1} K\left(\frac{u-t}{h}\right) \lambda_o^l(u) du, \quad (16.1)$$

که در آن $K(\cdot)$ تابع هسته متقارن با دامنه فشرده است (شرط (C۴) را ملاحظه کنید). با توجه به

رابطه (۷.۱)، با قرار دادن $\lambda_o^l(t) dt$ در رابطه (۱۰.۱) به جای $\frac{dN_o(t)}{S_o^l(t)}$ ، داریم

$$\begin{aligned} & \beta^{l+1}(t) \lambda_o^l(t) dt - \beta^l(t) \lambda_o^l(t) dt \\ & = n^{-1} E_{xx}^l(t)^{-1} \{X(t) - \bar{X}^l(t)\}^T [d\mathbf{N}(t) - \Phi^l(t) \{Z(t) - \bar{Z}^l(t)\} (\gamma^{l+1} - \gamma^l) S_o^l(t)^{-1} dN_o(t)]. \end{aligned}$$

مارتینسون و شیکه (۲۰۰۲) و شیکه و مارتینسون (۲۰۰۴)، پیشنهاد کردند که به جای استفاده

از $\beta_o(t)$ ، از ضرایب رگرسیونی تجمعی $\mathbf{B}_o(t) = \int_o^t \beta_o(s) ds$ استفاده کنیم که منجر به نتایج

پایدارتری می‌شود. بنابراین با تقسیم طرفین بر $\lambda_o^l(t)$ و انتگرال‌گیری، به رابطه تکراری $\mathbf{B}^{l+1}(t) =$

$\Psi_b(\mathbf{B}^l)(t)$ دست می‌یابیم، به طوری که

$$\begin{aligned} \Psi_b(\mathbf{B}^l)(t) &= \int_o^t \beta^l(u) du + n^{-1} \int_o^t \lambda_o^l(u)^{-1} E_{xx}^l(u)^{-1} \{X(u) - \bar{X}^l(u)\}^T \\ &\quad \times [d\mathbf{N}(u) - \Phi^l(u) \{Z(u) - \bar{Z}^l(u)\} (\gamma^{l+1} - \gamma^l) S_o^l(u)^{-1} dN_o(u)]. \quad (17.1) \end{aligned}$$

با استفاده متوالی از معادله‌های تکراری (۱۳.۱) و (۱۷.۱)، برآوردگرهای $\mathbf{B}_o(t)$ و γ_o به‌هنگام

می‌شوند. مراحل تا جایی ادامه می‌یابند که اختلاف بین برآوردها در دو مرحله متوالی، کمتر از یک

آستانه مشخص کوچک، مثلاً 10^{-6} ، شود.

۵.۱ ترتیب‌ها و ترتیب‌های تصادفی

نمادهای ترتیب تصادفی O_p و o_p و ترتیب غیرتصادفی O و o ، رایج‌ترین نمادها برای توصیف مرتبه مجانبی کمیت‌های تصادفی و غیرتصادفی هستند. برای ورود به این بحث، ابتدا لازم است تا تعریفی از همگرایی در احتمال ارایه دهیم.

تعریف ۷. (گات، ۲۰۰۵) دنباله متغیرهای تصادفی Y_n را در احتمال همگرا به Y گوئیم و می‌نویسیم

$$Y_n \xrightarrow{P} Y, \text{ اگر}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|Y_n - Y| < \varepsilon] = 1.$$

حال ترتیب‌های تصادفی و غیرتصادفی را به همراه نمادهای مناسب هر کدام، در زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸. (ون در وارت، ۱۹۹۸) یک دنباله از متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ و دنباله‌ای از ثابت‌های

$\{a_n\}$ را در نظر بگیرید. گوئیم $X_n = o_p(a_n)$ ، اگر وقتی $n \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه

$$\frac{X_n}{a_n} \xrightarrow{P} 0.$$

تعریف ۹. (ون در وارت، ۱۹۹۸) یک دنباله از متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ و دنباله‌ای از ثابت‌های

$\{a_n\}$ را در نظر بگیرید. گوئیم $X_n = O_p(a_n)$ ، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، $K(\varepsilon) > 0$ و $n_0(\varepsilon)$ وجود

داشته باشند، به طوری که به ازای همه مقادیر $n > n_0(\varepsilon)$ ،

$$P\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right| \leq K(\varepsilon)\right) > 1 - \varepsilon.$$

تعریف ۱۰. (ون در وارت، ۱۹۹۸) دو دنباله از اعداد ثابت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را در نظر بگیرید. گوئیم

$$b_n = o(a_n), \text{ هرگاه}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n/a_n| = 0.$$

تعریف ۱۱. (ون در وارت، ۱۹۹۸) دو دنباله از اعداد ثابت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را در نظر بگیرید. گوئیم

$b_n = O(a_n)$ ، هرگاه $\varepsilon > 0$ ، $K(\varepsilon) > 0$ و عدد صحیح مثبت $N(\varepsilon)$ وجود داشته باشند، به طوری

جدول ۱.۱: a و b اعداد حقیقی هستند و $k = \max(a, b)$

سطر	ضرب	جمع	ترکیب
۱	$o(n^a)o(n^b) = o(n^{a+b})$	$o(n^a) + o(n^b) = o(n^k)$	$O_p(O(n^a)) = O_p(n^a)$
۲	$O(n^a)O(n^b) = O(n^{a+b})$	$O(n^a) + O(n^b) = O(n^k)$	$O_p(O_p(n^a)) = O_p(n^a)$
۳	$O(n^a)o(n^b) = o(n^{a+b})$	$O(n^a) + o(n^b) = O(n^k)$	$O(O(n^a)) = O(n^a)$
۴	$o_p(n^a)o_p(n^b) = o_p(n^{a+b})$	$o_p(n^a) + o_p(n^b) = o_p(n^k)$	$O(O_p(n^a)) = O_p(n^a)$
۵	$O_p(n^a)O_p(n^b) = O_p(n^{a+b})$	$O_p(n^a) + O_p(n^b) = O_p(n^k)$	$o_p(O_p(n^a)) = o_p(n^a)$
۶	$O_p(n^a)o_p(n^b) = o_p(n^{a+b})$	$O_p(n^a) + o_p(n^b) = O_p(n^k)$	$o(O_p(n^a)) = o_p(n^a)$
۷	$o_p(n^a)o(n^b) = o_p(n^{a+b})$	$O_p(n^a) + O(n^b) = O_p(n^k)$	$O_p(o_p(n^a)) = O_p(n^a)$
۸	$O_p(n^a)o(n^b) = o_p(n^{a+b})$	$O(n^a) + o_p(n^b) = O_p(n^k)$.
۹	$O(n^a)o_p(n^b) = o_p(n^{a+b})$.	.
۱۰	$O(n^a)O_p(n^b) = O_p(n^{a+b})$.	.

که برای $n \geq N(\varepsilon)$

$$|b_n| < K(\varepsilon)|a_n|.$$

با استفاده از تعاریف بالا، برای هر ثابت حقیقی c ، ترتیب‌های $O_p(a_n)$ ، $o_p(a_n)$ ، $O(a_n)$ و $o(a_n)$ به ترتیب معادل با $ca_nO_p(1)$ ، $ca_no_p(1)$ ، $ca_nO(1)$ و $ca_no(1)$ هستند. همچنین $X_n = O_p(n^c)$ ، برقراری $X_n = O_p(n^{c+1})$ را نتیجه می‌دهد، اما $X_n = O_p(n^{c+1})$ لزوماً به معنی برقراری $X_n = O_p(n^c)$ نیست. برخی از ویژگی‌های ترتیب‌های تصادفی و غیرتصادفی در جدول ۱.۱ نشان داده شده‌اند. به عنوان نمونه از هر یک از ستون‌های جدول، یکی را اثبات نموده و برای بقیه، برهان مشابهی وجود دارد. به عنوان نمونه، برای سومین سطر از ستون ترکیب داریم

$$a_n = O(O(n^a)).$$

بنابراین اگر فرض کنیم $b_n = O(n^a)$ ، بنا به تعریف نماد O ، داریم

$$\left| \frac{b_n}{n^a} \right| < M. \quad (18.1)$$

با توجه به $a_n = O(b_n)$ ، می‌توان نوشت

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \left| \frac{a_n/n^a}{b_n/n^a} \right| < M'. \quad (19.1)$$

از طرفی با توجه به (۱۸.۱) و (۱۹.۱)، $\left| \frac{a_n}{n^a} \right| < MM' = M''$ ، که این همان تعریف ترتیب

تصادفی $O(\cdot)$ می‌باشد. در نتیجه

$$a_n = O(n^a).$$

برای سطر هشتم از ستون جمع، فرض می‌کنیم $c_n = O(n^a)$ ، پس

$$\left| \frac{c_n}{n^a} \right| < M.$$

همچنین اگر فرض کنیم $d_n = o_p(n^b)$ ، در این صورت

$$P \left(\left| \frac{d_n}{n^b} \right| < \varepsilon \right) > 1 - \varepsilon.$$

بنابراین می‌توان گفت

$$\left| \frac{e_n}{n^k} \right| = \left| \frac{c_n + d_n}{n^k} \right| < \left| \frac{c_n}{n^a} + \frac{d_n}{n^b} \right| < \left| \frac{c_n}{n^a} \right| + \left| \frac{d_n}{n^b} \right| = M + \varepsilon = M',$$

و این یعنی

$$e_n = c_n + d_n = O_p(n^k).$$

برای سطر پنجم از ستون ضرب، فرض می‌کنیم

$$f_n = O_p(n^a), \quad g_n = O_p(n^b).$$

از طرفی بنا به تعریف ترتیب‌های تصادفی می‌توان گفت

$$\left| \frac{i_n}{n^{a+b}} \right| = \left| \frac{f_n \cdot g_n}{n^{a+b}} \right| = \left| \frac{f_n}{n^a} \right| \cdot \left| \frac{g_n}{n^b} \right| < M \cdot M' = M'',$$

بنابراین

$$i_n = O_p(n^{a+b}).$$

قضیه ۱.۵.۱. * (رابطه بین O_p و o_p) اگر $X_n = O_p(n^a)$ به طوری که $a > 0$ ، آنگاه برای هر

$t > 0$ می‌توان گفت

$$X_n = o_p(n^{a+t}).$$

برهان. با توجه به تعریف ۹ داریم

$$P \left(\left| \frac{X_n}{n^a} \right| \leq M \right) > 1 - \varepsilon.$$

با تقسیم طرفین نامساوی داخل پرانتز بر n^t داریم

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n^{a+t}}\right| \leq \frac{M}{n^t}\right) > 1 - \varepsilon.$$

با توجه به متناهی بودن مقدار M ، با افزایش n به سمت بی‌نهایت، مقدار $\frac{M}{n^t}$ بسیار کوچک خواهد شد. بنابراین می‌توان گفت

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n^{a+t}}\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \varepsilon.$$

و با توجه به تعریف ۸،

$$X_n = o_p(n^{a+t}).$$

□

فصل ۲

ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها

در این فصل، ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای پارامترهای مدل نیمه پارامتری بقا، $\mathbf{B}(\cdot)$ و γ ، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این ویژگی‌ها شامل سازگاری، نرخ همگرایی، و هم‌توزیعی مجانبی با نرمال می‌باشند. بدین منظور، ابتدا نیازمند معرفی شرایط نظم لازم برای برقراری این ویژگی‌ها می‌باشیم. این شرایط به شرح زیر می‌باشند:

(C1) $\mu_0(t)$ و $\beta_0(t)$ ، توابعی پیوسته از $t \in [0, \tau]$ و سه بار مشتق‌پذیر هستند.

این شرط برای در نظر گرفتن مقدار اولیه $\beta_0(t)$ ، مفید می‌باشد و بدان معناست که تابع $\mu_0(t)$ و ضرایب $\beta_0(t)$ ، توابعی هموار هستند. در واقع این شرط یک ویژگی خوش‌رفتار برای ضرایب واقعی فرض می‌کند.

(C2) $\mathbf{X}_i(t)$ و $\mathbf{Z}_i(t)$ ، متغیرهایی کران‌دار در بازه $[0, \tau]$ هستند. بنابراین مقادیری خارج از این بازه و همچنین بی‌نهایت را در نظر نمی‌گیریم. این شرط با ماهیت دنیای واقعی که در آن متغیرهای تبیینی معمولاً کران‌دار هستند کاملاً تطابق دارد.

(C3) $a(\tau)$ و $e_{xx}(t)$ (رجوع کنید به پیوست آ) ماتریس‌هایی نامنفرد به ازای $t \in [0, \tau]$ هستند. برقراری این شرط برای محاسبات الزامی است.

(C4) $K(\cdot)$ ، یک تابع هسته پیوسته و متقارن با دامنه‌ای فشرده و متقارن نسبت به صفر با پهنای

نوار h است به طوری که $\int K(u)du = 1$ و به ازای $\frac{1}{8} < \alpha < \frac{1}{4}$ داریم

$$h = O(n^{-\alpha}).$$

این شرط، یکی از شرط‌های اساسی برای اثبات سازگاری و محاسبه نرخ همگرایی برآوردگرهاست. توابع هسته‌ای که در این پایان‌نامه در نظر می‌گیریم نیز با شرایط مطرح‌شده برای $K(\cdot)$ همخوانی دارند.

(C5) $\mathbf{s}_j(t; \beta, \gamma)$ ، به ازای $(t, \beta, \gamma) \in [0, \tau] \times \mathcal{B} \times \Theta$ به طور یکنواخت پیوسته می‌باشد.

همچنین \mathcal{B} مجموعه‌ای فشرده از R^p است که شامل یک همسایگی برای $\beta_0(t)$ به ازای مقادیر $t \in [0, \tau]$ است و Θ ، مجموعه‌ای فشرده از R^q و شامل γ_0 است. اندیس j نیز مقادیر صفر، x یا z را اختیار می‌کند.

(C6) $\hat{\gamma}$ و $\hat{\mathbf{B}}(t)$ به ترتیب مقادیر اولیه γ_0 و $\mathbf{B}_0(t)$ هستند، به طوری که

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\hat{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_0(t)\| = O_p(n^{-\frac{1}{4}}),$$

$$\|\hat{\gamma} - \gamma_0\| = O_p(n^{-\frac{1}{4}}).$$

این شرط، در واقع بیان می‌کند که مقادیر اولیه انتخاب‌شده در روند برآورد پارامترها برای مقادیر واقعی متناظرشان، سازگار هستند. در تحقیقاتی که در مدل‌های مشابه بیان‌شده در فصل اول انجام شده است، از جمله مارتینوسن و شیکه (۲۰۰۲)، این فرض بیان شده است. اما با این حال، به نظر می‌رسد در عمل انتخاب چنین مقادیر اولیه‌ای چندان ساده نیست و این یکی از شرط‌های سختی است که معرفی شده است.

۱.۲ سازگاری، نرخ همگرایی و توزیع مجانبی نرمال

اکنون برای بررسی ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها، ابتدا چند لم (لم‌های ۱.۱.۲ تا ۶.۱.۲) و قضیه مورد نیاز را در این بخش بیان و اثبات نموده، سپس ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای به‌دست آمده را در قسمت‌های مختلف قضیه ۲.۱.۲ (صفحه‌های ۳۳ تا ۵۱) مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. کمیت‌های مورد استفاده در این فصل که تعریف نشده‌اند، در پیوست آ در دسترس هستند.

برای محاسبه نرخ همگرایی ضرایب وابسته به زمان $\hat{\beta}(\cdot)$ به مقدار واقعی $\beta_\circ(\cdot)$ ، ابتدا نیاز داریم که لم ۲.۱.۲ را بیان و اثبات کنیم.

لم ۱.۱.۲. * تحت شرایط (C۱) و (C۴) و بسط تیلور داریم

$$\sup_{\circ \leq t \leq \tau} \|\bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t)\| = O(h^\nu),$$

که در آن

$$\bar{\beta}_\circ(t) = \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) d\mathbf{B}_\circ(u).$$

برهان.

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t) &= \int h^{-1} K\left(\frac{u-t}{h}\right) d\mathbf{B}_\circ(u) - \beta_\circ(t) \\ &= \int h^{-1} K\left(\frac{u-t}{h}\right) \beta_\circ(u) du - \beta_\circ(t). \end{aligned} \quad (۱.۲)$$

در رابطه (۱.۲) با تغییر متغیر

$$v = \frac{u-t}{h},$$

و شرط (C۴)، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t) &= \int K(v) \beta_\circ(vh+t) dv - \beta_\circ(t) \\ &= \int K(v) \beta_\circ(vh+t) dv - \beta_\circ(t) \int K(v) dv \\ &= \int K(v) (\beta_\circ(vh+t) - \beta_\circ(t)) dv. \end{aligned} \quad (۲.۲)$$

اما بسط تیلور $\beta_\circ(vh+t)$ در نقطه دلخواه $v = \circ$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \beta_\circ(vh+t) &= \beta_\circ(t) + hv\beta'_\circ(t) + \frac{h^2 v^2}{2} \beta''_\circ(t) + O(h^2 v^2) \\ &= \beta_\circ(t) + hv\beta'_\circ(t) + \frac{h^2 v^2}{2} \beta''_\circ(t) + O\left(h^2 \frac{(u-t)^2}{h^2}\right) \\ &= \beta_\circ(t) + hv\beta'_\circ(t) + \frac{h^2 v^2}{2} \beta''_\circ(t) + O(1). \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

با قرار دادن (۳.۲) در (۲.۲) و استفاده از شرط (C۴) خواهیم داشت

$$\bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t) = \int K(v) \left[hv\beta'_\circ(t) + \frac{h^2 v^2}{2} \beta''_\circ(t) + O(1) \right] dv = O(h^\nu). \quad (۴.۲)$$

از آنجا که رابطه (۴.۲) به ازای کلیه مقادیر t برقرار است، بنابراین

$$\sup_{\circ \leq t \leq \tau} \|\bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t)\| = O(h^2). \quad (۵.۲)$$

□

لم ۲.۱.۲. * با استفاده از شرط (C۴)، می‌توان نوشت

$$\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t) = O_p(h^{-1} \|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_\circ\|),$$

که در آن

$$\|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_\circ\| = \sup_{\circ \leq t \leq \tau} \|\hat{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_\circ(t)\|.$$

برهان. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(t) - \beta_\circ(t) &= \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) d\hat{\mathbf{B}}(u) + \bar{\beta}_\circ(t) - \bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t) \\ &= \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) d\hat{\mathbf{B}}(u) - \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) d\mathbf{B}_\circ(u) + \{\bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t)\} \\ &= \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) d\{\hat{\mathbf{B}}(u) - \mathbf{B}_\circ(u)\} + \{\bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t)\}. \end{aligned} \quad (۶.۲)$$

با استفاده از شرط (C۴)، اولین جمله تساوی (۶.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t) &= \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) d\{\hat{\mathbf{B}}(u) - \mathbf{B}_\circ(u)\} \\ &\leq \frac{M}{h} \int d\{\hat{\mathbf{B}}(u) - \mathbf{B}_\circ(u)\} \\ &\leq \frac{M}{h} \left(\sup_{\circ \leq t \leq \tau} \|\hat{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_\circ(t)\| \right) = \frac{M}{h} \|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_\circ\|, \end{aligned} \quad (۷.۲)$$

که در آن M یک مقدار ثابت متناهی است. در نتیجه

$$\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t) = O_p(h^{-1} \|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_\circ\|). \quad (۸.۲)$$

چون رابطه (۸.۲) برای هر مقدار t در بازه $[\circ, \tau]$ برقرار است، بنابراین

$$\sup_{\circ \leq t \leq \tau} \|\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t)\| = O_p(h^{-1} \|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_\circ\|). \quad (۹.۲)$$

□

قبل از طرح لم‌ها و قضیه‌های مورد نیاز بعدی، ابتدا نیاز داریم تا مطالبی را در مورد پهنای نوار

h بیان کنیم. با توجه به شرط (C۴) داریم

$$h = O(n^{-\alpha}); \quad \frac{1}{8} < \alpha < \frac{1}{4},$$

از آنجا که $-\frac{1}{4} < -\alpha < -\frac{1}{8}$ ، چون به ازای کران پایین $-\alpha$ مقدار $\frac{h}{n^{-\alpha}}$ کران‌دار است پس به ازای کران بالای آن نیز کران‌دار خواهد بود. برای همین، متداول است که در نماد $O(n^{-\alpha})$ ، کران پایین برای آن در نظر گرفته می‌شود، یعنی

$$h = O(n^{-\frac{1}{4}}).$$

همچنین می‌توان نوشت

$$h^2 = O(n^{-\frac{1}{2}}). \quad (10.2)$$

از طرفی بنا بر شرط (C۴)، واضح است که

$$h^{-1} = O(n^{\frac{1}{4}}). \quad (11.2)$$

اکنون برای محاسبه نرخ همگرایی ضرایب وابسته به زمان، با توجه به تساوی (۱۰.۲)، رابطه

(۵.۲) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t)\| = O(n^{-\frac{1}{4}}). \quad (12.2)$$

با به کار بردن نامساوی مثلث در آخرین تساوی رابطه (۶.۲) و همچنین با استفاده از روابط (۹.۲)،

(۱۱.۲) و (۱۲.۲)، داریم

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\hat{\beta}(t) - \beta_\circ(t)\| &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t)\| + \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t)\| \\ &= O_p\left(h^{-1} \|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}\|\right) + O(n^{-\frac{1}{4}}) \\ &= O_p(O(n^{\frac{1}{4}})O_p(n^{-\frac{1}{4}})) + O(n^{-\frac{1}{4}}) \\ &= O_p(O_p(n^{-\frac{3}{4}})) + O(n^{-\frac{1}{4}}) = O_p(n^{-\frac{3}{4}}) + O(n^{-\frac{1}{4}}) \\ &= O_p(n^{-\frac{3}{4}}) \\ &= o_p(n^{-\frac{3}{4} + \varepsilon}) \\ &= o_p(n^{-\frac{1}{4}}), \end{aligned} \quad (13.2)$$

با توجه به قضیه ۱.۵.۱ و دلخواه بودن مقدار ε ، تساوی (۱۳.۲) با انتخاب $\frac{1}{\lambda} = \varepsilon$ برقرار است. از آنجا که ضرایب وابسته به زمان و میانگین مدل توابعی از زمان می‌باشند، برای بررسی ویژگی‌های آن‌ها به قضیه حد مرکزی در فضاهای تابعی نیاز داریم. قضیه ۱.۱.۲ و دو لم ۳.۱.۲ و ۴.۱.۲، نحوه استفاده از این قضیه را برای کمیت‌های مورد نظر، بیان می‌کنند.

قضیه ۱.۱.۲. (تیان و همکاران، ۲۰۰۵) با استفاده از قضیه حد مرکزی در فضای باناخ (لدوکس و تالاگراندا، ۱۹۹۱) داریم

$$\sup_{t \in [0, \tau], \beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \Theta} \|S_j(t; \beta, \gamma) - s_j(t; \beta, \gamma)\| = O_p(n^{-\frac{1}{4}}). \quad j = 0, x, z. \quad (14.2)$$

لم ۳.۱.۲. * به ازای برآوردهای به دست آمده $\hat{\beta}(\cdot)$ و $\hat{\gamma}$ ، داریم

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \|S_j(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - S_j(t; \beta_0, \gamma_0)\| = o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \quad j = 0, x, z. \quad (15.2)$$

برهان. تساوی را برای $j = 0$ اثبات می‌کنیم. برای $j = x, z$ ، اثبات مشابهی می‌توان ارائه داد.

در ابتدا داریم

$$S_0(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - S_0(t; \beta_0, \gamma_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(t; \beta_0, \gamma_0). \quad (16.2)$$

برای اثبات نیاز داریم تا تابع $\phi(t)$ را در ضرایب برآوردشده، تقریب بزینیم. برای این منظور از بسط

تیلور استفاده می‌کنیم. بسط تیلور $\sum_{i=1}^n \phi_i(t; \beta_0, \gamma_0)$ در $(\hat{\beta}(t), \hat{\gamma})$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi_i(t; \beta_0, \gamma_0) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(t; \beta_0, \gamma_0) \Big|_{\beta_0(t)=\hat{\beta}, \gamma_0=\hat{\gamma}} \\ &+ (\phi(t; \beta_0, \gamma_0)^T X(t), \phi(t; \beta_0, \gamma_0)^T Z(t)) \Big|_{\beta_0(t)=\hat{\beta}, \gamma_0=\hat{\gamma}} \\ &\quad \times (\beta_0(t) - \hat{\beta}(t), \gamma_0 - \hat{\gamma})^T \\ &+ O_p(\|\beta_0(t) - \hat{\beta}(t)\|^2) + O_p(\|\gamma_0 - \hat{\gamma}\|^2), \end{aligned} \quad (17.2)$$

به طوری که $Z(t) = (\mathbf{Z}_1(t), \dots, \mathbf{Z}_n(t))^T$ و $X(t) = (\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_n(t))^T$ می‌باشند.

با استفاده از بسط تیلور (۱۷.۲)، رابطه (۱۶.۲) را می‌توانیم به صورت

$$S_0(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - S_0(t; \beta_0, \gamma_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma})$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{n}O_p(\|\beta_\circ(t) - \hat{\beta}(t)\|) - \frac{1}{n}O_p(\|\gamma_\circ - \hat{\gamma}\|) \\ & = \frac{1}{n}O_p(\|\hat{\beta}(t) - \beta_\circ(t)\|) + \frac{1}{n}O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_\circ\|), \end{aligned} \quad (۱۸.۲)$$

بنویسیم. از آنجایی که رابطه (۱۸.۲) به ازای کلیه مقادیر t برقرار است، با توجه به (۱۳.۲) و (C۶)، می‌توان گفت

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \tau]} \|S_\circ(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - S_\circ(t; \beta_\circ, \gamma_\circ)\| &= \frac{1}{n}O_p(o_p(n^{-\frac{1}{p}})) + \frac{1}{n}O_p(O_p(n^{-\frac{1}{p}})) \\ &= O_p(n^{-\frac{1}{p}}) + O_p(n^{-\frac{1}{p}}) = O_p(n^{-\frac{1}{p}}) \\ &= o_p(n^{-\frac{1}{p} + \varepsilon}), \end{aligned} \quad (۱۹.۲)$$

با توجه به قضیه ۱.۵.۱ و دلخواه بودن مقدار ε ، با انتخاب $\varepsilon = 1$ داریم

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \|S_\circ(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - S_\circ(t; \beta_\circ, \gamma_\circ)\| = o_p(n^{-\frac{1}{p}}).$$

□

لم ۴.۱.۲*. به ازای برآوردگرهای به دست آمده $\hat{\beta}(\cdot)$ و $\hat{\gamma}$ ، داریم

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \|S_j(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - s_j(t; \beta_\circ, \gamma_\circ)\| = o_p(n^{-\frac{1}{p}}), \quad j = \circ, x, z. \quad (۲۰.۲)$$

برهان. برای اثبات، ابتدا تساوی زیر را در نظر می‌گیریم

$$S_j(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - s_j(t; \beta_\circ, \gamma_\circ) = \{S_j(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - S_j(t; \beta_\circ, \gamma_\circ)\} - \{S_j(t; \beta_\circ, \gamma_\circ) - s_j(t; \beta_\circ, \gamma_\circ)\}.$$

برای حالت $j = \circ$ ، با استفاده از رابطه (۱۴.۲) و تساوی دوم (۱۹.۲) داریم

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \tau]} \|S_\circ(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - s_\circ(t; \beta_\circ, \gamma_\circ)\| &= O_p(n^{-\frac{1}{p}}) + O_p(n^{-\frac{1}{p}}) = O_p(n^{-\frac{1}{p}}) \\ &= o_p(n^{-\frac{1}{p} + \varepsilon}), \end{aligned}$$

با انتخاب $\varepsilon = \frac{1}{p}$ ، داریم

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \|S_\circ(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - s_\circ(t; \beta_\circ, \gamma_\circ)\| = o_p(n^{-\frac{1}{p}}).$$

□

برای $j = x, z$ نیز رابطه فوق به طور مشابه اثبات می‌شود.

همچنین در خصوص $E_m(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ ، به طریقی مشابه ثابت می‌شود

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \|E_m(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - e_m(t; \beta_0, \gamma_0)\| = o_p(n^{-\frac{1}{4}}), \quad (21.2)$$

که در آن، m می‌تواند x ، zx ، xx ، z یا zz باشد.

برای بررسی ویژگی‌های ضرایب مستقل از زمان، به نرخ همگرایی $\hat{A}(\tau)$ به مقدار $a(\tau)$ نیاز داریم.

لم ۵.۱.۲. * با استفاده از برآوردگرهای به دست آمده، $\hat{A}(\tau)$ به مقدار $a(\tau)$ همگراست. در واقع

$$\hat{A}(\tau) - a(\tau) = o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \quad (22.2)$$

برهان. با توجه به تعاریف $\hat{A}(\tau)$ و $a(\tau)$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \hat{A}(\tau) - a(\tau) &= \int_0^\tau \left[\hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T \right] d\hat{\mu}_0(t) \\ &\quad - \int_0^\tau \left[e_{zz}(t) - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} e_{zx}(t)^T \right] d\hat{\mu}_0(t) \\ &= \int_0^\tau \left[\hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T \right] d\hat{\mu}_0(t) \\ &\quad - \int_0^\tau \left[e_{zz}(t) - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} e_{zx}(t)^T \right] d\mu_0(t) \\ &\quad + \int_0^\tau \left[e_{zz}(t) - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} e_{zx}(t)^T \right] d\hat{\mu}_0(t) \\ &\quad - \int_0^\tau \left[e_{zz}(t) - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} e_{zx}(t)^T \right] d\hat{\mu}_0(t) \\ &= \int_0^\tau \left[\hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T - e_{zz}(t) \right. \\ &\quad \left. + e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} e_{zx}(t)^T \right] d\hat{\mu}_0(t) \\ &\quad + \int_0^\tau \left[e_{zz}(t) - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} e_{zx}(t)^T \right] d\hat{\mu}_0(t) \\ &\quad - \int_0^\tau \left[e_{zz}(t) - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} e_{zx}(t)^T \right] d\mu_0(t). \quad (23.2) \end{aligned}$$

تساوی زیر را در نظر می‌گیریم

$$dN_0(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n dM_i(t) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(t) d\mu_0(t). \quad (24.2)$$

با استفاده از تساوی (۲۴.۲)، جمله دوم رابطه (۲۳.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^\tau \left[e_{zz}(t) - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} e_{zx}(t)^T \right] d\hat{\mu}_0(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \frac{dN_o(t)}{\hat{S}_o(t)} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \frac{dM_i(t)}{\hat{S}_o(t)} \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \phi_i(t) \frac{d\mu_o(t)}{\hat{S}_o(t)}. \quad (25.2)
 \end{aligned}$$

با استفاده از بسط تیلور $\phi_i(t)$ ، تساوی (۱۷.۲)، رابطه (۲۵.۲) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] d\hat{\mu}_o(t) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \frac{dM_i(t)}{\hat{S}_o(t)} \\
 &\quad + \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\phi}_i(t) \right)}_{\hat{S}_o(t)} \frac{d\mu_o(t)}{\hat{S}_o(t)} \\
 &\quad + \frac{1}{n} \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \left\{ \hat{\phi}(t)^T [X(t) (\beta_o(t) - \hat{\beta}(t)) \right. \\
 &\quad \left. + Z(t)(\gamma_o - \hat{\gamma}) \right] + O_p(\|\hat{\beta}(t) - \beta_o(t)\|^2) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_o\|^2) \bigg\} \frac{d\mu_o(t)}{\hat{S}_o(t)} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \frac{dM_i(t)}{\hat{S}_o(t)} \\
 &\quad + \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] d\mu_o(t) \\
 &\quad + \frac{1}{n} \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \left\{ \hat{\phi}(t)^T [X(t) (\beta_o(t) - \hat{\beta}(t)) \right. \\
 &\quad \left. + Z(t)(\gamma_o - \hat{\gamma}) \right] + O_p(\|\hat{\beta}(t) - \beta_o(t)\|^2) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_o\|^2) \bigg\} \frac{d\mu_o(t)}{\hat{S}_o(t)}. \quad (26.2)
 \end{aligned}$$

تساوی آخر (۲۶.۲) را در رابطه (۲۳.۲) قرار می‌دهیم، داریم

$$\begin{aligned}
 \hat{A}(\tau) - a(\tau) &= \int_0^\tau \left[\hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t)\hat{E}_{xx}(t)^{-1}\hat{E}_{zx}(t)^T \right. \\
 &\quad \left. - e_{zz}(t) + e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T \right] \frac{dN_o(t)}{\hat{S}_o(t)} \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \frac{dM_i(t)}{\hat{S}_o(t)} \\
 &\quad + \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] d\mu_o(t) \\
 &\quad + \frac{1}{n} \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \left\{ \hat{\phi}(t)^T [X(t) (\beta_o(t) - \hat{\beta}(t)) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + Z(t)(\gamma_0 - \hat{\gamma}) \Big\} \frac{d\mu_0(t)}{\hat{S}_0(t)} \\
 & + \frac{1}{n} \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] O_p(\|\hat{\beta}(t) - \beta_0(t)\|^2) \frac{d\mu_0(t)}{\hat{S}_0(t)} \\
 & + \frac{1}{n} \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_0\|^2) \frac{d\mu_0(t)}{\hat{S}_0(t)} \\
 & - \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] d\mu_0(t). \tag{۲۷.۲}
 \end{aligned}$$

همچنین برای محاسبه نرخ همگرایی و کران داری با استفاده از روابط (۱۳.۲)، (۲۰.۲)، (۲۱.۲)

و شرط (C۶) می توان نوشت

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \left[\hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t)\hat{E}_{xx}(t)^{-1}\hat{E}_{zx}(t)^T - e_{zz}(t) + e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T \right] \frac{dN_0(t)}{\hat{S}_0(t)} \\
 & = \left[o_p(n^{-\frac{1}{2}}) - o_p(n^{-\frac{1}{2}})o_p(n^{-\frac{1}{2}})o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \right] \left[\frac{1}{s_0(t)} + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \right] \\
 & = o_p(n^{-\frac{1}{2}}) - o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \\
 & = o_p(n^{-\frac{1}{2}}). \tag{۲۸.۲}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \frac{dM_i(t)}{\hat{S}_0(t)} \\
 & = \frac{1}{n} O_p(1) \left[\frac{1}{s_0(t)} + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \right] \\
 & = O_p(n^{-1}). \tag{۲۹.۲}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \hat{\phi}(t)^T [X(t)(\beta_0(t) - \hat{\beta}(t))] \frac{d\mu_0(t)}{\hat{S}_0(t)} \\
 & = \frac{1}{n} o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \left[\frac{1}{s_0(t)} + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \right] \\
 & = o_p(n^{-\frac{3}{2}}). \tag{۳۰.۲}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] \hat{\phi}(t)^T [Z(t)(\gamma_0 - \hat{\gamma})] \frac{d\mu_0(t)}{\hat{S}_0(t)} \\
 & = \frac{1}{n} O_p(n^{-\frac{1}{2}}) \left[\frac{1}{s_0(t)} + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \right] \\
 & = O_p(n^{-\frac{3}{2}}). \tag{۳۱.۲}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] O_p(\|\hat{\beta}(t) - \beta_0(t)\|^2) \frac{d\mu_0(t)}{\hat{S}_0(t)} \\ &= \frac{1}{n} O_p(\|\hat{\beta}(t) - \beta_0(t)\|^2) \left[\frac{1}{s_0(t)} + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \right] \\ &= O_p(n^{-\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (32.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_0\|^2) \frac{d\mu_0(t)}{\hat{S}_0(t)} \\ &= \frac{1}{n} O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_0\|^2) \left[\frac{1}{s_0(t)} + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \right] \\ &= O_p(n^{-2}). \end{aligned} \quad (33.2)$$

در نهایت با قرار دادن تساوی‌های (۲۸.۲) - (۳۳.۲) در رابطه (۲۷.۲) داریم

$$\begin{aligned} \hat{A}(\tau) - a(\tau) &= o_p(n^{-\frac{1}{2}}) + O_p(n^{-1}) + o_p(n^{-\frac{3}{2}}) + O_p(n^{-\frac{3}{2}}) + O_p(n^{-\frac{3}{2}}) + O_p(n^{-2}) \\ &= o_p(n^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

□

لم ۶.۱.۲. (لین و همکاران، ۲۰۰۰) فرض کنید f_n و g_n دو دنباله از تابع‌های کران‌دار باشند به قسمی که برای مقدار ثابت τ ,

$$1. \sup_{0 \leq t \leq \tau} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0 \text{ در بازه } [0, \tau] \text{ پیوسته است.}$$

$$2. \{g_n\} \text{ روی بازه } [0, \tau] \text{ یکنواست.}$$

$$3. \sup_{0 \leq t \leq \tau} |g_n(t) - g(t)| \rightarrow 0 \text{ که } g \text{ تابعی کران‌دار است. آن‌گاه}$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \left| \int_0^t f_n(s) dg_n(s) - \int_0^t f(s) dg(s) \right| \rightarrow 0,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \left| \int_0^t g_n(s) df_n(s) - \int_0^t g(s) df(s) \right| \rightarrow 0.$$

اکنون قضیه اصلی این فصل را بیان و اثبات می‌کنیم. این قضیه با استفاده از لم‌ها و قضیه‌های

بیان‌شده در این فصل، ویژگی‌های مجانبی مطرح‌شده برای $\hat{\gamma}$ ، $\hat{\mathbf{B}}(\cdot)$ و $\hat{\mu}(\cdot)$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۲.۱.۲. * برای $\Psi_r(\gamma)$ و $\Psi_b(\mathbf{B})(t)$ که در فصل اول تعریف شدند، ریشه‌های معادله‌های

$$\Psi_r(\gamma) = \gamma \text{ و } \Psi_b(\mathbf{B})(t) = \mathbf{B}(t) \text{ به ترتیب برابرند با } \tilde{\gamma} \text{ و } \tilde{\mathbf{B}}(t), \text{ به طوری که}$$

(الف)

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\tilde{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_0(t)\| = O_p(n^{-\frac{1}{2}}),$$

$$\|\tilde{\gamma} - \gamma_0\| = O_p(n^{-\frac{1}{2}}),$$

$$\|v\| = (v^T v)^{\frac{1}{2}} \text{ که در آن}$$

(ب) $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\gamma} - \gamma_0)$ دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس است که

توسط برآوردگر سازگار $\hat{\Sigma} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\xi}_i(\tau) \hat{\xi}_i(\tau)^T$ برآورد می‌شود. به طوری که

$$\hat{\xi}_i(\tau) = \hat{A}(\tau)^{-1} \int_0^\tau [\{\mathbf{Z}_i(t) - \hat{\mathbf{E}}_z(t)\}^T - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \{\mathbf{X}_i(t) - \hat{\mathbf{E}}_x(t)\}^T] d\hat{M}_i(t).$$

(پ) فرآیند $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_0(t))$ به یک فرآیند نرمال با میانگین صفر و تابع کوواریانس $\Gamma_b(s, t)$

همگرا است که توسط برآوردگر $\hat{\Gamma}_b(s, t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\eta}_i(s) \hat{\eta}_i(t)^T$ برآورد می‌شود. به

طوری که

$$\hat{\eta}_i(t) = \int_0^t \hat{\lambda}_0(u)^{-1} \hat{E}_{xx}(u)^{-1} \{\mathbf{X}_i(u) - \hat{\mathbf{E}}_x(u)\} d\hat{M}_i(u) - \int_0^t \hat{E}_{xx}(u)^{-1} \hat{E}_{zx}(u)^T du \hat{\xi}_i(\tau).$$

(ت) فرآیند

$$n^{\frac{1}{2}} \{ \hat{\mu}_0(t) - \mu_0(t) + \frac{1}{2} \nu_1 h^2 \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T \beta_0''(u) d\mu_0(u) \}$$

به یک فرآیند نرمال با میانگین صفر و تابع کوواریانس $\Gamma_u(s, t)$ همگرا است که توسط

برآوردگر سازگار $\hat{\Gamma}_u(s, t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\varphi}_i(s) \hat{\varphi}_i(t)^T$ برآورد می‌شود. به طوری که $\beta_0''(t)$

مشتق دوم $\beta_0(t)$ ، $\nu_1 = \int u^2 K(u) du$ ، $\nu_0 = \int K(u) du$ ، $\mathbf{e}_x(t; \beta_0(t), \gamma_0)$ حد

است. همچنین

$$\hat{\varphi}_i(t) = \int_0^t \frac{d\hat{M}_i(u)}{\hat{S}_0(u)} - \int_0^t \hat{\mathbf{E}}_x(u)^T \hat{\lambda}_0(u) d\hat{\eta}_i(t) - \int_0^t \hat{\mathbf{E}}_z(u)^T d\hat{\mu}_0(u) \hat{\xi}_i(\tau).$$

برهان. الف) برای اثبات این قسمت به رابطه زیر نیاز داریم:

$$d\mathbf{N}(t) = d\mathbf{M}(t) + \phi(t) d\mu_0(t). \quad (۳۴.۲)$$

حال رابطه (۳۴.۲) را در تساوی زیر قرار می‌دهیم

$$\Psi_r(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma} + \frac{\hat{A}(\tau)^{-1}}{n} \int_0^\tau \left[\left\{ Z(t) - \tilde{Z}(t) \right\}^T - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \left\{ X(t) - \tilde{X}(t) \right\}^T \right] d\mathbf{N}(t).$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \Psi_r(\hat{\gamma}) &= \hat{\gamma} + \frac{\hat{A}(\tau)^{-1}}{n} \int_0^\tau \left[\left\{ Z(t) - \tilde{Z}(t) \right\}^T - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \left\{ X(t) - \tilde{X}(t) \right\}^T \right] d\mathbf{M}(t) \\ &+ \frac{\hat{A}(\tau)^{-1}}{n} \int_0^\tau \left[\left\{ Z(t) - \tilde{Z}(t) \right\}^T - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \left\{ X(t) - \tilde{X}(t) \right\}^T \right] \phi(t) d\mu_0(t), \end{aligned} \quad (۳۵.۲)$$

که $\mathbf{M}(t) = (M_1(t), \dots, M_n(t))^T$ و $\tilde{X}(t) = \bar{X}(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ ، $\tilde{Z}(t) = \bar{Z}(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma})$

با توجه به (۲۱.۲) و (۲۲.۲)، جمله دوم سمت راست (۳۵.۲) معادل است با

$$n^{-1} a(\tau)^{-1} \int_0^\tau \left[\left\{ Z(t) - \bar{z}(t) \right\}^T - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} \left\{ X(t) - \bar{x}(t) \right\}^T \right] d\mathbf{M}(t) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}). \quad (۳۶.۲)$$

برای ادامه اثبات، ابتدا بسط تیلور $\phi(t)$ را در $(\hat{\beta}(t), \hat{\gamma})$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \phi(t; \beta_0(t), \gamma_0) &= \phi(t; \beta_0(t), \gamma_0) \Big|_{\beta_0(t)=\hat{\beta}(t), \gamma_0=\hat{\gamma}} \\ &+ (\phi_1(t) \mathbf{X}_1(t), \dots, \phi_n(t) \mathbf{X}_n(t))^T \Big|_{\beta_0(t)=\hat{\beta}(t), \gamma_0=\hat{\gamma}} (\beta_0(t) - \hat{\beta}(t)) \\ &+ (\phi_1(t) \mathbf{Z}_1(t), \dots, \phi_n(t) \mathbf{Z}_n(t))^T \Big|_{\beta_0(t)=\hat{\beta}(t), \gamma_0=\hat{\gamma}} (\gamma_0 - \hat{\gamma}) \\ &+ O_p \left(\|\hat{\beta}(t) - \beta_0(t)\|^2 \right) + O_p \left(\|\hat{\gamma} - \gamma_0\|^2 \right) \\ &= \hat{\phi}(t; \beta_0(t), \gamma_0) + \hat{\Phi}(t) X(t) (\beta_0(t) - \hat{\beta}(t)) + \hat{\Phi}(t) Z(t) (\gamma_0 - \hat{\gamma}) \\ &+ \hat{\Phi}(t) (\tilde{X}(t) - \bar{X}(t)) (\beta_0(t) - \hat{\beta}(t)) \\ &+ \hat{\Phi}(t) (\tilde{Z}(t) - \bar{Z}(t)) (\gamma_0 - \hat{\gamma}) \\ &+ O_p \left(\|\hat{\beta}(t) - \beta_0(t)\|^2 \right) + O_p \left(\|\hat{\gamma} - \gamma_0\|^2 \right) \\ &= O(1) + \hat{\Phi}(t) (X(t) - \tilde{X}(t)) (\beta_0(t) - \hat{\beta}(t)) + \hat{\Phi}(t) (Z(t) - \tilde{Z}(t)) (\gamma_0 - \hat{\gamma}) \\ &+ O_p \left(\|\hat{\beta}(t) - \beta_0(t)\| \right) + O_p \left(\|\hat{\gamma} - \gamma_0\| \right) \\ &+ O_p \left(\|\hat{\beta}(t) - \beta_0(t)\|^2 \right) + O_p \left(\|\hat{\gamma} - \gamma_0\|^2 \right) \\ &= \hat{\Phi}(t) (X(t) - \tilde{X}(t)) (\beta_0(t) - \hat{\beta}(t)) + \hat{\Phi}(t) (Z(t) - \tilde{Z}(t)) (\gamma_0 - \hat{\gamma}) \end{aligned}$$

$$+O_p\left(\|\hat{\beta}(t) - \beta_*(t)\|\right) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_*\|). \quad (۳۷.۲)$$

با استفاده از بسط تیلور (۳۷.۲)، رابطه (۱۳.۲) و شرط (C۶)، جمله سوم رابطه (۳۵.۲) را به

صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} & n^{-1} \hat{A}(\tau)^{-1} \left\{ \int_0^\tau \left[\left\{ Z(t) - \tilde{Z}(t) \right\}^T - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \left\{ X(t) - \tilde{X}(t) \right\}^T \right] \hat{\Phi}(t) \right. \\ & \quad \times \left[\left\{ X(t) - \tilde{X}(t) \right\} (\beta_*(t) - \hat{\beta}(t)) + \left\{ Z(t) - \tilde{Z}(t) \right\} (\gamma_* - \hat{\gamma}) \right] d\mu_*(t) \\ & \quad \left. + O_p\left(\|\hat{\beta}(t) - \beta_*(t)\|\right) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_*\|) \right\} \\ &= n^{-1} \hat{A}(\tau)^{-1} \left\{ \int_0^\tau \underbrace{\left\{ Z(t) - \tilde{Z}(t) \right\}^T \hat{\Phi}(t) \left\{ X(t) - \tilde{X}(t) \right\}}_{n \hat{E}_{zx}(t)} (\beta_*(t) - \hat{\beta}(t)) d\mu_*(t) \right. \\ & \quad + \int_0^\tau \underbrace{\left\{ Z(t) - \tilde{Z}(t) \right\}^T \hat{\Phi}(t) \left\{ Z(t) - \tilde{Z}(t) \right\}}_{n \hat{E}_{zz}(t)} (\gamma_* - \hat{\gamma}) d\mu_*(t) \\ & \quad - \int_0^\tau \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \underbrace{\left\{ X(t) - \tilde{X}(t) \right\}^T \hat{\Phi}(t) \left\{ X(t) - \tilde{X}(t) \right\}}_{n \hat{E}_{xx}(t)} (\beta_*(t) - \hat{\beta}(t)) d\mu_*(t) \\ & \quad - \int_0^\tau \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \underbrace{\left\{ X(t) - \tilde{X}(t) \right\}^T \hat{\Phi}(t) \left\{ Z(t) - \tilde{Z}(t) \right\}}_{n \hat{E}_{zx}^T(t)} (\gamma_* - \hat{\gamma}) d\mu_*(t) \\ & \quad \left. + O_p\left(\|\hat{\beta}(t) - \beta_*(t)\|\right) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_*\|) \right\} \\ &= n^{-1} \hat{A}(\tau)^{-1} \left\{ n \int_0^\tau \hat{E}_{zx}(t) (\beta_*(t) - \hat{\beta}(t)) d\mu_*(t) + n \int_0^\tau \hat{E}_{zz}(t) (\gamma_* - \hat{\gamma}) d\mu_*(t) \right. \\ & \quad - n \int_0^\tau \hat{E}_{zx}(t) (\beta_*(t) - \hat{\beta}(t)) d\mu_*(t) - n \int_0^\tau \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T (\gamma_* - \hat{\gamma}) d\mu_*(t) \\ & \quad \left. + O_p\left(\|\hat{\beta}(t) - \beta_*(t)\|\right) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_*\|) \right\} \\ &= \hat{A}(\tau)^{-1} \left\{ \left[\int_0^\tau \{ \hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T \} d\mu_*(t) \right] (\gamma_* - \hat{\gamma}) \right. \\ & \quad \left. + n^{-1} O_p\left(\|\hat{\beta}(t) - \beta_*(t)\|\right) + n^{-1} O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_*\|) \right\} \\ &= \hat{A}(\tau)^{-1} \left\{ \left[\int_0^\tau \{ \hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T \} d\mu_*(t) \right] (\gamma_* - \hat{\gamma}) \right. \\ & \quad \left. + O_p(n^{-\frac{\hat{\nu}}{2}}) + O_p(n^{-\frac{\hat{\nu}}{2}}) \right\} \\ &= \hat{A}(\tau)^{-1} \left\{ \left[\int_0^\tau \{ \hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T \} d\mu_*(t) \right] (\gamma_* - \hat{\gamma}) \right. \\ & \quad \left. + o_p(n^{-\frac{\hat{\nu}}{2} + \varepsilon}) \right\} \end{aligned}$$

$$= \hat{A}(\tau)^{-1} \left\{ \left[\int_0^\tau \{ \hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T \} d\mu_0(t) \right] (\gamma_0 - \hat{\gamma}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \right\}. \quad (38.2)$$

با انتخاب $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ، رابطه (38.2) برقرار است. از طرفی

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \{ \hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T \} d\mu_0(t) - a(\tau) \\ &= \int_0^\tau \left\{ \left\{ \hat{E}_{zz}(t) - e_{zz}(t) \right\} - \left\{ \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} e_{zx}(t)^T \right\} \right\} d\mu_0(t) \\ &= o_p(n^{-\frac{1}{4}}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) o_p(n^{-\frac{1}{4}}) o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \\ &= o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \end{aligned} \quad (39.2)$$

بنابراین با استفاده از روابط (22.2) و (39.2)، تساوی آخر رابطه (38.2) معادل است با

$$\begin{aligned} & \hat{A}(\tau)^{-1} \left\{ \left[\int_0^\tau \hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t) \hat{E}_{xx}(t)^{-1} \hat{E}_{zx}(t)^T d\mu_0(t) \right] (\gamma_0 - \hat{\gamma}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \right\} \\ &= (a(\tau)^{-1} + o_p(n^{-\frac{1}{4}})) \left\{ \left[a(\tau) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \right] (\gamma_0 - \hat{\gamma}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \right\} \\ &= (\gamma_0 - \hat{\gamma}) + a(\tau)^{-1} o_p(n^{-\frac{1}{4}}) (\gamma_0 - \hat{\gamma}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) a(\tau) (\gamma_0 - \hat{\gamma}) \\ &\quad + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) o_p(n^{-\frac{1}{4}}) (\gamma_0 - \hat{\gamma}) + a(\tau)^{-1} o_p(n^{-\frac{1}{4}}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \\ &= (\gamma_0 - \hat{\gamma}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) + o_p(n^{-1}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \\ &= \gamma_0 - \hat{\gamma} + o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \end{aligned} \quad (40.2)$$

با جایگذاری روابط (36.2) و (40.2) در رابطه (35.2)، داریم

$$\begin{aligned} \Psi_r(\hat{\gamma}) &= \hat{\gamma} + \gamma_0 - \hat{\gamma} + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \\ &\quad + n^{-1} a(\tau)^{-1} \int_0^\tau \left[\{ Z(t) - \bar{z}(t) \}^T - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} \{ X(t) - \bar{x}(t) \}^T \right] d\mathbf{M}(t) \\ &\quad + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \\ &= \gamma_0 + n^{-1} a(\tau)^{-1} \int_0^\tau \left[\{ Z(t) - \bar{z}(t) \}^T - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} \{ X(t) - \bar{x}(t) \}^T \right] d\mathbf{M}(t) \\ &\quad + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \\ &= \gamma_0 + O(n^{-1}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \end{aligned} \quad (41.2)$$

بنابراین داریم

$$\|\tilde{\gamma} - \gamma_0\| = O_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \quad (۴۲.۲)$$

و اثبات الف برای پارامتر γ تمام است. اثبات برای ضریب $\mathbf{B}_0(\cdot)$ در خلال اثبات قسمت پ قرار دارد.

اثبات ب:

ابتدا تساوی (۴۱.۲) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \Psi_r(\hat{\gamma}) &= \gamma_0 + n^{-1} a(\tau)^{-1} \int_0^\tau [\{\mathbf{Z}_1(t) - \mathbf{e}_z(t)\}, \{\mathbf{Z}_2(t) - \mathbf{e}_z(t)\}, \dots, \{\mathbf{Z}_n(t) - \mathbf{e}_z(t)\}] \\ &\quad - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} [\{\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{e}_x(t)\}, \{\mathbf{X}_2(t) - \mathbf{e}_x(t)\}, \dots, \{\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{e}_x(t)\}] \\ &\quad \times (dM_1(t), dM_2(t), \dots, dM_n(t))^T + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\ &= \gamma_0 + n^{-1} a(\tau)^{-1} \left[\left\{ \int_0^\tau \{\mathbf{Z}_1(t) - \mathbf{e}_z(t)\} - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} \{\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{e}_x(t)\} \right\} dM_1(t) \right. \\ &\quad + \left\{ \int_0^\tau \{\mathbf{Z}_2(t) - \mathbf{e}_z(t)\} - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} \{\mathbf{X}_2(t) - \mathbf{e}_x(t)\} \right\} dM_2(t) \\ &\quad + \dots + \left. \left\{ \int_0^\tau \{\mathbf{Z}_n(t) - \mathbf{e}_z(t)\} - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} \{\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{e}_x(t)\} \right\} dM_n(t) \right] \\ &\quad + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\ &= \gamma_0 + n^{-1} a(\tau)^{-1} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^\tau \{\mathbf{Z}_i(t) - \mathbf{e}_z(t)\} - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} \{\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{e}_x(t)\} \right\} dM_i(t) \\ &\quad + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\ &= \gamma_0 + n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i(\tau) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}), \end{aligned}$$

که در آن

$$\xi_i(\tau) = a(\tau)^{-1} \int_0^\tau [\{\mathbf{Z}_i(t) - \mathbf{e}_z(t)\}^T - e_{zx}(t) e_{xx}(t)^{-1} \{\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{e}_x(t)\}^T] dM_i(t).$$

بنابراین

$$\Psi_r(\hat{\gamma}) = \gamma_0 + n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i(\tau) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}).$$

در نتیجه

$$\tilde{\gamma} - \gamma_0 = n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i(\tau) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}), \quad (۴۳.۲)$$

به طوری که $\tilde{\gamma}$ به دست آمده، برآوردگر نهایی برای ضریب مستقل از زمان محسوب می‌شود. حال برای به دست آوردن توزیع مجانبی برآوردگر، گشتاورهای توزیع را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم. ابتدا برای محاسبه امید ریاضی با استفاده از روابط (۴۳.۲) و (۶.۱)، داریم

$$\begin{aligned}
 & E(n^{\frac{1}{\nu}}(\tilde{\gamma} - \gamma_0) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t)) \\
 &= E(n^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{i=1}^n \xi_i(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t)) = n^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{i=1}^n E(\xi_i(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t)) \\
 &= n^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{i=1}^n E(a(\tau)^{-1} \int_0^\tau \{\mathbf{Z}_i(t) - \mathbf{e}_z(t)\} - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1} \\
 &\quad \times \{\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{e}_x(t)\} dM_i(t) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t)) \\
 &= n^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{i=1}^n a(\tau)^{-1} \{\mathbf{Z}_i(t) - \mathbf{e}_z(t)\} - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1} \{\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{e}_x(t)\} E\left(\int_0^\tau dM_i(t)\right) \\
 &= n^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{i=1}^n a(\tau)^{-1} \{\mathbf{Z}_i(t) - \mathbf{e}_z(t)\} - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1} \{\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{e}_x(t)\} E(M_i(\tau)) = 0.
 \end{aligned}$$

(۴۴.۲)

برای محاسبه واریانس ابتدا می‌دانیم

$$\begin{aligned}
 Var(n^{\frac{1}{\nu}}(\tilde{\gamma} - \gamma_0) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t)) &= n^{-1} Var\left(\sum_{i=1}^n \xi_i(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t)\right) \\
 &= n^{-1} \sum_{i=1}^n Var(\xi_i(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t)) \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(\xi_i(\tau)\xi_j(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)),
 \end{aligned}$$

(۴۵.۲)

به طوری که

$$\begin{aligned}
 & Cov(\xi_i(\tau)\xi_j(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)) \\
 &= E(\xi_i(\tau)\xi_j(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)) \\
 &\quad - E(\xi_i(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)) E(\xi_j(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)).
 \end{aligned}$$

(۴۶.۲)

مشابه رابطه (۴۴.۲) داریم

$$E(\xi_i(\tau)|\mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)) = E(\xi_j(\tau)|\mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)) = 0. \quad (47.2)$$

در اینجا برای خلاصه‌سازی، a و b را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$a = a(\tau)^{-1} \{ \mathbf{Z}_i(t) - \mathbf{e}_z(t) \} - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1} \{ \mathbf{X}_i(t) - \mathbf{e}_x(t) \},$$

$$b = a(\tau)^{-1} \{ \mathbf{Z}_j(t) - \mathbf{e}_z(t) \} - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1} \{ \mathbf{X}_j(t) - \mathbf{e}_x(t) \}.$$

بنابراین مانند رابطه (۴۴.۲) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} E(\xi_i(\tau)\xi_j(\tau)|\mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)) \\ &= E\left(\int adM_i(t) \int bdM_j(t) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)\right) \\ &= abE\left(\int dM_i(t) \int dM_j(t)\right) \\ &= abE(M_i(t)M_j(t)). \end{aligned} \quad (48.2)$$

بنا به تعریف $M_i(t)$ ، مدل پیشنهادی و استقلال تعداد پیشامدها برای افراد i ام و j ام، داریم

$$\begin{aligned} E(M_i(t)M_j(t)) &= E(N_i(t)N_j(t)) \\ &\quad - E(N_i(t) \int Y_j(t) \exp\{\beta_0(t)^T \mathbf{X}_j(t) + \gamma_0^T \mathbf{Z}_j(t)\} d\mu_0(t)) \\ &\quad - E(N_j(t) \int Y_i(t) \exp\{\beta_0(t)^T \mathbf{X}_i(t) + \gamma_0^T \mathbf{Z}_i(t)\} d\mu_0(t)) \\ &\quad + E\left(\int Y_i(t) \exp\{\beta_0(t)^T \mathbf{X}_i(t) + \gamma_0^T \mathbf{Z}_i(t)\} d\mu_0(t) \right. \\ &\quad \quad \left. \times \int Y_j(t) \exp\{\beta_0(t)^T \mathbf{X}_j(t) + \gamma_0^T \mathbf{Z}_j(t)\} d\mu_0(t)\right) \\ &= E(N_i(t)N_j(t)) - E(N_i(t))E\left(\int Y_j(t)dN_j^*(t)\right) \\ &\quad - E(N_j(t))E\left(\int Y_i(t)dN_i^*(t)\right) \\ &\quad - E\left(\int Y_j(t)dN_j^*(t)\right)E\left(\int Y_i(t)dN_i^*(t)\right). \end{aligned} \quad (49.2)$$

در حالتی که $Y_i(t) = I(C_i \geq t) = 1$ می‌توان گفت

$$N_i(t) = N_i^*(t \wedge C_i) = N_i^*(t), \quad (50.2)$$

و به طور مشابه $N_j(t) = N_j^*(t)$.

بنابراین بنا به تساوی (۵۰.۲)، آخرین تساوی رابطه (۴۹.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} E(M_i(t)M_j(t)) &= E(N_i(t)N_j(t)) - E(N_i(t))E(N_j^*(t)) - E(N_j(t))E(N_i^*(t)) \\ &\quad + E(N_i^*(t))E(N_j^*(t)) \\ &= Cov(N_i(t), N_j(t)). \end{aligned}$$

که بنابر استقلال تعداد رخدادها برای افراد i ام و j ام، داریم

$$E(M_i(t)M_j(t)) = Cov(N_i(t), N_j(t)) = 0. \quad (51.2)$$

بنابراین با استفاده از (۵۱.۲)، رابطه (۴۸.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E(\xi_i(\tau)\xi_j(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)) = 0. \quad (52.2)$$

در نتیجه با توجه به روابط (۵۲.۲) و (۴۷.۲)، رابطه (۴۶.۲) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$Cov(\xi_i(\tau)\xi_j(\tau) | \mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{X}_j(t), \mathbf{Z}_j(t)) = 0. \quad (53.2)$$

سرانجام با استفاده از رابطه (۵۳.۲) و هم‌توزیعی ξ_i ها، رابطه (۴۵.۲) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} Var(n^{\frac{1}{2}}(\tilde{\gamma} - \gamma_0)) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n Var(\xi_i(\tau)) \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n Var(\xi_i(\tau)) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot Var(\xi_i(\tau)) \\ &= Var(\xi_i(\tau)) = E(\xi_i(\tau)\xi_i(\tau)^T) = \Sigma. \end{aligned} \quad (54.2)$$

با توجه به قضیه حد مرکزی چندمتغیره، $n^{\frac{1}{2}}(\tilde{\gamma} - \gamma_0)$ در توزیع همگرا به بردار تصادفی نرمال با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma = E\{\xi_i(\tau)\xi_i(\tau)^T\}$ است. با استفاده از قانون اعداد بزرگ

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\xi}_i(\tau)\hat{\xi}_i(\tau)^T$$

در ادامه این فصل، $\hat{\gamma}$ را همان برآوردگر نهایی پارامتر مستقل از زمان، $\tilde{\gamma}$ ، در نظر می‌گیریم.

اثبات پ:

در این بخش ابتدا اثبات الف برای ضریب $\mathbf{B}_\circ(\cdot)$ ارایه و در ادامه پ اثبات می‌شود. برای نمایش برقراری الف نیاز داریم رابطه $\sup_{\circ \leq t \leq \tau} |\hat{\lambda}_\circ(t) - \lambda_\circ(t)| = o_p(n^{-\frac{1}{\nu}})$ را نشان دهیم ($\hat{\lambda}(t)$ برآوردگر هموار $\lambda(t)$ می‌باشد که تعریف این برآوردگر در فصل اول آمده است). برای این منظور، ابتدا داریم

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_\circ(t) - \lambda_\circ(t) &= \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) \frac{dN_\circ(u)}{S_\circ(u; \beta_\circ, \gamma_\circ)} - \lambda_\circ(t) \\ &+ \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) \left(\frac{1}{\hat{S}_\circ(u)} - \frac{1}{S_\circ(u; \beta_\circ, \gamma_\circ)} \right) dN_\circ(u). \end{aligned} \quad (55.2)$$

مشابه روند اثبات رابطه (۱۳.۲)، با استفاده از رابطه (۱۶.۱) و شرط (C۴)، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} &\left| \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) \frac{dN_\circ(u)}{S_\circ(u; \beta_\circ, \gamma_\circ)} - \lambda_\circ(t) \right| \\ &= \left| \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) \frac{dN_\circ(u)}{S_\circ(u; \beta_\circ, \gamma_\circ)} - \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) d\mu_\circ(u) \right| \\ &\leq \frac{M}{h} \left| \int \frac{dN_\circ(u)}{S_\circ(u; \beta_\circ, \gamma_\circ)} - \int d\mu_\circ(u) \right| \\ &\leq \frac{M}{h} |\hat{\mu}_\circ(t) - \mu_\circ(t)|. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن

$$A = \sup_{\circ \leq t \leq \tau} \left| \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) \frac{dN_\circ(u)}{S_\circ(u; \beta_\circ, \gamma_\circ)} - \lambda_\circ(t) \right| \leq \frac{M}{h} \sup_{\circ \leq t \leq \tau} |\hat{\mu}_\circ(t) - \mu_\circ(t)|,$$

خواهیم داشت

$$P\left(\frac{A}{\frac{1}{h} \sup_{\circ \leq t \leq \tau} |\hat{\mu}_\circ(t) - \mu_\circ(t)|} \leq M\right) \rightarrow 1,$$

که معادل است با

$$\begin{aligned} A &= O_p\left(\frac{1}{h} \sup_{\circ \leq t \leq \tau} |\hat{\mu}_\circ(t) - \mu_\circ(t)|\right) = O_p(O(n^{-\frac{1}{\nu}})O_p(n^{-\varepsilon})) = O_p(O_p(n^{-\frac{1}{\nu}-\varepsilon})) \\ &= O_p(n^{-\frac{1}{\nu}-\varepsilon}) = o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \end{aligned} \quad (56.2)$$

در نتیجه با استفاده از (۱۵.۲) و قضیه (۳۰.۱) بیکل و روزنبلات (۱۹۷۳) داریم

$$\sup_{\circ \leq t \leq \tau} \left| \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) \left(\frac{1}{\hat{S}_\circ(u)} - \frac{1}{S_\circ(u; \beta_\circ, \gamma_\circ)} \right) dN_\circ(u) \right|$$

$$\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left| \frac{1}{\hat{S}_\circ(u)} - \frac{1}{S_\circ(u; \beta_\circ, \gamma_\circ)} \right| \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left| \int \frac{1}{h} K\left(\frac{u-t}{h}\right) dN_\circ(u) \right| = o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \quad (57.2)$$

بنابراین با توجه به روابط (56.2) و (57.2) و همچنین رابطه (55.2) می‌توان نتیجه گرفت

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} |\hat{\lambda}_\circ(t) - \lambda_\circ(t)| = o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \quad (58.2)$$

به منظور اثبات قسمت الف، برای ضریب وابسته به زمان، روند برهانی مشابه برهان رابطه (41.2) داریم. از آنجایی که برآوردهای γ در دو مرحله متوالی پایانی اختلاف ناچیزی دارند و

قابل صرف نظر کردن هستند، رابطه (17.1) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Psi_b(\hat{\mathbf{B}})(t) = \int_0^t \hat{\beta}(u) du + \frac{1}{n} \int_0^t \hat{\lambda}_\circ(u)^{-1} \hat{E}_{xx}(u)^{-1} \{X(u) - \tilde{X}(u)\}^T d\mathbf{N}(u).$$

با استفاده از بسط تیلور (37.2)، رابطه‌های (34.2)، (58.2)، (13.2)، (42.2) و با در نظر

گرفتن $\varepsilon = \frac{1}{4}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \Psi_b(\hat{\mathbf{B}})(t) &= \int_0^t \hat{\beta}(u) du + \frac{1}{n} \int_0^t \hat{\lambda}_\circ(u)^{-1} \hat{E}_{xx}(u)^{-1} \{X(u) - \tilde{X}(u)\}^T d\mathbf{M}(u) \\ &\quad + \frac{1}{n} \left\{ \int_0^t \hat{\lambda}_\circ(u)^{-1} \hat{E}_{xx}(u)^{-1} \{X(u) - \tilde{X}(u)\}^T \hat{\Phi}(u) \right. \\ &\quad \times \left[\{X(u) - \tilde{X}(u)\} (\beta_\circ(u) - \hat{\beta}(u)) + \{Z(u) - \tilde{Z}(u)\} (\gamma_\circ - \hat{\gamma}) \right] d\mu_\circ(u) \\ &\quad \left. + O_p(\|\hat{\beta}(t) - \beta_\circ(t)\|) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_\circ\|) \right\} \\ &= \int_0^t \hat{\beta}(u) du + \frac{1}{n} \int_0^t \hat{\lambda}_\circ(u)^{-1} \hat{E}_{xx}(u)^{-1} \{X(u) - \tilde{X}(u)\}^T d\mathbf{M}(u) \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_0^t \hat{\lambda}_\circ(u)^{-1} \hat{E}_{xx}(u)^{-1} \underbrace{\{X(u) - \tilde{X}(u)\}^T \hat{\Phi}(u) \{X(u) - \tilde{X}(u)\}}_{n\hat{E}_{xx}(u)} \\ &\quad \times (\beta_\circ(u) - \hat{\beta}(u)) d\mu_\circ(u) \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_0^t \hat{\lambda}_\circ(u)^{-1} \hat{E}_{xx}(u)^{-1} \underbrace{\{X(u) - \tilde{X}(u)\}^T \hat{\Phi}(u) \{Z(u) - \tilde{Z}(u)\}}_{n\hat{E}_{zx}(u)^T} \\ &\quad \times (\gamma_\circ - \hat{\gamma}) d\mu_\circ(u) + o_p(n^{-\frac{1}{4} + \varepsilon}) \\ &= \int_0^t \hat{\beta}(u) du + \frac{1}{n} \int_0^t (\lambda_\circ(u)^{-1} + o_p(n^{-\frac{1}{4}}))(e_{xx}(u)^{-1} + o_p(n^{-\frac{1}{4}})) \\ &\quad \times \left\{ \{X(u) - \bar{x}(u)\}^T + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) \right\} d\mathbf{M}(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\circ}^t (\lambda_{\circ}(u)^{-1} + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}})) (\beta_{\circ}(u) - \hat{\beta}(u)) d\mu_{\circ}(u) \\
 & - \int_{\circ}^t (\lambda_{\circ}(u)^{-1} + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}})) (e_{xx}(u)^{-1} + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}})) \\
 & \quad \times (e_{zx}(u)^T + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}})) d\mu_{\circ}(u) (\hat{\gamma} - \gamma_{\circ}) + o_p(n^{-1}) \\
 = & \int_{\circ}^t \hat{\beta}(u) du + \frac{1}{n} \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{X(u) - \bar{x}(u)\}^T d\mathbf{M}(u) \\
 & + \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} (\beta_{\circ}(u) - \hat{\beta}(u)) d\mu_{\circ}(u) \\
 & - \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} e_{zx}(u)^T d\mu_{\circ}(u) (\hat{\gamma} - \gamma_{\circ}) \\
 & + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) + o_p(n^{-1}).
 \end{aligned}$$

در تساوی بالا، با استفاده از رابطه (۱۴.۱) داریم

$$\begin{aligned}
 \Psi_b(\hat{\mathbf{B}})(t) & = \int_{\circ}^t \hat{\beta}(u) du + \frac{1}{n} \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{X(u) - \bar{x}(u)\}^T d\mathbf{M}(u) \\
 & + \int_{\circ}^t \beta_{\circ}(u) du - \int_{\circ}^t \hat{\beta}(u) du \\
 & - \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} e_{zx}(u)^T d\mu_{\circ}(u) (\hat{\gamma} - \gamma_{\circ}) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\
 = & \mathbf{B}_{\circ}(u) + \frac{1}{n} \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{X(u) - \bar{x}(u)\}^T d\mathbf{M}(u) \\
 & + \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} e_{zx}(u)^T d\mu_{\circ}(u) (\hat{\gamma} - \gamma_{\circ}) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}).
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_{\circ}(t) & = n^{-1} \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{X(u) - \bar{x}(u)\}^T d\mathbf{M}(u) \\
 & - \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} e_{zx}(u)^T d\mu_{\circ}(u) (\hat{\gamma} - \gamma_{\circ}) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}),
 \end{aligned}$$

که $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ برآوردگر نهایی $\mathbf{B}_{\circ}(t)$ می‌باشد. رابطه فوق با توجه به (۴۳.۲) به صورت زیر تبدیل

می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_{\circ}(t) & = n^{-1} \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{X(u) - \bar{x}(u)\}^T d\mathbf{M}(u) \\
 & - \int_{\circ}^t \lambda_{\circ}(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} e_{zx}(u)^T d\mu_{\circ}(u) \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i(\tau) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \right) \\
 & + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= n^{-1} \int_0^t \lambda_0(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{X(u) - \bar{x}(u)\}^T d\mathbf{M}(u) \\
 &\quad - n^{-1} \int_0^t \lambda_0(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} e_{zx}(u)^T d\mu_0(u) \sum_{i=1}^n \xi_i(\tau) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \\
 &= O(n^{-1}) + O(n^{-1}) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \\
 &= O_p(n^{-\frac{1}{2}}). \tag{۵۹.۲}
 \end{aligned}$$

چون به ازای t دلخواه رابطه (۵۹.۲) برقرار است، داریم

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\tilde{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_0(t)\| = O_p(n^{-\frac{1}{2}}), \tag{۶۰.۲}$$

و اثبات الف برای $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ تمام است.

حال به منظور اثبات پ، ابتدا جمله اول تساوی دوم (۵۹.۲) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
 &n^{-1} \int_0^t \lambda_0(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} [\{\mathbf{X}_1(u) - \mathbf{e}_x(u)\}, \{\mathbf{X}_2(u) - \mathbf{e}_x(u)\}, \dots, \{\mathbf{X}_n(u) - \mathbf{e}_x(u)\}] \\
 &\quad \times (dM_1(t), dM_2(t), \dots, dM_n(t))^T \\
 &= n^{-1} \left\{ \int_0^t \lambda_0(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{\mathbf{X}_1(u) - \mathbf{e}_x(u)\} dM_1(u) \right. \\
 &\quad + \int_0^t \lambda_0(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{\mathbf{X}_2(u) - \mathbf{e}_x(u)\} dM_2(u) \\
 &\quad \left. + \dots + \int_0^t \lambda_0(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{\mathbf{X}_n(u) - \mathbf{e}_x(u)\} dM_n(u) \right\}.
 \end{aligned}$$

پس در نهایت می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_0(t) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t \lambda_0(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{\mathbf{X}_i(u) - \mathbf{e}_x(u)\} dM_i(u) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^t e_{xx}(u)^{-1} e_{zx}(u)^T du \xi_i(\tau) \right) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \\
 &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \eta_i(t) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}), \tag{۶۱.۲}
 \end{aligned}$$

که در آن

$$\eta_i(t) = \int_0^t \lambda_0(u)^{-1} e_{xx}(u)^{-1} \{\mathbf{X}_i(u) - \mathbf{e}_x(u)\} dM_i(u) - \int_0^t e_{xx}(u)^{-1} e_{zx}(u)^T du \xi_i(\tau).$$

با اثباتی مشابه اثبات قسمت ب، با استفاده از قضیه حد مرکزی چندمتغیره، $n^{\frac{1}{2}}(\tilde{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_0(t))$

در توزیع به یک فرآیند نرمال با میانگین صفر و تابع کوواریانس $\Gamma_b(s, t)$ همگرا می‌شود که با توجه

به قانون اعداد بزرگ، $\hat{\Gamma}_b(s, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\eta}_i(s) \hat{\eta}_i(t)^T$ برآوردگری سازگار برای تابع کوواریانس است و اثبات پ تمام است.

برای ضرایب وابسته به زمان نیز در ادامه، برآوردگر اولیه، $\hat{\mathbf{B}}(t)$ ، را برابر برآوردگر نهایی، $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ ، در نظر می گیریم.

اثبات ت:

برای اثبات این قسمت، ابتدا رابطه زیر را در نظر می گیریم

$$\hat{\mu}_\circ(t) - \mu_\circ(t) = \{\hat{\mu}_\circ(t) - \hat{\mu}_\circ(t; \bar{\beta}, \gamma_\circ)\} + \{\hat{\mu}_\circ(t; \bar{\beta}, \gamma_\circ) - \mu_\circ(t)\}. \quad (۶۲.۲)$$

همچنین مشابه (۲۰.۲)، داریم

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|S_\circ(t; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) - s_\circ(t)\| = o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \quad (۶۳.۲)$$

اولین جمله سمت راست رابطه (۶۲.۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_\circ(t; \bar{\beta}, \gamma_\circ) - \hat{\mu}_\circ(t) &= \int_0^t \frac{dN_\circ(u)}{S_\circ(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ)} - \int_0^t \frac{dN_\circ(u)}{\hat{S}_\circ(u)} \\ &= \int_0^t \frac{\hat{S}_\circ(u) - S_\circ(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ)}{S_\circ(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) \hat{S}_\circ(u)} dN_\circ(u) \\ &= \int_0^t \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(u; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ)}{S_\circ(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) \hat{S}_\circ(u)} dN_\circ(u). \end{aligned} \quad (۶۴.۲)$$

حال بسط تیلور $\phi_i(t; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ)$ را در $(\hat{\beta}(t), \hat{\gamma})$ می نویسیم:

$$\begin{aligned} \phi_i(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) &= \phi_i(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) \Big|_{\bar{\beta}_\circ(t)=\hat{\beta}(t), \gamma_\circ=\hat{\gamma}} \\ &\quad + (\phi_i(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) \mathbf{X}_i(u)^T, \phi_i(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) \mathbf{Z}_i(u)^T) \Big|_{\bar{\beta}_\circ(t)=\hat{\beta}(t), \gamma_\circ=\hat{\gamma}} \\ &\quad \times (\bar{\beta}_\circ(t) - \hat{\beta}(t), \gamma_\circ - \hat{\gamma})^T + O_p(\|\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t)\|^2) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_\circ\|^2) \\ &= \phi_i(u; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) + \phi_i(u; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) \mathbf{X}_i(u)^T (\bar{\beta}_\circ(t) - \hat{\beta}(t)) \\ &\quad + \phi_i(u; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) \mathbf{Z}_i(u)^T (\gamma_\circ - \hat{\gamma}) + O_p(\|\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t)\|^2) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_\circ\|^2) \\ &= \phi_i(u; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - \phi_i(u; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) \mathbf{X}_i(u)^T (\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t)) \end{aligned}$$

$$-\phi_i(u; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) \mathbf{Z}_i(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_0) + O_p(\|\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_0(t)\|^2) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_0\|^2). \quad (۶۵.۲)$$

اکنون به جای $\phi_i(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)$ در رابطه (۶۴.۲)، رابطه (۶۵.۲) را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_0(t; \bar{\beta}, \gamma_0) - \hat{\mu}_0(t) &= \int_0^t \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(u; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(u; \bar{\beta}, \hat{\gamma})}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0) \hat{S}_0(u)} dN_0(u) \\ &+ \int_0^t \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\phi}_i(u) \mathbf{X}_i(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_0(u))}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0) \hat{S}_0(u)} dN_0(u) \\ &+ \int_0^t \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\phi}_i(u) \mathbf{Z}_i(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_0)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0) \hat{S}_0(u)} dN_0(u) \\ &+ O_p(\|\hat{\beta} - \bar{\beta}_0\|^2) + O_p(\|\hat{\gamma} - \gamma_0\|^2). \quad (۶۶.۲) \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به رابطه (۸.۲)، (۱۱.۲) و (۶۰.۲)، داریم

$$\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_0(t) = O_p(h^{-1} \|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_0\|) = O_p(n^{-\frac{1}{4}}). \quad (۶۷.۲)$$

در نتیجه رابطه (۶۶.۲) را با استفاده از (۴۲.۲) و (۶۷.۲) می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_0(t; \bar{\beta}, \gamma_0) - \hat{\mu}_0(t) &= \int_0^t \frac{\hat{\mathbf{S}}_x(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_0(u)) + \hat{\mathbf{S}}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_0)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0) \hat{S}_0(u)} dN_0(u) \\ &+ O_p(n^{-\frac{1}{4}}) + O_p(n^{-1}) \\ &= \int_0^t \frac{\hat{\mathbf{E}}_x(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_0(u)) + \hat{\mathbf{E}}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_0)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} dN_0(u) \\ &+ O_p(n^{-1}). \end{aligned}$$

حال تساوی فوق را با توجه به روابط (۲۱.۲)، (۴۲.۲) و (۶۷.۲) می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_0(t; \bar{\beta}, \gamma_0) - \hat{\mu}_0(t) &= \int_0^t \frac{(\mathbf{e}_x(u)^T + o_p(n^{-\frac{1}{4}})) (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_0(u))}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} dN_0(u) \\ &+ \int_0^t \frac{(\mathbf{e}_z(u)^T + o_p(n^{-\frac{1}{4}})) (\hat{\gamma} - \gamma_0)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} dN_0(u) \\ &+ O_p(n^{-1}) \\ &= \int_0^t \frac{\mathbf{e}_x(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_0(u)) + \mathbf{e}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_0)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} dN_0(u) \\ &+ O_p(n^{-1}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) O_p(n^{-\frac{1}{4}}) + o_p(n^{-\frac{1}{4}}) O_p(n^{-\frac{1}{4}}) \\ &= \int_0^t \frac{\mathbf{e}_x(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_0(u)) + \mathbf{e}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_0)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} dN_0(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +O_p(n^{-1}) + o_p(n^{-1}) + o_p(n^{-\frac{r}{4}}) \\
 = & \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_\circ(u)) d\mu_\circ(u) + \int_0^t \mathbf{e}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_\circ) d\mu_\circ(u) \\
 & +O_p(n^{-\frac{r}{4}}) \\
 = & \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_\circ(u)) d\mu_\circ(u) + \int_0^t \mathbf{e}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_\circ) d\mu_\circ(u) \\
 & +o_p(n^{-\frac{r}{4}+\varepsilon}) \\
 = & \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_\circ(u)) d\mu_\circ(u) + \int_0^t \mathbf{e}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_\circ) d\mu_\circ(u) \\
 & +o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \tag{۶۸.۲}
 \end{aligned}$$

با انتخاب $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ، رابطه فوق برقرار است. همچنین با استفاده از تساوی اول رابطه (۷.۲)، جمله

اول آخرین تساوی رابطه (۶۸.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T \left[\int h^{-1} K \left(\frac{s-u}{h} \right) d\{\hat{\mathbf{B}}(s) - \mathbf{B}_\circ(s)\} \right] d\mu_\circ(u).$$

با تغییر ترتیب انتگرال‌ها و تساوی (۱۴.۱)، رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_0^t \left[\int \mathbf{e}_x(u)^T h^{-1} K \left(\frac{s-u}{h} \right) \lambda_\circ(u) du \right] d\{\hat{\mathbf{B}}(s) - \mathbf{B}_\circ(s)\}.$$

در نهایت با استفاده از رابطه (۸.۵) تیان و همکاران (۲۰۰۵)، می‌توان گفت

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_\circ(u)) d\mu_\circ(u) \\
 = & \int_0^t \mathbf{e}_x(s)^T \lambda_\circ(s) d\{\hat{\mathbf{B}}(s) - \mathbf{B}_\circ(s)\} + o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \tag{۶۹.۲}
 \end{aligned}$$

با استفاده از (۶۹.۲) تساوی (۶۸.۲) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_\circ(t; \bar{\beta}, \gamma_\circ) - \hat{\mu}_\circ(t) = & \int_0^t \mathbf{e}_x(s)^T \lambda_\circ(s) d\{\hat{\mathbf{B}}(s) - \mathbf{B}_\circ(s)\} + \int_0^t \mathbf{e}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_\circ) d\mu_\circ(u) \\
 & + o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \tag{۷۰.۲}
 \end{aligned}$$

جمله اول رابطه (۶۲.۲) مساوی با رابطه (۷۰.۲) شد. حال جمله دوم تساوی (۶۲.۲) را

می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\hat{\mu}_\circ(t; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) - \mu_\circ(t) = \int_0^t \frac{dN_\circ(u)}{S_\circ(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ)} - \mu_\circ(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{dN_i(u)}{S_\circ(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ)} - \mu_\circ(t).$$

با توجه به رابطه $dN_i(t) = dM_i(t) + \phi_i(t; \beta_0, \gamma_0) d\mu_0(t)$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} & \hat{\mu}_0(t; \bar{\beta}_0, \gamma_0) - \mu_0(t) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{[dN_i(u) - \phi_i(u; \beta_0, \gamma_0) d\mu_0(u)]}{S_0(u; \beta_0, \gamma_0)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{[\phi_i(u; \beta_0, \gamma_0) d\mu_0(u)]}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} \\ & \quad - \mu_0(t) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{dM_i(u)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{[\phi_i(u; \beta_0, \gamma_0) d\mu_0(u)]}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} - \mu_0(t) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{dM_i(u)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} + \int_0^t \left[\frac{S_0(u; \beta_0, \gamma_0)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} - 1 \right] d\mu_0(u). \end{aligned} \quad (71.2)$$

با بکارگیری بسط تیلور (۶۵.۲) و رابطه (۶۷.۲)، می‌توان نشان داد که جمله دوم تساوی آخر (۷۱.۲) برابر است با

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\frac{S_0(u; \beta_0, \gamma_0)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} - 1 \right] d\mu_0(t) \\ &= \int_0^t \left[\frac{S_0(u; \beta_0, \gamma_0) - S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} \right] d\mu_0(t) \\ &= \int_0^t \frac{S_0(u; \beta_0, \gamma_0) - S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} \Big|_{\bar{\beta}_0(u)=\beta_0(u)} d\mu_0(t) \\ & \quad - \int_0^t \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0) \mathbf{X}_i(t)^T \Big|_{\bar{\beta}_0(u)=\beta_0(u)} (\bar{\beta}_0(u) - \beta_0(u))}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} d\mu_0(u) \\ & \quad + \frac{1}{n} O_p(\|\bar{\beta}_0(u) - \beta_0(u)\|^2) \\ &= - \int_0^t \frac{\mathbf{S}_x(u; \beta_0, \gamma_0)^T (\bar{\beta}_0(u) - \beta_0(u))}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} d\mu_0(u) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (72.2)$$

در نتیجه با توجه به روابط (۱۴.۲)، (۶۳.۲)، (۶۷.۲) و قضیه ۱.۵.۱، تساوی آخر (۷۲.۲) معادل است با

$$\begin{aligned} & - \int_0^t \frac{\mathbf{S}_x(u; \beta_0, \gamma_0)^T (\bar{\beta}_0(u) - \beta_0(u))}{S_0(u; \bar{\beta}_0, \gamma_0)} d\mu_0(u) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \\ &= - \int_0^t \left(\frac{1}{s_0(u)} + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \right) (\mathbf{s}_x(u)^T + o_p(n^{-\frac{1}{2}})) (\bar{\beta}_0(u) - \beta_0(u)) d\mu_0(u) \\ & \quad + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \\ &= - \int_0^t \left(\frac{\mathbf{s}_x(u)^T}{s_0(u)} + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \right) (\bar{\beta}_0(u) - \beta_0(u)) d\mu_0(u) \\ & \quad + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{\circ}^t \frac{\mathbf{s}_x(u)^T (\bar{\beta}_{\circ}(u) - \beta_{\circ}(u))}{s_{\circ}(u)} d\mu_{\circ}(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) O(n^{-\frac{1}{\nu}}) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\
 &= - \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T (\bar{\beta}_{\circ}(u) - \beta_{\circ}(u)) d\mu_{\circ}(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\
 &= - \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T \left[\int h^{-1} K\left(\frac{s-u}{h}\right) d\mathbf{B}_{\circ}(s) - \beta_{\circ}(u) \right] d\mu_{\circ}(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \quad (۷۳.۲)
 \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $\frac{s-u}{h} = v$ ، شرط (C۴) و تساوی زیر

$$\beta_{\circ}(u) = \beta_{\circ}(u) \int K(v) dv = \int \beta_{\circ}(u) K(v) dv,$$

معادله (۷۳.۲) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 &- \int_{\circ}^t \frac{\mathbf{S}_x(u; \beta_{\circ}, \gamma_{\circ})^T (\bar{\beta}_{\circ}(u) - \beta_{\circ}(u))}{S_{\circ}(u; \bar{\beta}_{\circ}, \gamma_{\circ})} d\mu_{\circ}(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\
 &= - \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T \left[\int K(v) \beta_{\circ}(vh + u) dv - \int \beta_{\circ}(u) K(v) dv \right] d\mu_{\circ}(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \quad (۷۴.۲)
 \end{aligned}$$

حال با استفاده از تساوی (۳.۲)، رابطه (۷۴.۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 &- \int_{\circ}^t \frac{\mathbf{S}_x(u; \beta_{\circ}, \gamma_{\circ})^T (\bar{\beta}_{\circ}(u) - \beta_{\circ}(u))}{S_{\circ}(u; \bar{\beta}_{\circ}, \gamma_{\circ})} d\mu_{\circ}(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\
 &= - \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T \left[\int K(v) (\beta_{\circ}(u) + hv\beta'_{\circ}(u) + \frac{h^{\nu} v^{\nu}}{\nu} \beta''_{\circ}(u) + O(1) - \beta_{\circ}(u)) dv \right] d\mu_{\circ}(u) \\
 &\quad + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\
 &= -h \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T \beta'_{\circ}(u) \left[\int v K(v) dv \right] d\mu_{\circ}(u) \\
 &\quad - \frac{h^{\nu}}{\nu} \int \mathbf{e}_x(u)^T \beta''_{\circ}(u) \left[\int v^{\nu} K(v) dv \right] d\mu_{\circ}(u) \\
 &\quad + O(1) \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T \left[\int K(v) dv \right] d\mu_{\circ}(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\
 &= -h \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T \beta'_{\circ}(u) \left[\int v K(v) dv \right] d\mu_{\circ}(u) \\
 &\quad - \frac{h^{\nu}}{\nu} \int \mathbf{e}_x(u)^T \beta''_{\circ}(u) \left[\int v^{\nu} K(v) dv \right] d\mu_{\circ}(u) \\
 &\quad + O(1) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}).
 \end{aligned}$$

با توجه به شرط (C۴)، $\int v K(v) dv$ برابر صفر است و در نتیجه تساوی زیر را داریم:

$$- \int_{\circ}^t \frac{\mathbf{S}_x(u; \beta_{\circ}, \gamma_{\circ})^T (\bar{\beta}_{\circ}(u) - \beta_{\circ}(u))}{S_{\circ}(u; \bar{\beta}_{\circ}, \gamma_{\circ})} d\mu_{\circ}(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}})$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{h^\nu}{\nu} \int \mathbf{e}_x(u)^T \beta''_\circ(u) \left[\int v^\nu K(v) dv \right] d\mu_\circ(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\
 &= -\frac{1}{\nu} \nu h^\nu \int_\circ^t \mathbf{e}_x(u)^T \beta''_\circ(u) d\mu_\circ(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \tag{۷۵.۲}
 \end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری (۷۵.۲) در (۷۲.۲) داریم

$$\int_\circ^t \left[\frac{S_\circ(u; \beta_\circ, \gamma_\circ)}{S_\circ(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ)} - 1 \right] d\mu_\circ(t) = -\frac{1}{\nu} \nu h^\nu \int_\circ^t \mathbf{e}_x(u)^T \beta''_\circ(u) d\mu_\circ(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \tag{۷۶.۲}$$

در نتیجه با بکاربردن (۷۶.۲) در (۷۱.۲) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
 &\hat{\mu}_\circ(t; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) - \mu_\circ(t) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_\circ^t \frac{dM_i(u)}{S_\circ(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ)} - \frac{1}{\nu} \nu h^\nu \int_\circ^t \mathbf{e}_x(u)^T \beta''_\circ(u) d\mu_\circ(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \tag{۷۷.۲}
 \end{aligned}$$

در نهایت با استفاده از (۶۳.۲) و با جایگذاری (۷۰.۲) و (۷۷.۲) در رابطه (۶۲.۲) داریم

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_\circ(t) - \mu_\circ(t) &= \{ \hat{\mu}_\circ(t) - \hat{\mu}_\circ(t; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) \} + \{ \hat{\mu}_\circ(t; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ) - \mu_\circ(t) \} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_\circ^t \frac{dM_i(u)}{S_\circ(u; \bar{\beta}_\circ, \gamma_\circ)} - \frac{1}{\nu} \nu h^\nu \int_\circ^t \mathbf{e}_x(u)^T \beta''_\circ(u) d\mu_\circ(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\
 &\quad - \int_\circ^t \mathbf{e}_x(u)^T \lambda_\circ(u) d \{ \hat{\mathbf{B}}(u) - \mathbf{B}_\circ(u) \} - \int_\circ^t \mathbf{e}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_\circ) d\mu_\circ(u) \\
 &\quad + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_\circ^t \left(\left(\frac{1}{s_\circ(u)} + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}) \right) dM_i(u) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\nu} \nu h^\nu \int_\circ^t \mathbf{e}_x(u)^T \beta''_\circ(u) d\mu_\circ(u) \\
 &\quad - \int_\circ^t \mathbf{e}_x(u)^T \lambda_\circ(u) d \{ \hat{\mathbf{B}}(u) - \mathbf{B}_\circ(u) \} - \int_\circ^t \mathbf{e}_z(u)^T d\mu_\circ(u) (\hat{\gamma} - \gamma_\circ) \\
 &\quad + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \tag{۷۸.۲}
 \end{aligned}$$

با قرار دادن (۶۱.۲) و (۴۳.۲) در (۷۸.۲) داریم

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_\circ(t) - \mu_\circ(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_\circ^t \frac{dM_i(u)}{s_\circ(u)} + o_p(n^{-\frac{\hat{\alpha}}{\nu}}) - \frac{1}{\nu} \nu h^\nu \int_\circ^t \mathbf{e}_x(u)^T \beta''_\circ(u) d\mu_\circ(u) \\
 &\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_\circ^t \mathbf{e}_x(u)^T \lambda_\circ(u) d\eta_i(t) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}})
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbf{e}_z(u)^T d\mu_o(u) \boldsymbol{\xi}_i(\tau) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) + o_p(n^{-\frac{1}{2}}).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2}} \left\{ \hat{\mu}_o(t) - \mu_o(t) + \frac{1}{\sqrt{p}} \nu_1 h^{\frac{1}{2}} \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T \boldsymbol{\beta}_o''(u) d\mu_o(u) \right\} \\ = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{dM_i(u)}{s_o(u)} - n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T \lambda_o(u) d\boldsymbol{\eta}_i(t) \\ - n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbf{e}_z(u)^T d\mu_o(u) \boldsymbol{\xi}_i(\tau) + o_p(1). \end{aligned} \quad (79.2)$$

قرار می‌دهیم

$$\varphi_i(t) = \int_0^t \frac{dM_i(u)}{s_o(u)} - \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T \lambda_o(u) d\boldsymbol{\eta}_i(t) - \int_0^t \mathbf{e}_z(u)^T d\mu_o(u) \boldsymbol{\xi}_i(\tau).$$

بنابراین

$$n^{\frac{1}{2}} \left\{ \hat{\mu}_o(t) - \mu_o(t) + \frac{1}{\sqrt{p}} \nu_1 h^{\frac{1}{2}} \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T \boldsymbol{\beta}_o''(u) d\mu_o(u) \right\} = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) + o_p(1).$$

در نهایت با استفاده از قضیه حد مرکزی، $n^{\frac{1}{2}} \left\{ \hat{\mu}_o(t) - \mu_o(t) + \frac{1}{\sqrt{p}} \nu_1 h^{\frac{1}{2}} \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T \boldsymbol{\beta}_o''(u) d\mu_o(u) \right\}$ به یک فرآیند نرمال با میانگین صفر و تابع کوواریانس $\Gamma_u(s, t)$ همگرا است که با استفاده از قانون اعداد بزرگ، $\hat{\Gamma}_u(s, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varphi}_i(s) \hat{\varphi}_i(t)$ برآوردگری سازگار برای تابع کوواریانس است. \square

نتیجه ۱. با توجه به قسمت ت قضیه ۲.۱.۲، $\hat{\mu}_o(\cdot)$ برآوردگری اریب برای $\mu_o(\cdot)$ است و اریبی آن

برابر است با

$$b_{\mu_o}(t) = \frac{1}{\sqrt{p}} \nu_1 h^{\frac{1}{2}} \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T \boldsymbol{\beta}_o''(u) d\mu_o(u).$$

داشتن برآوردگری سازگار برای تابع میانگین $\mu_o(\cdot)$ ، در بحث مورد نظر ما مهم می‌باشد. با توجه به نتیجه مهم ۱، اگرچه برآوردگر $\hat{\mu}_o(\cdot)$ برآوردگری اریب برای $\mu_o(\cdot)$ است، اما از آنجا که $h = O(n^{-\alpha})$ و با توجه به تعاریف ν_1 و $\mathbf{e}_x(\cdot)$ و همچنین شرط $(C1)$ ، با افزایش حجم نمونه، این اریبی به صفر میل می‌کند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $\hat{\mu}_o(\cdot)$ برآوردگری سازگار برای $\mu_o(\cdot)$ می‌باشد.

۲.۲ آزمون وابستگی به زمان ضرایب رگرسیونی

در عمل، بسیار مهم است که تشخیص دهیم کدام اثرات رگرسیونی وابسته به زمان و کدامیک مستقل از زمان هستند. با این‌گونه دسته‌بندی، می‌توان به یک مدل مناسب‌تر و معقول‌تر برای تحلیل داده‌ها دست یافت. برای این منظور، وابسته به زمان بودن ضریب $\beta_{\circ j}(t)$ را در مدل (۴.۱) مورد آزمون قرار می‌دهیم. بنابراین می‌توانیم فرضیه $H_{\circ} : \beta_{\circ j}(t) \equiv \beta_{\circ j}$ را آزمون کنیم به طوری که $\beta_{\circ j}(t)$ ، ضریب رگرسیونی زامین متغیر تبیینی است. تعریف می‌کنیم

$$V(t) = B_{\circ j}(t) - B_{\circ j}(\tau)t/\tau,$$

و

$$\hat{V}(t) = \hat{B}_j(t) - \hat{B}_j(\tau)t/\tau,$$

که در آن‌ها $B_{\circ j}(t)$ و $\hat{B}_j(t)$ به ترتیب زامین عضوهای $\mathbf{B}_{\circ}(t)$ و $\hat{\mathbf{B}}(t)$ هستند. تحت فرضیه H_{\circ} ، داریم

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{\circ}^t \beta_{\circ j}(u) du - \frac{t}{\tau} \int_{\circ}^{\tau} \beta_{\circ j}(u) du \\ &= \beta_{\circ j}(t - \circ) - \frac{t}{\tau} \beta_{\circ j}(\tau - \circ) \\ &= t\beta_{\circ j} - t\beta_{\circ j} = \circ. \end{aligned}$$

پس با انتخاب توابعی به صورت $V(t)$ و $\hat{V}(t)$ ، تحت فرضیه H_{\circ} ، $V(t)$ صفر می‌شود. بنابراین اگر تحت این فرضیه، تابع $\hat{V}(t)$ به تابع $V(t)$ ، یعنی صفر، نزدیک باشد، حاکی از آن است که زامین عضو $\hat{\beta}(t)$ ، مستقل از زمان است. از این رو، می‌توان از آزمون‌هایی که برای نیکویی برازش توزیع‌ها به کار می‌روند، بهره برد. دو آماره آزمونی که می‌توان معرفی کرد، عبارتند از: آماره آزمون کلموگروف-اسمیرنوف^۱ (بهبودیان، ۱۳۸۷) و آماره آزمون کرامر-ون میسز^۲ (استفنز، ۱۹۸۶).

آماره آزمون کلموگروف-اسمیرنوف برای تابع توزیع تجمعی $F(x)$ به صورت

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)|,$$

^۱Kolmogorov-Smirnov

^۲Cramer-von Mises

است به طوری که $F_n(x)$ ، تابع توزیع تجربی برای n مشاهده می‌باشد. آماره آزمون کرامر-ون میسر نیز به صورت

$$w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 dF(x),$$

تعریف می‌شود. این دو آزمون برای مقایسه توابع توزیع ساخته شده‌اند و از آنجایی که $V(t)$ و $\hat{V}(t)$ توابع توزیع نمی‌باشند، بایستی از رهیافتی مشابه این دو آزمون استفاده کنیم. بنابراین با استفاده از $n^{-1/2}(\hat{V}(t) - V(t))$ ، آماره آزمونی از نوع کلموگروف-اسمیرنوف \mathcal{F}_1 و از نوع کرامر-ون میسر \mathcal{F}_2 را تحت فرضیه H_0 به صورت زیر می‌سازیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \sup_{0 \leq t \leq \tau} |n^{-1/2} \hat{V}(t)|, \\ \mathcal{F}_2 &= \int_0^\tau n \hat{V}(t)^2 dt. \end{aligned}$$

با توجه به قسمت پ قضیه ۲.۱.۲، می‌توان گفت

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \{\hat{V}(t) - V(t)\} &= n^{-1/2} \left\{ \hat{B}_j(t) - \hat{B}_j(\tau) \frac{t}{\tau} - \left(B_{\circ j}(t) - B_{\circ j}(\tau) \frac{t}{\tau} \right) \right\} \\ &= n^{-1/2} \left\{ \hat{B}_j(t) - B_{\circ j}(t) - \left(\hat{B}_j(\tau) \frac{t}{\tau} - B_{\circ j}(\tau) \frac{t}{\tau} \right) \right\} \\ &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \eta_{ij}(t) - n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \eta_{ij}(\tau) \frac{t}{\tau}, \end{aligned}$$

که در نتیجه معادل با فرآیند نرمال با میانگین صفر زیر است:

$$\hat{W}(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{\eta}_{ij}(t) - \hat{\eta}_{ij}(\tau) \frac{t}{\tau} \right\},$$

که در آن $\hat{\eta}_{ij}(t)$ ، j امین عضو $\hat{\eta}_i$ است. ساختار تابع کوواریانس $\hat{W}(t)$ پیچیده و استفاده از آن مشکل می‌باشد (سان و همکاران، ۲۰۱۱). بدین منظور، لین و همکاران (۲۰۰۰) نشان دادند که توزیع فرآیند $\hat{W}(t)$ ، می‌تواند با فرآیند نرمال با میانگین صفر زیر برآورد شود:

$$\tilde{W}(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{\eta}_{ij}(t) - \hat{\eta}_{ij}(\tau) \frac{t}{\tau} \right\} G_i,$$

به طوری که (G_1, \dots, G_n) متغیرهای نرمال استاندارد مستقل می‌باشند. بنابراین توزیع‌های \mathcal{F}_1 و

\mathcal{F}_2 ، به ترتیب با $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \sup_{0 \leq t \leq \tau} |\tilde{W}(t)|$ و $\tilde{\mathcal{F}}_2 = \int_0^\tau \tilde{W}(t)^2 dt$ تقریب زده می‌شوند.

بر مبنای p -مقدار، می‌توان وابسته به زمان بودن ضرایب را بررسی کرد.

۳

فصل

ارزیابی عملکرد برآوردگرها

در این فصل با اجرای یک مطالعه شبیه‌سازی جامع، عملکرد برآوردگرهای ارائه‌شده در فصل اول را در کوچک‌نمونه، در قالب دو مثال، بررسی کردیم. در این دو مثال، شبیه‌سازی‌ها را با مدل‌هایی مشابه مدل‌های سان و همکاران (۲۰۱۱) اجرا کردیم. تمام شبیه‌سازی‌ها را در این پایان‌نامه، در محیط نرم افزار R-3.0.1 (۲۰۱۳) انجام دادیم.

۱.۳ مطالعه شبیه‌سازی

برای مطالعه شبیه‌سازی، دو مدل مختلف را در نظر گرفتیم که در ادامه به توضیح هر کدام می‌پردازیم.

۱.۱.۳ مثال اول

در این مثال، به ازای $i = 1, \dots, n$ ، زمان‌های رخداد از یک فرآیند پواسن با مدل نرخ حاشیه‌ای

$$E\{dN_i^*(t)|X_i(t), Z_i(t)\} = \exp\{-\lambda_i + \lambda_i \cos(2t - 1/\sqrt{5})X_i(t) + \lambda_i Z_i(t)\} dt, \quad (1.3)$$

تولید شدند، به طوری که $X_i \sim N(0, 1)$ و $Z_i \sim \text{ber}(\lambda_i/5)$. زمان‌های سانسور C_i از توزیع یکنواخت $U(2, 5)$ تولید شدند و به طور متوسط تقریباً ۳ پیشامد بازگشتی را برای افراد داریم. برای انجام شبیه‌سازی، سه حجم نمونه ($n = 50, 100, 200$) را در نظر گرفتیم و با استفاده از چندین پهنای نوار، همواری‌های متفاوتی را بررسی کردیم. جداول ۱.۳ و ۲.۳ به ترتیب نتایج شبیه‌سازی برای برآورد ضریب رگرسیونی تجمعی وابسته به زمان، $B(\cdot)$ ، و برآورد پارامتر رگرسیونی مستقل از

زمان، γ ، در مدل (۱.۳) به ازای دو هسته نرمال و اپانچنیکوف و با در نظر گرفتن $\tau = ۴/۵$ (زمان پایانی) را نشان می‌دهند.

جدول ۱.۳، مقادیر اریبی جمع‌بسته توان دوم^۱ و میانگین جمع‌بسته توان دوم خطاها^۲ را برای برآورد ضریب رگرسیونی تجمعی $B_0(\cdot)$ در مدل (۱.۳) با دو هسته نرمال و اپانچنیکوف نشان می‌دهد. این دو مقدار به صورت‌های

$$ISB = \int_0^t (E(\hat{\mathbf{B}}(s)) - \mathbf{B}_0(s))^2 ds,$$

و

$$MISE = E\left(\int_0^t (\hat{\mathbf{B}}(s) - \mathbf{B}_0(s))^2 ds\right),$$

محاسبه می‌شوند. مقادیر کوچک ISB و $MISE$ ، نشان می‌دهند که برآوردگر پیشنهادی بسیار خوب عمل می‌کند و تقریباً برآوردی نااریب از ضریب رگرسیونی تجمعی ارائه می‌دهد. همچنین با افزایش حجم نمونه عملکرد برآوردگر پیشنهادی بهتر هم شده است. جدول ۲.۳، شامل اریبی ($Bias$) (میانگین نمونه‌ای برآوردهای $\hat{\gamma}$ منهای مقدار واقعی)، میانگین نمونه‌ای خطاهای استاندارد برآورد شده $\hat{\gamma}$ (SEE)، خطای استاندارد نمونه‌ای $\hat{\gamma}$ (SSE) و نرخ پوشش تجربی با سطح ۹۵ درصد برای γ (CP) می‌باشد که بر مبنای ۵۰۰ مجموعه داده شبیه‌سازی شده محاسبه شده‌اند. مقادیر اریبی حاکی از نااریبی برآوردگر هستند. مقادیر نرخ پوشش تجربی با افزایش حجم نمونه از ۵۰ تا ۲۰۰ به مقدار ۰/۹۵ نزدیک‌تر شده‌اند. همچنین خطای برآوردگر کمتر شده که این نتایج تاییدی بر ویژگی‌های مجانبی برآوردگر (نرمال مجانبی و سازگاری) می‌باشد. با مقایسه نتایج مربوط به دو هسته، می‌توان نتیجه گرفت که عملکرد آن‌ها تقریباً یکسان است. مشاهده می‌شود که روش برآورد پیشنهاد شده به ازای حجم‌های نمونه متفاوت و همچنین نوارهایی با پهناهای متفاوت بسیار خوب عمل کرده است.

^۱Integrated Squared Bias

^۲Mean Integrated Squared Error

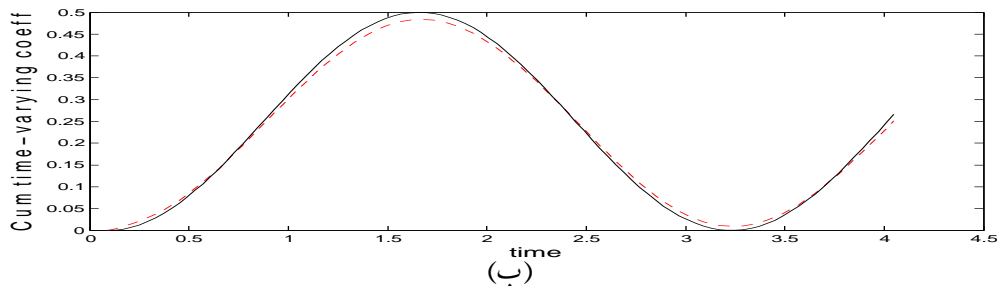
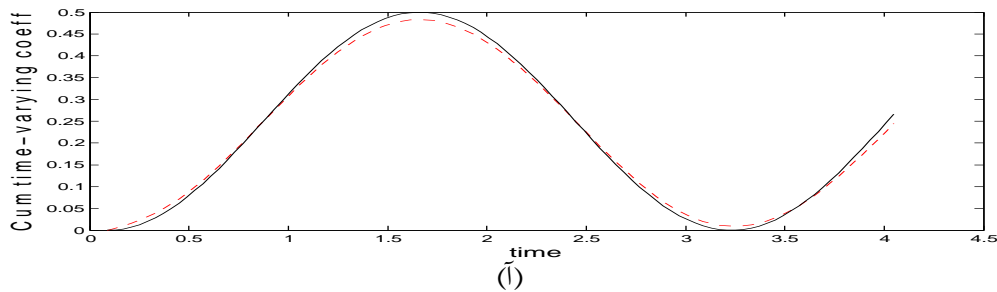
جدول ۱.۳: نتایج شبیه‌سازی برای برآورد ضریب رگرسیونی تجمعی وابسته به زمان $\hat{B}(\cdot)$ در مدل (۱.۳) با دو هسته نرمال و اپانچنیکوف

n	h	هسته اپانچنیکوف		هسته نرمال	
		ISB	$MISE$	ISB	$MISE$
۵۰	۰٫۴	۰٫۰۰۱۱	۰٫۲۶۳۷	۰٫۰۰۰۵	۰٫۲۴۰۸
	۰٫۵	۰٫۰۰۱۵	۰٫۲۴۴۶	۰٫۰۰۱۶	۰٫۲۱۹۸
	۰٫۶	۰٫۰۰۳۲	۰٫۲۵۵۴	۰٫۰۰۳۸	۰٫۲۰۶۲
	۰٫۷	۰٫۰۰۳۱	۰٫۲۲۹۲	۰٫۰۰۶۲	۰٫۲۵۳۸
۱۰۰	۰٫۴	۰٫۰۰۰۳	۰٫۱۰۸۴	۰٫۰۰۰۶	۰٫۱۰۹۲
	۰٫۵	۰٫۰۰۱۰	۰٫۰۹۶۵	۰٫۰۰۱۸	۰٫۱۲۷۵
	۰٫۶	۰٫۰۰۱۳	۰٫۱۰۱۹	۰٫۰۰۳۱	۰٫۱۱۵۶
	۰٫۷	۰٫۰۰۲۷	۰٫۰۹۹۸	۰٫۰۰۵۸	۰٫۱۱۴۲
۲۰۰	۰٫۴	۰٫۰۰۱۶	۰٫۰۵۸۹	۰٫۰۰۰۹	۰٫۰۵۰۹
	۰٫۵	۰٫۰۰۰۸	۰٫۰۵۰۵	۰٫۰۰۱۵	۰٫۰۴۹۶
	۰٫۶	۰٫۰۰۲۷	۰٫۰۵۲۹	۰٫۰۰۳۰	۰٫۰۵۴۶
	۰٫۷	۰٫۰۰۲۶	۰٫۰۴۹۳	۰٫۰۰۵۵	۰٫۰۵۵۹

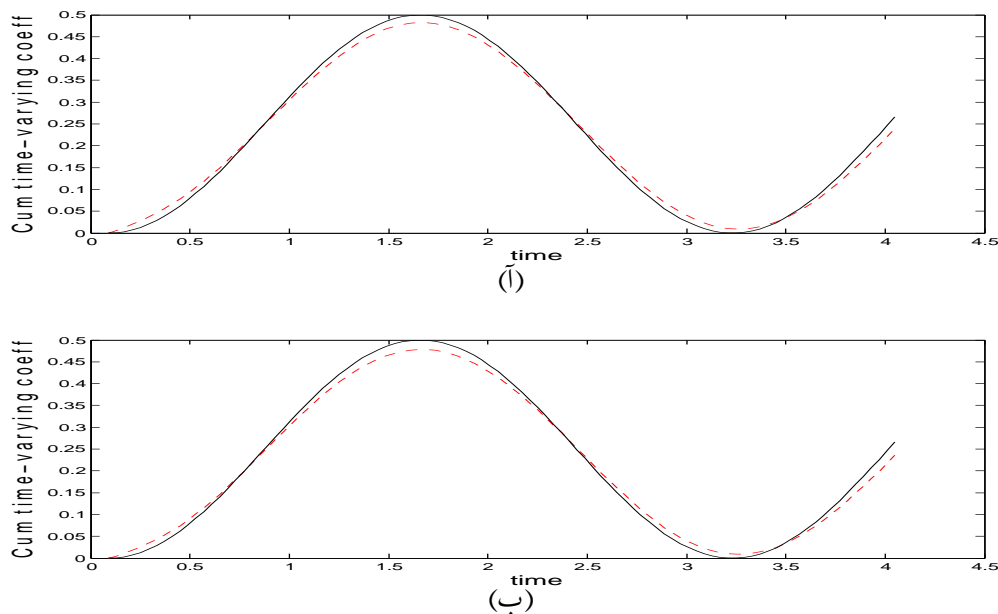
جدول ۲.۳: خلاصه نتایج شبیه‌سازی برای $\gamma = 0.5\%$ با دو هسته نرمال و اپانچیکوف

n	h	هسته اپانچیکوف				هسته نرمال			
		Bias	SEE	SSE	CP	Bias	SEE	SSE	CP
۵۰	۰/۴	-۰/۰۰۰۱۲	۰/۱۶۹۲	۰/۱۸۵۱	۰/۹۱۵	۰/۰۱۰۶	۰/۱۶۷۷	۰/۱۷۴۱	۰/۹۳۷
	۰/۵	۰/۰۰۰۰۵	۰/۱۶۷۳	۰/۱۸۲۵	۰/۹۵۵	۰/۰۰۰۲۳	۰/۱۶۸۰	۰/۱۷۲۵	۰/۹۵۰
	۰/۶	۰/۰۰۰۲۲	۰/۱۷۲۸	۰/۱۸۱۶	۰/۹۴۵	-۰/۰۰۱۴۳	۰/۱۶۸۷	۰/۱۸۰۲	۰/۹۲۳
	۰/۷	۰/۰۰۱۶۷	۰/۱۶۷۶	۰/۱۶۸۰	۰/۹۴۰	۰/۰۰۰۷۰	۰/۱۶۸۳	۰/۱۸۵۱	۰/۹۱۰
۱۰۰	۰/۴	۰/۰۰۰۵۸	۰/۱۱۹۵	۰/۱۲۲۱	۰/۹۵۷	۰/۰۰۰۸۸	۰/۱۲۰۳	۰/۱۱۷۹	۰/۹۴۰
	۰/۵	-۰/۰۰۰۲۴	۰/۱۱۹۵	۰/۱۲۲۳	۰/۹۶۰	۰/۰۰۱۲۹	۰/۱۲۰۲	۰/۱۲۰۶	۰/۹۳۷
	۰/۶	۰/۰۰۰۳۴	۰/۱۱۹۱	۰/۱۲۱۸	۰/۹۴۳	۰/۰۰۰۴۵	۰/۱۱۹۲	۰/۱۲۵۴	۰/۹۴۳
	۰/۷	-۰/۰۰۰۰۷	۰/۱۱۹۷	۰/۱۱۸۸	۰/۹۴۷	۰/۰۰۰۷۵	۰/۱۱۸۶	۰/۱۳۵۸	۰/۹۰۳
۲۰۰	۰/۴	۰/۰۰۰۸۹	۰/۰۸۴۵	۰/۰۸۳۵	۰/۹۶۰	-۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۸۴۷	۰/۰۸۷۴	۰/۹۴۴
	۰/۵	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۸۴۵	۰/۰۸۲۸	۰/۹۶۳	۰/۰۰۰۱۸	۰/۰۸۴۷	۰/۰۸۴۵	۰/۹۵۳
	۰/۶	۰/۰۰۰۲۹	۰/۰۸۵۸	۰/۰۸۴۳	۰/۹۶۵	-۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۸۴۷	۰/۰۸۴۰	۰/۹۵۰
	۰/۷	-۰/۰۰۰۳۹	۰/۰۸۴۹	۰/۰۸۶۶	۰/۹۴۳	-۰/۰۰۰۴۰	۰/۰۸۴۸	۰/۰۸۰۳	۰/۹۷۳

برای بررسی عملکرد نقطه‌ای برآوردگر $B_0(t)$ ، $\hat{B}(t)$ و خطاهای استاندارد مجانبی، برآوردها و نرخ‌های پوشش تجربی را برای $\hat{B}(t)$ در ۱۰۰ نقطه $t_k = 0.05 + 0.04k$ ، $k = 1, \dots, 100$ محاسبه کردیم. نمودارهای برآوردها و نرخ‌های پوشش تجربی برای دو حجم نمونه $n = 100, 200$ با استفاده از هسته اپانچنیکوف به ترتیب در شکل‌های ۱.۳ و ۳.۳ و با استفاده از هسته نرمال به ترتیب در شکل‌های ۲.۳ و ۴.۳ نمایش داده شده‌اند. در شکل‌های ۱.۳ و ۲.۳، در نمودارهای (آ) حجم نمونه $n = 100$ و پهنای نوار $h = 0.4$ ، و در نمودارهای (ب) $n = 200$ و $h = 0.4$ در نظر گرفته شده‌اند. منحنی توپر، نشان‌دهنده تابع رگرسیونی تجمعی واقعی $B_0(t) = \int_0^t 0.5 \cos(2s - 1.75)s ds$ و منحنی خط‌چین، میانگین برآوردهای $\hat{B}(t)$ در ۵۰۰ تکرار است. با توجه به این شکل‌ها، با افزایش حجم نمونه، نمودارهای برآورد به نمودار واقعی نزدیک‌تر می‌شوند که حاکی از سازگاری برآوردگر است. با مقایسه برآوردهای حاصل از دو هسته، دیده می‌شود که هسته نرمال در مرزها به خوبی هسته اپانچنیکوف عمل نمی‌کند و در این نواحی اریبی بیشتری نسبت به هسته اپانچنیکوف دارد. در شکل‌های ۳.۳ و ۴.۳ نیز نمودارهای (آ) برای حجم نمونه $n = 100$ و پهنای نوار



شکل ۱.۳: نمودار ضرایب رگرسیونی تجمعی در مدل (۱.۳) با هسته اپانچنیکوف با پهنای نوار $h = 0.4$: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$

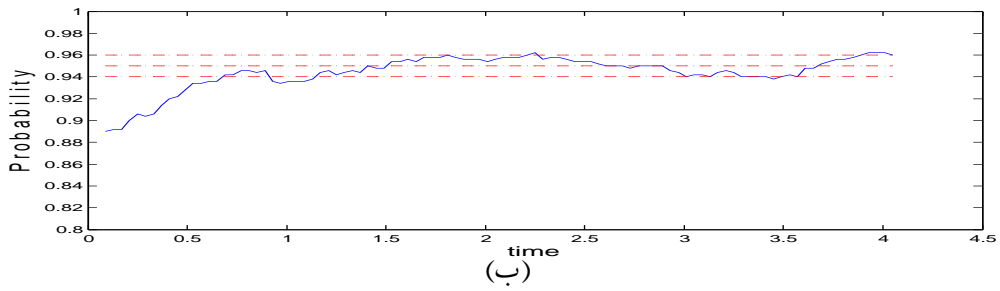
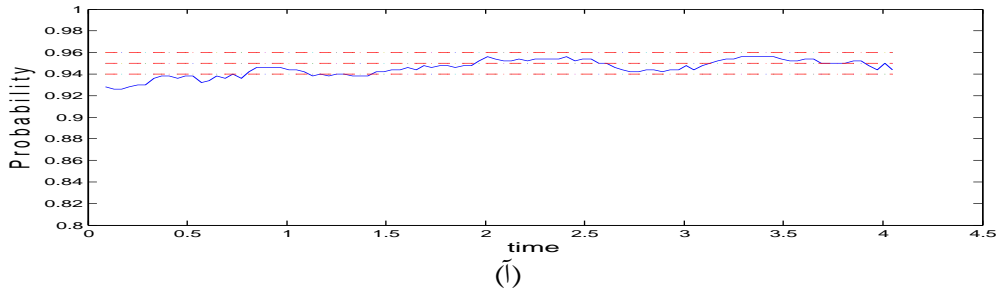


شکل ۲.۳: نمودار ضرایب رگرسیونی تجمعی در مدل (۱.۳) با هسته نرمال با پهنای نوار $h = 0.4$:
 (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$

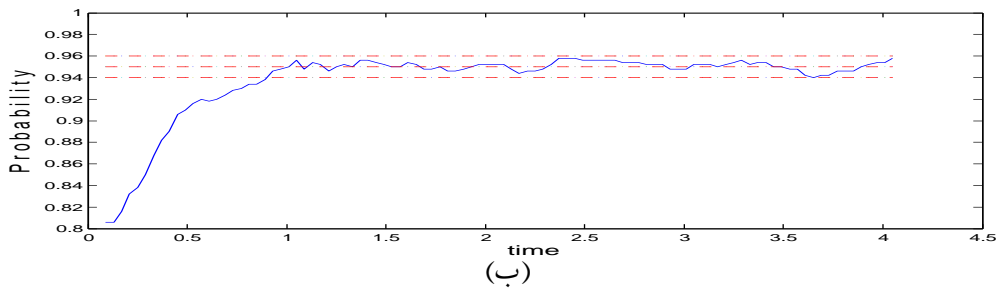
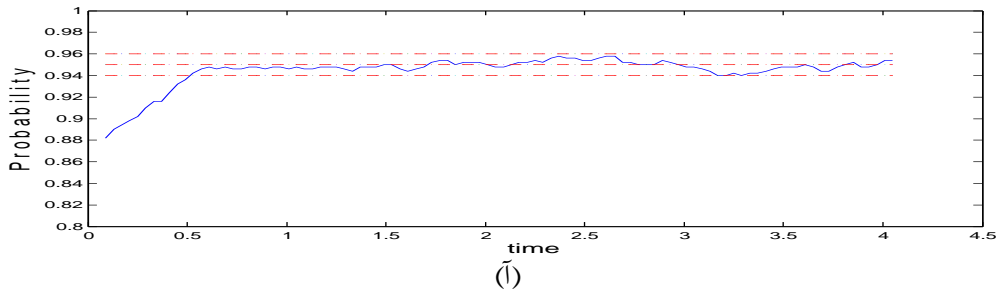
$h = 0.4$ و نمودارهای (ب) برای $n = 200$ و $h = 0.4$ رسم شده‌اند. با توجه به شکل‌ها، مقادیر نرخ پوشش تجربی در نوار اطمینان واقع شده‌اند و به مقدار اسمی 0.95 نزدیک هستند. همچنین خطاهای استاندارد مجانبی توصیف بسیار خوبی از تغییرات $\hat{B}(t)$ در سطح 0.95 ارائه می‌دهند که نشان می‌دهند، روش برآورد می‌تواند قابل اعتماد باشد. با مقایسه نتایج حاصل از هسته اپانچنیکوف و هسته نرمال، نقاط بیشتری با استفاده از هسته اپانچنیکوف نسبت به هسته نرمال در نوار اطمینان قرار گرفته‌اند.

با توجه به قضیه حد مرکزی، توزیع مجانبی برآوردگرهای $\hat{\gamma}$ و $\hat{B}(\cdot)$ نرمال می‌باشند. برای بررسی نرمال بودن این برآوردگرها، نمودارهای چگالی و چندک-چندک^۳ مقادیر استاندارد شده آن‌ها را با استفاده از حجم نمونه 200 ، پهنای نوار 0.4 و دو هسته اپانچنیکوف و نرمال رسم کردیم. شکل ۵.۳، چگالی‌های ضریب رگرسیونی تجمعی وابسته به زمان استاندارد شده را در 4 نقطه زمانی متفاوت نشان می‌دهد. نمودارهای الف، ب، ج و د، به ترتیب چگالی‌های حاصل از 500 تکرار

^۳quantile-quantile

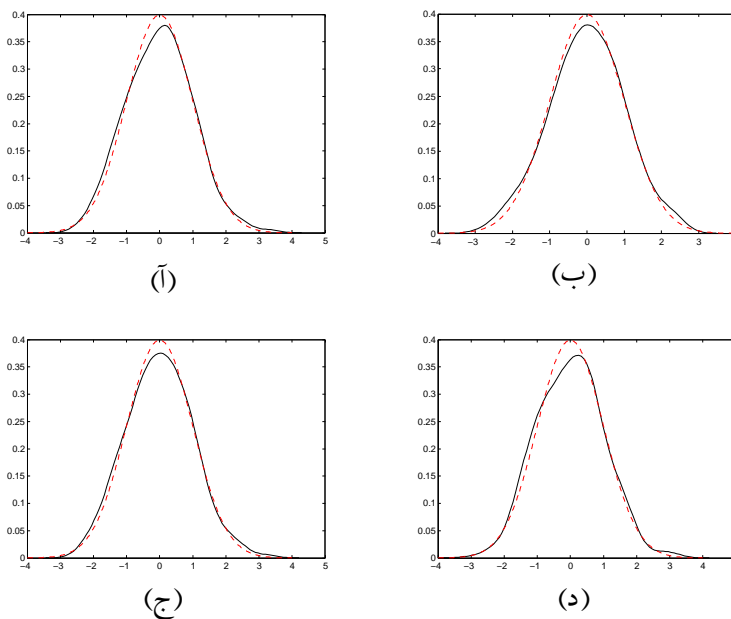


شکل ۳.۳: نرخ پوشش برای برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی در مدل (۱.۳) با هسته اپانچنیکوف با پهنای نوار $h = 0.4$: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$



شکل ۴.۳: نرخ پوشش برای برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی در مدل (۱.۳) با هسته نرمال با پهنای نوار $h = 0.4$: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$

برآورد $\hat{B}(t)$ ، در زمان‌های ۸، ۴۰، ۸۰ و ۱۰۰ با استفاده از هسته اپانچنیکوف می‌باشند. در این شکل نمودار خط‌چین، چگالی نرمال استاندارد است و با توجه به منحنی‌های رسم شده، توزیع‌های برآوردگرهای استاندارد شده $\hat{\gamma}$ و $\hat{B}(t)$ به توزیع نرمال استاندارد خیلی نزدیک می‌باشند که نرمال مجانبی بودن توزیع برآوردگرها را نشان می‌دهد. این نتیجه در نمودارهای چندک-چندک، شکل ۷.۳، نیز مشهود می‌باشد. برای برآوردگر استاندارد شده $\hat{\gamma}$ نیز نتیجه مشابهی برقرار است که در



شکل ۵.۳: نمودارهای چگالی برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی استاندارد شده با هسته اپانچنیکوف در مدل (۱.۳) در زمان‌های: (ا) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتم (د) صدم

شکل ۶.۳ نشان داده شده است. با استفاده از هسته نرمال به نتایج مشابهی دست یافتیم که در شکل‌های ۸.۳ تا ۱۰.۳ گزارش شده‌اند.

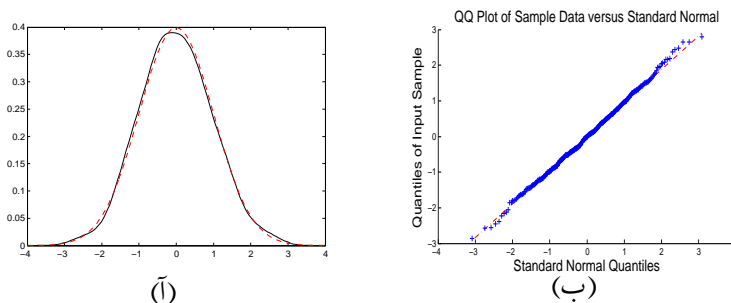
۲.۱.۳ مثال دوم

اکنون عملکرد مدل پیشنهادی را در حالتی بررسی می‌کنیم که تعداد پارامترهای وابسته به زمان افزایش یافته و ترکیبی از شکل‌های سینوسی و غیرسینوسی است. برای این منظور، مدل زیر را در

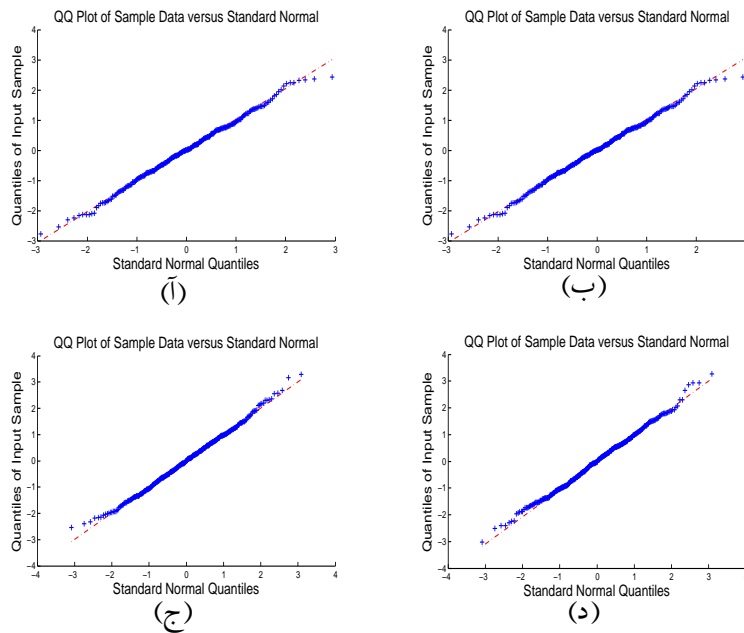
نظر گرفتیم:

$$E\{dN_i^*(t)|\mathbf{X}_i(t), Z_i\} = \exp\{-\sigma/\delta + \sigma/\delta \cos(2t - 1/\sqrt{5})X_{i1}(t) + \sigma/\gamma(\sqrt{t} - 1)X_{i2}(t) + \sigma/\delta Z_i(t)\}dt. \quad (2.3)$$

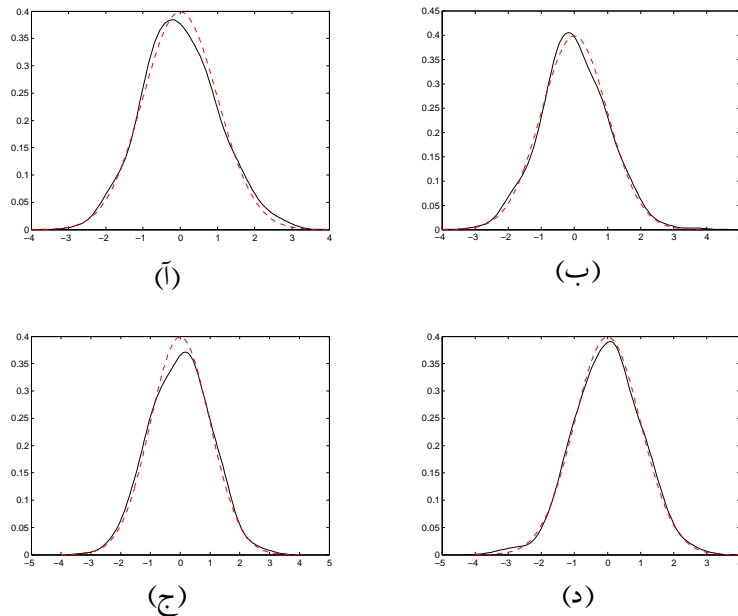
در این مدل، متغیرهای X_1 و X_2 را از توزیع نرمال استاندارد تولید کردیم و سایر متغیرها را مانند مثال اول در نظر گرفتیم. با توجه به جدول ۳.۳ و مقادیر آریبی، استفاده از دو هسته معروف نرمال و اپانچنیکوف، برآوردهایی نارایب برای پارامتر مستقل از زمان ایجاد کرده‌اند که قدرت مدل نیمه پارامتری معرفی شده را برای برآورد پارامتر مستقل از زمان هنگامی که بیش از یک متغیر وابسته به زمان داریم، نشان می‌دهد. برای این پارامتر، با افزایش حجم نمونه، خطاها کوچک‌تر شده که تاییدی بر سازگاری برآوردگر می‌باشد. همچنین مقادیر نرخ پوشش تجربی به مقدار اسمی $\sigma/95$ نزدیک‌تر می‌شوند که نرمال مجانبی بودن برآوردگر $\hat{\gamma}$ را نشان می‌دهد. مقادیر کوچک ISB و $MISE$ برای هر دو متغیر وابسته به زمان در جدول ۴.۳، حاکی از کارآمد بودن روش برآورد در مدل پیشنهادی است. این نتیجه از اهمیت بسزایی برخوردار است، زیرا در واقعیت ممکن است متغیرهای وابسته به زمان بیش از یک متغیر باشند و بنابراین این مدل در عمل از کارایی بالایی برخوردار است. برای این برآوردگر نیز، افزایش حجم نمونه، کوچک شدن خطا را برای هر دو پارامتر وابسته به زمان به ازای دو هسته اپانچنیکوف و نرمال در پی دارد که سازگاری برآوردگر را نشان می‌دهد. مشابه مثال اول، برای این مثال هم نمودار برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی را با



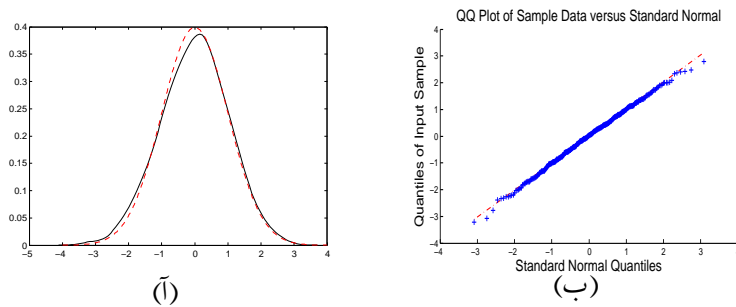
شکل ۶.۳: نمودارهای متعلق به ضریب رگرسیونی مستقل از زمان استاندارد شده در مدل (۱.۳) با هسته اپانچنیکوف: (آ) نمودار چگالی (ب) نمودار چندک-چندک



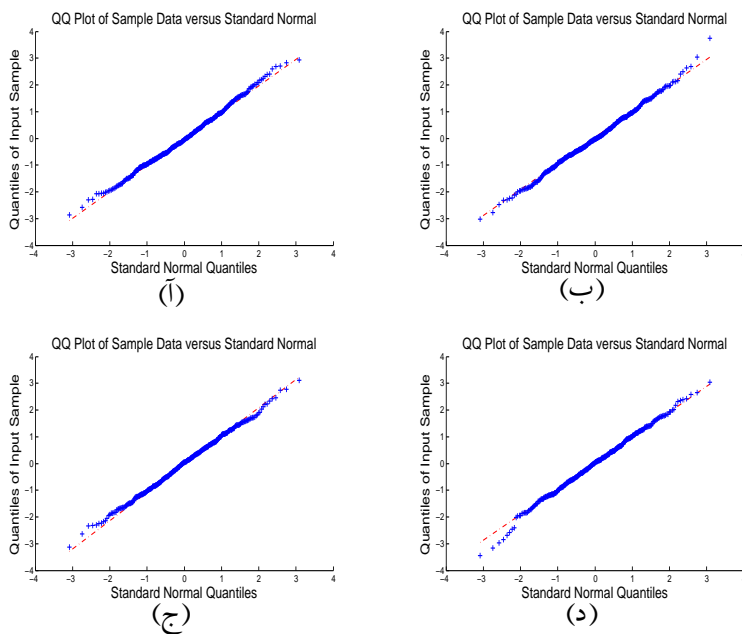
شکل ۷.۳: نمودارهای چندک-چندک برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی با هسته اپانچنیکوف در مدل (۱.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتماد (د) صدم



شکل ۸.۳: نمودارهای چگالی برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی استانداردشده با هسته نرمال در مدل (۱.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتماد (د) صدم



شکل ۹.۳: نمودارهای متعلق به ضریب رگرسیونی مستقل از زمان استاندارد شده در مدل (۱.۳) با هسته نرمال: (آ) نمودار چگالی (ب) نمودار چندک-چندک



شکل ۱۰.۳: نمودارهای چندک-چندک برآورد ضرایب رگرسیونی تجمعی با هسته نرمال در مدل (۱.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتم (د) صدم

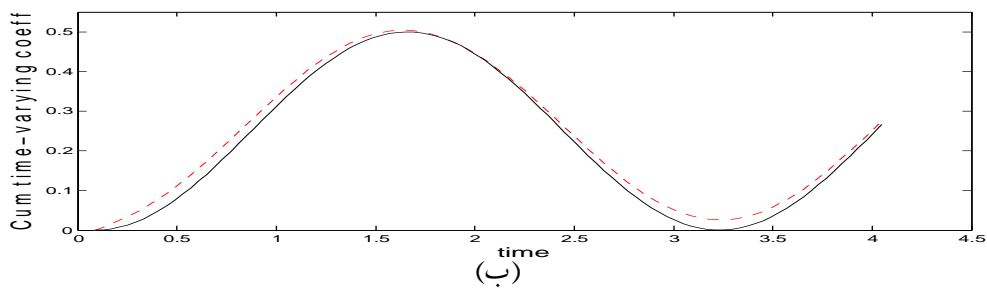
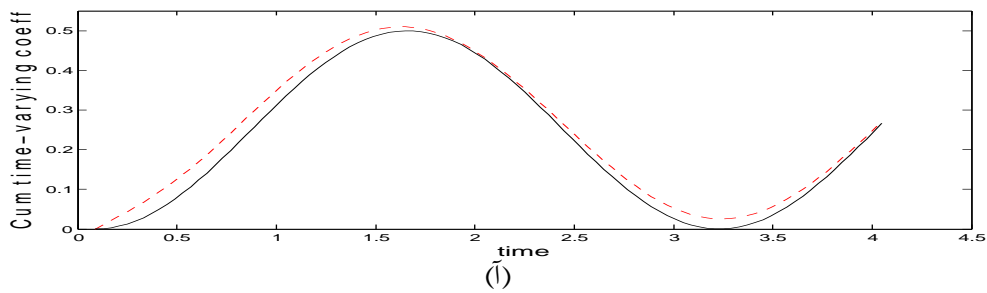
استفاده از دو هسته اپانچنیکوف و نرمال و پهنای نوار $h = 0.4$ رسم کردیم. در مدلی با بیش از یک متغیر وابسته به زمان، برآوردها اریبی بیشتری دارند اما باز هم این مقادیر اریبی به گونه‌ای است که می‌توان از آن‌ها چشم‌پوشی کرد. با مقایسه شکل‌های ۱۱.۳ و ۱۳.۳ و همچنین شکل‌های ۱۲.۳ و ۱۴.۳، مشاهده می‌شود که در این حالت هم هسته اپانچنیکوف بهتر عمل می‌کند و برآوردهای حاصل از آن به منحنی واقعی نزدیک‌تر هستند.

جدول ۳.۳: خلاصه نتایج شبیه‌سازی برای $\gamma = 0.5$ با دو هسته نرمال و اپانچیکوف

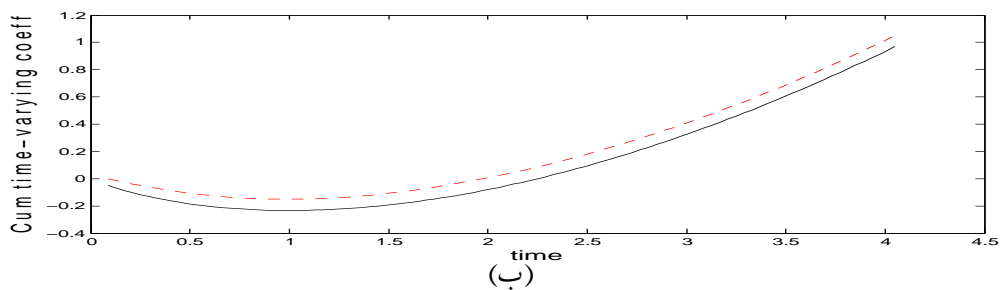
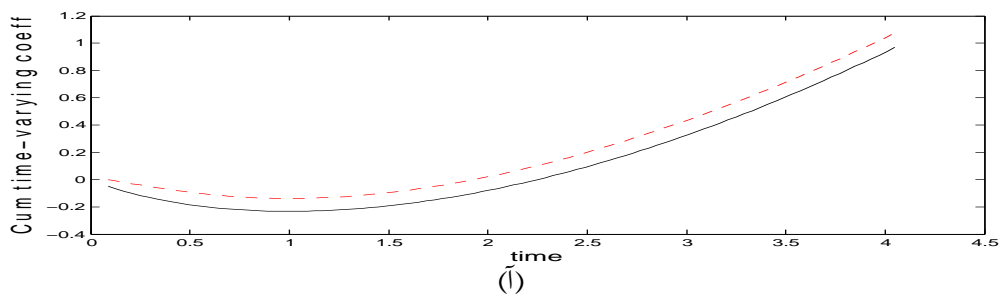
n	h	هسته اپانچیکوف				هسته نرمال			
		Bias	SEE	SSE	CP	Bias	SEE	SSE	CP
۵۰	۰/۴	۰/۰۱۰۱	۰/۲۰۵۲	۰/۲۲۲۲	۰/۹۲۱	-۰/۰۰۰۹	۰/۱۹۷۰	۰/۲۳۶۸	۰/۹۱۵
	۰/۵	۰/۰۰۵۷	۰/۱۹۸۴	۰/۲۰۱۵	۰/۹۴۵	-۰/۰۰۰۹۶	۰/۱۹۸۹	۰/۲۱۹۶	۰/۹۲۵
	۰/۶	-۰/۰۰۰۶۴	۰/۱۹۷۵	۰/۲۱۵۵	۰/۹۲۵	۰/۰۱۸۸	۰/۲۰۰۶	۰/۱۹۷۴	۰/۹۳۵
	۰/۷	-۰/۰۰۰۴۵	۰/۲۰۰۴	۰/۲۱۷۳	۰/۹۰۵	۰/۰۲۸۹	۰/۱۹۷۲	۰/۲۱۰۸	۰/۹۱۵
۱۰۰	۰/۴	۰/۰۰۰۹۰	۰/۱۴۱۲	۰/۱۴۴۷	۰/۹۳۵	۰/۰۱۹۹	۰/۱۴۰۴	۰/۱۴۷۰	۰/۹۱۰
	۰/۵	۰/۰۰۸۷	۰/۱۴۱۶	۰/۱۳۹۳	۰/۹۴۰	-۰/۰۰۰۴۱	۰/۱۳۹۲	۰/۱۴۵۷	۰/۹۱۵
	۰/۶	۰/۰۰۰۶۱	۰/۱۳۹۰	۰/۱۲۸۸	۰/۹۶۵	-۰/۰۰۱۳۹	۰/۱۳۸۹	۰/۱۳۷۸	۰/۹۶۵
	۰/۷	-۰/۰۰۰۹۶	۰/۱۴۰۲	۰/۱۳۷۸	۰/۹۵۵	-۰/۰۰۰۶۶	۰/۱۴۰۳	۰/۱۵۲۶	۰/۹۳۰
۲۰۰	۰/۴	۰/۰۰۰۸۳	۰/۱۰۰۱	۰/۰۹۷۰	۰/۹۶۵	-۰/۰۰۰۹۰	۰/۰۹۸۲	۰/۰۹۷۰	۰/۹۵۰
	۰/۵	-۰/۰۰۰۴۳	۰/۰۹۹۴	۰/۰۹۹۶	۰/۹۶۵	-۰/۰۰۰۲۲	۰/۰۹۷۹	۰/۰۹۹۵	۰/۹۳۵
	۰/۶	-۰/۰۰۰۷۳	۰/۰۹۸۳	۰/۱۰۳۳	۰/۹۵۰	۰/۰۰۰۲۵	۰/۰۹۸۱	۰/۰۹۸۲	۰/۹۶۵
	۰/۷	۰/۰۰۹۸۰	۰/۰۹۶۶	۰/۰۹۶۶	۰/۹۶۵	۰/۰۱۰۸	۰/۰۹۷۶	۰/۰۹۸۶	۰/۹۵۰

جدول ۴.۳: نتایج شبیه‌سازی برای برآورد ضرایب رگرسیونی وابسته به زمان $\mathbf{B}(t)$ در مدل (۲.۳) با دو هسته نرمال و اپانچینکوف

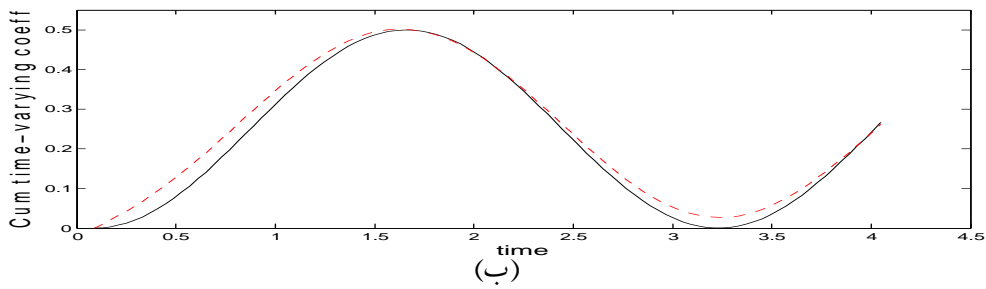
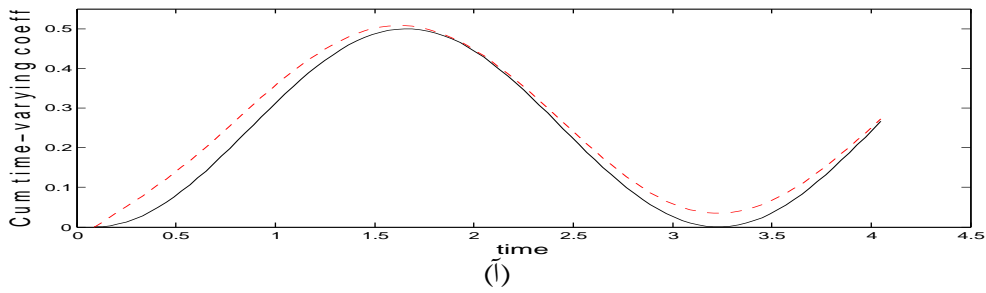
n	h	هسته اپانچینکوف						هسته نرمال					
		$\hat{B}_1(t)$			$\hat{B}_2(t)$			$\hat{B}_1(t)$			$\hat{B}_2(t)$		
		ISB	MISE	MISE	ISB	MISE	MISE	ISB	MISE	MISE	ISB	MISE	MISE
۵۰	۰/۴	۰/۰۰۰۲۸	۰/۶۲۰۶	۰/۷۷۳	۰/۷۷۴	۰/۰۱۰۲	۰/۵۵۸۸	۰/۱۱۷۱	۰/۶۳۰۹	۰/۰۰۶۹	۰/۵۵۸۸	۰/۱۱۷۱	۰/۶۳۰۹
	۰/۵	۰/۰۰۰۶۹	۰/۵۹۶۲	۰/۰۷۴۱	۰/۶۷۷۱	۰/۰۰۲۱۲	۰/۵۸۴۸	۰/۰۷۶۰	۰/۶۵۶۰	۰/۰۰۲۱۲	۰/۵۸۴۸	۰/۰۷۶۰	۰/۶۵۶۰
	۰/۶	۰/۰۰۲۸۰	۰/۶۵۴۵	۰/۰۲۵۴	۰/۷۰۰۲	۰/۰۰۱۲۴	۰/۵۵۵۲	۰/۱۳۷۵	۰/۶۵۴۹	۰/۰۰۱۲۴	۰/۵۵۵۲	۰/۱۳۷۵	۰/۶۵۴۹
	۰/۷	۰/۰۰۰۶۵	۰/۶۴۳۷	۰/۰۰۹۶۰	۰/۷۰۹۹	۰/۰۰۰۹۳	۰/۵۷۹۶	۰/۱۷۲۱	۰/۶۲۱۰	۰/۰۰۰۹۳	۰/۵۷۹۶	۰/۱۷۲۱	۰/۶۲۱۰
۱۰۰	۰/۴	۰/۰۰۰۲۰	۰/۳۳۶۱	۰/۰۲۵۲	۰/۳۰۷۸	۰/۰۰۱۲۱	۰/۲۹۶۰	۰/۰۳۴۷	۰/۳۵۰۹	۰/۰۰۱۲۱	۰/۲۹۶۰	۰/۰۳۴۷	۰/۳۵۰۹
	۰/۵	۰/۰۰۰۵۱	۰/۳۰۲۲	۰/۰۵۸۲	۰/۳۴۵۲	۰/۰۰۱۸۸	۰/۲۶۲۷	۰/۰۶۰۲	۰/۳۴۳۵	۰/۰۰۱۸۸	۰/۲۶۲۷	۰/۰۶۰۲	۰/۳۴۳۵
	۰/۶	۰/۰۰۰۴۲	۰/۳۴۳۰	۰/۰۶۵۹	۰/۳۲۶۳	۰/۰۰۰۵۰	۰/۳۴۳۳	۰/۰۸۰۴	۰/۳۴۲۹	۰/۰۰۰۵۰	۰/۳۴۳۳	۰/۰۸۰۴	۰/۳۴۲۹
	۰/۷	۰/۰۰۰۷۷	۰/۲۸۵۲	۰/۰۵۱۳	۰/۳۳۰۹	۰/۰۰۰۷۸	۰/۲۶۴۹	۰/۰۷۷۳	۰/۳۳۳۰	۰/۰۰۰۷۸	۰/۲۶۴۹	۰/۰۷۷۳	۰/۳۳۳۰
۲۰۰	۰/۴	۰/۰۰۰۱۰	۰/۱۵۱۴	۰/۰۲۶۴	۰/۱۶۴۶	۰/۰۰۰۲۲	۰/۱۳۱۱	۰/۰۲۴۶	۰/۱۴۹۱	۰/۰۰۰۲۲	۰/۱۳۱۱	۰/۰۲۴۶	۰/۱۴۹۱
	۰/۵	۰/۰۰۰۱۵	۰/۱۶۲۰	۰/۰۳۳۲	۰/۱۶۲۹	۰/۰۰۰۵۵	۰/۱۶۰۱	۰/۰۳۸۲	۰/۱۷۸۸	۰/۰۰۰۵۵	۰/۱۶۰۱	۰/۰۳۸۲	۰/۱۷۸۸
	۰/۶	۰/۰۰۰۴۴	۰/۱۲۰۸	۰/۰۶۸۳	۰/۱۹۸۲	۰/۰۰۰۵۲	۰/۱۳۶۲	۰/۰۹۱۸	۰/۲۱۷۲	۰/۰۰۰۵۲	۰/۱۳۶۲	۰/۰۹۱۸	۰/۲۱۷۲
	۰/۷	۰/۰۰۰۵۱	۰/۱۳۴۰	۰/۰۶۹۸	۰/۱۷۸۷	۰/۰۰۰۷۴	۰/۱۲۷۶	۰/۱۰۸۵	۰/۲۱۷۹	۰/۰۰۰۷۴	۰/۱۲۷۶	۰/۱۰۸۵	۰/۲۱۷۹



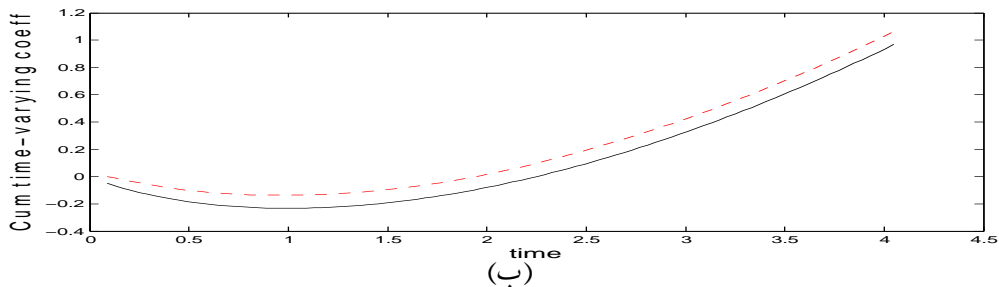
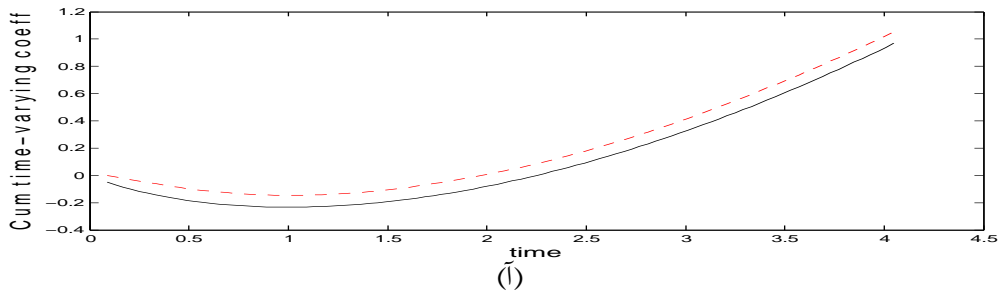
شکل ۱۱.۳: نمودار برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t) = \int_0^t 0.5 \cos(2t - 1.75) dt$ در مدل (۲.۳) با هسته اپانچنیکوف: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$



شکل ۱۲.۳: نمودار برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t) = \int_0^t 0.7\sqrt{t-1} dt$ در مدل (۲.۳) با هسته اپانچنیکوف: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$

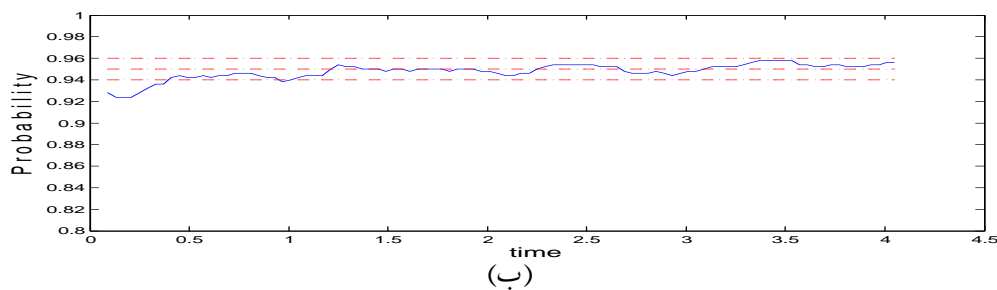
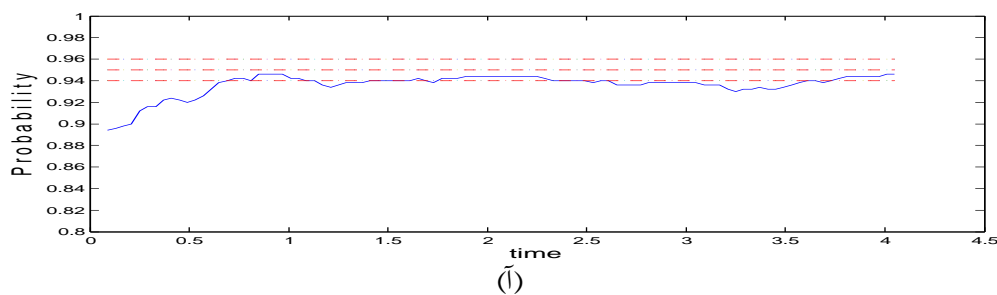


شکل ۱۳.۳: نمودار برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t) = \int_0^t 0.5 \cos(2t - 1.75) dt$ در مدل (۲.۳) با هسته نرمال: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$



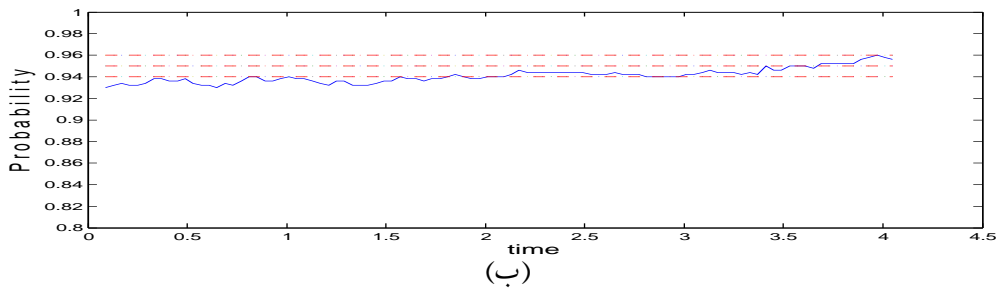
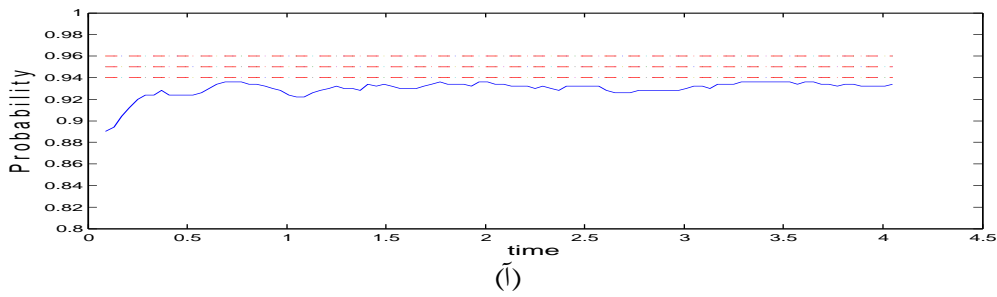
شکل ۱۴.۳: نمودار برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t) = \int_0^t 0.7(\sqrt{t} - 1) dt$ در مدل (۲.۳) با هسته نرمال: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$

نمودارهای نرخ پوشش را نیز برای ضرایب تجمعی وابسته به زمان به ازای پهنای نوار $h = 0.4$ ، دو حجم نمونه 100 و 200 و دو هسته اپانچنیکوف و نرمال رسم کردیم. با توجه به نمودارهای (آ) رسم شده برای حجم نمونه $n = 100$ در شکل‌های ۱۵.۳ و ۱۶.۳ با استفاده از هسته اپانچنیکوف، نرخ‌های پوشش تقریباً یکسانی برای برآوردگرهای $B_{0.1}(t)$ ، $\hat{B}_{0.1}(t) = \int_0^t 0.5 \cos(2t - 1/\sqrt{5}) dt$ و $B_{0.2}(t)$ ، $\hat{B}_{0.2}(t) = \int_0^t 0.7\sqrt{t-1} dt$ داریم. با افزایش حجم نمونه به $n = 200$ ، مقادیر نرخ پوشش تجربی برای هر دو برآوردگر به مقدار اسمی 0.95 نزدیک‌تر شدند و نقاط بیشتری در نوار اطمینان قرار گرفتند.

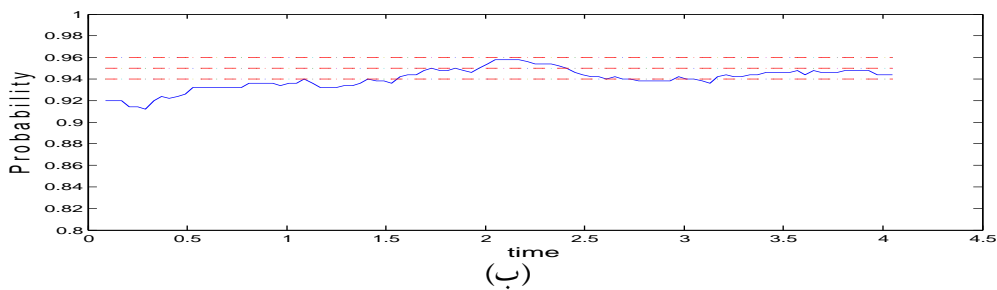
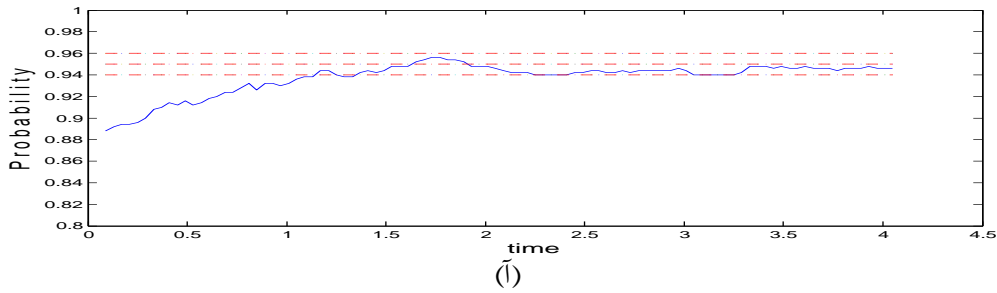


شکل ۱۵.۳: نمودار نرخ پوشش برای برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t) = \int_0^t 0.5 \cos(2t - 1/\sqrt{5}) dt$ در مدل (۲.۳) با هسته اپانچنیکوف: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$

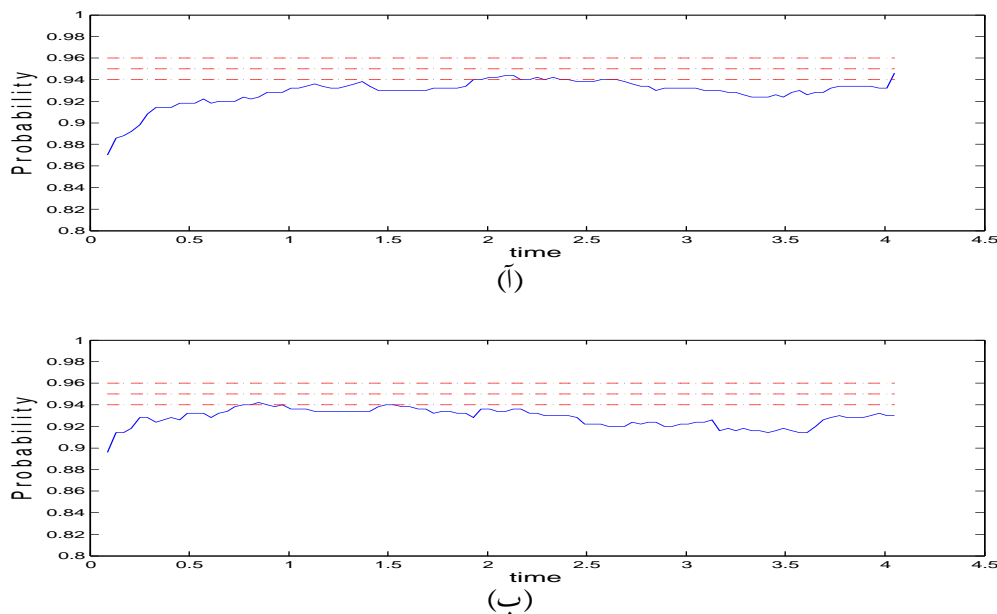
با توجه به نمودارهای نرخ‌های پوشش برای هسته نرمال در شکل‌های ۱۷.۳ و ۱۸.۳، نتایج مشابهی برای هسته نرمال به دست آمدند. با مقایسه مقادیر نرخ‌های پوشش برای دو هسته، با افزایش حجم نمونه، نقاط بیشتری از نرخ‌های پوشش در نوار اطمینان قرار می‌گیرند. این نتیجه علاوه بر سازگاری و نرمال‌جانبی بودن برآوردگرها، تاثیر اندک هسته‌ها بر نتایج را در حجم‌های نمونه بزرگ نشان می‌دهد.



شکل ۱۶.۳: نمودار نرخ پوشش برای برآورد ضریب رگرسیونی $B_{\cdot 2}(t) = \int_0^t \circ 7(\sqrt{t} - 1)dt$ در مدل (۲.۳) با هسته اپانچنیکوف: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$



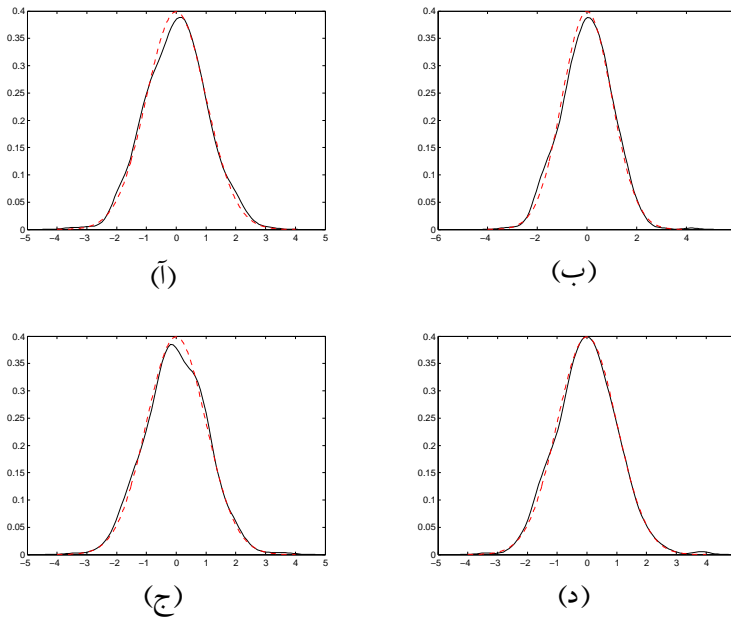
شکل ۱۷.۳: نمودار نرخ پوشش برای برآورد ضریب رگرسیونی $B_{\cdot 1}(t) = \int_0^t \circ 5 \cos(2t) dt$ در مدل (۲.۳) با هسته نرمال: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$



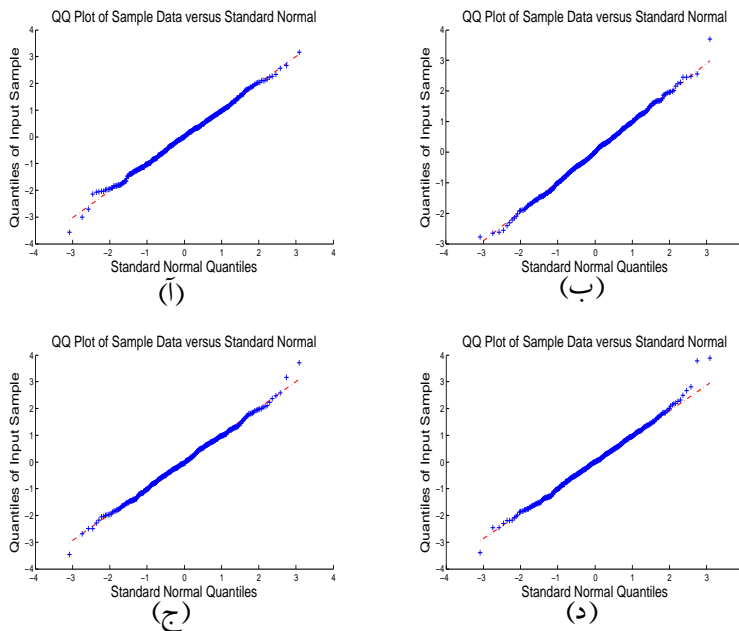
شکل ۱۸.۳: نمودار نرخ پوشش برای برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t) = \int_0^t 0.7(\sqrt{t} - 1)dt$ در مدل (۲.۳) با هسته نرمال: (آ) برای $n = 100$ (ب) برای $n = 200$

برای این مدل نیز، نمودارهای چگالی و چندک-چندک را برای هر دو ضریب وابسته به زمان استاندارد شده با $n = 200$ در نقاط زمانی ۸، ۴۰، ۸۰ و ۱۰۰ رسم کردیم. با توجه به نمودارهای چگالی در شکل‌های ۱۹.۳ و ۲۱.۳ و نمودارهای چندک-چندک در شکل‌های ۲۰.۳ و ۲۲.۳، برای هر دو ضریب وابسته به زمان استاندارد شده به ازای هسته اپانچنیکوف، برآوردگرهای $\hat{B}_{0.1}(t)$ و $\hat{B}_{0.2}(t)$ دارای توزیع مجانبی نرمال می‌باشند. نتایج مشابهی برای این دو ضریب وابسته به زمان با استفاده از هسته نرمال به دست آوردیم که در شکل‌های ۲۴.۳ و ۲۶.۳ برای توابع چگالی و شکل‌های ۲۵.۳ و ۲۷.۳ برای نمودارهای چندک-چندک آمده‌اند. برای ضریب مستقل از زمان نیز در مدل (۲.۳)، توزیع مجانبی برآوردگر با استفاده از هر دو هسته با توجه به شکل‌های ۲۳.۳ و ۲۸.۳، نرمال می‌باشد و تاییدی برای نتایج فصل ۲ می‌باشد.

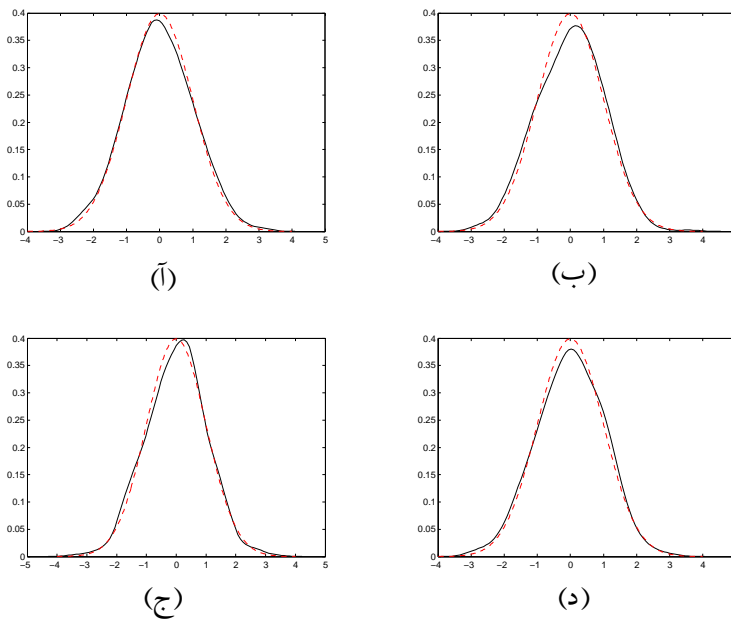
در این فصل با ارایه جداول و نمودارها، علاوه بر نشان دادن برقراری ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها در کوچک‌نمونه، دو هسته اپانچنیکوف و نرمال را نیز مقایسه کردیم. با استفاده از نمودارها در هر دو مثال، هسته اپانچنیکوف عملکرد بهتری نسبت به هسته نرمال در حجم نمونه



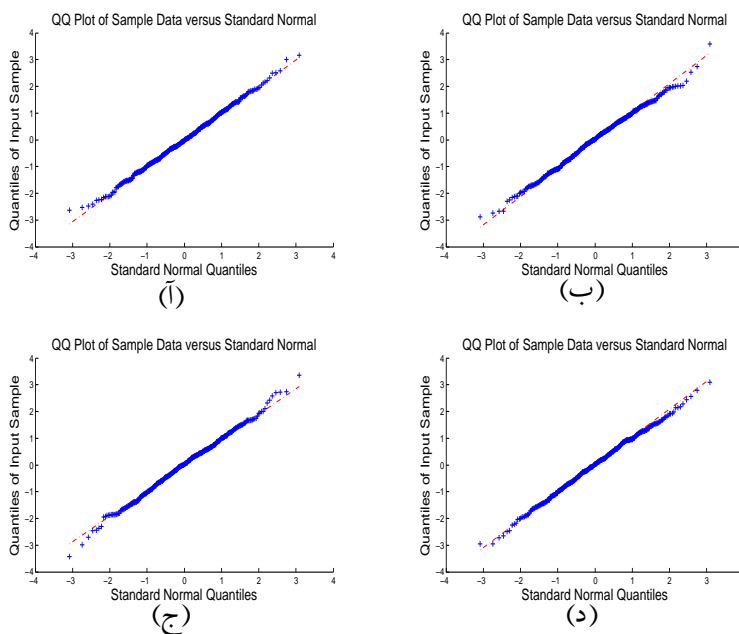
شکل ۱۹.۳: نمودارهای چگالی برآورد ضریب رگرسیونی استاندارد شده $B_{0.1}(t)$ با هسته اپانچنیکوف در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتم (د) صدم



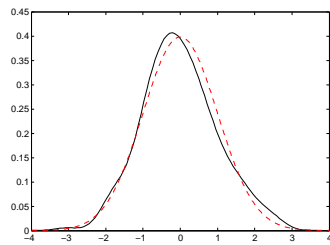
شکل ۲۰.۳: نمودارهای چندک-چندک متعلق به برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t)$ با هسته اپانچنیکوف در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتم (د) صدم



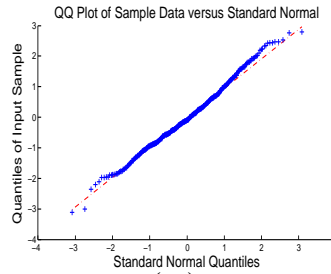
شکل ۲۱.۳: نمودارهای چگالی برآورد ضریب رگرسیونی استاندارد شده $B_{0.2}(t)$ با هسته اپانچنیکوف در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتم (د) صدم



شکل ۲۲.۳: نمودارهای چندک-چندک متعلق به برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t)$ با هسته اپانچنیکوف در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتم (د) صدم

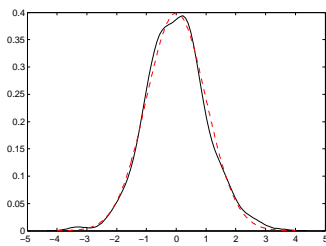


(آ)

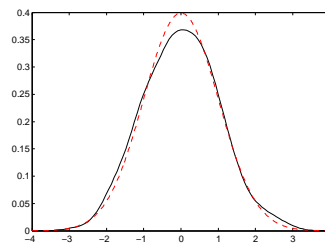


(ب)

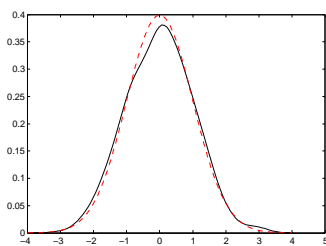
شکل ۲۳.۳: نمودارهای متعلق به ضریب رگرسیونی مستقل از زمان استاندارد شده در مدل (۲.۳) با هسته ایپانچنیکوف: (آ) نمودار چگالی (ب) نمودار چندک-چندک



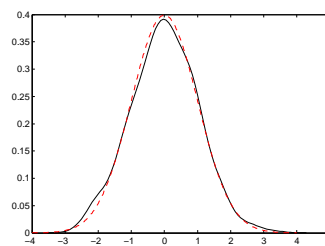
(آ)



(ب)

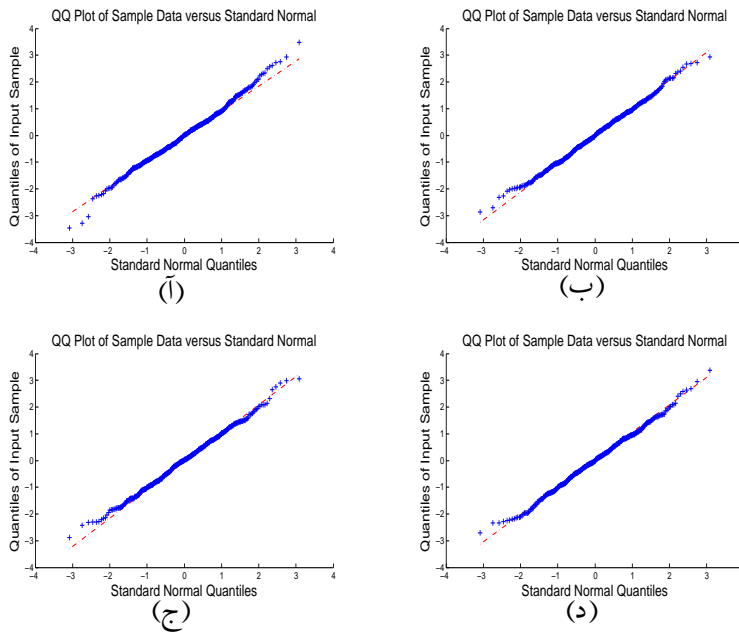


(ج)

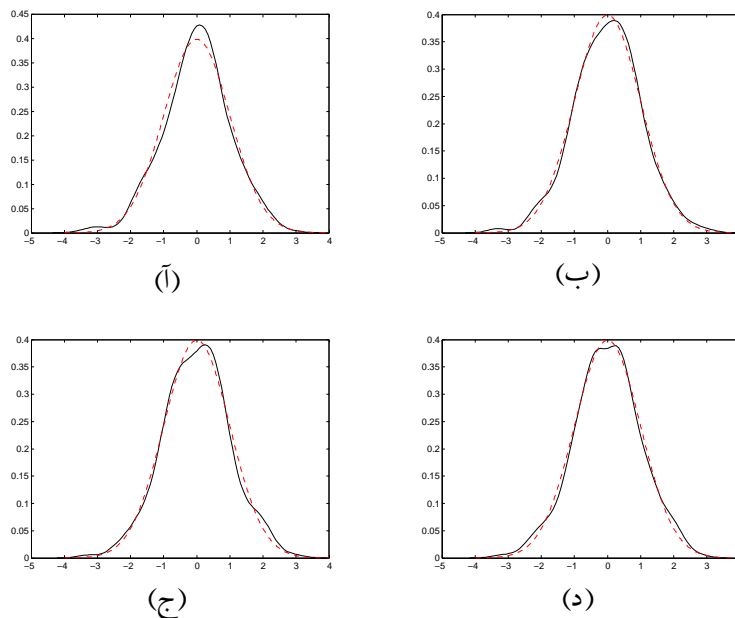


(د)

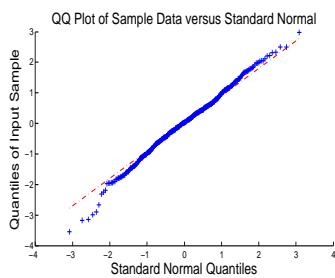
شکل ۲۴.۳: نمودارهای چگالی برآورد ضریب رگرسیونی استاندارد شده $B_{0,1}(t)$ با هسته نرمال در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتم (د) صدم



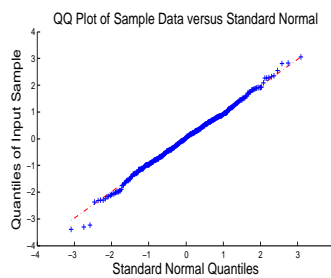
شکل ۲۵.۳: نمودارهای چندک-چندک متعلق به برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.1}(t)$ با هسته نرمال در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتماد (د) صدم



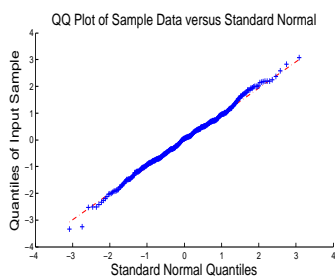
شکل ۲۶.۳: نمودارهای چگالی برآورد ضریب رگرسیونی استاندارد شده $B_{0.2}(t)$ با هسته نرمال در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتماد (د) صدم



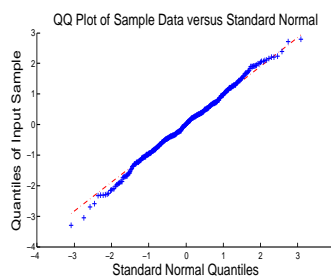
(آ)



(ب)

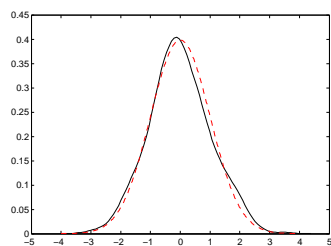


(ج)

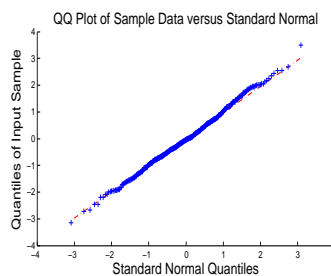


(د)

شکل ۲۷.۳: نمودارهای چندک-چندک متعلق به برآورد ضریب رگرسیونی $B_{0.2}(t)$ با هسته نرمال در مدل (۲.۳) در زمان‌های: (آ) هشتم (ب) چهارم (ج) هشتماد (د) صدم



(آ)



(ب)

شکل ۲۸.۳: نمودارهای متعلق به ضریب رگرسیونی مستقل از زمان استاندارد شده در مدل (۲.۳) با هسته نرمال: (آ) نمودار چگالی (ب) نمودار چندک-چندک

کوچک دارد اما این دو هسته در حجم نمونه بزرگ، عملکرد تقریباً یکسانی دارند. همچنین با توجه به نتایج جداول برای دو هسته اپانچنیکوف و نرمال، تفاوتی بین نتایج حاصل از پهناهای نوار مختلف وجود ندارد و عملکرد مدل، تنها با افزایش حجم نمونه در جهت بهبود تغییر می‌کند. با این توضیحات، در فصل ۵ که مربوط به برازش مدل پیشنهادی بر روی شوک‌های وارد شده به بیماران قلبی است، با توجه به حجم کوچک داده‌ها و برتری هسته اپانچنیکوف در این حجم، از این هسته استفاده کرده و پهنای نواری انتخاب می‌کنیم که باعث همواری مطلوبی شود.

فصل ۴

برازش مدل با چندین پارامتر همواری**

در این فصل، تمام نتایج نظری جدید بوده و توسط نویسنده پایان نامه انجام شده است.

۱.۴ مقدمه

با توجه به این که تمام پارامترهای رگرسیونی وابسته به زمان ممکن است ناهمواری یکسانی نداشته باشند، بنابراین منطقی است که برای هر ضریب رگرسیونی، پارامتر همواری متفاوتی در نظر بگیریم. برای این منظور، روش برازش مدل معرفی شده در فصل ۱ را که در آن برای تمام ضرایب وابسته به زمان یک پارامتر همواری یکسان در نظر می‌گیرد، به حالتی تعمیم می‌دهیم که برای برآورد هر ضریب از یک پارامتر همواری متفاوت استفاده شود. این تعمیم در عمل می‌تواند خیلی مهم باشد، به ویژه زمانی که تعداد اثرات وابسته به زمان زیاد باشند (فان و زانگ، ۱۹۹۹). پس از ارایه برخی تعاریف، ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها را بررسی کرده و با انجام یک مطالعه شبیه‌سازی این ویژگی‌ها را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

در این فصل از مدل و روش برآورد به کار رفته در فصل ۱ استفاده می‌کنیم و به دلیل تشابه برخی از برهان‌ها، از اثبات موارد یکسان خودداری می‌کنیم.

۲.۴ تعاریف و نمادها

در فصل ۱، مدل حاشیه‌ای زیر را معرفی کردیم:

$$E\{dN_i^*(t)|\mathbf{X}_i(t), \mathbf{Z}_i(t)\} = \exp\{\beta_{\circ}(t)^T \mathbf{X}_i(t) + \gamma_{\circ}^T \mathbf{Z}_i(t)\} d\mu_{\circ}(t),$$

به طوری که $\beta_{\circ}(t) = (\beta_{\circ 1}(t), \dots, \beta_{\circ p}(t))^T$. در این فصل برای هموار کردن هر یک از ضرایب

$\beta_{\circ j}(t)$ ، $j = 1, \dots, p$ ، از پارامتر همواری متفاوت h_j استفاده می‌کنیم. بنابراین در ابتدا به جای

تعریف یک پهنای نوار، ماتریسی قطری از پهنای نوارها به صورت زیر ایجاد می‌کنیم:

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & h_p \end{pmatrix}.$$

از طرفی هسته را به صورت

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K\left(\frac{u-t}{h_1}\right) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & K\left(\frac{u-t}{h_p}\right) \end{pmatrix},$$

تعریف می‌کنیم.

بنابراین روابط (۱۵.۱) و (۱۶.۱) به ترتیب به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\beta^l(t) = \int H^{-1} \mathbf{K} d\mathbf{B}^l(u), \quad (1.4)$$

و

$$\lambda_{\circ}^l(t) = \int H^{-1} \mathbf{K} d\mu_{\circ}^l(u), \quad (2.4)$$

به طوری که $\lambda_{\circ}^l(t)$ ، ماتریسی قطری از مقادیر هموار شده $\lambda^l(t)$ با استفاده از نوارهایی با پهنای

متفاوت است. پس هر ضریب وابسته به زمان متناسب با پهنای نوار در نظر گرفته شده برای آن

ضریب، هموار می‌شود.

برای بررسی ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها در این حالت، شرط (C۴) در فصل ۲ را به شرط

(C۷) تغییر می‌دهیم.

(CV) فرض کنید $K_1(\cdot), \dots, K_p(\cdot)$ توابع هسته پیوسته و متقارن با دامنه فشرده و متقارن نسبت

به صفر با پهنای نوارهای به ترتیب h_1, \dots, h_p هستند، به طوری که

$$\int \mathbf{K} d\mathbf{w} = \int \begin{pmatrix} K(w_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & K(w_p) \end{pmatrix} d\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \int K(w_1) dw_1 \\ \vdots \\ \int K(w_p) dw_p \end{pmatrix} = \mathbf{1}_p,$$

که $\mathbf{1}_p$ بردار p بعدی $\mathbf{1}$ است و $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_p)^T$. به ازای هر j که $\frac{1}{\lambda} < \alpha_j < \frac{1}{\mu}$ داریم

$$h_1 = O(n^{-\alpha_1}), \dots, h_p = O(n^{-\alpha_p}).$$

با توجه به تعریف ترتیب‌های تصادفی، از (CV) داریم

$$n^{\alpha_1} h_1 < M, \dots, n^{\alpha_p} h_p < M.$$

بنابراین با انتخاب $\alpha = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ خواهیم داشت

$$n^\alpha h_1 < M, \dots, n^\alpha h_p < M.$$

بنابراین

$$h_1 = O(n^{-\alpha}), \dots, h_p = O(n^{-\alpha}).$$

h را نیز برابر h_j تعریف می‌کنیم که α_j آن برابر α می‌شود. در واقع h پهنای نواری با کندترین نرخ همگرایی به \circ است. با این انتخاب α ، تمام پهنای نوارها کران‌دار و در واقع کندترین پهنای نوار در نظر گرفته می‌شود.

۳.۴ ویژگی‌های مجانبی

برای اثبات سازگاری، نرخ همگرایی و توزیع مجانبی نرمال برآوردگرها، مشابه فصل ۲، لم‌ها و قضیه‌هایی که متناسب با معادله‌های برآوردیابی جدید تغییر یافته‌اند را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۳.۴. تحت شرایط (C۱) و (CV) و بسط تیلور داریم

$$\sup_{\circ \leq t \leq \tau} \|\bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t)\| = O(h^\nu),$$

که در آن

$$\bar{\beta}_\circ(t) = \int H^{-1} \mathbf{K} d\mathbf{B}_\circ(u).$$

برهان. برای اثبات ابتدا فرض می‌کنیم

$$:u = u_1 = \dots = u_p \quad .۱$$

$$:\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)^T \quad .۲$$

$$:\mathbf{B}_\circ(\mathbf{u}) = (\mathbf{B}_{\circ_1}(u_1), \dots, \mathbf{B}_{\circ_p}(u_p))^T \quad .۳$$

$$.\mathbf{K}_u = \begin{pmatrix} K\left(\frac{u_1-t}{h_1}\right) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & K\left(\frac{u_p-t}{h_p}\right) \end{pmatrix} \quad .۴$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\bar{\beta}_\circ(t) = \int H^{-1} \mathbf{K}_u d\mathbf{B}_\circ(\mathbf{u}).$$

پس

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t) &= \int H^{-1} \mathbf{K}_u d\mathbf{B}_\circ(\mathbf{u}) - \beta_\circ(t) \\ &= \int H^{-1} \mathbf{K}_u \begin{pmatrix} \beta_{\circ_1}(u_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \beta_{\circ_p}(u_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_p \end{pmatrix} - \beta_\circ(t) \\ &= \int H^{-1} \mathbf{K}_u \begin{pmatrix} \beta_{\circ_1}(u_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \beta_{\circ_p}(u_p) \end{pmatrix} d\mathbf{u} - \beta_\circ(t). \quad (۳.۴) \end{aligned}$$

در رابطه (۳.۴)، تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$v_1 = \frac{u_1 - t}{h_1}, \dots, v_p = \frac{u_p - t}{h_p},$$

و تعریف می‌کنیم $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)^T$. بنابراین با به کار بردن شرط (C۷)، داریم

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t) &= \int H^{-1} \begin{pmatrix} K(v_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & K(v_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\circ_1}(v_1 h_1 + t) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \beta_{\circ_p}(v_p h_p + t) \end{pmatrix} \\ &= \int \begin{pmatrix} K(v_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & K(v_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\circ_1}(v_1 h_1 + t) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \beta_{\circ_p}(v_p h_p + t) \end{pmatrix} d\mathbf{v} \\ &\quad - \beta_\circ(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \begin{pmatrix} K(v_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & K(v_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\circ_1}(v_1 h_1 + t) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \beta_{\circ_p}(v_p h_p + t) \end{pmatrix} d\mathbf{v} \\
 &\quad - \int \begin{pmatrix} K(v_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & K(v_p) \end{pmatrix} d\mathbf{v} \cdot \beta_{\circ}(t) \\
 &= \int \begin{pmatrix} K(v_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & K(v_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\beta_{\circ_1}(v_1 h_1 + t) - \beta_{\circ_1}(t)) dv_1 \\ \vdots \\ (\beta_{\circ_p}(v_p h_p + t) - \beta_{\circ_p}(t)) dv_p \end{pmatrix} \\
 &= \int \begin{pmatrix} K(v_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & K(v_p) \end{pmatrix} (\mathcal{B} - \beta_{\circ}(t)) \cdot d\mathbf{v},
 \end{aligned} \tag{۴.۴}$$

به طوری که $\mathcal{B} = (\beta_{\circ_1}(v_1 h_1 + t), \dots, \beta_{\circ_p}(v_p h_p + t))^T$ و "نمایانگر ضرب درایه در درایه است.

اما بسط تیلور \mathcal{B} در نقاط $v_1 = \circ, \dots, v_p = \circ$ عبارتست از

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B} &= \beta_{\circ}(t) + H \begin{pmatrix} \beta'_{\circ_1}(t)v_1 \\ \vdots \\ \beta'_{\circ_p}(t)v_p \end{pmatrix} + \frac{H^\Upsilon}{\Upsilon} \begin{pmatrix} \beta''_{\circ_1}(t)v_1^\Upsilon \\ \vdots \\ \beta''_{\circ_p}(t)v_p^\Upsilon \end{pmatrix} + O((H^\Upsilon) \begin{pmatrix} v_1^\Upsilon \\ \vdots \\ v_p^\Upsilon \end{pmatrix}) \\
 &= \beta_{\circ}(t) + H \begin{pmatrix} \beta'_{\circ_1}(t) \\ \vdots \\ \beta'_{\circ_p}(t) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} + \frac{H^\Upsilon}{\Upsilon} \begin{pmatrix} \beta''_{\circ_1}(t) \\ \vdots \\ \beta''_{\circ_p}(t) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}^\Upsilon + O((H^\Upsilon) \begin{pmatrix} \frac{(u_1-t)^\Upsilon}{h_1^\Upsilon} \\ \vdots \\ \frac{(u_p-t)^\Upsilon}{h_p^\Upsilon} \end{pmatrix}) \\
 &= \beta_{\circ}(t) + H\beta'_{\circ}(t) \cdot \mathbf{v} + \frac{H^\Upsilon}{\Upsilon} \beta''_{\circ}(t) \cdot \mathbf{v}^\Upsilon + O\left(\begin{pmatrix} (u_1-t)^\Upsilon \\ \vdots \\ (u_p-t)^\Upsilon \end{pmatrix}\right) \\
 &= \beta_{\circ}(t) + H\beta'_{\circ}(t) \cdot \mathbf{v} + \frac{H^\Upsilon}{\Upsilon} \beta''_{\circ}(t) \cdot \mathbf{v}^\Upsilon + O(1),
 \end{aligned} \tag{۵.۴}$$

به طوری که $\mathbf{v}^\Upsilon = (v_1^\Upsilon, \dots, v_p^\Upsilon)^T$ و

$$H^\Upsilon = \begin{pmatrix} h_1^\Upsilon & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & h_p^\Upsilon \end{pmatrix}.$$

مشابه رابطه (۵.۲)، با قرار دادن رابطه (۵.۴) در (۴.۴) و همچنین با توجه به شرط (C۷)، داریم

$$\sup_{\circ \leq t \leq \tau} \|\bar{\beta}_{\circ}(t) - \beta_{\circ}(t)\| = O(h^\Upsilon). \tag{۶.۴}$$

□

لم ۲.۳.۴. با برقراری شرط (C۷)، می‌توان نوشت

$$\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t) = O_p(h^{-1} \|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}\|),$$

که در آن

$$\|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}\| = \sup_{\circ \leq t \leq \tau} \|\hat{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_\circ(t)\|.$$

برهان. با توجه به تعاریف $\hat{\beta}(t)$ و $\bar{\beta}_\circ(t)$ ، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(t) - \beta_\circ(t) &= \int H^{-1} \mathbf{K} d\hat{\mathbf{B}}(u) + \bar{\beta}_\circ(t) - \bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t) \\ &= \int H^{-1} \mathbf{K} d\hat{\mathbf{B}}(u) - \int H^{-1} \mathbf{K} d\mathbf{B}_\circ(u) + \{\bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t)\} \\ &= \int H^{-1} \mathbf{K} d\{\hat{\mathbf{B}}(u) - \mathbf{B}_\circ(u)\} + \{\bar{\beta}_\circ(t) - \beta_\circ(t)\}. \end{aligned} \quad (۷.۴)$$

با استفاده از شرط (C۷)، اولین جمله تساوی (۷.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t) &= \int H^{-1} \mathbf{K} d\{\hat{\mathbf{B}}(u) - \mathbf{B}_\circ(u)\} \\ &\leq MH^{-1} I_p \int d\{\hat{\mathbf{B}}(u) - \mathbf{B}_\circ(u)\} \\ &\leq MH^{-1} I_p \left(\sup_{\circ \leq t \leq \tau} \|\hat{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_\circ(t)\| \right) = MH^{-1} I_p \|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_\circ\|. \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

به طوری که M مقداری متناهی و I_p ماتریس همانی با بعد p است. در نتیجه با در نظر گرفتن

پهنای نواری با کندترین نرخ همگرایی، داریم

$$\hat{\beta}(t) - \bar{\beta}_\circ(t) = O_p(h^{-1} \|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_\circ\|). \quad (۹.۴)$$

□

مشابه رابطه (۱۳.۲)، با به کار بردن نامساوی مثلث در تساوی (۷.۴) و با استفاده از روابط

(۶.۴) و (۹.۴) و دو شرط (C۶) و (C۷)، داریم

$$\begin{aligned} \sup_{\circ \leq t \leq \tau} \|\hat{\beta}(t) - \beta_\circ(t)\| &\leq O_p(h^{-1} \|\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}_\circ\|) + O(h^2) \\ &= o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \end{aligned} \quad (۱۰.۴)$$

با در نظر گرفتن پهنای نواری با کندترین سرعت همگرایی، نرخ همگرایی $\hat{\beta}(t)$ به $\beta_0(t)$ مشابه حالتی با پهنای نوار یکسان می‌شود.

برای اثبات

$$\|\tilde{\gamma} - \gamma_0\| = O_p(n^{-\frac{1}{4}}),$$

نیاز به روابطی داریم که در فصل ۲ ذکر شد و از آنجایی که برای این رابطه در این حالت، اثبات آن‌ها مشابه حالتی با پهنای نوار یکسان است، از ذکر آن‌ها پرهیز می‌کنیم. همچنین در این حالت می‌توان گفت $n^{\frac{1}{4}}(\tilde{\gamma} - \gamma_0)$ دارای توزیع نرمال مجانبی با میانگین صفر و ماتریس کوواریانسی است که توسط $\hat{\Sigma} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\xi}_i(\tau) \hat{\xi}_i(\tau)^T$ برآورد می‌شود. در ادامه، مانند فصل ۲، برآوردگر اولیه $\hat{\gamma}$ را برابر برآوردگر نهایی، $\tilde{\gamma}$ ، فرض می‌کنیم.

برای اثبات رابطه

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\tilde{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_0(t)\| = O_p(n^{-\frac{1}{4}}),$$

ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۳.۳.۴. به ازای پهنای نواری با کندترین نرخ همگرایی داریم:

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\hat{\lambda}_0(t) 1_p - \lambda_0(t) 1_p\| = o_p(n^{-\frac{1}{4}}).$$

برهان. با توجه به روابط (۲.۴) و (۷.۱)، داریم

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_0(t) 1_p - \lambda_0(t) 1_p &= \left(\int H^{-1} \mathbf{K} \frac{dN_0(u)}{S_0(u; \beta_0, \gamma_0)} \right) 1_p - \lambda_0(t) 1_p \\ &+ \left(\int H^{-1} \mathbf{K} \left(\frac{1}{\hat{S}_0(u)} - \frac{1}{S_0(u; \beta_0, \gamma_0)} \right) dN_0(u) \right) 1_p. \end{aligned} \quad (۱۱.۴)$$

مشابه روند برهان برای رابطه (۱۰.۴)، با توجه به رابطه (۲.۴) و شرط (C۷)، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \left(\int H^{-1} \mathbf{K} \frac{dN_0(u)}{S_0(u; \beta_0, \gamma_0)} 1_p - \lambda_0(t) 1_p \right) &= \left(\int H^{-1} \mathbf{K} \frac{dN_0(u)}{S_0(u; \beta_0, \gamma_0)} \right) 1_p \\ &- \left(\int H^{-1} \mathbf{K} d\mu_0(u) \right) 1_p \\ &\leq M H^{-1} 1_p \left(\int \frac{dN_0(u)}{S_0(u; \beta_0, \gamma_0)} - \int d\mu_0(u) \right) \\ &\leq M H^{-1} 1_p (\hat{\mu}_0(t) - \mu_0(t)). \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن پهنای نواری با کندترین نرخ همگرایی داریم

$$A = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left\| \int H^{-1} \mathbf{K} \frac{dN_{\circ}(u)}{S_{\circ}(u; \beta_{\circ}, \gamma_{\circ})} 1_p - \lambda_{\circ}(t) 1_p \right\| \leq h^{-1} M \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\hat{\mu}_{\circ}(t) - \mu_{\circ}(t)\|.$$

بنابراین

$$P \left(\frac{hA}{\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\hat{\mu}_{\circ}(t) - \mu_{\circ}(t)\|} \leq M \right) \rightarrow 1.$$

در نتیجه مشابه رابطه (۵۶.۲)، داریم

$$A = O(h^{-1} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\hat{\mu}_{\circ}(t) - \mu_{\circ}(t)\|) = o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \quad (12.4)$$

همچنین با اثباتی مشابه رابطه (۵۷.۲)، می‌توان گفت

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \left\| \int H^{-1} \mathbf{K} \left(\frac{1}{\hat{S}_{\circ}(u)} - \frac{1}{S_{\circ}(u; \beta_{\circ}, \gamma_{\circ})} \right) dN_{\circ}(u) 1_p \right\| = o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \quad (13.4)$$

در نهایت با استفاده از روابط (۱۲.۴) و (۱۳.۴)، می‌توان نوشت

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \left\| \hat{\lambda}_{\circ}(t) 1_p - \lambda_{\circ}(t) 1_p \right\| = o_p(n^{-\frac{1}{4}}). \quad (14.4)$$

□

اکنون با قرار دادن ماتریس $\lambda_{\circ}(t)$ در روابط فصل ۲ و با ثابت بودن بقیه شرایط، به راحتی

می‌توان نشان داد

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\tilde{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_{\circ}(t)\| = O_p(n^{-\frac{1}{4}}),$$

و همچنین $n^{\frac{1}{4}}(\tilde{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{B}_{\circ}(t))$ دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین صفر و تابع کوواریانسی است

که توسط برآوردگر سازگار $\hat{\Gamma}_b(s, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\eta}_i(s) \hat{\eta}_i(t)^T$ برآورد می‌شود. به منظور اثبات ادامه

قضیه، برآوردگر $\hat{\mathbf{B}}(t)$ را برابر با برآوردگر نهایی $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ ، در نظر می‌گیریم.

و در نهایت برای اثبات بخش (ت) قضیه ۲.۱.۲ در حالت تعمیم‌یافته چند پارامتر همواری،

ابتدا رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\hat{\mu}_{\circ}(t) - \mu_{\circ}(t) = \{\hat{\mu}_{\circ}(t) - \hat{\mu}_{\circ}(t; \bar{\beta}, \gamma_{\circ})\} + \{\hat{\mu}_{\circ}(t; \bar{\beta}, \gamma_{\circ}) - \mu_{\circ}(t)\}. \quad (15.4)$$

با روندی مشابه فصل ۲ می‌توان گفت

$$\hat{\mu}_{\circ}(t; \bar{\beta}, \gamma_{\circ}) - \hat{\mu}_{\circ}(t) = \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_{\circ}(u)) d\mu_{\circ}(u) + \int_{\circ}^t \mathbf{e}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_{\circ}) d\mu_{\circ}(u)$$

$$+o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \quad (16.4)$$

با استفاده از تساوی اول رابطه (۸.۴)، جمله اول آخرین تساوی رابطه (۱۶.۴) را می‌توان به صورت

$$\int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T \left[\int H^{-1} \mathbf{K} d\{\hat{\mathbf{B}}(s) - \mathbf{B}_{\circ}(s)\} \right] d\mu_{\circ}(u), \quad (17.4)$$

نوشت. با تغییر ترتیب انتگرال‌ها و استفاده از رابطه (۱۴.۱)، رابطه (۱۷.۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_{\circ}^t \left[\int \mathbf{e}_x(u)^T H^{-1} \mathbf{K} \lambda_{\circ}(u) du \right] d\{\hat{\mathbf{B}}(s) - \mathbf{B}_{\circ}(s)\}.$$

در نهایت با به کار بردن رابطه (۸.۵) تیان و همکاران (۲۰۰۵) می‌توان نوشت

$$\int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T (\hat{\beta}(u) - \bar{\beta}_{\circ}(u)) d\mu_{\circ}(u) = \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(s)^T \lambda_{\circ}(s) d\{\hat{\mathbf{B}}(s) - \mathbf{B}_{\circ}(s)\} + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \quad (18.4)$$

با استفاده از رابطه (۱۸.۴)، رابطه (۱۶.۴) معادل با رابطه

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\circ}(t; \bar{\beta}, \gamma_{\circ}) - \hat{\mu}_{\circ}(t) &= \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(s)^T \lambda_{\circ}(s) d\{\hat{\mathbf{B}}(s) - \mathbf{B}_{\circ}(s)\} + \int_{\circ}^t \mathbf{e}_z(u)^T (\hat{\gamma} - \gamma_{\circ}) d\mu_{\circ}(u) \\ &+ o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}), \end{aligned} \quad (19.4)$$

است. مشابه اثبات فصل ۲ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\circ}(t; \bar{\beta}_{\circ}, \gamma_{\circ}) - \mu_{\circ}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\circ}^t \frac{dM_i(u)}{S_{\circ}(u; \bar{\beta}_{\circ}, \gamma_{\circ})} \\ &- \frac{1}{\nu} \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T \left(\int H^{\nu} \mathbf{K} \beta_{\circ}''(u) \cdot \mathbf{v}^{\nu} \cdot d\mathbf{v} \right) d\mu_{\circ}(u) + o_p(n^{-\frac{1}{\nu}}). \end{aligned} \quad (20.4)$$

با جایگذاری روابط (۱۹.۴) و (۲۰.۴) در (۱۵.۴) مانند رابطه (۷۹.۲) داریم

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{\nu}} \left\{ \hat{\mu}_{\circ}(t) - \mu_{\circ}(t) + \frac{1}{\nu} \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T \left(\int H^{\nu} \mathbf{K} \beta_{\circ}''(u) \cdot \mathbf{v}^{\nu} \cdot d\mathbf{v} \right) d\mu_{\circ}(t) \right\} \\ = n^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{i=1}^n \int_{\circ}^t \frac{dM_i(u)}{s_{\circ}(u)} - n^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{i=1}^n \int_{\circ}^t \mathbf{e}_x(u)^T \lambda_{\circ}(u) d\eta_i(t) \\ - n^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{i=1}^n \int_{\circ}^t \mathbf{e}_z(u)^T d\mu_{\circ}(u) \xi_i(\tau) + o_p(1). \end{aligned} \quad (21.4)$$

بنابراین با تعریفی که از $\varphi_i(t)$ در فصل ۲ ارایه شد، داریم

$$n^{\frac{1}{2}} \left\{ \hat{\mu}_o(t) - \mu_o(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T \left(\int H^T \mathbf{K} \beta_o''(u) \cdot \mathbf{v}^T \cdot d\mathbf{v} \right) d\mu_o(t) \right\} = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) + o_p(1).$$

با استفاده از قضیه حد مرکزی چندمتغیره،

$$n^{\frac{1}{2}} \left\{ \hat{\mu}_o(t) - \mu_o(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \mathbf{e}_x(u)^T \left(\int H^T \mathbf{K} \beta_o''(u) \cdot \mathbf{v}^T \cdot d\mathbf{v} \right) d\mu_o(t) \right\},$$

به یک فرآیند نرمال با میانگین صفر و تابع کوواریانس $\Gamma_u(s, t)$ همگراست که دارای برآوردگر

$$\hat{\Gamma}_u(s, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varphi}_i(s) \hat{\varphi}_i(t) \text{ است.}$$

۴.۴ مطالعه شبیه‌سازی

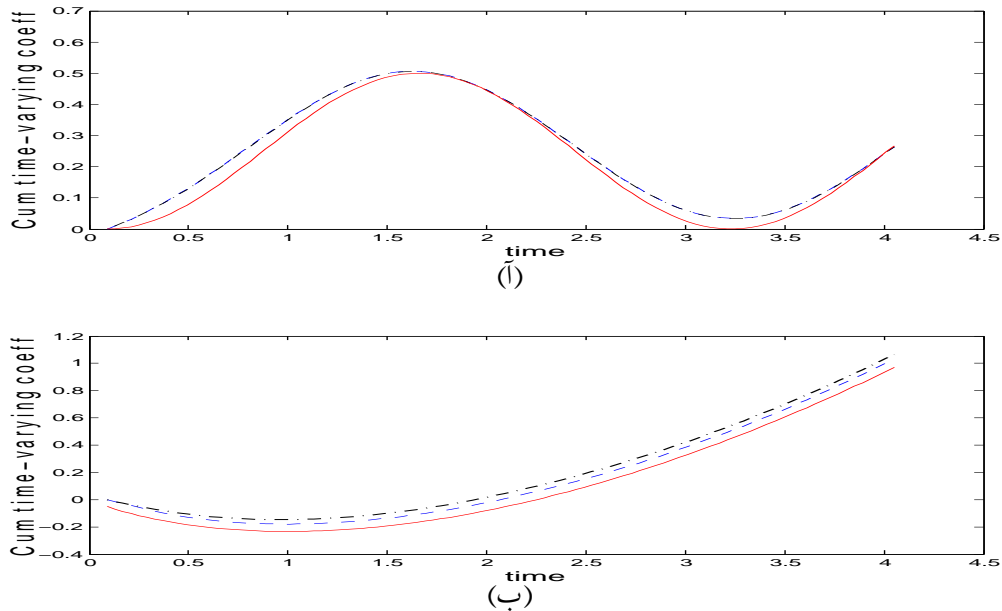
به منظور ارزیابی عملکرد برآورد ضرایب وابسته به زمان با استفاده از پهنای نوارهای متفاوت و مقایسه با حالتی با پهنای نوارهای یکسان، از مدل (۲.۳)، به کار رفته در فصل ۳، استفاده کردیم و شبیه‌سازی را در دو حالت ذکر شده انجام دادیم. شبیه‌سازی را با حجم نمونه ۲۰۰ و بر مبنای ۵۰۰ مجموعه داده شبیه‌سازی شده و هسته اپانچنیکوف انجام دادیم که گزارش آن را در جدول ۱.۴ آورده‌ایم. به طوری که در این جدول، ISB_1 و $MISE_1$ به ترتیب مقادیر اریبی جمع‌بسته توان دوم

جدول ۱.۴: نتایج شبیه‌سازی برای برآورد ضریب رگرسیونی تجمعی وابسته به زمان در مدل (۲.۳) با دو روش برازش

n	h_1	h_2	ISB_1	ISB_2	$MISE_1$	$MISE_2$
۲۰۰	۰/۵	۰/۲	۰/۰۰۳۳	۰/۰۱۳۲	۰/۱۴۰۷	۰/۱۷۷۵
	۰/۵	۰/۵	۰/۰۰۳۱	۰/۰۳۲۰	۰/۱۳۹۴	۰/۱۷۷۵

و میانگین جمع‌بسته توان دوم خطاها برای ضریب $B_1(t) = \int 0.5 \cos(2u - 1.75) du$ و همچنین ISB_2 و $MISE_2$ ، مقادیر مذکور برای ضریب $B_2(t) = \int 0.7(\sqrt{u} - 1) du$ هستند. همانطور که در جدول مشاهده می‌شود، با کاهش پهنای نوار مربوط به ضریب $B_2(\cdot)$ ، اریبی کوچکتر و در نتیجه برآورد دقیق‌تر می‌شود ضمن آن که خطا نیز تغییر نکرده است. این نتیجه حاکی از اهمیت در نظر گرفتن پهنای نوارهای متفاوت برای برآورد ضرایب وابسته به زمان می‌باشد. مشابه آنچه در فصل ۳

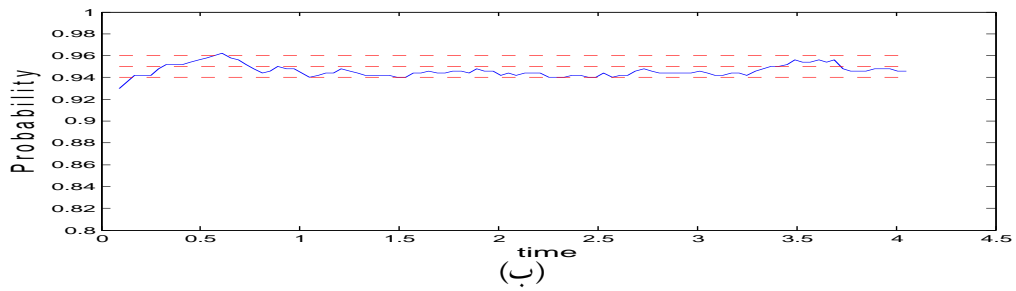
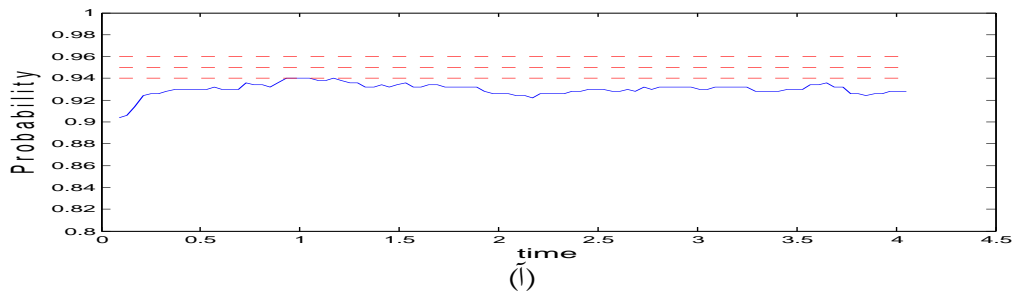
انجام دادیم، در این فصل نیز نمودارهای ضرایب رگرسیونی تجمعی (شکل ۱.۴) و نرخ‌های پوشش (شکل‌های ۲.۴ و ۳.۴) را رسم کردیم. شکل ۱.۴، منحنی خط‌چین برآورد ضریب با استفاده از دو



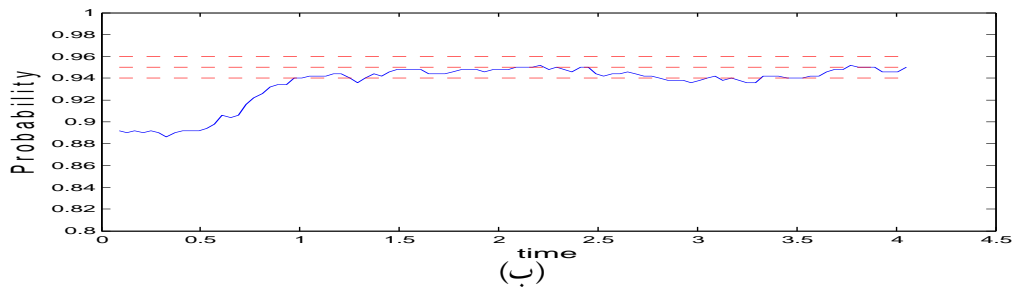
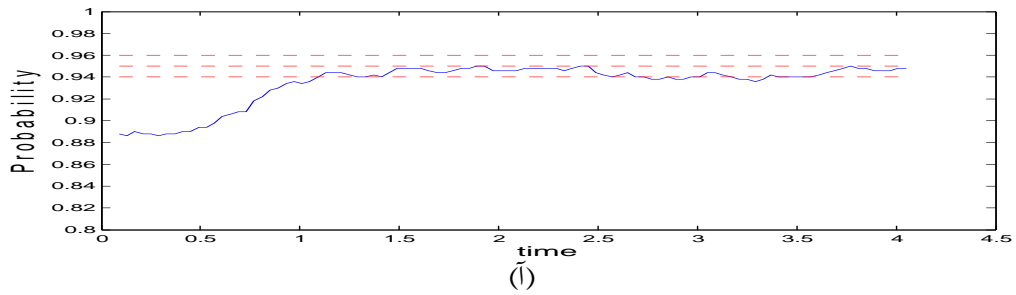
شکل ۱.۴: نمودار ضرایب رگرسیونی تجمعی در مدل (۲.۳) برای برآورد ضرایب $B_1(\cdot)$ (آ) و $B_2(\cdot)$ (ب).

پهنای نوار متفاوت، منحنی نقطه خط‌چین برآورد ضریب با یک پهنای نوار و منحنی توپر نیز تابع واقعی می‌باشد. با توجه به نمودار ب، برآورد با پهنای نوارهای متفاوت به منحنی واقعی نزدیک‌تر و اریبی کمتر است. با توجه به نمودار (آ)، برآورد ضرایب در دو حالت تفاوت چندانی ندارند و برآورد در هر دو حالت بسیار به هم نزدیک و تقریباً بر هم منطبق هستند. نرخ پوشش تجربی را برای $B_1(\cdot)$ و $B_2(\cdot)$ در دو حالت با پهنای نوار متفاوت و یکسان محاسبه کردیم که به ترتیب در شکل‌های ۲.۴ و ۳.۴ گزارش شده‌اند.

با توجه به شکل ۲.۴ نمودار (ب)، استفاده از پهنای نوارهای متفاوت، باعث قرار گرفتن نرخ‌های پوشش در بازه اطمینان شدند، در حالی که با استفاده از پهنای نوارهای یکسان، نمودار (آ)، این مقادیر خارج از بازه اطمینان قرار گرفتند. با استفاده از چند پهنای نوار، خطاهای استاندارد مجانی توصیف بسیار بهتری از تغییرات $\hat{B}_2(\cdot)$ نسبت به حالتی با پهنای نوار یکسان ارائه می‌دهند

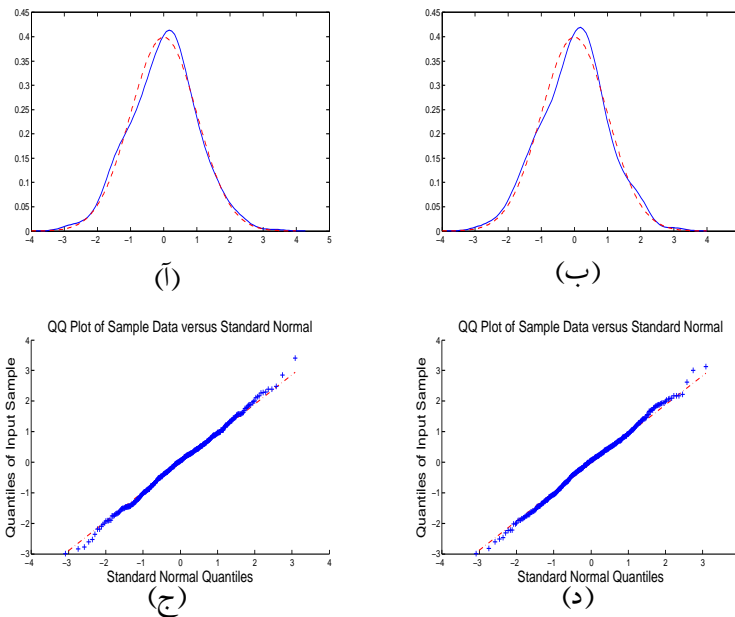


شکل ۲.۴: نمودار نرخ پوشش تجربی در مدل (۲.۳) برای برآورد $B_2(\cdot)$ با (آ) پهنای نوارهای یکسان، (ب) پهنای نوارهای متفاوت.



شکل ۳.۴: نمودار نرخ پوشش تجربی در مدل (۲.۳) برای برآورد ضرایب $B_1(\cdot)$ با (آ) پهنای نوارهای یکسان، (ب) پهنای نوارهای متفاوت.

که عملکرد بهتر حالتی با چند پهناى نوار را نشان می‌دهد. نمودار نرخ پوشش را برای ضریب $\hat{B}_1(\cdot)$ نیز در هر دو حالت رسم کردیم. با توجه به شکل ۳.۴، مقادیر نرخ‌های پوشش برای این دو حالت تقریباً یکسان است.



شکل ۴.۴: نمودارهای چگالی و چندک-چندک برآورد ضریب $B_2(\cdot)$ استاندارد شده با هسته اپانچنیکوف در مدل (۲.۳) در نقطه زمانی صدم با استفاده از: آ و ج) پهناى نوار متفاوت، ب و د) پهناى نوار یکسان.

مانند فصل ۳، نمودارهای چگالی نرمال و چندک-چندک را نیز برای $\hat{B}_2(\cdot)$ در دو حالت پهناى نوار متفاوت و یکسان در نقطه زمانی ۱۰۰ رسم کردیم. این نتایج در شکل ۴.۴ آمده‌اند. با توجه به این شکل، ضریب $\hat{B}_2(\cdot)$ در هر دو حالت دارای توزیع مجانبی نرمال می‌باشد. از آنجایی که نتایج مربوط به $\hat{B}_1(\cdot)$ در هر دو حالت تقریباً یکسان است بنابراین مشابه $\hat{B}_2(\cdot)$ ، برآورد $B_1(\cdot)$ با استفاده از پهناى نوارهای متفاوت نیز دارای توزیع مجانبی نرمال می‌باشد.

فصل ۵

کاربرد مدل: شوک‌های وارد شده به بیماران قلبی

در این فصل، کاربرد مدل پیشنهادی را بر روی داده‌های مربوط به ۶۵ بیمار قلبی که در بازه زمانی ابتدای سال ۱۳۸۴ لغایت پایان نیمه اول سال ۱۳۸۷ به مرکز قلب بیمارستان قائم (عج) مشهد مراجعه کردند، نشان می‌دهیم.

۱.۵ مقدمه

بیماری‌های قلبی عروقی، علت اصلی مرگ و میر در سراسر جهان بوده که هر ساله ۱۷/۳ میلیون نفر را به کام مرگ می‌فرستد (یک مرگ از سه مرگ) و اگر تا سال ۲۰۳۰ اقدام پیشگیرانه خاصی انجام نگیرد، این تعداد به ۲۳/۶ میلیون نفر خواهد رسید (مدرس و لونکار، ۲۰۰۶). در ایران مرگ و میر ناشی از بیماری‌های قلبی عروقی بعد از تصادفات، بالاترین درصد را دارد و این بیماری در بین سایر بیماری‌ها، مهم‌ترین عامل مرگ و میر در ایران شناخته شده است. حتی بررسی‌ها در ۱۸ استان کشور نشان می‌دهند که ۴۷/۳ درصد کل مرگ‌ها و ۲۷/۲ درصد از سال‌های از دست رفته عمر (تفاوت سن مرگ با سن امید به زندگی)، ناشی از این بیماری است (صراف‌زادگان و همکاران، ۱۹۹۹).

۲.۵ اهمیت مطالعه

یکی از اقدامات درمانی در بیماران مبتلا به بیماری قلبی پرخطر و به‌ویژه نارسایی قلبی، تعبیه دفیبریلاتور کاشتنی قلبی، ICD^۱، برای پیشگیری از مرگ ناگهانی می‌باشد. ICD دستگاه کوچکی است که ضربان قلب را کنترل می‌کند. این دستگاه مشابه ضربان‌ساز، جهت فرستادن پیام‌های الکتریکی به قلب دارای ضربان آهسته، از باتری‌هایی استفاده می‌کند. ICD همچنین می‌تواند به قلبی که ضربان نامنظم و بسیار سریعی دارد، شوک الکتریکی بدهد تا ضربان قلب طبیعی شود. دفیبریلاتور قلبی راهی برای بازگرداندن ضربان سریع و غیرطبیعی یا نامنظم قلب به حالت طبیعی از طریق یک شوک الکتریکی است. هر دستگاه ICD دارای دو بخش است: لید^۲ و مولد تپش. لیدها از سیم‌ها و سنسورها تشکیل شده‌اند که ضربان قلب را زیر نظر دارند و انرژی لازم را تخلیه می‌کنند. بخش مولد تپش، شامل باتری و یک رایانه ریز می‌باشد. انرژی داخل باتری ذخیره می‌شود و رایانه با اطلاعات به‌دست آمده از لیدها تشخیص می‌دهد که قلب چگونه می‌تپد. لید ICD از طریق سیاهرگ ناحیه زیر ترقوه چپ، بسته به نوع دستگاه، وارد دهلیز و بطن می‌شود. این دستگاه شامل انواع single chamber، two chamber و CRTD است. در single chamber، لید وارد بطن راست و در صورت نیاز، انرژی وارد بطن می‌شود. در two chamber، لیدها وارد دهلیز راست و بطن راست و بنابراین انرژی ابتدا به دهلیز راست و بعد وارد بطن راست می‌شوند. اما در CRTD، لیدها علاوه بر دهلیز راست و بطن راست، وارد بطن چپ نیز می‌شوند (سیرز و همکاران، ۲۰۰۹).

کارآزمایی‌های صورت گرفته، برتری ICD را در مقابل درمان طبی، هم در پیشگیری اولیه و هم در پیشگیری ثانویه در زمینه مرگ ناگهانی قلب ثابت کرده‌اند (سیرز و همکاران، ۲۰۰۹). در پیشگیری ثانویه برای افراد پرخطر نجات‌یافته از مرگ ناگهانی قلبی یا تاکی آریتمی بطنی^۳ مداوم یا سنکوپ، تعبیه ICD برای جلوگیری از مرگ ناگهانی صورت می‌گیرد اما در پیشگیری اولیه، تعبیه ICD در بیماران در خطر مرگ ناگهانی قلبی، بدون وقوع حوادث فوق انجام می‌شود. مطالعات صورت

^۱ Implantable Cardioverter Defibrillator

^۲ Lead

^۳ Ventricular tachycardia

گرفته نشان می‌دهند که بیماران با کسر تخلیه‌ای کاهش یافته به علت کاردیومیوپاتی^۴ (بیماری ماهیچه قلب) ایسکمیک^۵ (بیماری ناشی از کاهش خون‌رسانی به عضله قلب (میوکارد))، که دارای تاکی آریتمی بطنی ناپیوسته و قابل القا در مطالعات الکتروفیزیولوژی هستند، کاندیدای مناسبی برای پیشگیری اولیه جهت تعبیه ICD هستند (برنز و همکاران، ۲۰۰۵). در بیمار دارای ICD، در صورت بروز هر نوع افزایش ضربان قلب (تاکی کاردی^۶) بیش از یک حد مشخص تعریف شده، ICD با استفاده از الگوریتم‌های نرم‌افزاری تعبیه شده در آن، ابتدا مشخص می‌کند آیا تاکی کاردی مزبور، منشا بطنی دارد یا فوق بطنی. در صورتی که تشخیص دهد منشا آریتمی، بطنی است، با دادن شوک آن را خاتمه خواهد داد (شوک بجا)، و در صورتی که منشا آن را فوق بطنی تشخیص دهد، اقدامی برای قطع آن نخواهد کرد. آریتمی عبارت است از ریتم غیر طبیعی قلب. این حالت ممکن است تنها به شکل یک مکث موقت بوده و آنقدر کوتاه باشد که تعداد ضربان کلی قلب را تحت تاثیر قرار ندهد یا در عوض ممکن است سبب شود که ضربان بسیار سریع یا بسیار آهسته باشد. در صورتی که یک تاکی کاردی فوق بطنی توسط ICD به اشتباه تاکی کاردی بطنی تشخیص داده شود و منجر به تخلیه شوک شود، به آن شوک نابجا گفته می‌شود. بنابراین لازم است با برنامه‌ریزی ایده‌آل تدبیری اتخاذ شود که علی‌رغم تشخیص سریع تاکی کاردی‌های بطنی خطرناک، از تشخیص اشتباه تاکی کاردی‌های فوق بطنی به عنوان تاکی کاردی بطنی و شوک نابجا اجتناب شود. تشخیص عوامل خطر برای بروز تاکی کاردی و فیبریلاسیون بطنی (نوعی از آریتمی قلبی که تحریک الکتریکی، مسیر مشخصی را در قلب طی نمی‌کند) از چند جهت حایز اهمیت است.

۱. اول آن که بیماران با عوامل خطر متعدد، ممکن است با استفاده از درمان‌های آنتی آریتمیک شدیدتر، با حادثه تاکی کاردی بطنی و فیبریلاسیون بطنی که منجر به شوک ICD خواهد شد، مواجه نشوند.

۲. دوم آن که، شناسایی عوامل خطر برای بروز تاکی کاردی و فیبریلاسیون بطنی، انتخاب صحیح بیمارانی را که از تعبیه ICD برای پیشگیری از مرگ ناگهانی سود می‌برند، تسهیل خواهد کرد.

^۴Cardiomyopathy

^۵Ischemic

^۶Tachycardia

تاخیر هدایت داخل بطنی که با افزایش مدت QRS (زمان برای دپلاریزاسیون بطنی^۷) نشان داده می‌شود، پیشگویی قوی برای مرگ و میر در بیماران با سابقه آنفارکتوس میوکارد نارسایی قلبی می‌باشد. از سویی، مطالعات متعددی نشان داده‌اند که مدت QRS طولانی، همراه با افزایش خطر آریتمی و مرگ ناگهانی قلبی است. همچنین بیان شده است که افزایش مدت QRS، همراه با افزایش خطر مرگ ناگهانی، پس از آنفارکتوس میوکارد و افزایش میزان قابل القا بودن تاکی آریتمی‌های مداوم بطنی بوده است. لیکن مفید بودن زمان QRS در پیشگویی حوادث آریتمیک بطنی در بیماران دارای ICD به طور کامل ارزیابی نشده و نتایج متناقض بوده‌اند. از سوی دیگر، اکثر شوک‌های نابجا در ICD، به علت تاکی آریتمی‌های دهلیزی، با پاسخ بطنی تند و تاکی کاردی سینوسی رخ می‌دهند. یکی از معیارهای مورد استفاده در جهت افتراق تاکی کاردی بطنی از آریتمی‌های فوق بطنی و اجتناب از شوک نابجا، مدت زمان QRS می‌باشد. بنابراین به نظر می‌رسد یکی از پیشگویی‌های مناسب برای نرخ شوک، مدت زمان QRS است.

۳.۵ معرفی داده‌ها

برای بیماران تحت مطالعه در این فصل، به دلایل مختلف بالینی برای آن‌ها ICD تعبیه گردید. مدن زمان QRS در نوار قلبی بیماران قبل از تعبیه ICD با دقت یک هزارم میلی‌متر با استفاده از کولیس دیجیتال اندازه‌گیری گردید. جهت افزایش دقت مطالعه، در دو نوبت نوار فوق اندازه‌گیری و میانگین دو نوبت ثبت گردید. علاوه بر این، سن بیماران و نوع دستگاه ICD به کار رفته برای هر بیمار نیز ثبت شدند. پس از تعبیه ICD، بیماران به‌طور منظم تحت پیگیری یک، سه و شش ماهه قرار گرفتند. در ویزیت‌های پیگیری، بیماران تحت بازبینی قرار گرفتند و آریتمی‌های ثبت‌شده در حافظه ICD بررسی و درمان‌های انجام‌شده توسط آن از جمله شوک‌های بجا یا نابجا به شکل نرم‌افزاری ثبت شدند.

برای تحلیل داده‌ها، ابتدا افرادی را که زمان دریافت شوک برای آن‌ها مقادیری گم‌شده بود، از مطالعه خارج کردیم و در نتیجه تعداد بیماران به ۴۴ نفر تقلیل یافت. با توجه به توضیحات قبلی و

^۷Ventricular Depolarization

اطلاعات موجود، سه متغیر سن، QRS و نوع دستگاه را به عنوان عوامل موثر بر نرخ شوک در نظر گرفتیم. سه نوع دستگاه ICD با مقادیر ۱ برای نوع اول، ۲ برای نوع دوم و ۳ برای نوع سوم، ثبت شدند. برای تعیین چگونگی تاثیر این سه نوع دستگاه بر نرخ شوک، متغیر ظاهری $X_i(\cdot)$ را برابر ۱ تعریف کردیم، اگر دستگاه نوع اول باشد و متغیر $Z_i(\cdot)$ را برابر ۱ تعریف کردیم، اگر دستگاه نوع دوم باشد. متغیرهای $W_i(\cdot)$ و $V_i(\cdot)$ را نیز به ترتیب متغیرهای سن و QRS انتخاب نمودیم.

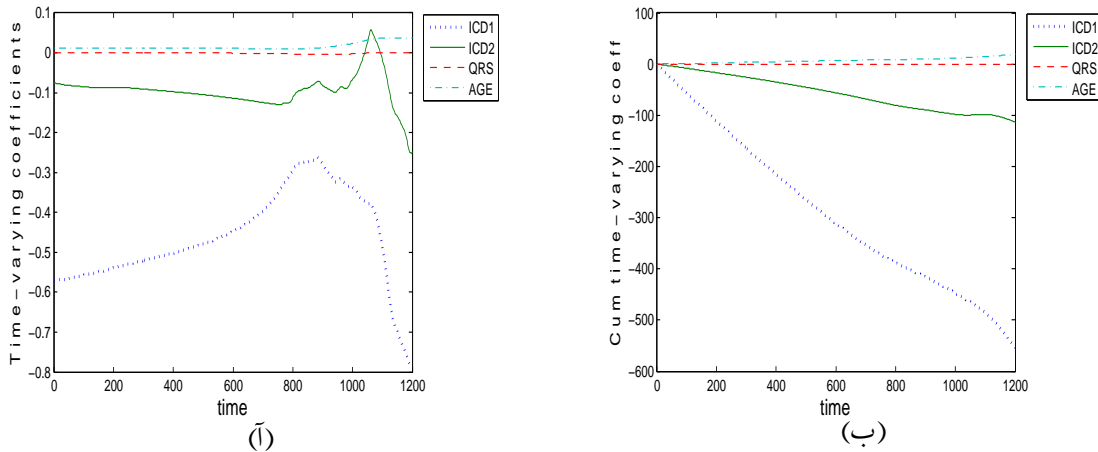
۴.۵. برازش مدل و تحلیل داده‌ها

برای تعیین وابسته به یا مستقل از زمان بودن متغیرها، ابتدا همه متغیرها را وابسته به زمان تعریف و مدل را به صورت زیر در نظر گرفتیم:

$$E\{dN_i^*(t)|X_i(t), Z_i(t), W_i(t), V_i(t)\} = \exp\{\beta_1(t)X_i(t) + \beta_2(t)Z_i(t) + \beta_3(t)W_i(t) + \beta_4(t)V_i(t)\}d\mu_0(t). \quad (1.5)$$

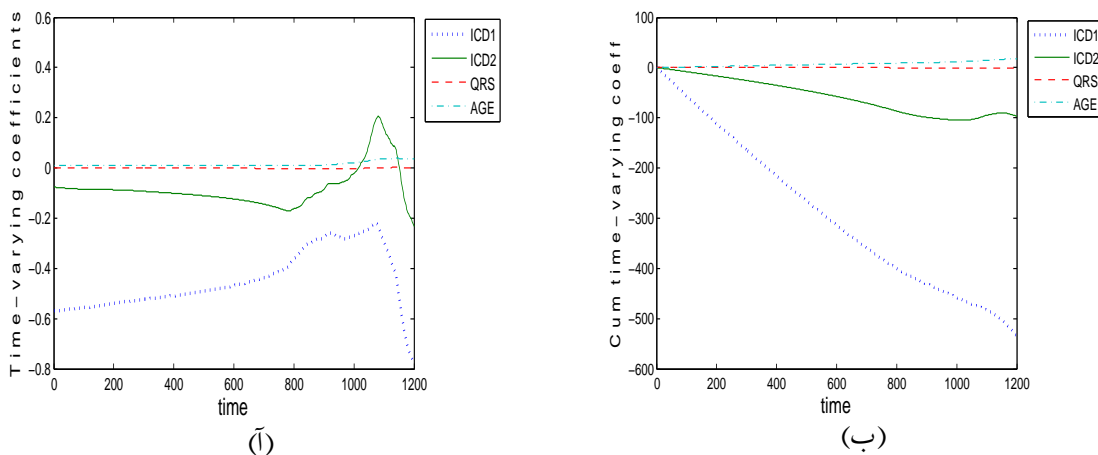
با توجه به نتایج قوی‌تر هسته اپانچنیکوف نسبت به هسته نرمال در فصل ۳ و همچنین تاثیر اندک تغییر پهنای نوار در حجم‌های متفاوت، برای این داده‌ها از هسته اپانچنیکوف استفاده کردیم و پهنای نوار را برابر $h = 760$ روز انتخاب کردیم. با این پهنای نوار، همواری مناسب و خطای کمی داریم. برای آزمون وابسته به زمان بودن این چهار متغیر، آماره‌های دو آزمون \mathcal{F}_1 و \mathcal{F}_2 در فصل ۲ را برای $B_1(\cdot)$ ، $B_2(\cdot)$ ، $B_3(\cdot)$ و $B_4(\cdot)$ ، با استفاده از روش لین و همکاران (۲۰۰۰) بر مبنای ۱۰۰۰ تکرار، محاسبه کردیم. p -مقادیرهای هر دو آزمون برای هر چهار متغیر، کمتر از ۰/۰۰۲ به دست آمدند. بنابراین اثر همه متغیرهای تبیینی، وابسته به زمان شناخته شدند.

شکل ۱.۵، ضرایب رگرسیونی $\beta_0(t)$ و $B_0(t)$ را در مقابل زمان نشان می‌دهد، که در آن ICD1 نشان‌دهنده ضریب رگرسیونی متغیر $X(\cdot)$ و ICD2 ضریب $Z(\cdot)$ است. با توجه به شکل ۱.۵ (الف)، دستگاه نوع اول نسبت به نوع سوم، به‌طور متوسط، دارای نرخ شوک کمتری است (به مقادیر منفی منحنی مربوط به دستگاه نوع اول دقت کنید)، اما اختلاف این نرخ بین دو دستگاه تا



شکل ۱.۵: نمودارهای مربوط به مدل (۱.۵): (آ) ضرایب رگرسیونی $\beta_0(t)$ (ب) ضرایب رگرسیونی تجمعی $B_0(t)$ با پارامترهای همواری یکسان.

۸۰۰امین روز، به‌طور پیوسته در حال کاهش است و از زمان ۸۰۰ام به بعد این اختلاف افزایش می‌یابد. بنابراین، می‌توان گفت دستگاه نوع سوم نسبت به نوع اول همواره نرخ شوک بالاتری داراست. برای دستگاه نوع دوم نسبت به نوع سوم نیز تقریباً می‌توان نتیجه مشابهی را مشاهده کرد. البته اختلاف بین نرخ شوک در این دو دستگاه، نسبت به دستگاه‌های نوع اول و سوم، خیلی کمتر



شکل ۲.۵: نمودارهای مربوط به مدل (۱.۵): (آ) ضرایب رگرسیونی $\beta_0(t)$ (ب) ضرایب رگرسیونی تجمعی $B_0(t)$ با پارامترهای همواری متفاوت.

است و حتی در بازه کوتاهی حول روز ۱۱۰۰م نرخ شوک دستگاه نوع دوم بیشتر از نوع سوم برآورد شده است.

بنابراین، به‌طور خلاصه، با توجه به شکل ۱.۵ (ب) می‌توان گفت تغییرات دستگاه نوع اول نسبت به نوع سوم، در طول زمان، بسیار بیشتر از تغییرات دستگاه نوع دوم نسبت به نوع سوم است. این بیان‌گر آن است که دستگاه نوع اول بسیار متفاوت‌تر از دو نوع دیگر عمل می‌کند و با توجه به شکل ۱.۵ (آ)، این دستگاه تعداد شوک کمتری نسبت به دو نوع دیگر وارد می‌کند. این امر می‌تواند نشان از آن باشد که برای بیماران تحت مطالعه، این دستگاه تعداد شوک نابجای کمتری نسبت به دو نوع دیگر بر بیماران وارد می‌کند.

متغیر سن تا قبل از روز ۱۹۰۰م تقریباً ثابت است و پس از آن تا پایان مطالعه اثری افزایشی در نرخ دریافت شوک دارد. این نشان می‌دهد که با افزایش زمان و در نتیجه افزایش سن، نرخ شوک دریافتی بیشتر می‌شود. متغیر QRS نیز، علی‌رغم آن‌که وابسته به زمان بودن اثرش معنی‌دار تشخیص داده شد، تغییر کمی در طول زمان دارد. اما با توجه به معنی‌دار و مثبت بودن ضریب برآوردشده برای آن، می‌توان گفت افزایش QRS بر افزایش نرخ شوک‌های واردشده اثر معنی‌دار دارد. این نتیجه انتظار اولیه ما را برآورده می‌کند.

داده‌ها را با استفاده از چند پارامتر همواری نیز تحلیل کردیم. برای این منظور پهنای نوارهای $h_1 = 79^\circ$ ، $h_2 = 79^\circ$ ، $h_3 = 77^\circ$ و $h_4 = 78^\circ$ را به ترتیب برای متغیرهای ICD1، ICD2، QRS و سن به کار بردیم. با این تغییر با توجه به شکل (۲.۵) (آ)، ضرایب مربوط به متغیرهای ICD1 و ICD2 هموارتر شدند و اثرات دو متغیر دیگر تغییر زیادی نکردند. در این وضعیت، برخلاف حالتی که به کار بردن پهنای نوارهای یکسان، اختلاف نرخ شوک دریافتی توسط دو دستگاه نوع اول و نوع سوم تا حول روز ۱۱۰۰م در حال کاهش است و از این زمان تا پایان مطالعه، اختلاف دو دستگاه زیاد می‌شود در حالی که با استفاده از پهنای نوارهای یکسان، این اختلاف تا زمان ۱۸۰۰م کاهش می‌یابد. در این حالت نیز دستگاه نوع سوم همواره نرخ شوک بالاتری دارد. نرخ شوک دریافتی توسط دستگاه نوع دوم و سوم نیز در این حالت، مشابه حالتی که با استفاده از پهنای نوارهای یکسان است، با این تفاوت که در این حالت در بازه کوتاهی حول روز ۱۱۰۰م، نرخ شوک

دستگاه نوع دوم بیشتر از نرخ شوک این دستگاه در حالتی با پهنای نوارهای یکسان است.

۵.۵ پیشنهادات برای آینده تحقیق

با توجه به مطالب نظری و مطالعه شبیه‌سازی در این پایان‌نامه، می‌توان به موارد زیر به عنوان آینده تحقیق اشاره کرد:

۱. زمانی که ناهمواری ضرایب رگرسیونی زیاد است، استفاده از اسپلاین‌ها^۸ به عنوان رهیافتی جانشین توصیه می‌شود (هستی و همکاران، ۲۰۰۹). بنابراین استفاده از اسپلاین‌ها، به جای هسته‌ها در مدل معرفی شده، می‌تواند منجر به نتایج دقیق‌تری شود.
۲. مدل‌بندی پیشامدهای بازگشتی با مدل‌های نیمه‌پارامتری بقا از دیدگاه بیزی می‌تواند جالب توجه باشد. با در نظر گرفتن توزیعی پیشین برای ضرایب، می‌توان به بهبود دقت نتایج امیدوار بود (ماندا و میر، ۲۰۰۵، پنل و دانسون، ۲۰۰۶).
۳. در این پایان‌نامه از تقریب مرتبه اول بسط تیلور استفاده کردیم. بدیهی است با در نظر گرفتن بسط تیلور با مراتب بالاتر، به تقریب‌های دقیق‌تری دست می‌یابیم.
۴. در این پایان‌نامه برای برآورد پارامترها، از روش عددی نیوتون-رافسون استفاده کردیم. حساس بودن این روش به مقدار اولیه پارامتر، استفاده از آن را دچار مشکل می‌کند و در برخی موارد، با در نظر گرفتن مقدار اولیه‌ای نامناسب، الگوریتم‌های مفروض برای برآورد پارامترها، همگرا نمی‌شوند. بنابراین روش‌هایی که به مقدار اولیه بستگی ندارند، می‌توانند مطرح شوند.
۵. استفاده از بوت‌استرپ به جای رهیافت مجانبی برای برآورد توزیع تقریبی برآوردگرها در حالتی که حجم نمونه کوچک است می‌تواند مفید باشد.

^۸Spline

پیوست

نمادها و تعریفها

برخی از کمیت‌ها در متن پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند که تعریف‌های آن‌ها به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} \phi(t) = \phi_i(t; \beta, \gamma) &= \phi_i(t; \beta(t), \gamma) = Y_i(t) \exp\{\beta(t)^T \mathbf{X}_i(t) + \gamma^T \mathbf{Z}_i(t)\} \\ \phi(t; \beta, \gamma) &= (\phi_1(t; \beta, \gamma), \dots, \phi_n(t; \beta, \gamma))^T \\ \Phi(t, \beta, \gamma) &= \text{diag}\{\phi_i(t; \beta, \gamma)\} \\ S_o(t) = S_o(t; \beta, \gamma) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(t; \beta, \gamma) \\ \mathbf{S}_x(t) = \mathbf{S}_x(t; \beta, \gamma) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(t; \beta, \gamma) \mathbf{X}_i(t) \\ \mathbf{S}_z(t) = \mathbf{S}_z(t; \beta, \gamma) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i(t; \beta, \gamma) \mathbf{Z}_i(t) \\ \mathbf{E}_x(t) = \mathbf{E}_x(t; \beta, \gamma) &= \frac{\mathbf{S}_x(t; \beta, \gamma)}{S_o(t; \beta, \gamma)} \\ \mathbf{E}_z(t) = \mathbf{E}_z(t; \beta, \gamma) &= \frac{\mathbf{S}_z(t; \beta, \gamma)}{S_o(t; \beta, \gamma)} \end{aligned}$$

$\bar{X}(t) = \bar{X}(t; \beta, \gamma)$ ماتریسی با n سطر و p ستون با سطرهای $E_x(t; \beta, \gamma)$ است.

$\bar{Z}(t) = \bar{Z}(t; \beta, \gamma)$ ماتریسی با n سطر و q ستون با سطرهای $E_z(t; \beta, \gamma)$ است.

$$E_{xx}(t) = E_{xx}(t; \beta, \gamma) = \frac{1}{n} \{X(t) - \bar{X}(t; \beta, \gamma)\}^T \Phi(t; \beta, \gamma) \{X(t) - \bar{X}(t; \beta, \gamma)\}$$

$$E_{zx}(t) = E_{zx}(t; \beta, \gamma) = \frac{1}{n} \{Z(t) - \bar{Z}(t; \beta, \gamma)\}^T \Phi(t; \beta, \gamma) \{X(t) - \bar{X}(t; \beta, \gamma)\}$$

$$E_{zz}(t) = E_{zz}(t; \beta, \gamma) = \frac{1}{n} \{Z(t) - \bar{Z}(t; \beta, \gamma)\}^T \Phi(t; \beta, \gamma) \{Z(t) - \bar{Z}(t; \beta, \gamma)\}$$

$$E_{xx}^l(t) = E_{xx}(t; \beta^l, \gamma^l), \quad E_{zx}^l(t) = E_{zx}(t; \beta^l, \gamma^l), \quad E_{zz}^l(t) = E_{zz}(t; \beta^l, \gamma^l)$$

$$S_o^l(t) = S_o(t; \beta^l, \gamma^l), \quad \mathbf{S}_x^l(t) = \mathbf{S}_x(t; \beta^l, \gamma^l), \quad \mathbf{S}_z^l(t) = \mathbf{S}_z(t; \beta^l, \gamma^l)$$

$$\Phi^l(t) = \Phi(t; \beta^l, \gamma^l)$$

$$\bar{X}^l(t) = \bar{X}(t; \beta^l, \gamma^l), \quad \bar{Z}^l(t) = \bar{Z}(t; \beta^l, \gamma^l)$$

مقادیر حدی استفاده شده در متن نیز به صورت زیر تعریف می شوند:

فرض کنید وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\mathbf{e}_z(t; \beta, \gamma)$ ، $\mathbf{e}_x(t; \beta, \gamma)$ ، $\mathbf{s}_z(t; \beta, \gamma)$ ، $\mathbf{s}_x(t; \beta, \gamma)$ ، $s_o(t; \beta, \gamma)$ ، $n \rightarrow \infty$

به ترتیب مقادیر حدی $e_{zz}(t; \beta, \gamma)$ و $e_{zx}(t; \beta, \gamma)$ ، $e_{xx}(t; \beta, \gamma)$

، $\mathbf{S}_x(t; \beta, \gamma)$ ، $S_o(t; \beta, \gamma)$ هستند. $E_{zz}(t; \beta, \gamma)$ و $E_{zx}(t; \beta, \gamma)$ ، $E_{xx}(t; \beta, \gamma)$ ، $\mathbf{E}_z(t; \beta, \gamma)$ ، $\mathbf{E}_x(t; \beta, \gamma)$ ، $\mathbf{S}_z(t; \beta, \gamma)$

قرار می دهیم $s_o(t) = s_o(t; \beta_o, \gamma_o)$ و به طور مشابه، نمادهای $\mathbf{e}_z(t)$ ، $\mathbf{e}_x(t)$ ، $\mathbf{s}_z(t)$ ، $\mathbf{s}_x(t)$

و $e_{zz}(t)$ و $e_{zx}(t)$ ، $e_{xx}(t)$ تعریف می شوند. مقدار حدی $A(\tau)$ را نیز به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a(\tau) = \int_0^\tau [e_{zz}(t) - e_{zx}(t)e_{xx}(t)^{-1}e_{zx}(t)^T] d\mu_o(t).$$

مقدار $A(\tau, \beta, \gamma)$ در $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$ را نیز به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\hat{A}(\tau) = A(\tau; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = \int_0^\tau [\hat{E}_{zz}(t) - \hat{E}_{zx}(t)\hat{E}_{xx}(t)^{-1}\hat{E}_{zx}(t)^T] d\hat{\mu}_o(t).$$

همچنین فرض می کنیم $\bar{x}(t)$ ، مقدار حدی $\bar{X}(t)$ ، ماتریسی $n \times p$ با سطرهای $\mathbf{e}_x(t)$ و $\bar{z}(t)$ ، مقدار

حدی $\bar{Z}(t)$ ، ماتریسی $n \times q$ با سطرهای $\mathbf{e}_z(t)$ است.

مفاهیمی که در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته اند به صورت تعریف و به شرح زیر بیان

کرده ایم.

تعریف ۱۲. ویژگی های همگرایی در احتمال

اگر X_n و Y_n دو دنباله از متغیرهای تصادفی باشند، به گونه‌ای که $X_n \xrightarrow{P} c$ و $Y_n \xrightarrow{P} d$ آن‌گاه (بین و انگل‌هارد، ۱۳۸۴):

$$۱. aX_n + bY_n \xrightarrow{P} ac + bd$$

$$۲. X_n Y_n \xrightarrow{P} cd$$

$$۳. \frac{X_n}{c} \xrightarrow{P} 1, c \neq 0$$

$$۴. \frac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{c}, c \neq 0, P[X_n \neq 0] = 1, n \text{ هر ازای هر } n$$

$$۵. \sqrt{X_n} \xrightarrow{P} \sqrt{c}, P[X_n \geq 0] = 1, n \text{ هر ازای هر } n$$

تعریف ۱۳. سازگاری^۱

X را برای μ سازگار گویند، هرگاه

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

تعریف ۱۴. نرم^۲

فرض کنید X فضایی برداری باشد. تابع $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم روی X می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$۱. \text{ به ازای هر } x \in X \text{ داشته باشیم } \|x\| \geq 0$$

$$۲. \text{ به ازای هر } x \in X \text{ داشته باشیم } \|x\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0$$

$$۳. \text{ به ازای هر } x \in X \text{ و هر اسکالر } \alpha \text{ داشته باشیم } \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$۴. \text{ به ازای هر } x, y \in X \text{ داشته باشیم } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (نامساوی مثلث).}$$

^۱Consistency

^۲Norm

تعریف ۱۵. نرم اقلیدسی^۳

$\|\mathbf{X}\|$ را روی بردار $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p) \in \mathbb{R}^p$ نرم اقلیدسی گوئیم، هرگاه به صورت

$$\|\mathbf{X}\| = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^p X_i^2 \right)^{1/2}.$$

تعریف شود. در این پایان‌نامه هر جا از نرم استفاده می‌کنیم، منظورمان نرم اقلیدسی است.

تعریف ۱۶. گوی^۴ (گوی باز)

فرض کنید X و θ عضو \mathbb{R}^p باشند. به ازای $\rho > 0$ مجموعه

$$B_{\theta, \rho} = \{X \mid \|X - \theta\| < \rho\} = (\theta - \rho, \theta + \rho),$$

را یک گوی باز به مرکز θ و شعاع ρ می‌نامیم. به همین ترتیب

$$B_{[\theta, \rho]} = \{X \mid \|X - \theta\| \leq \rho\} = [\theta - \rho, \theta + \rho],$$

را یک گوی بسته^۵ به مرکز θ و شعاع ρ می‌نامیم.

تعریف ۱۷. نقطه درونی مجموعه^۶

فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^p$. نقطه $\theta \in X$ را یک نقطه درونی مجموعه X می‌نامیم در صورتی که

گوی بازی مانند $B_{\theta, \rho}$ وجود داشته باشد به طوری که جزء X باشد. به عبارت دیگر

$$\forall \theta \in X \exists B_{\theta, \rho} \subseteq X.$$

تعریف ۱۸. مجموعه باز^۷

مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^p$ را باز می‌نامیم، در صورتی که هر نقطه آن درونی باشد و X را بسته^۸ می‌نامیم

در صورتی که $\mathbb{R}^p - X$ باز باشد.

تعریف ۱۹. مجموعه کران‌دار^۹

^۳ Euclidean norm

^۴ Open ball

^۵ Closed ball

^۶ Interior point of a set

^۷ Open set

^۸ Closed set

^۹ Bounded set

فرض کنید A یک زیر مجموعه ناتهی از \mathbb{R} باشد. گوییم A از بالا کران دار است، اگر عددی مانند a موجود باشد به طوری که به ازای هر x از A داشته باشیم $x \leq a$. اگر عددی مانند b موجود باشد به طوری که به ازای هر y از A داشته باشیم $b \leq y$ ، آن گاه می گوییم A از پایین کران دار است. مجموعه A را کران دار می نامیم، در صورتی که A از بالا و پایین کران دار باشد.

تعریف ۲۰. مجموعه فشرده^{۱۰}

مجموعه ای را فشرده می نامیم، اگر و تنها اگر بسته و کران دار باشد.

تعریف ۲۱. مشتق بردار

مشتق های بردار نسبت به اسکالر، اسکالر نسبت به بردار و بردار نسبت به بردار به ترتیب به صورت های زیر تعریف می شوند:

مشتق بردار $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ نسبت به اسکالر x :

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

مشتق اسکالر x نسبت به بردار \mathbf{y} :

$$\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \quad \frac{\partial x}{\partial y_2} \quad \dots \quad \frac{\partial x}{\partial y_n} \right).$$

مشتق بردار \mathbf{y} نسبت به بردار $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial z_1} & \frac{\partial y_n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial z_m} \end{pmatrix}.$$

تعریف ۲۲. بسط تیلور^{۱۱}

برای تعریف بسط تیلور، ابتدا نیاز داریم تا سری توانی را معرفی کنیم. یک سری به شکل

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

که در آن a_0, a_1, a_2, \dots اعدادی ثابت هستند، یک سری توانی از x می باشد. در حالت کلی، سری توانی برای $|x| < R$ همگرا و برای $|x| > R$ واگراست. در اینجا R عدد ثابتی است که آن را شعاع

^{۱۰} Compact set

^{۱۱} Taylor expansion

همگرایی سری می‌نامند. برای $|x| = R$ ، سری می‌تواند همگرا یا واگرا باشد.

بسط تیلور، نمایش یک تابع به صورت مجموع بی‌نهایت جمله است که از مشتق‌های تابع در یک نقطه به دست می‌آیند. با استفاده از این بسط، توابع را می‌توان حول یک نقطه با تعداد متناهی از جملات تقریب زد. بسط تیلور یک تابع $f(x)$ با مقادیر حقیقی یا مختلط که در همسایگی نقطه حقیقی یا مختلط x_0 بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، سری توانی زیر است:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \dots,$$

که می‌توانیم به صورت خلاصه‌تر زیر بنویسیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

تعریف ۲۳. روش عددی نیوتون-رافسون^{۱۲}

قسمت‌هایی از مسایل استنباط آماری به پیدا کردن ریشه یک معادله، می‌نیم‌سازی یک تابع یا یافتن برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی منتهی می‌شوند. این گونه مسایل، حل یک معادله یا یک دستگاه معادلات را شامل می‌شوند که حل آن‌ها به یک فرم تحلیلی منتهی نمی‌شوند. در چنین مواردی، باید جواب‌های تقریبی برای آن‌ها به دست آورد. یک رهیافت برای حصول جواب‌های تقریبی، حل عددی معادله‌ها با روش‌های عددی است. یکی از این روش‌های عددی، روش نیوتون-رافسون است. در این روش با داشتن مقدار اولیه x_0 ، خطی بر تابع f در این نقطه مماس می‌کنیم. خط مماس f در x_0 عبارتست از:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

نقطه صفر این خط مماس را برابر x_1 قرار می‌دهیم. نقطه صفر (ریشه) این خط، x_1 ، در معادله زیر صدق می‌کند:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0.$$

اکنون می‌توان جای x_0 را با x_1 عوض کرد و عمل را تکرار کرد. تکرار را تا آنجا ادامه می‌دهیم که

^{۱۲}Newton-Raphson

ریشه به دست آمده به مقدار واقعی نزدیک باشد. این عمل منتهی به رابطه زیر می شود:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

به طور مشابه برای ابعاد بالاتر از یک، خواهیم داشت

$$x_{i+1} = x_i - f'(x_i)^{-1} f(x_i),$$

که در آن $f'(x)$ ماتریس مشتق‌های جزئی است.

تعریف ۲۴. قضیه حد مرکزی چندمتغیره

فرض کنید $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ بردارهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع در R^k با بردار میانگین $\mu = E(\mathbf{X}_i)$ و ماتریس کوواریانس Σ باشند. این قضیه بیان می‌کند که اگر مجموع این بردارها را استاندارد کنیم، آن‌گاه آماره به دست آمده به توزیع نرمال چندمتغیره همگراست. اگر تعریف کنیم

$$\begin{pmatrix} X_{1(1)} \\ \vdots \\ X_{1(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{2(1)} \\ \vdots \\ X_{2(k)} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} X_{n(1)} \\ \vdots \\ X_{n(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_{i(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_{i(k)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i,$$

آن‌گاه می‌توان بردار میانگین را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_{i(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_{i(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}_{i(1)} \\ \vdots \\ \bar{X}_{i(k)} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{X}}_n.$$

بنابراین داریم

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [\mathbf{X}_i - E(\mathbf{X}_i)] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [\mathbf{X}_i - \mu] = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \mu).$$

قضیه حد مرکزی چندمتغیره بیان می‌کند

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \mu) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \Sigma).$$

به طوری که

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_{1(1)}) & \text{Cov}(X_{1(1)}, X_{1(2)}) & \text{Cov}(X_{1(1)}, X_{1(3)}) & \dots & \text{Cov}(X_{1(1)}, X_{1(k)}) \\ \text{Cov}(X_{1(2)}, X_{1(1)}) & \text{Var}(X_{1(2)}) & \text{Cov}(X_{1(2)}, X_{1(3)}) & \dots & \text{Cov}(X_{1(2)}, X_{1(k)}) \\ \text{Cov}(X_{1(3)}, X_{1(1)}) & \text{Cov}(X_{1(3)}, X_{1(2)}) & \text{Var}(X_{1(3)}) & \dots & \text{Cov}(X_{1(3)}, X_{1(k)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_{1(k)}, X_{1(1)}) & \text{Cov}(X_{1(k)}, X_{1(2)}) & \text{Cov}(X_{1(k)}, X_{1(3)}) & \dots & \text{Var}(X_{1(k)}) \end{pmatrix},$$

و منظور از \xrightarrow{D} ، همگرایی در توزیع است.

تعریف ۲۵. پیوستگی یکنواخت^{۱۳}

اگر مقادیر x و y به اندازه کافی به یکدیگر نزدیک باشند و آن‌گاه بتوان گفت مقادیر $f(x)$ و $f(y)$ نیز به اندازه دلخواه به هم نزدیک هستند، f را پیوسته یکنواخت می‌گوییم. به عبارت دیگر

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x, y \quad (|y - x| < \delta \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon).$$

تعریف ۲۶. فرآیند پواسن^{۱۴}

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی را فرآیند می‌گویند. در فرآیند پواسن اتفاقاتی را در نظر می‌گیریم که در زمان‌های تصادفی رخ می‌دهند و $N(t)$ نشان‌دهنده تعداد چنین اتفاقاتی در فاصله $[0, t]$ باشد. مجموعه متغیرهای تصادفی $\{N(t), t \geq 0\}$ را یک فرآیند پواسن با نرخ λ ($\lambda > 0$) گوییم، اگر

$$N(0) = 0. \quad ۱.$$

۲. تعداد اتفاقاتی که در فاصله‌های مجزا رخ می‌دهند، مستقل از یکدیگر باشند.

۳. توزیع تعداد اتفاقاتی که در یک فاصله رخ می‌دهند، فقط به طول فاصله بستگی داشته و به محل قرار گرفتن آن فاصله وابسته نباشد.

$$P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h). \quad ۴.$$

$$P\{N(h) \geq 2\} = o(h). \quad ۵.$$

شرط (۱) بیان می‌کند که فرآیند از صفر شروع می‌شود. شرط (۲) فرض استقلال وقوع اتفاقات در فواصل مجزا را بیان می‌دارد. مثلاً تعداد اتفاقاتی که تا زمان t رخ می‌دهد (یعنی $N(t)$) مستقل از تعداد اتفاقاتی است که در فاصله t و $t+s$ (یعنی $N(t+s) - N(t)$) رخ می‌دهند. شرط (۳) یعنی توزیع احتمالی $N(t+s) - N(t)$ برای همه مقادیر t ثابت می‌ماند. در یک فرآیند پواسن با نرخ λ داریم (راس، ۱۳۸۳)

$$P\{N(t) = n\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}.$$

^{۱۳}Uniform continuity

^{۱۴}Poisson process

پیوست ب

کد برنامه R برای اجرای مثال اول فصل سوم

دستورات لازم برای بازتولید نتایج مثال اول در فصل سوم در این پیوست گزارش شده‌اند که هر قسمت را به طور جدا توضیح داده‌ایم.
۱. تولید یک مجموعه داده بازگشتی با حجم ۵۰:

```
n=50
c_pre=4.5
c=2+3*runif(n)
x=rnorm(n)
z=rbinom(n,1,0.5)
pp=length(c)
p_rand=1000
c_int=seq(0,1,(1/(p_rand-1)))
cc=matrix(0,pp,p_rand)
xx=matrix(0,pp,p_rand)
zz=matrix(0,pp,p_rand)
tt=matrix(0,pp,p_rand)
for (i in 1:p_rand) {
  cc[,i]=c
  xx[,i]=x
  zz[,i]=z
}
for (i in 1:pp) {
  tt[i,]=c_int
}
tt=tt*cc
cc=function(t){
cc=exp(-1/2)*exp(0.5*sin(2*t)*xx+0.5*zz)
```

```

return(cc)
}
cc=cc(tt)
c_len=0.5*(1/p_rand)*c
ccc=cc[,2:(p_rand-1)]
Lam=c_len*(cc[,1]+cc[,p_rand]+2*(apply(ccc,1,sum)))
m=rpois(n,Lam)
N=matrix(c(0),sum(m),4)
k=0
for (i in 1:n){
if (m[i]>0){
j=1
b=exp(abs(x[i])*0.5)
while (j<=m[i]){
a=runif(1)*c[i]
u=runif(1)
if (u<=exp(0.5*sin(2*a)*x[i])/b){
N[k+j,1]=i
N[k+j,2]=a
N[k+j,3]=x[i]
N[k+j,4]=z[i]
j=j+1
}
}
}
N[(k+1):(k+j-1),2]=sort(N[(k+1):(k+j-1),2])
k=k+m[i]
}
N=N[N[,2]<=c_pre,]
p=nrow(N)

```

۲. تعریف تابع هسته اپانچنیکوف:

```

kernel=function(x){
k=0.75*(1-x^2)*(abs(x)<=1)
return(k)
}

```

۳. پیدا کردن ریشه برای ضریب وابسته به زمان:

```

funLocalEqu=function(beta1,sub_xt,x,z,gamma,ind,wght){

```

```

d_t=length(wght)
d_x=1 #number of column of x
phi=exp(x*beta1+z*gamma)
phi1=matrix(phi,length(phi),d_t)*ind
phi2=t(x)%*%phi1
ss=apply(phi1,2,sum)+10^(-7)
phi3=matrix(ss,d_x,d_t,byrow=T)
grad=(t(sub_xt)-(phi2/phi3))%*%wght
grad2=grad^2
hess=c(0)
for(j in 1:d_x){
x2=x*x
phi4=t(x2)%*%phi1
hess[j]=((phi4/phi3)-(phi2*matrix(phi2[j,],d_x,d_t))/(phi3^2))%*%wght
}
p=list(grad2,grad,hess)
return(p)
}

```

۴. پیدا کردن ریشه برای ضریب مستقل از زمان:

```

funGlobalEqu=function(gamma,zt,x,z,beta,ind){
d_z=1
d_t=length(zt)
phi=exp(x%*%beta)*matrix(exp(z*gamma),length(z),d_t)
phi1=phi*ind+10^(-7)
phi2=t(z)%*%phi1
pp=apply(phi1,2,sum)
phi3=matrix(pp,d_z,length(pp),byrow=T)
g=t(zt)-phi2/phi3
grad=apply(g,1,sum)
pp=ncol(phi2)
z2=z*z
phi4=t(z2)%*%phi1
hes=(phi4/phi3)-(phi2*matrix(as.numeric(phi2),d_z,pp))/(phi3^2)
qq=apply(hes,1,sum)
hess=(qq)^2
p=list(grad^2,grad,hess)
return(p)
}

```

۵. برآورد ضرایب وابسته به و مستقل از زمان:

```

uu=c(1:100)
u=0.05+0.04*uu #time point
h=0.4 #bandwidth of kernel
u_max=max(u)
u_min=min(u)
d_u=length(u)
t=N[,2]
d_t=length(t)
n=length(x)
d_x=1
d_z=1
ind0=(matrix(t,d_u,d_t,byrow=T)-matrix(u,d_u,d_t))/h*3
kern_ind0=kernel(ind0)
sum_kern=apply(kern_ind0,2,sum)+10^(-6)
wght0=kernel(ind0)/matrix(sum_kern,d_u,d_t,byrow=T)
indd=(matrix(t,n,d_t,byrow=T)<= matrix(c,n,d_t))
ind1=as.numeric(indd)
ind=matrix(ind1,n,d_t)
zt=N[, (d_x+3):(d_x+d_z+2)]
##initial estimator##
beta=function(t){
beta=0.5*cos(2*t-1.75)
return(beta)
}
beta=beta(u)
gamma=gamma0=0.5
##Iterative Newton-Raphson algorithm##
EPS = 10^(-10)
EPS2 = 10^(-3)
maxit = 20
iter = 0
while (iter<=maxit){
valid=matrix(c(1),d_u+1,1)
##the solution of the function beta(t)##
for(k in 1:d_u){
uk=u[k]
ind_t22=(t>=(uk-h) & t<=(uk+h))
ind_t2=as.numeric(ind_t22)

```

```
ind_t=which(ind_t2==1)
sub_N=N[ind_t,]
sub_t=sub_N[,2]
d_sub_t=length(sub_t)
h2=h
while (d_sub_t<=6){
h2= h2+ h/3
ind_t33=(t>=(uk-h2) & t<=(uk+h2))
ind_t3=as.numeric(ind_t33)
ind_t=which(ind_t3==1)
sub_N=N[ind_t,]
if(is.vector(sub_N==T)){sub_N=as.matrix(t(sub_N))}
else{sub_N=sub_N}
sub_t=sub_N[,2]
d_sub_t=length(sub_t)
}
sub_xt=sub_N[,3:(d_x+2)]
wght=kernel((sub_t-uk)/h2)
sub_ind = ind[,ind_t]
beta1=beta[k]
grad_hess=funLocalEqu(beta1,sub_xt,x,z,gamma,sub_ind,wght)
o=f1=as.numeric(grad_hess[1])
f2=as.numeric(grad_hess[2])
f3=as.numeric(grad_hess[3])
if (f1<=EPS){valid[k]=f1}
if (is.nan(f3)){delta=-f2/sqrt(f1)}else{
delta=f2/(f3+10^(-5))
}
##choosing the step size to find the solution##
tau=1
beta2=beta1+tau*delta
grad_hess=funLocalEqu(beta2,sub_xt,x,z,gamma,sub_ind,wght)
f4=as.numeric(grad_hess[1])
while ((f4>=(o-EPS/2)) & tau>=EPS2){
tau=tau/2
beta2=beta1+tau*delta
grad_hess=funLocalEqu(beta2,sub_xt,x,z,gamma,sub_ind,wght)
f1=as.numeric(grad_hess[1])
f4=f1
```

```

}
if (tau<=EPS2){
valid[k]=EPS
}
##better iteration point to be found##
beta[k]=beta1+tau*delta
if (f4<=EPS){
valid[k]=f4
}
}
##To find better solution of the parameter gamma##
betax=t(beta)%*%wght0
grad_hess=funGlobalEqu(gamma,zt,x,z,betax,ind)
f1=as.numeric(grad_hess[1])
if(f1<=EPS){
valid[d_u+1]=f1
if (apply(valid,2,sum)<=1/2)
{print("zero gradient! the procedure completed successfully!\n")}
else{iter=iter+1}
}
if (is.nan(as.numeric(grad_hess[3])))
{ delta=-(as.numeric(grad_hess[2]))/sqrt(f1)} else {
delta=(as.numeric(grad_hess[2]))/(as.numeric(grad_hess[3])+10^(-5))}
##choosing the step to find the solutiion##
tau=1
gamma2=gamma+tau*delta
grad_hess=funGlobalEqu(gamma2,zt,x,z,betax,ind)
f2=as.numeric(grad_hess[1])
while ((f2>=f1-EPS/2) & tau>=EPS2){
tau=tau/2
gamma2=gamma+tau*delta
grad_hess=funGlobalEqu(gamma2,zt,x,z,betax,ind)
f2=as.numeric(grad_hess[1])
}
if (tau<=EPS2){
valid[du+1]=EPS
if (sum(valid)<=1/2){print("output, the procedure was successful")}
else {iter=iter+1}
}

```

```

##better iteration point to be found##
gamma = gamma + tau*delta
iter = iter + 1
if (iter==maxit+1)
{print("maximum iterations exceeded.The procedure may be unsuccessful")}
}

```

۶. پیدا کردن خطاها برای ضرایب وابسته به و مستقل از زمان:

```

kern=function(u_val,h,u,beta){
kern=sum(kernel((u_val-u)/h)*t(beta))
/(sum(kernel((u_val-u)/h))+10^(-7))
return(kern)
}
lam_zero=function(n,N,x,z,c,u,h,beta,gamma){
Ev=N[,2]
u_num=length(u)
u_len=u[2]-u[1]
u2=c(0,u)
u2=t(u2)
A=numeric(length=u_num)
A=t(A)
for (i in 1:u_num){
NN2=as.numeric(Ev>=u2[i] & Ev<=u2[i+1])
NN22=which(NN2==1)
N2=N[NN22,]
N2=matrix(t(as.matrix(N2)),length(as.matrix(N2))/4,4,byrow=T)
Ev2=N2[,2]
p2=length(Ev2)
if (p2>0){
for (j in 1:p2){
beta_hat=kern(Ev2[j],h,t(u),beta)
phi=exp(beta_hat*x+gamma*z)*(Ev2[j]<=c)
A[i]=A[i]+(1/sum(phi))
}
}
}
A[1]=A[1]/u[1]
A[2:u_num]=A[2:u_num]/u_len
return(A)
}

```

```

}
se_beta=function(n,N,x,z,c,u,h,beta,gamma){
Ev=N[,2]
u_num=length(u)
u_len=u[2]-u[1]
C=matrix(0,u_num,n)
D=numeric(length=u_num)
u2=c(0,u)
Lam_hat=lam_zero(n,N,x,z,c,u,h,beta,gamma)
for (i in 1:u_num){
NN2=as.numeric(Ev>=u2[i] & Ev<=u2[i+1])
NN22=which(NN2==1)
N2=N[NN22,]
N2=matrix(t(as.matrix(N2)),length(as.matrix(N2))/4,4,byrow=T)
Ev2=N2[,2]
p2=length(Ev2)
if (p2>0){
for (j in 1:p2){
beta_hat=kern(Ev2[j],h,t(u),beta)
phi=exp(beta_hat*x+gamma*z)*(Ev2[j]<=c)
x_hat=t(x)%*(phi/sum(phi))
z_hat=t(z)%*(phi/sum(phi))
Exx=sum((x-x_hat)*phi*(x-x_hat))+10^(-5)
Ezx=sum((z-z_hat)*phi*(x-x_hat))
Ezz=sum((z-z_hat)*phi*(z-z_hat))
D[i]=D[i]+(1/Exx)*Ezx
lamda_hat=kern(Ev2[j],h,t(u),t(Lam_hat))+10^(-5)
C[i,N2[j,1]]=C[i,N2[j,1]]+(1/(Exx*lamda_hat))*(N2[j,3]-x_hat)
for (k in 1:n){
C[i,k]=C[i,k]-(1/(Exx*lamda_hat))*(x[k]-x_hat)*phi[k]/sum(phi)
}
}
}
D[i]=D[i]*(u2[i+1]-u2[i])/p2
}
p=list(t(C),t(D))
return(p)
}
se_gamma=function(n,d_t,N,x,z,c,u,h,beta,gamma){

```

```

Ev=N[,2]
A=0
B=numeric(length=n)
B=t(B)
for (i in 1:d_t){
beta_hat=kern(Ev[i],h,t(u),beta)
phi=exp(beta_hat*x+gamma*z)*(Ev[i]<=c)
x_hat=t(x)%*(phi/sum(phi))
z_hat=t(z)%*(phi/sum(phi))
Exx=sum((x-x_hat)*phi*(x-x_hat))+10^(-5)
Ezx=sum((z-z_hat)*phi*(x-x_hat))
Ezz=sum((z-z_hat)*phi*(z-z_hat))
A=A+(Ezz-Ezx*(1/Exx)*Ezx)/sum(phi)
beta_hat=(N[i,4]-z_hat)-Ezx*(1/Exx)*(N[i,3]-x_hat)
B[N[i,1]]=B[N[i,1]]+beta_hat
for(j in 1:n){
beta_hat=(z[j]-z_hat)-Ezx*(1/Exx)*(x[j]-x_hat)
B[j]=B[j]-beta_hat*phi[j]/sum(phi)
}
}
A=1/(A+10^(-15))*B
return(A)
}
beta_se=0
gamma_se=0
## gamma_se ##
gam_res=se_gamma(n,d_t,N,x,z,c,u,h,beta,gamma)
gam_res=t(gam_res)
g_res_m=mean(gam_res)
gamma_se=sqrt(sum((gam_res-g_res_m)^2))
## beta_se ##
C_D=se_beta(n,N,x,z,c,u,h,beta,gamma)
d_x=1
C=C_D[1]
D=C_D[2]
C=C[[1]]
D=D[[1]]
for (i in 1:d_u){
if(is.nan(D[,i])==T){

```

```

D[,i]=0
}
}
for(i in 1:d_u){
for(j in 1:n){
if(is.nan(C[i,j])==T){
C[i,j]=0}
}
}
beta_se=numeric(length=d_u)
C[,1]=C[,1]-gam_res*D[1]
cm=mean(C[,1])
beta_se[1]=sqrt(sum((C[,1]-matrix(cm,n,1))^2))
for(i in 2:d_u){
s=((i-1)*d_x+1):(i*d_x)
C[,s]=C[,s]-gam_res*D[s]
C[,s]=C[,s]-C[, (s-d_x)]
cm=mean(C[,s])
beta_se[i]=sqrt(sum((C[,s]-matrix(cm,n,1))^2))
}
int_beta=function(u,beta){
u_len=length(u)
A=numeric(length=u_len)
A=t(A)
A[1]=beta[1]*u[1]
A[2:u_len]=beta[2:u_len]*(u[2]-u[1])
A=cumsum(A)
return(A)
}

```

۷. محاسبه احتمال پوشش برای ضرایب تجمعی وابسته به زمان

```

Beta=int_beta(u,beta)
#B=number of iterations
#Beta_i=Estimate of cumulative coefficients in each iterations
#      for i=1,...,B , say B=5
betas=matrix(c(Beta1,Beta2,Beta_3,Beta_4,Beta_5),d_u,5)
se=vector(length=d_u)
for (i in 1:d_u){
se[i]=var(Beta_1[i],Beta_2[i],Beta_3[i],Beta_4[i],Beta_5[i])

```

```
}  
for (j in 1:d_u){  
dt=vector(length=B)  
for (k in 1:B){  
if (abs(betas[i,k]-Beta0[i])<=1.96*se[i]){dt[k]=1}else{dt[k]=0}  
}  
cp[i]=sum(dt)/B  
}
```

۸. رسم ضریب رگرسیونی تجمعی وابسته به زمان:

```
plot(u,Beta,"type")  
lines(u,0.25*(1-cos(2*u)),col="red",type="l")
```

مراجع

- [۱] بهبودیان ج، (۱۳۸۷)، ”روش‌های ناپارامتری“، چاپ ششم، انتشارات دانشگاه پیام نور، تهران.
- [۲] بین ل و انگل‌هارد م، (۱۳۸۴)، ”مقدمه‌ای بر احتمال و آمار ریاضی“، مشکانی ع، آذرنوش ح و بزرگنیا ا، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد.
- [۳] راس ش، (۱۳۸۶)، ”مبانی احتمال“، پارسیان ا و همدانی ع، چاپ هفتم، انتشارات شیخ بهایی، اصفهان.
- [۴] میلر آر. جی، (۱۳۸۷)، ”تحلیل بقا“، بزرگ‌نیا ا و رضایی پژند ح، چاپ اول، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد.
- [۵] نادری م، (۱۳۹۱)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، ”رگرسیون نیمه‌پارامتری با متغیر پاسخ محدود شده“، دانشکده ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [6] Aalen O. O. (1978), “Nonparametric inference for a family of counting processes”, **The Annals of Statistics**, 6, 701-726.
- [7] Aalen O. O. (1989), “A linear regression model for the analysis of life times”, **Statistics in Medicine**, 8, 907-925.
- [8] Andersen P. K. and Gill R. D. (1982), “Cox’s regression model for counting processes: A large sample study”, **The Annals of Statistics**, 10, 1100-1120.
- [9] Bickel P. J. and Rosenblatt, M. (1973), “On some global measures of the deviations of density function estimates”, **The Annals of Statistics**, 1, 1071-1095.
- [10] Burns J. L., Serber E. R., Keim S. and Sears S. F. (2005), “Measuring patient acceptance of implantable cardiac device therapy: initial psychometric investigation of the Florida patient acceptance survey”, **J Cardiovasc Electrophysiol**, 16, 384-390.
- [11] Cook R. J. and Lawless J. F. (2007), “**The Statistical Analysis of Recurrent Event**”, 1st Ed., Springer, New York.

- [12] Cox D. R. (1972), "Regression models and life-tables", **Journal of the Royal Statistical Society, Series B**, 34, 187-220.
- [13] Fan J. Q. and Zhang W. Y. (1999), "Statistical estimation in varying coefficients models", **The Annals of Statistics**, 27, 1491-1518.
- [14] Fisher L. D. and Lin D. Y. (1999), "Time dependent covariates in the Cox proportional hazard regression model", **Statistics in Medicine**, 20, 145-157.
- [15] Gut A. (2005), "**Probability: A Graduate Course**", Springer, New York.
- [16] Hastie T., Tibshirani R. and Friedman J. (2009), "**Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction**", 2nd Ed., Springer, New York.
- [17] Ledoux M. and Talagrand M. (1991), "**Probability in Banach Spaces**", 1st Ed., Springer, Berlin.
- [18] Li Q. H. and Lagakos S. W. (1997), "Use of Wei-Lin-Weissfeld method for the analysis of a recurring and a terminating events", **Statistics in Medicine**, 16, 925-940.
- [19] Liang K. Y. and Zeger S. L. (1986), "Longitudinal data analysis using generalized linear models", **Biometrika**, 34, 13-22.
- [20] Lin D. Y., Wei L. J., Ying I. and Ying Z. (2000), "Semiparametric regression for the mean and rate function of recurrent events", **Journal of the Royal Statistical Society, Series B**, 62, 711-730.
- [21] Lin D. Y. and Ying Z. (1995), "Semiparametric analysis of general additive-multiplicative hazard models for counting processes", **The Annals of Statistics**, 23, 1712-1734.
- [22] Manda S. O. and Meyer R. (2005), "Bayesian inference for recurrent events data using time-dependent frailty", **Statistics in Medicine**, 24, 1263-1274.
- [23] Martinussen T. and Scheike T. H. (2002), "A flexible additive multiplicative hazard model", **Biometrika**, 89, 283-298.
- [24] Martinussen T. and Scheike T. H. (2006), "**Dynamic Regression Models for Survival Data**", 1st Ed., Springer, New York.
- [25] Mathers C. D. and Loncar D. (2006), "Projections of global mortality and burden of disease from 2002 to 2030", **PLoS Med**, 3, e442.

- [26] Nadaraya E. A. (1964), "On estimating regression", **Theory of Probability and its Applications**, 9, 141-142.
- [27] Pennell M. L. and Dunson D. B. (2006), "Bayesian semiparametric dynamic frailty models for multiple event time data", **Biometrics**, 24, 1044-1052.
- [28] Prentice R. L., Williams B. J. and Peterson A. V. (1981), "On the regression analysis of multivariate failure time data", **Biometrika**, 68, 373-379.
- [29] R software. (2013), Available at <http://cran.um.ac.ir/src/base/R-3/R-3.0.1.tar.gz>.
- [30] Sarraf-Zadegan N., Boshtam M., Malekafzali H., Bashardoost N., Sayed-Tabatabaei F. A., Rafiei M., Khalili A., Mostafavi S., Khami M. and Hassanvand R. (1999), "Secular trends in cardiovascular mortality in Iran, with special reference to Isfahan", **Acta Cardiol**, 54, 327-333.
- [31] Scheike T. H. and Martinussen T. (2004), "On estimation and tests of time-varying effects in the proportional hazards models", **Scandinavian Journal of Statistics**, 31, 51-62.
- [32] Scheike T. H. and Zhang M. (2002), "Cumulative regression function tests for longitudinal data", **The Annals of Statistics**, 26, 1328-1355.
- [33] Sears S., Matchett M. and Conti J. (2009), "Effective management of ICD patient psychological issues and patient critical events", **J Cardiovasc Electrophysiol**, 20, 1297-1304.
- [34] Stephens M. A. (1986), "**Tests Based On EDF Statistics**", 1st Ed., Marcel Dekker, New York.
- [35] Sun L., Zhou X. and Guo S. (2011), "Marginal regression models with time-varying coefficients for recurrent event data", **Statistics in Medicine**, 30, 2265-2277.
- [36] Therneau T. M. and Hamilton S. A. (1997), "rhDNase as a example of recurrent event analysis", **Statistics in Medicine**, 16, 2029-2047.
- [37] Tian L., Zucker D. and Wei L. J. (2005), "On the Cox model with time-varying regression coefficients", **Journal of the American Statistical Association**, 100, 172-183.
- [38] Van der vaart A. W. (1998), **Asymptotic Statistics**, 1st Ed., Cambridge University Press, New York.

-
- [39] Watson G. S. (1964), "Smooth regression analysis", **Sankhya**, 26, 359-372.
- [40] Wienke A. (2011), **Frailty Models in Survival Analysis**, 1st Ed., Chapman and Hall, London.
- [41] Ye G. (2004), PhD Dissertation, "Inference for semiparametric time-varying covariate effect relative risk regression models", College of Arts and Sciences, The Florida State University.

Surname: Eshaghi

Name: Ehsan

Title: Semiparametric Survival Models For Recurrent Event Data By Kernel Method

Supervisors: Dr. Davood Shahsavani and Dr. Hossein Baghis-hani

Degree: Master of Science

Subject: Statistics

Field: Survival Analysis

Shahrood University

Faculty of Mathematical Sciences

Date: Seb 2013

Number of pages: [123](#)

Keywords: Asymptotic distribution, Consistency, Kernel method, Rate of convergence, Recurrent event data, Survival semiparametric model.

Abstract

In some semiparametric survival models which are useful and flexible to analyze recurrent event data, some coefficients are dependent to time. In these models, estimators of the coefficients do not exist in closed forms. Therefore, we have to estimate them by using numerical methods. Due to complicated forms of such estimators, it is too hard to know their sampling distributions. In such cases, statisticians usually use the asymptotic theory to evaluate properties of the estimators. In this thesis, we first introduce the model and propose a method, by using the Taylor expansion and kernel methods, to fit the model. Then, we establish the consistency and asymptotic normality of estimators. After that, we evaluate the performance of model and estimating procedure by a heavy simulation study. Finally, we apply the modeling approach on a real data set on heart disease patients in one of the Mashhad hospitals.



Shahrood University

Faculty of Mathematical Sciences

Semiparametric Survival Models For Recurrent Event Data By Kernel Method

Ehsan Eshaghi

Supervisors:

Dr. Davood Shamsavani

Dr. Hossein Baghishani

Seb 2013